

PHẦN A. LÝ THUYẾT VÀ VÍ DỤ

1. NGUYÊN HÀM CỦA MỘT HÀM SỐ

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên một khoảng K (hoặc một đoạn, hoặc một nửa khoảng). Hàm số $F(x)$ được gọi là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc K .

Chú ý. Trường hợp $K = [a; b]$ thì các đẳng thức $F'(a) = f(a)$ và $F'(b) = f(b)$ được hiểu là đạo hàm bên phải tại điểm $x = a$ và đạo hàm bên trái tại điểm $x = b$ của hàm số $F(x)$, tức là

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = f(a) \text{ và } \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{F(x) - F(b)}{x - b} = f(b).$$

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2x$. Trong các hàm số cho dưới đây, hàm số nào là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$?

a) $F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2$;

b) $G(x) = \frac{x^3}{3} + x^2$.

Giải

Ta có: $F'(x) = x^2 - 2x, G'(x) = x^2 + 2x$.

Vì $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $G(x)$ không là nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ vì với $x = 1$, ta có

$$G'(1) = 3 \neq -1 = f(1).$$

Giả sử hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K . Khi đó:

a) Với mỗi hằng số C , hàm số $F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K ;

b) Nếu hàm số $G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì tồn tại một hằng số C sao cho $G(x) = F(x) + C$ với mọi $x \in K$.

Như vậy, nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x) + C$ (C là hằng số). Ta gọi $F(x) + C (C \in \mathbb{R})$ là họ các nguyên hàm của $f(x)$ trên K , kí hiệu bởi $\int f(x) dx$.

Chú ý

a) Để tìm họ các nguyên hàm (gọi tắt là tìm nguyên hàm) của hàm số $f(x)$ trên K , ta chỉ cần tìm một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ trên K và khi đó

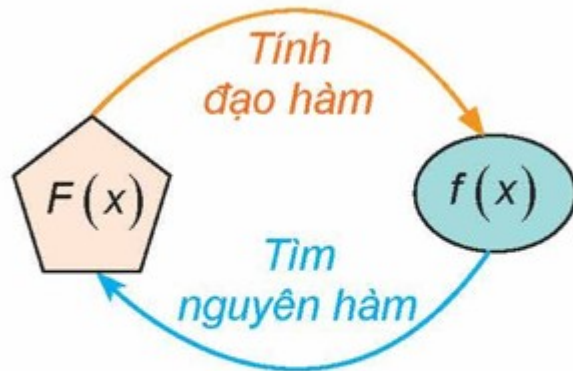
$$\int f(x) dx = F(x) + C, C \text{ là hằng số}$$

b) Người ta chứng minh được rằng, nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng K thì $f(x)$ có nguyên hàm trên khoảng đó.

c) Biểu thức $f(x)dx$ gọi là vi phân của nguyên hàm $F(x)$, kí hiệu là $dF(x)$.

Vậy $dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$.

d) Khi tìm nguyên hàm của một hàm số mà không chỉ rõ tập K ,



Hình 4.2. Mối quan hệ giữa đạo hàm và nguyên hàm

Ví dụ 2: Tìm một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2$ trên $\mathbb{R}$. Từ đó hãy tìm $\int x^2 dx$.
Giải

Vì $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{3x^2}{3} = x^2$ nên $F(x) = \frac{x^3}{3}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

Do đó, $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$.

2. TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA NGUYÊN HÀM

Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên K , k là một hằng số khác 0. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K .

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx (k \neq 0)$$

Ví dụ 3: Sử dụng kết quả của Ví dụ 2, hãy tìm:

a) $\int 3x^2 dx$

b) $\int -\frac{3}{2}x^2 dx$

Giải

Ta có:

a) $\int 3x^2 dx = 3 \int x^2 dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + C = x^3 + C$

b) $\int -\frac{3}{2}x^2 dx = -\frac{3}{2} \int x^2 dx = -\frac{3}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + C = -\frac{1}{2}x^3 + C$

Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên K . Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$, $G(x)$ là một nguyên hàm của $g(x)$ trên K .

$$\begin{aligned} \bullet \int [f(x) + g(x)] dx &= \int f(x) dx + \int g(x) dx \\ \bullet \int [f(x) - g(x)] dx &= \int f(x) dx - \int g(x) dx \end{aligned}$$

Ví dụ 4: Sử dụng kết quả của Luyện tập 3 và tính chất cơ bản của nguyên hàm, hãy tìm:

a) $\int (x^2 + x) dx$

b) $\int (4x^3 - 3x^2) dx$

Giải

Ta có:

a) $\int (x^2 + x) dx = \int x^2 dx + \int x dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$

b) $\int (4x^3 - 3x^2) dx = 4 \int x^3 dx - 3 \int x^2 dx = x^4 - x^3 + C$

Ví dụ 5: Một máy bay di chuyển ra đến đường băng và bắt đầu chạy đà để cất cánh. Giả sử vận tốc của máy bay khi chạy đà được cho bởi $v(t) = 5 + 3t$ (m/s), với t là thời gian (tính bằng giây) kể từ khi máy bay bắt đầu chạy đà. Sau 30 giây thì máy bay cất cánh rời đường băng. Quãng đường máy bay đã di chuyển từ khi bắt đầu chạy đà đến khi rời đường băng là bao nhiêu mét?



Giải

Gọi $S(t)$ ($0 \leq t \leq 30$) là quãng đường máy bay di chuyển được sau t giây kể từ lúc bắt đầu chạy đà.

Ta có $v(t) = S'(t)$. Do đó, $S(t)$ là một nguyên hàm của hàm số vận tốc $v(t)$. Sử dụng tính chất của nguyên hàm ta được

$$S(t) = \int v(t) dt = \int (5 + 3t) dt = 5 \int dt + 3 \int t dt = 5t + \frac{3}{2} t^2 + C$$

Theo giả thiết, $S(0) = 0$ nên $C = 0$ và ta được $S(t) = \frac{3}{2} t^2 + 5t$ (m)

Máy bay rời đường băng khi $t = 30$ (giây) nên $S = S(30) = \frac{3}{2} \cdot 30^2 + 5 \cdot 30 = 1500$ (m)

Vậy quãng đường máy bay đã di chuyển từ khi bắt đầu chạy đà đến khi nó rời đường băng là $S = 1500m$.

3. NGUYÊN HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

a) Nguyên hàm của hàm số lũy thừa

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1).$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

Ví dụ 6: Tìm:

a) $\int \sqrt{x} dx (x > 0)$

b) $\int \frac{1}{x^3} dx$;

c) $\int \left(2x^2 + \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx$

Giải

a)
$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + C$$

b)
$$\int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = -\frac{1}{2} x^{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$$

c)
$$\int \left(2x^2 + \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx = \int 2x^2 dx + \int \frac{3}{\sqrt{x}} dx = 2 \int x^2 dx + 3 \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{3} x^3 + 6\sqrt{x} + C$$

b) Nguyên hàm của hàm số lượng giác

$$\bullet \int \cos x dx = \sin x + C; \quad \bullet \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\bullet \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C; \quad \bullet \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

Ví dụ 7: Tìm:

a) $\int (\cos x + \sin x) dx$;

b) $\int \left(2\cos x - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx$

Giải

a)
$$\int (\cos x + \sin x) dx = \int \cos x dx + \int \sin x dx = \sin x - \cos x + C$$

b)
$$\int \left(2\cos x - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = 2 \int \cos x dx - \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = 2 \sin x - \tan x + C$$

c) Nguyên hàm của hàm số mũ

- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (0 < a \neq 1)$

Ví dụ 8: Tìm:

a) $\int 2^x dx$;

b) $\int \frac{1}{3^x} dx$;

c) $\int (2e^x - 5^x) dx$

Giải

a) $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$

b) $\int \frac{1}{3^x} dx = \int \left(\frac{1}{3}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{\ln \frac{1}{3}} + C = -\frac{1}{3^x \ln 3} + C$

c) $\int (2e^x - 5^x) dx = 2 \int e^x dx - \int 5^x dx = 2e^x - \frac{5^x}{\ln 5} + C$

Ta tổng kết lại bảng nguyên hàm của một số hàm số thường gặp như sau.

$\int 0 dx = C$	$\int 1 dx = x + C$
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (0 < a \neq 1)$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$

Dựa vào bảng nguyên hàm của các hàm số thường gặp và tính chất cơ bản của nguyên hàm, ta có thể tìm được nguyên hàm của nhiều hàm số khác.