Chuyên đề 26. ĐỒNG DƯ THỨC

A. Kiến thức cần nhớ

I. Định nghĩa: Cho số nguyên $m>0$. Nếu hai số nguyên a và b khi chia cho m có cùng số dư thì ta nói a đồng dư với b theo môđun m và ký hiệu: $a\equiv b$ (mod m).

Chú ý: a) $a\equiv b$ (mod m) là một đồng dư thức với a là vế trái, b là vế phải.

b) $a\equiv b$ (mod m) $\Leftrightarrow a-b\,\vdots\, m\Leftrightarrow \exists t\in z$ sao cho $a=b+mt$

c) Nếu a và b không đồng dư với nhau theo môđun m ta ký hiệu: $a\not\equiv b$ (mod m).

II.Tính chất:

1. Tính chất phản xạ: $a\equiv a$ (mod m)

2. Tính chất đối xứng: $a\equiv b$ (mod m) $\Rightarrow$ $b\equiv a$ (mod m)

3. Tính chất bắc cầu: $a\equiv b$ (mod m); $b\equiv c$ (mod m)$\Rightarrow$ $a\equiv c$ (mod m).

4. Cộng hay trừ từng vế của đồng dư thức có cùng môđun:

$a\equiv b$ (mod m); $c\equiv d$ (mod m)$\Rightarrow$ $a\pm c\equiv b\pm d$ (mod m)

Tổng quát: $a_i\equiv b_i$ (mod m), $i=1;2;...;k\Rightarrow$ $a_1\pm a_2\pm...\pm a_k\equiv b_1\pm b_2\pm...\pm b_k$ (mod m)

5. a) Nhân hai vế của đồng dư thức với một số nguyên:

$a\equiv b$ (mod m)$\Rightarrow$ $ka\equiv kb$ (mod m) với $k\in Z$.

b) Nhân hai vế và môđun của đồng dư thức với một số nguyên dương:

$a\equiv b$ (mod m) $\Rightarrow$ $ka\equiv kb$ (mod m) với $k\in N^*$

6. Nhân từng vế của nhiều đồng dư thức có cùng môđun:

$a\equiv b$ (mod m); $c\equiv d$ (mod m) $\Rightarrow$ $ac\equiv bd$ (mod m)

Tổng quát $a_i\equiv b_i$ (mod m), $i=1;2;...;k\Rightarrow$ $a_1a_2...a_k\equiv b_1b_2...b_k$ (mod m)

7. Nâng hai vế của một đồng dư thức lên cùng một lũy thừa:

$a\equiv b$ (mod m) $\Rightarrow$ $a^k\equiv b^k$ (mod m) $(k\in N^*)$

8. Nếu hai số đồng dư với nhau theo nhiều môđun thì chúng đồng dư với nhau theo môđun là BCNN của các môđun ấy:

$a\equiv b$ (mod m_i) $i=1;2;...;k\Rightarrow$ $a\equiv b$ (mod $[m_1; m_2;…;m_k]$)

Đặc biệt nếu $(m_i; m_j) = 1$ (i; j = 1; 2; …; k) thì $a\equiv b$ (mod m_i) $\Rightarrow$ $a\equiv b$ (mod $m_1; m_2;…;m_k$)

9. Nếu $a\equiv b$ (mod m) thì tập hợp các ước chung của a và m bằng tập hợp các ước chung của b và m.

Đặc biệt: $a\equiv b$ (mod m) $\Rightarrow$ $(a,m)=(b,m)$

10. Chia hai vế và môđun của một đồng dư cho một ước dương chung của chúng:

$a\equiv b$ (mod m), $k\in UC(a,b,m),k>0\Rightarrow$ $\dfrac{a}{k}\equiv\dfrac{b}{k}\left(\bmod\dfrac{m}{k}\right)$

Đặc biệt: $ac\equiv bc$ (mod m)$\Rightarrow$ $a\equiv b\left(\bmod\dfrac{m}{(c,m)}\right)$

III. Một số định lý (ta thừa nhận không chứng minh)

1. Định lý Fermat bé. Cho a là số nguyên dương và p là số nguyên tố. Khi đó ta luôn có $a^p \equiv a \pmod p$. Đặc biệt nếu $(a,p)=1$ thì $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$

2. Định lý Wilson. Với mọi số nguyên tố p thì $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$

3. Định lý Euler. Cho m là số nguyên dương và a là số nguyên tố cùng nhau với m; $\varphi(m)$ là số các số nguyên dương nhỏ hơn m và nguyên tố cùng nhau với m.

Khi đó $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$

Chú ý: Nếu số nguyên dương m có dạng phân tích thành thừa số nguyên tố:

$m = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.....p_k^{\alpha_k}$ thì $\varphi(m) = m\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)...\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$

B. Một số ví dụ

1. Dạng toán tìm số dư trong phép chia có dư

* *Tìm cách giải:* Với hai số nguyên a và m, m > 0 luôn có duy nhất cặp số nguyên q, r sao cho $a = mq + r, 0 \le r < m$ Để tìm số dư r trong phép chia a cho m ta cần tìm r sao cho $\begin{cases} a \equiv r \pmod m \\ 0 \le r < m \end{cases}$

Ví dụ 1: a) Tìm số dư trong phép chia $1532^5 - 1$ cho 9.

b) Tìm số dư trong phép chia $2016^{2018} + 2$ cho 5.

Giải

a) Ta có $1532 = 9.170 + 2 \equiv 2 \pmod 9$ do đó $1532^5 \equiv 2^5 \pmod 9$

$\Rightarrow 1532^5 - 1 \equiv 2^5 - 1 \pmod 9$. Vì $2^5 - 1 = 31 \equiv 4 \pmod 9$

Do đó $1532^5 - 1 \equiv 4 \pmod 9$. Vậy số dư cần tìm là 4.

b) Ta có $2016 \equiv 1 \pmod 5$ do đó $2016^{2018} \equiv 1^{2018} \pmod 5$

$\Rightarrow 2016^{2018} + 2 \equiv 1^{2018} + 2 \pmod 5$. Vì $1 + 2 = 3 \equiv 3 \pmod 5$.

Do đó $2016^{2018} + 2 \equiv 3 \pmod 5$. Vậy số dư cần tìm là 3.

Ví dụ 2: Chứng minh $\left(2013^{2016} + 2014^{2016} - 2015^{2016}\right)^{10} \vdots 106$

Giải

Ta phải tìm số tự nhiên r sao cho

$0 = r \equiv (2013^{2016} + 2014^{2016} - 2015^{2016})^{10} \pmod{106}$

Ta có $2013 = 106.19 - 1 \Rightarrow 2013 \equiv -1 \pmod{106} \Rightarrow 2013^{2016} \equiv 1 \pmod{106}$

$2014 = 106.19 \Rightarrow 2014 \equiv 0 \pmod{106} \Rightarrow 2014^{2016} \equiv 0 \pmod{106}$

$2015 = 106.19 + 1 \Rightarrow 2015 \equiv 1 \pmod{106} \Rightarrow 2015^{2016} \equiv 1 \pmod{106}$

Do đó $\left(2013^{2016} + 2014^{2016} - 2015^{2016}\right)^{10} \equiv 0 \pmod{106}$

Ví dụ 3: a) Hãy tìm chữ số tận cùng của $9^{9^{10}}$

b) Hãy tìm hai chữ số tận cùng của 3^{1000}.

Giải

a) Tìm chữ số tận cùng của một số là tìm dư trong phép chia số đó cho 10.

Vì $9^{2n+1} = 9.81^n \equiv 9 \pmod{10}$.

Do 9^{10} là số nên số $9^{9^{10}}$ có chữ số tận cùng là 9.

b) Tìm hai chữ số tận cùng của một số là tìm dư trong phép chia số đó cho 100.

Ta có $3^4 \equiv 81 \equiv -19 \pmod{100} \Rightarrow 3^8 \equiv (-19)^2 \pmod{100}$

Mà $(-19)^2 = 361 \equiv 61 \pmod{100}$ Vậy $3^8 \equiv 61 \pmod{100}$

$3^{10} \equiv 61.9 = 549 \equiv 49 \pmod{100}$

$3^{20} \equiv 49^2 \equiv 01 \pmod{100}$ (do $49^2 = 2401 = 24.100 + 1$)

Do đó $3^{1000} \equiv 01 \pmod{100}$ nghĩa là hai chữ số sau cùng của 3^{1000} là 01.

2. Dạng toán chứng minh sự chia hết:

Khi số dư trong phép chia a cho m bằng 0 thì $a \vdots m$. Như vậy để chứng tỏ $a \vdots m$ ta chứng minh $a \equiv 0 \pmod{m}$.

Ví dụ 4: Chứng minh $4^{2018} - 7 \vdots 9$

Giải

Ta có $4^3 = 64 \equiv 1 \pmod 9 \Rightarrow 4^{2016} = (4^3)^{672} \equiv 1 \pmod 9$

Mặt khác $4^2 = 16 \equiv 7 \pmod 9 \Rightarrow 4^{2018} = 4^{2016}.4^2 \equiv 1.7 \pmod 9$

Vậy $4^{2018} - 7 \equiv 0 \pmod 9$ hay $4^{2018} - 7 \vdots 9$

Ví dụ 5: Chứng minh rằng $12^{2n+1} + 11^{n+2} \vdots 133 (n \in N)$

Giải

Cách 1: Ta có $12^2 = 144 \equiv 11 \pmod{133}$; $11^2 = 121 \equiv -12 \pmod{133}$

Do đó $12^{2n+1} = 12.(12^2)^n \equiv 12.11^n \pmod{133}$

$11^{n+2} = 11^2.11^n \equiv -12.11^n \pmod{133}$

Do đó $12^{2n+1} + 11^{n+2} \equiv 12.11^n - 12.11^n \equiv 0 \pmod{133}$

Vậy với $n \in N$ thì $12^{2n+1} + 11^{n+2} \vdots 133$

Cách 2: Ta có $12^2 = 144 \equiv 11 \pmod{133} \Rightarrow 12^{2n} \equiv 11^n \pmod{133}$ (1)

Mà $12 \equiv -11^2 \pmod{133}$ (2) Nhân vế với vế của (1) và (2) ta có:

$12^{2n}.12 \equiv 11^n.(-11^2) \pmod{133} \Rightarrow 12^{2n+1} \equiv -11^{n+2} \pmod{133}$

$12^{2n+1} + 11^{n+2} \equiv 0 \pmod{133}$ hay $12^{2n+1} + 11^{n+2} \vdots 133$

3. Dạng toán xác định dấu hiệu chia hết

Ví dụ 6: Cho số $a = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}$ $(1 \le a_n \le 9;\ 0 \le a_i \le 9;\ i = 0;1;...;n-1)$

Hãy xác định dấu hiệu chia hết:

a) Cho 3. b) Cho 4.

Giải

Ta có $a=\overline{a_n a_{n-1}...a_1 a_0}=a_n.10^n+a_{n-1}10^{n-1}+...+a_1.10+a_0$

a) Ta có $10\equiv 1(\bmod 3)$ do đó $a_i10^i\equiv a_i(\bmod 3), i=1;2;3;...;n$

Do đó $a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+...+a_110+a_o\equiv(a_n+a_{n-1}+...+a_1+a_o)\ (\bmod 3)$

Vậy $a\vdots 3\Leftrightarrow a_n+a_{n-1}+..+a_1+a_o\equiv 0(\bmod 3)$

$\Leftrightarrow a_n+a_{n-1}+..+a_1+a_o\vdots 3$

b) Ta có $10^2=100\equiv 0(\bmod 4)\Rightarrow a_i10^i\equiv 0(\bmod 4), i=2;3;...;n$

$\Rightarrow a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+...+a_110+a_o\equiv(a_110+a_o)(\bmod 4)$

Vậy $a\vdots 4\Leftrightarrow a_110+a_0\equiv 0(\bmod 4)\Leftrightarrow \overline{a_1a_o}\vdots 4$

4. Dạng toán sử dụng các định lý:

Ví dụ 7: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì:

$2^{3^{4n+1}}+3^{2^{4n+1}}+2007$ chia hết cho 22

Giải

Theo định lý Fermat bé ta có $2^{10}\equiv 1(\bmod 11);3^{10}\equiv 1(\bmod 11)$

Ta có $3^4=81\equiv 1(\bmod 10)\Rightarrow 3^{4n+1}=3.(3^4)^n\equiv 3(\bmod 10)$

$\Rightarrow 3^{4n+1}=10k+3,(k\in N)$

Mặt khác $2^4=16\equiv 1(\bmod 5)\Rightarrow 2^{4n}\equiv 1(\bmod 5)$

$\Rightarrow 2^{4n+1}=2(2^4)^n\equiv 2(\bmod 10)\Rightarrow 2^{4n+1}=10t+2,(t\in N)$

Do đó $2^{3^{4n+1}}+3^{2^{4n+1}}+2007=2^{10k+3}+3^{10t+2}+2002+5$

$=2^3(2^{10})^k+3^2(3^{10})^t+22.91+5\equiv 2^3+3^2+0+5\equiv 0(\bmod 11)$

Mà $2^{3^{4n+1}}+3^{2^{4n+1}}+2007\vdots 2$ (vì $2^{3^{4n+1}}$ là số chẵn, $3^{2^{4n+1}}$ là số lẻ, 2007 là số lẻ)

Do $(2;11)=1$ nên $2^{3^{4n+1}}+3^{2^{4n+1}}+2007\vdots 22$

Ví dụ 8: Cho $a_1;a_2;...;a_{2016}$ là 2016 số nguyên dương. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để $a_1^5+a_2^5+a_3^5+...+a_{2016}^5\vdots 30$ là $a_1+a_2+a_3+...+a_{2016}\vdots 30$.

Giải

Theo định lý Fermat bé, do 2; 3; 5 là các số nguyên tố và a là số nguyên dương bất kỳ ta có:

$a^2\equiv a(\bmod 2)\Rightarrow a^4=(a^2)^2\equiv a^2\equiv a(\bmod 2)\Rightarrow a^5\equiv a(\bmod 2)$

$a^3\equiv a(\bmod 3)\Rightarrow a^5=a^3.a^2\equiv a.a^2\equiv a^3\equiv a(\bmod 3)$

$a^5\equiv a(\bmod 5)$

Theo tính chất nếu hai số đồng dư với nhau theo nhiều môđun thì chúng đồng dư với nhau theo môđun là BCNN của các môđun ấy.

Do đó $a^5 \equiv a(\text{mod } 2.3.5)$ hay $a^5 \equiv a(\text{mod } 30) \Rightarrow a^5 - a \equiv 0(\text{mod } 30)$

Nghĩa là $\left(a_1^5 + a_2^5 + a_3^5 + \ldots + a_{2016}^5\right) - \left(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2016}\right) \equiv 0(\text{mod } 30)$

Vậy $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2016} \vdots 30 \Leftrightarrow a_1^5 + a_2^5 + a_3^5 + \ldots + a_{2016}^5 \vdots 30$

Ví dụ 9: Chứng minh rằng trong các số tự nhiên thế nào cũng có số k sao cho $1983^k - 1$ chia hết cho 10^5

(Đề thi học sinh giỏi toán cấp 2 toàn quốc năm 1983).

Giải

Vì 1983 không chia hết cho 2 và không chia hết cho 5 mà $10^5 = 2^5.5^5$ nên $(1983; 10^5) = 1$. Áp dụng định lý Euler ta có:

$1983^{\varphi(10^5)} \equiv 1(\text{mod } 10^5)$

Ta có $\varphi(10^5) = 10^5\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{5}\right) = 4.10^4$. Nghĩa là $1983^{4.10^4} - 1 \vdots 10^5$

Vậy $k = 4.10^4$.

5. Dạng toán khác

Ví dụ 10: Chứng minh rằng $1^{4k} + 2^{4k} + 3^{4k} + 4^{4k}$ không chia hết cho 5.

Giải

Do 5 là số nguyên tố nên theo Định lý Fermat bé ta có: với a = 1; 2; 3; 4 ta có:

$a^5 \equiv a(\text{mod } 5) \Leftrightarrow a^4 \equiv 1(\text{mod } 5) \Leftrightarrow a^{4k} \equiv 1(\text{mod } 5)$.

Do đó $1^{4k} + 2^{4k} + 3^{4k} + 4^{4k} \equiv 1 + 1 + 1 + 1 \equiv 4(\text{mod } 5)$

Chứng tỏ $1^{4k} + 2^{4k} + 3^{4k} + 4^{4k} \not\vdots 5$

Ví dụ 11: Chứng minh rằng với mỗi số nguyên tố p tồn tại vô số số có dạng $2^n - n, (n \in N)$ chia hết cho p.

(Thi vô địch Canada năm 1983).

Giải

* Nếu $p = 2$ thì $2^n - n \vdots 2, \forall n = 2k (k \in N)$

* Nếu $p \neq 2$ do $(2; p) = 1$ nên theo định lý Fermat bé ta có:

$2^{p-1} \equiv 1(\text{mod } p) \Rightarrow 2^{p-1} - 1 \equiv 0(\text{mod } p) \Rightarrow 2^{(p-1)^{2k}} - 1 \equiv 0(\text{mod } p)$

Hay là $2^{(p-1)^{2k}} - 1 \vdots p \; (k \in N; k \geq 2)$

Mặt khác $(p-1)^{2k} \equiv (-1)^{2k} \equiv 1(\text{mod } p)$

$$\Rightarrow 2^{(p-1)^{2k}} - (p-1)^{2k} = \underbrace{\left[2^{(p-1)^{2k}} - 1\right]}_{\vdots p} - \underbrace{\left[(p-1)^{2k} - 1\right]}_{\vdots p} \vdots p$$

Vậy tồn tại vô số số tự nhiên n có dạng $n = (p-1)^{2k}, (\forall k \in N; k \geq 2)$ sao cho $2^n - n \vdots p$

C. Bài tập vận dụng

Dạng toán tìm số dư trong phép chia có dư

26.1. Tìm số dư trong phép chia

a) $8!-1$ cho 11.

b) $2014^{2015}+2016^{2015}+2018$ cho 5.

c) $2^{50}+41^{65}$ cho 7.

d) $1^5+3^5+5^5+...+97^5+99^5$ cho 4.

Hướng dẫn giải – đáp số

Với những bài toán dạng này, phương pháp chung là tính toán để đi đến $a\equiv b(\bmod m)$ với b là số có trị tuyệt đối nhỏ nhất có thể được (tốt nhất là $b=\pm 1$) từ đó tính được thuận lợi $a^n\equiv b^n(\bmod m)$

a) $8!=1.2.3.4.5.6.7.8$

Ta có $3.4=12\equiv 1(\bmod 11);\ 2.6=12\equiv 1(\bmod 11);\ 7.8\equiv 1(\bmod 11)$

Vậy $8!\equiv 5(\bmod 11)\Rightarrow\ 8!-1\equiv 4(\bmod 11)$

Số dư trong phép chia $8!-1$ cho 11 là 4.

b) $2014\equiv -1(\bmod 5)\Rightarrow\ 2014^{2015}\equiv -1(\bmod 5)$

$2016\equiv 1(\bmod 5)\Rightarrow\ 2016^{2015}\equiv 1(\bmod 5);\ 2018\equiv 3(\bmod 5)$

$2014^{2015}+2016^{2015}+2018\equiv 3(\bmod 5)$

c) $2^3\equiv 1(\bmod 7)\Rightarrow\ 2^{50}=(2^3)^{16}.4\equiv 4(\bmod 7)$

$41\equiv -1(\bmod 7)\Rightarrow\ 41^{65}\equiv(-1)^{65}\equiv -1(\bmod 7)$

$2^{50}+41^{65}\equiv 4-1\equiv 3(\bmod 7)$

d) $1^5\equiv 1(\bmod 4);\ 3^5\equiv -1(\bmod 4);\ 5^5\equiv 1(\bmod 4);...;97^5\equiv 1(\bmod 4);99^5\equiv -1(\bmod 4)$. Đáp số : Dư 0.

26.2. Tìm số dư trong phép chia:

a) 1532^5-4 cho 9.

b) 2^{2000} cho 25.

c) $2014^{2015^{2016}}$ cho 13.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $1532\equiv 2(\bmod 9)\Rightarrow\ 1532^5\equiv 2^5\equiv 5(\bmod 9)$

$\Rightarrow\ 1532^5-4\equiv 1(\bmod 9)$

b) $2^5=32\equiv 7(\bmod 25)\Rightarrow\ 2^{10}=(2^5)^2\equiv 7^2\equiv -1(\bmod 25)$

$2^{2000}=(2^{10})^{200}\equiv(-1)^{200}\equiv 1(\bmod 25)$

c) $2014=155.13-1$ nên $2014\equiv -1(\bmod 13);\ 2015^{2016}=2k+1(k\in N)$

$\Rightarrow\ 2014^{2015^{2016}}\equiv(-1)^{2k+1}\equiv -1(\bmod 13)$. Đáp số : dư 12

26.3. Tìm số dư trong phép chia:

a) $A=35^2-35^3+35^4-35^8+35^{16}+35^{32}$ cho 425.

b) $B=10^{10}+10^{10^2}+10^{10^3}+...+10^{10^{100}}$ cho 7.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có $35^2 = 1225 = 425.3 - 50 \equiv -50 (\bmod 425)$

$35^3 = 35^2.35 \equiv -50.35 \equiv -1750 \equiv -50 (\bmod 425)$

$35^4 = (35^2)^2 \equiv (-50)^2 \equiv 2500 \equiv -50 (\bmod 425)$

Tương tự với $35^8; 35^{16}; 35^{32}$. Từ đó có $A \equiv -100 (\bmod 425)$

Hay số dư trong phép chia A cho 425 là 325

b) Ta có $10^5 = 7.14285 + 5 \equiv 5 (\bmod 7)$; $10^6 = 5.10 \equiv 1 (\bmod 7)$

$10^n - 4 = \underbrace{\overline{99...96}}_{n-1 \text{ số } 9} \equiv 0 (\bmod 2)$ và $\underbrace{\overline{99...96}}_{n-1 \text{ số } 9} \equiv 0 (\bmod 3) \Rightarrow 10^n - 4 \equiv 0 (\bmod 6)$

$\Rightarrow 10^n \equiv 4 (\bmod 6)$ và $10^n = 6k + 4 (k, n \in N^*)$

Do đó $10^{10^n} = 10^{6k+4} = (10^6)^k.10^4 \equiv 10^4 (\bmod 7)$

Vậy $B \equiv 10^4 + 10^4 + 10^4 + ... + 10^4 \equiv 10.10^4 \equiv 10^5 \equiv 5 (\bmod 7)$

26.4. a) Tìm chữ số tận cùng của 4^{3^2}

b) Tìm hai chữ số tận cùng của 3^{999}

c) Tìm ba chữ số tận cùng của số 2^{512}

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta tìm dư trong phép chia số đó cho10.

Vì $4^2 \equiv 6 (\bmod 10)$ nên $4^{3^2} = 4^9 = (4^2)^4.4 \equiv 6.4 \equiv 4 (\bmod 10) \Rightarrow$ chữ số tận cùng là 4

b) Ta tìm dư trong phép chia số đó cho 100. Theo ví dụ 3 chuyên đề 26 ta đã có $3^{1000} \equiv 01 (\bmod 100)$ nghĩa là hai chữ số sau cùng của 3^{1000} là 01. Số 3^{1000} là bội số của 3 nên chữ số hàng trăm của nó khi chia cho 3 phải có số dư là 2 để chia tiếp thì 201 chia hết cho 3 (nếu số dư là 0 hay 1 thì 001; 101 đều không chia hết cho 3). Vậy số $3^{999} = 3^{1000} : 3$ có hai chữ số tận cùng bằng 201 : 3 =67.

c) Ta tìm dư trong phép chia đó cho 1000. Do 1000 = 125.8 trước hết ta tìm số dư của 2^{512} cho 125. Từ hằng đẳng thức:

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ ta có nhận xét nếu $a \vdots 25$ thì $(a+b)^5 \equiv b^5 (\bmod 125)$

Vì $2^{10} = 1024 \equiv -1 (\bmod 25)$ nên $2^{10} = 25k - 1 (k \in N)$.

Từ nhận xét trên ta có $2^{50} = (2^{10})^5 = (25k-1)^5 \equiv -1 (\bmod 125)$

Vì vậy $2^{512} = (2^{50})^{10}.2^{12} \equiv (-1)^{10}.2^{12} \equiv 2^{12} (\bmod 125)$

Do $2^{12} = 2^{10}.2^2 = 1024.4 \equiv 24.4 \equiv 96 (\bmod 125)$

Vậy $2^{512} \equiv 96 (\bmod 125)$

Hay $2^{512} = 125m + 96, m \in N$

Do $2^{512} \vdots 8, 96 \vdots 8$ nên $m \vdots 8 \Rightarrow m = 8n (n \in N)$

$2^{512} = 125.8n + 96 = 1000n + 96$. Vậy ba chữ số tận cùng của số 2^{512} là 096.

Dạng toán chứng minh sự chia hết

26.5. Chứng minh:

a) $41^{2015}-6\,\vdots\,7;$ b) $2^{4n+1}-2\,\vdots\,15\ (n\in N).$

c) $3^{76}-2^{76}\,\vdots\,13.$ d) $20^{15}-1\,\vdots\,341.$

Hướng dẫn giải – đáp số

Để chứng tỏ $a\,\vdots\,m$ ta chứng minh $a\equiv 0(\bmod m)$

a) $41=42-1\equiv -1(\bmod 7)$. Do đó $41^{2015}\equiv(-1)^{2015}\equiv -1(\bmod 7)$

hay $41^{2015}\equiv 6(\bmod 7)\Rightarrow 41^{2015}-6\equiv 0(\bmod 7)$

b) Ta có $2^4=16\equiv 1(\bmod 15)\Rightarrow 2^{4n}\equiv 1(\bmod 15)\Rightarrow 2^{4n}-1\equiv 0(\bmod 15)$

Do đó $2^{4n+1}-2=2(2^{4n}-1)\equiv 0(\bmod 15)$

c) Ta có $3^3=27\equiv 1(\bmod 13)$; $3^{76}=(3^3)^{25}.3\equiv 3(\bmod 13)$

Ta có $2^4\equiv 3(\bmod 13)\Rightarrow 2^6\equiv 12\equiv -1(\bmod 13)$

$2^{76}=(2^6)^{12}.2^4\equiv 3(\bmod 13)$

Do đó $3^{76}-2^{76}\equiv 0(\bmod 13)$ hay $3^{76}-2^{76}\,\vdots\,13$

d) $341=11.31$

* Ta có $2^5=32\equiv -1(\bmod 11); 20=22-2\equiv -2(\bmod 11)$

Do đó $20^{15}\equiv(-2)^{15}\equiv -(2^5)^3\equiv 1(\bmod 11)$

* $20^{15}=(2^5)^3.(5^3)^5\equiv 1(\bmod 31)$ do $2^5\equiv 1(\bmod 31)$ và $5^3\equiv 1(\bmod 31)$

Do đó $20^{15}\equiv 1(\bmod 11.31)$ hay $20^{15}\equiv 1(\bmod 341)\Rightarrow 20^{15}-1\,\vdots\,341$

26.6. Chứng minh $1890^{79}+1945^{2015}+2017^{2018}\,\vdots\,7.$

Hướng dẫn giải – đáp số

$1890\equiv 0(\bmod 7)$; $1945\equiv -1(\bmod 7)$; $2017\equiv 1(\bmod 7)$

$1890^{79}\equiv 0(\bmod 7)$; $1945^{2015}\equiv -1(\bmod 7)$; $2017^{2018}\equiv 1(\bmod 7)\Rightarrow$ đpcm.

26.7. a) Chứng minh $5555^{2222}+2222^{5555}+15554^{1111}\,\vdots\,7$

b) Cho $M=220^{119^{69}}+119^{69^{220}}+69^{220^{119}}+(220+119+69)^{102}$

Chứng minh $M\,\vdots\,102.$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có $5555=793.7+4\equiv 4(\bmod 7)$; $2222=318.7-4\equiv -4(\bmod 7)$

$\Rightarrow 5555^{2222}+2222^{5555}\equiv 4^{2222}+(-4)^{5555}\equiv -4^{2222}(4^{3333}-1)(\bmod 7)$

Do $4^{3333}-1=\left[\left(4^3\right)^{1111}-1\right]$; $4^3=64\equiv 1(\bmod 7)$ nên $(4^3)^{1111}\equiv 1(\bmod 7)$

Hay $4^{3333}-1\equiv 0(\bmod 7)$. Do đó $5555^{2222}+2222^{5555}\equiv 0(\bmod 7)$

và $15554^{1111}=(2.7777)^{1111}=2^{1111}.7777^{1111}\equiv 0 \pmod 7 \Rightarrow$ đpcm

b) Ta có $102=2.3.17$. Ta có $(220+119+69)^{102}\equiv 0 \pmod{102}$

* $220\equiv 0 \pmod 2$; $119\equiv -1 \pmod 2$; $69\equiv 1 \pmod 2 \Rightarrow M\equiv 0 \pmod 2$

* $220\equiv 1 \pmod 3$; $119\equiv -1 \pmod 3$; $69\equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow M\equiv 0 \pmod 3$

* $220\equiv -1 \pmod{17}$; $119\equiv 0 \pmod{17}$; $69\equiv 1 \pmod{17} \Rightarrow M\equiv 0 \pmod{17}$

(Để ý 119^{69} và 69^{220} là các số lẻ); $\Rightarrow M\equiv 0 \pmod{2.3.17}$. Hay $M \vdots 102$

26.8. Chứng minh rằng $5^{2n-1}2^{n+1}+2^{2n-1}3^{n+1} \vdots 38\ (n\in N^*)$

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt $A=5^{2n-1}2^{n+1}+2^{2n-1}3^{n+1}$. Ta có $A \vdots 2, \forall n\in N^*$;

Ta có $A=2^n(5^{2n-1}2+2^{n-1}3^{n+1})=2^n(25^{n-1}10+6^{n-1}9)$

Do $25\equiv 6 \pmod{19} \Rightarrow A\equiv 2^n(6^{n-1}10+6^{n-1}9)\equiv 2^n6^{n-1}19\equiv 0 \pmod{19}$

