

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm có 01 trang)

Môn thi : TOÁN

Thời gian : 180 phút (Không kể thời gian giao đề)

Ngày thi : 10/10/2018

Câu 1. (3,0 điểm) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{5x^2 + xy + 3y^2} + \sqrt{3x^2 + xy + 5y^2} = 3x + 3y \\ (x + y - 11)(\sqrt{2x + y - 8} - \sqrt{x + 1}) = 5 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu 2. (2,0 điểm) Cho dãy số (a_n) xác định bởi: $a_1 = 1$; $a_2 = \frac{1}{2}$; $a_{n+1} = \frac{na_n^2}{1 + (n+1)a_n}$, $\forall n \geq 2$.

Với mỗi số nguyên dương n , đặt $b_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_{k+1}}{a_k}$. Chứng minh dãy số (b_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Câu 3. (5,0 điểm) Cho hai đường tròn (C_1) và (C_2) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B. Gọi CD là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (C thuộc (C_1) , D thuộc (C_2)) và điểm B gần đường thẳng CD hơn điểm A. Đường thẳng CB cắt AD tại E và đường thẳng DB cắt CA tại F. Đường thẳng EF cắt AB tại N. Gọi K là hình chiếu vuông góc của N lên CD.

a) Chứng minh $\widehat{CAB} = \widehat{DAK}$.

b) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD và H là trực tâm tam giác KEF. Chứng minh các điểm O, B, H thẳng hàng

Câu 4. (2,0 điểm) Tìm tất cả các số nguyên dương k để phương trình $(x + y)^2 = k(1 + 4xy)$ có nghiệm nguyên dương x, y .

Câu 5. (3,0 điểm) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f((x - y)^2) = x^2 - 2yf(x) + (f(y))^2, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 6. (2,0 điểm) Một con ếch bắt đầu nhảy trên mặt phẳng tọa độ từ điểm $O(0;0)$, mỗi bước nhảy có độ dài một đơn vị đến các điểm có tọa độ là số hữu tỉ (hoành độ và tung độ là các số hữu tỉ).

a) Chứng tỏ rằng con ếch có thể nhảy đến điểm $\left(\frac{1}{5}; \frac{3}{13}\right)$.

b) Con ếch có thể nhảy đến điểm $\left(0; \frac{1}{2018}\right)$ được không? Tại sao?

Câu 7. (3,0 điểm) Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x^3 + y^3 + z^3 = 3$. Tìm giá trị

nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{xyz + (x + y + z)^2}{5(xy + yz + zx) + 1}$.

--- HẾT ---

Lưu ý: Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay.