BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM**

**TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI Độc lập – Tự do - Hạnh phúc**

 **ĐỀ CHÍNH THỨC**

 ( Đề thi gồm có 01 trang)

**ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10**

**TRƯỜNG THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM NĂM 2023**

**Môn thi: TOÁN**

*( Dùng cho mọi thí sinh vào Trường THPT chuyên Đại học Sư phạm)*

*Thời gian làm bài: 90 phút ( không kể thời gian phát đề)*

Bài 1.

a) Rút gọn biểu thức:

$$A=\frac{x^{2}+8\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+4}+\frac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\frac{16-4x}{\sqrt{x}+2} với x>0.$$

b)Một khay nước có nhiệt độ 124°F khi bắt đầu cho vào tủ đá. Ở trong tủ đá, cứ sau mỗi giờ, nhiệt độ của khay nước lại giảm đi 20%. Hỏi sau bao nhiêu giờ, nhiệt độ của khay nước chỉ còn là 64°F?

Bài 2.

a) Cho phương trình $x^{2}-\left(2m-1\right)x-\left(m^{2}+1\right)=0 (1)$ ( m là tham số ). Chứng minh rằng với mọi giá trị của m, phương trình (1) luôn có hai nghiệm $x\_{1},x\_{2}.$ Tìm hệ thức liên hệ giữa $x\_{1},x\_{2}$ sao cho hệ thức đó không phụ thuộc vào m.

b) Cho parabol (P): y=a$x^{2}(a\ne 0)$ đi qua điểm A(-1;$\frac{1}{2}$). Tìm tọa độ của điểm M trên parabol (P) sao cho khoảng cách từ điểm M đến trục tung gấp hai lần khoảng cách từ điểm M đến trục hoành.

Bài 3.Cho hình bình hành ABCD có $\hat{ABC}=120°$ và BC=2AB. Dựng đường tròn (O) có đường kính AC. Gọi E,F lần lượt là các giao điểm thứ hai của AB,AD với đường tròn (O). Đường thẳng EF lần lượt cắt các đường thẳng BC,BD tại H,S.

Chứng minh

a) Tam giác ABD là tam giác vuông

b) Tứ giác OBEH là tứ giác nội tiếp

c) SC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Bài 4. Có hay không các số nguyên a,b sao cho

$$\left(a+b\sqrt{2023}\right)^{2}=2024+2023\sqrt{2023} ?$$

Bài 5. Trên bảng ta viết đa thức P(x)= a$x^{2}+bx+c \left(a\ne 0\right).$

Ta viết lên bảng đa thức mới $P\_{1}\left(x\right)=\frac{P\left(x+1\right)+P(x-1)}{2}$ rồi xóa đi đa thức P(x)

Ta viết lên bảng đa thức mới $P\_{2}\left(x\right)=\frac{P\_{1}\left(x+1\right)+P\_{1}(x-1)}{2}$ rồi xóa đi đa thức $P\_{1}$(x)

Ta cứ tiếp tục làm như thế nhiều lần.

Chứng minh rằng nếu cứ làm như vậy nhiều lần thì đến một lúc nào đó ta nhận được một đa thức không có nghiệm.

---------------------Hết--------------------

Ghi chú: Học sinh không được sử dụng tài liệu, cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: …………………………………………………..Số báo danh:…………………………

**ĐÁP ÁN**

**Bài 1**

a)$ Với x>0 ta có$

$A=\frac{x^{2}+8\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+4}+\frac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\frac{16-4x}{\sqrt{x}+2} $

$=\frac{\sqrt{x}\left[\left(\sqrt{x}\right)^{3}+8\right]}{x-2\sqrt{x}+4}+\frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}+\frac{4(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}{\sqrt{x}+2}$

=$\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)+2\sqrt{x}+1+4\left(2-\sqrt{x}\right)$

= x + 9.

b) Nhiệt độ của khay nước mỗi giờ còn lại 80% = $\frac{4}{5}$ , Gọi t (giờ) là thời gian để nhiệt độ giảm về 64°F. Khi đó ta có phương trình

$\left(\frac{4}{5}\right)^{t}.125=64$⬄$\left(\frac{4}{5}\right)^{t}=\frac{64}{125}=\left(\frac{4}{5}\right)^{3}$⬄ t = 3.

Vậy sau 3 giờ nhiệt độ của khay đá giảm về 64°F.

**Bài 2**

a) Ta có a = 1; b = -(2m-1); c = - ($m^{2}+1).$

Do c< 0 ∀m nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm $x\_{1},x\_{2}.$

Áp dụng định lý Vi ét ta có:

$$\left\{\begin{array}{c}x\_{1}+x\_{2}=2m-1\\x\_{1}x\_{2}=-\left(m^{2}+1\right)\end{array}\right.$$

=>$\left(x\_{1}+x\_{2}\right)^{2}=4m^{2}-4m+1=4\left(-1-x\_{1}x\_{2}\right)-2\left(x\_{1}+x\_{2}\right)-1=-4x\_{1}x\_{2}-2\left(x\_{1}+x\_{2}\right)-5$

b) Do parabol (P): y=a$x^{2}(a\ne 0)$ đi qua điểm A(-1;$\frac{1}{2}$) cho nên a.($ -1)^{2}=\frac{1}{2}=>a=\frac{1}{2}$

khi đó (P): y=$\frac{1}{2}x^{2}$. Ta có M($x\_{M};\frac{1}{2}x^{2}\_{M}).$

Khoảng cách từ điểm M đến trục tung là $x\_{M},$ khoảng cách từ điểm M đến trục hoành là $\frac{1}{2}x^{2}\_{M}.$

Theo đề bài ta có: $x\_{M}=2.\frac{1}{2}x^{2}\_{M}$⬄$x\_{M}=x^{2}\_{M}$

⬄$x\_{M}\left(x\_{M}-1\right)=0$ ⬄ $x\_{M}=0 hoặc x\_{M}=-1$

Vậy M(0;0) hoặc M(1;$ \frac{1}{2})$

**Bài 3**



a) Gọi J là trung điểm của AD. Ta có $\hat{BAD}=60° và JA=\frac{1}{2}AD=AB $nên tam giác ABJ đều.

Suy ra JB=JA=JD. Từ đó $\hat{ABD}=90°$

b) Do OB AE nên B là trung điểm của AE.

Mà BH//AF nên BH là đường trung bình của tam EAF. Suy ra HE=HF.

Ta thu được đó $\hat{OHE}=90°$=$\hat{OBE}$. Suy ra OBEH nội tiếp đường tròn đường kính OE.

c)

Ta có $\hat{CEF}=\hat{CAD},\hat{CFE}=\hat{CAE}=\hat{ACD}$

Suy ra ∆ECF~∆ADC

Mà O là trung điểm của AC, H là trung điểm của EF nên $\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{2CD}=\frac{EF}{2CF}=\frac{HF}{CF}.$

Suy ra ∆DOC~∆CHF.

Ta thu được $\hat{CHF}=\hat{COD} $suy ra tứ giác OHCS nội tiếp.

Từ đó $\hat{OCS}=\hat{OHS}=90°$, hay SC là tiếp tuyến của (O).

**Bài 4**

Ta nhắc lại một số bổ đề sau về số hữu tỉ - số vô tỉ trong chương trình toán 7:

Bổ đề 1: Với mọi số nguyên n≥0,$\sqrt{n}$ là số hữu tỉ khi và chỉ khi n là số chính phương.

Giả sử tồn tại các số nguyên a,b thỏa mãn điều kiện đề bài, tức là

$$\left(a+b\sqrt{2023}\right)^{2}=2024+2023\sqrt{2023}$$

Khi đó ta có

$$a^{2}+2023b^{2}+2ab\sqrt{2023}=2024+2023\sqrt{2023}$$

Suy ra

$$\sqrt{2023}\left(2ab-2023\right)=2024-a^{2}-2023b^{2}$$

Dễ thấy với a,b ∈Z, 2ab-2023 là số lẻ, do đó 2ab-2023≠0. Do đó ta có

$$\sqrt{2023}=\frac{2024-a^{2}-2023b^{2}}{2ab-2023}\in Q$$

Điều này mâu thuẫn với Bổ đề 1, do 2023 không là số chính phương. Vậy giả sử là sai, tức là không tồn tại các số nguyên a,b thỏa mãn điều kiện đề bài.

**Bài 5**

Từ giả thiết ta có:

 $P\_{1}\left(x\right)=\frac{P\left(x+1\right)+P(x-1)}{2}$

=$\frac{a(x+1)^{2}+b\left(x+1\right)+c+a(x-1)^{2}+b\left(x-1\right)+c}{2}$

=$ax^{2}+bx+c+a.$

Ta chứng minh$ P\_{n}$(x)= a$x^{2}+bx+c+na, ∀nϵ$N\*.(\*)

Thật vậy, n = 1 thì mệnh đề đúng (CMT)

Giả sử mệnh đề đúng đến n = k =>$P\_{k}$(x)= a$x^{2}+bx+c$+ka

=>$P\_{k+1}$(x)=$\frac{a(x+1)^{2}+b\left(x+1\right)+c+ka+a(x-1)^{2}+b\left(x-1\right)+c+ka}{2}$

= $ax^{2}+bx+c+\left(k+1\right)a$

=>(\*) đúng

Xét phương trình $P\_{n}\left(x\right)=0$

⬄$ax^{2}+bx+c+na=0$

Có ∆=$b^{2}-4a\left(c+na\right)$

= $b^{2}-4ac-4na^{2}$

Vì a,b,c cố định, a ≠0 chọn n > $\frac{b^{2}-4ac}{4a^{2}}$ thì ∆<0=> phương trình vô nghiệm.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

https://www.vnteach.com