Hay $A \vdots 19$. Mà $(2;9)=1 \Rightarrow A \vdots 19.2 \Rightarrow A \vdots 38$

Dạng toán xác định dấu hiệu chia hết

26.9. Cho số $a=\overline{a_na_{n-1}...a_ia_o}\ (1\le a_n\le 9;\ 0\le a_i\le 9;\ i=0;1;...;n-1)$

Hãy xác định dấu hiệu chia hết:

a) Cho 9. b) Cho 25. c) Cho 11. d) Cho 8.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có : $a=\overline{a_na_{n-1}...a_1a_o}=a_n.10^n+a_{n-1}10^{n-1}+...+a_110+a_o$

a) Ta có $10\equiv 1 \pmod 9$ do đó $a_i10^i\equiv a_i \pmod 9$, i $=1;2;3;...;$n

do đó $a\equiv (a_n+a_{n-1}+...+a_1+a_o) \pmod 9$. Vậy

$a \vdots 9 \Leftrightarrow a_n+a_{n-1}+...+a_1+a_o\equiv 0 \pmod 9 \Leftrightarrow a_n+a_{n-1}+...+a_1+a_o \vdots 9$

b) Ta có $10^2=100\equiv 0 \pmod{25} \Rightarrow a_i10^i\equiv 0 \pmod{25}$, i $=2;3;...;n$

$\Rightarrow a\equiv (a_110+a_o) \pmod{25}$

Vậy $a \vdots 25 \Leftrightarrow a_110+a_o\equiv 0 \pmod{25} \Leftrightarrow \overline{a_1a_o} \vdots 25$

c) Do $10\equiv -1 \pmod{11} \Rightarrow a_i.10^i\equiv a_i(-1)^i \pmod{11}$

$a\equiv (a_o+a_2+a_4+...)-(a_1+a_3+a_5+...) \pmod{11}$

Do đó $a \vdots 11 \Leftrightarrow (a_o+a_2+a_4+...)-(a_1+a_3+a_5+...)\equiv 0 \pmod{11}$

Tức là hiệu của tổng các chữ số ở vị trí lẻ và tổng các chữ số ở vị trí chẵn bằng 0.

d) Ta có $10^3=1000\equiv 0 \pmod 8 \to a_i10^i\equiv 0 \pmod 8, i=3;4;...;n$

$\Rightarrow a\equiv (a_210^2+a_110+a_o) \pmod 8$

Vậy $a \vdots 8 \Leftrightarrow a_210^2+a_110+a_o\equiv 0 \pmod 8 \Leftrightarrow \overline{a_2a_1a_o} \vdots 8$

Dạng toán sử dụng các định lý cơ bản

26.10. Cho $A=2^{2^{10n+1}}+19$ với $n\in N^*$. Chứng minh rằng A là một hợp số.

Hướng dẫn giải – đáp số

Theo định lý Fermat bé, do 11 là số nguyên tố nên ta có

$2^{10}\equiv 1(\text{mod}\,11)\Rightarrow 2^{10n}\equiv 1(\text{mod}\,11)$

$\Rightarrow 2^{10n+1}=2.2^{10n}\equiv 2(\text{mod}\,22)\Rightarrow 2^{10n+1}=22k+2(k\in N)$

Do 23 là số nguyên tố ta cũng có

$2^{22}\equiv 1(\text{mod}\,23)\Rightarrow 2^{2^{10n+1}}=2^{22k+2}=4.2^{22k}\equiv 4(\text{mod}\,23)\Rightarrow 2^{2^{10n+1}}+19\equiv 4+19\equiv 0(\text{mod}\,23)$

Tức là $A\,\vdots\,23$. Mà $A>23,\forall n\geq 1$ nên A là hợp số.

26.11. Cho $B=(12!)^{13}+2016^{2015}$. Chứng minh rằng B chia hết cho 13.

Hướng dẫn giải – đáp số

Theo định lý Wilson: Với mọi số nguyên tố p thì $(p-1)!\equiv -1(\text{mod}\,p)$

Do 13 nguyên tố nên $12!\equiv -1(\text{mod}\,13)\Rightarrow (12!)^{13}\equiv(-1)^{13}\equiv -1(\text{mod}\,13)$

Ta có $2016=13.155+1\equiv 1(\text{mod}\,13)\Rightarrow 2016^{2015}\equiv 1(\text{mod}\,13)$

Do đó $B=(12!)^{13}+2016^{2015}\equiv 0(\text{mod}\,13)$. Hay $B\,\vdots\,13$

26.12. Chứng minh rằng với $n\in N$:

a) $2^{2^{2n+1}}+3.2^{3n}\,\vdots\,7.$

b) $2^{2^{4n+1}}+2.12^{5n+1}+5.10^{2n}\,\vdots\,11.$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Theo định lý Fermat bé, do 7 là số nguyên tố nên $2^6\equiv 1(\text{mod}\,7)$

Ta có $4\equiv 1(\text{mod}\,3)\Rightarrow 4^n\equiv 1(\text{mod}\,3)\Rightarrow 2.4^n\equiv 2(\text{mod}\,6)$.

Nghĩa là $2^{2n+1}=2(2^2)^n=2.4^n\equiv 2(\text{mod}\,6)\Rightarrow 2^{2n+1}=6k+2,(k\in N)$

Mặt khác $2^{3n}=(2^3)^n=8^n\equiv 1(\text{mod}\,7)\Rightarrow 3.2^{3n}\equiv 3(\text{mod}\,7)$

Do đó $2^{2^{2n+1}}+3.2^{3n}\equiv 2^{6k+2}+3\equiv 2^2(2^6)^k+3\equiv 2^2.1+3\equiv 0(\text{mod}\,7)$

b) Do 11 là số nguyên tố nên $2^{10}\equiv 1(\text{mod}\,11)$

Ta có $16\equiv 1(\text{mod}\,5)\Rightarrow 16^n\equiv 1(\text{mod}\,5)\Rightarrow 2.16^n\equiv 2(\text{mod}\,10)$

Nghĩa là $2^{4n+1}=2(2^4)^n=2.16^n\equiv 2(\text{mod}\,10)\Rightarrow 2^{4n+1}=10k+2,(k\in N)$

Mặt khác $12\equiv 1(\text{mod}\,11)\Rightarrow 12^{5n+1}\equiv 1(\text{mod}\,11)$

$\Rightarrow 2.12^{5n+1}\equiv 2(\text{mod}\,11)$

Do $10^2\equiv 1(\text{mod}\,11)\Rightarrow 10^{2n}\equiv 1(\text{mod}\,11)\Rightarrow 5.10^{2n}\equiv 5(\text{mod}\,11)$

Vì thế $2^{2^{4n+1}}+2.12^{5n+1}+5.10^{2n}\equiv 2^{10k+2}+2+5\equiv 2^2+7\equiv 0(\text{mod}\,11)$

Dạng toán khác

26.13. a) Với giá trị nào của số tự nhiên n thì 3^n+63 chia hết cho 72.

b) Cho $A = 20^n + 16^n - 3^n - 1$. Tìm giá trị tự nhiên của n để $A \vdots 323$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có $72 = 8.9$ và $(8;9) = 1$

* $63 \equiv 0(\bmod 9)$; khi $n = 2$ thì $3^n \equiv 0(\bmod 9)$ do đó $3^n + 63 \equiv 0(\bmod 9)$

* Mặt khác, với $n = 2k(k \in N^*)$ thì $3^n - 1 = 3^{2k} - 1 = 9^k - 1 \equiv 1^k - 1 \equiv 0(\bmod 8)$

Do đó $3^n + 63 = 3^n - 1 + 64 \equiv 0(\bmod 8)$

Vậy với $n = 2k(k \in N^*)$ thì $3^n + 63 \vdots 72$

b) Ta có $323 = 17.19$ và $(17;19) = 1$

* $A = (20^n - 1) + (16^n - 3^n) = \mathrm{P} + \mathrm{Q}$

Ta có $20^n \equiv 1(\bmod 19) \Rightarrow P \equiv 0(\bmod 19)$

Nếu $n = 2k(k \in N^*)$ thì $Q = 16^{2k} - 3^{2k} \equiv (-3)^{2k} - 3^{2k} \equiv 3^{2k} - 3^{2k} \equiv 0(\bmod 19)$

$\Rightarrow A = P + Q \equiv 0(\bmod 19)$

* $A = (20^n - 3^n) + (16^n - 1) = P' + Q'$

$20^n \equiv 3^n(\bmod 17)$. Do đó $P' = 20^n - 3^n \equiv 0(\bmod 17)$

Nếu $n = 2k(k \in N^*)$ thì $Q' = 16^{2k} - 1 = (-1)^{2k} - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0(\bmod 17)$

$\Rightarrow A = P' + Q' \equiv 0(\bmod 17)$. Do $(17;19) = 1$ nên $A \equiv 0(\bmod 17.19)$

Vậy với $n = 2k(k \in N^*)$ thì $A = 20^n + 16^n - 3^n - 1 \vdots 323$

26.14. Tìm các số nguyên tố p thỏa mãn $2^p + 1 \vdots p$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Theo định lý Fermat bé ta có $2^p \equiv 2(\bmod p)$ nên nếu $2^p \equiv -1(\bmod p)$ thì ta có $3 \equiv 0(\bmod p) \Rightarrow p = 3$

Mặt khác khi $p = 3$ thì $2^3 + 1 = 9 \equiv 0(\bmod 3)$. Vậy $p = 3$ là số cần tìm.

26.15. Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $p^2 + 20$ là số nguyên tố.

Hướng dẫn giải – đáp số

Với $p = 3$ thì $p^2 + 20 = 29$ là số nguyên tố.

Với $p \neq 3$ thì $p^2 \equiv 1(\bmod 3)$ nên $p^2 + 20 \equiv 21 \equiv 0(\bmod 3)$

Vậy $p^2 + 20 \vdots 3$ mặt khác $p^2 + 20 > 3$ nên $p^2 + 20$ là hợp số. Vậy chỉ có 1 số nguyên tố cần tìm là $p = 3$.

26.16. Cho p là số nguyên tố. Chứng minh rằng số $ab^p - ba^p \vdots p$ với mọi số nguyên dương a, b.

Hướng dẫn giải – đáp số

Với $a, b \in N^*$. Nếu $ab \vdots p$ thì số $ab^p - ba^p \vdots p$

Nếu $ab \not\vdots p$ thì $(a, p) = (b, p) = 1$.

Do đó $a^{p-1} \equiv b^{p-1} \equiv 1(\bmod \mathrm{p}) \Rightarrow \mathrm{a}^{p-1} - b^{p-1} \equiv 0(\bmod \mathrm{p}) \Rightarrow \mathrm{ab}(\mathrm{a}^{p-1} - b^{p-1}) \equiv 0(\bmod p)$

$\Rightarrow ab^p - ba^p \equiv 0 \pmod p$ hay $ab^p - ba^p \,\vdots\, p, \forall a,b \in N^*$.

26.17. a) Chứng minh rằng tổng các bình phương của ba số nguyên trong phép chia cho 8 không thể có dư là 7.

b) Chứng minh phương trình $4x^2 + y^2 + 9z^2 = 2015$ không có nghiệm nguyên.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Giả sử $a,b,c \in Z$ mà $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 7 \pmod 8$

Ta có $a \equiv 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; 4 \pmod 8 \Rightarrow a^2 \equiv 0;1;4 \pmod 8$

$\rightarrow b^2 + c^2 \equiv 7;6;3 \pmod 8$. Điều này vô lý vì $b^2 \equiv 0;1;4 \pmod 8$

Và $c^2 \equiv 0;1;4 \pmod 8 \Rightarrow b^2 + c^2 \equiv 0;1;2;4;5 \pmod 8$

Vậy $a^2 + b^2 + c^2 \not\equiv 7 \pmod 8$

b) Áp dụng câu a) ta có với $x, y, z \in Z$

$4x^2 + y^2 + 9z^2 = (2x)^2 + y^2 + (3z)^2 \not\equiv 7 \pmod 8$

Mà $2015 = 8.251 + 7 \equiv 7 \pmod 8$

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

26.18. Tìm hai chữ số tận cùng của $2011^{2010^{2009}}$

(Đề thi Olympic Toán Singapore năm 2010)

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có $2011 \equiv 11 \pmod{100}; 11^2 \equiv 21 \pmod{100}; 11^3 \equiv 31 \pmod{100}; 11^5 \equiv 21.31 \equiv 51 \pmod{100}$

$\Rightarrow 11^{10} \equiv 51^2 \equiv 1 \pmod{100}$

Ta có $2010^{2009} \equiv 0 \pmod{10} \Rightarrow 2010^{2009} = 10k (k \in Z)$

$\Rightarrow 2011^{2010^{2009}} = 2011^{10k} \equiv 11^{10k} \equiv (11^{10})^k \equiv 1 \pmod{100}$. Do đó hai chữ số tận cùng là số 01.

26.19. Cho biểu thức $A = \left(a^{2012} + b^{2012} + c^{2012}\right) - \left(a^{2008} + b^{2008} + c^{2008}\right)$ với a, b, c là các số nguyên dương. Chứng minh rằng A chia hết cho 30.

(Đề thi chọn học sinh giỏi môn toán lớp 9 TP. Hà Nội, năm học 2011-2012)

Hướng dẫn giải – đáp số

Bài toán có nhiều cách giải. Sau đây là cách giải theo đồng dư thức:

* Ta có $\forall n \in N^*$ thì $n^5 - n \equiv 0 \pmod{30}$ (ví dụ 8 chuyên đề 26 đã chứng minh)

$A = (a^{2012} - a^{2008}) + (b^{2012} - b^{2008}) + (c^{2012} - c^{2008})$

$A = a^{2007}(a^5 - a) + b^{2007}(b^5 - b) + c^{2007}(c^5 - c)$

Ta có $a^5 - a \equiv 0 \pmod{30} \Rightarrow a^{2007}(a^5 - a) \equiv 0 \pmod{30}$

Tương tự $b^{2007}(b^5 - b) \equiv 0 \pmod{30}; c^{2007}(c^5 - c) \equiv 0 \pmod{30}$

Vậy $A \equiv 0 \pmod{30}$. Hay $A \,\vdots\, 30$

26.20. Chứng minh rằng không tồn tại các bộ ba số nguyên (s; y; z) thỏa mãn đẳng thức $x^4 + y^4 = 7z^4 + 5$.

(Đề thi vào lớp 10 trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội, năm học 2011-2012)

Hướng dẫn giải – đáp số

Giả sử tồn tại bộ ba số nguyên (x; y; z) thỏa mãn $x^4 + y^4 = 7z^4 + 5$

$\Leftrightarrow x^4 + y^4 + z^4 = 8z^4 + 5 \quad (1)$

Xét với một số nguyên a bất kỳ thì nếu a chẵn thì $a = 2k (k \in Z) \Rightarrow a^4 = 16k^4 \equiv 0 (\bmod 8)$;

Nếu a lẻ thì $a^4 = (2k+1)^4 \equiv 1 (\bmod 8)$

Do đó $x^4 + y^4 + z^4 \equiv 0;1;2;3 (\bmod 8)$. Trong khi đó $8z^4 + 5 \equiv 5 (\bmod 8)$ mâu thuẫn với (1). Vậy không tồn tại các bộ ba số nguyên (s; y; z) thỏa mãn đẳng thức $x^4 + y^4 = 7z^4 + 5$

26.21. Tìm hai chữ số cuối cùng của số $A = 41^{106} + 57^{2012}$.

(Đề thi vào lớp 10 trường THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, năm học 2012-2013)

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có $41^2 = (40+1)^2 = 40^2 + 80 + 1 \equiv 81 (\bmod 100)$

$41^2 \equiv 81^2 \equiv 6561 \equiv 61 (\bmod 100) \Rightarrow 41^5 \equiv 61.41 \equiv 1 (\bmod 100)$

$\Rightarrow 41^{106} \equiv 41.(41^5)^{21} \equiv 41 \ (\bmod 100)$

Mặt khác $57^4 = 10556001 \equiv 1 (\bmod 100) \Rightarrow 57^{2012} = (57^4)^{503} \equiv 1 (\bmod 100)$

Vì thế $A \equiv 41 + 1 (\bmod 100)$

Do đó hai chữ số cuối cùng của số $A = 41^{106} + 57^{2012}$ là 42.

26.22. Cho a, b là hai số nguyên dương thỏa mãn $a + 20$ và $b + 13$ cùng chia hết cho 21. Tìm số dư trong phép chia $A = 4^a + 9^b + a + b$ cho 21.

(Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT chuyên Trần Phú – Hải Phòng, năm học 2013-2014)

Hướng dẫn giải – đáp số

Do $a + 20 \vdots 21 \Rightarrow a \equiv 1 (\bmod 3)$ và $a \equiv 1 (\bmod 7)$

$b + 13 \vdots 21 \Rightarrow b \equiv 2 (\bmod 3)$ và $b \equiv 2 (\bmod 7)$

Suy ra $A = 4^a + 9^b + a + b \equiv 1 + 0 + 1 + 2 \equiv 1 (\bmod 3) \Rightarrow A \equiv 10 (\bmod 3)$

Xét $a = 3k + 1; b = 3q + 2$ với $k, q \in N$ ta có $4^a = 4^{3k+1} = 4.64^k \equiv 4 (\bmod 7)$

$9^b = 9^{3q+2} \equiv 2^{3q+2} \equiv 4.8^q \equiv 4 (\bmod 7)$

Do đó $A = 4^a + 9^b + a + b \equiv 4 + 4 + 1 + 1 \equiv 10 (\bmod 7) \Rightarrow A \equiv 10 (\bmod 7)$

$A \equiv 10 (\bmod 3)$ và $A \equiv 10 (\bmod 7)$ mà $(3;7) = 1$ nên $A \equiv 10 (\bmod 3.7)$

Hay $A \equiv 10 (\bmod 21)$. Vậy số dư trong phép chia A cho 21 là 10.

26.23. Cho n là một số nguyên dương chứng minh $A = 2^{3n+1} + 2^{3n-1} + 1$ là hợp số.

(Đề thi học sinh giỏi lớp 9 TP. Hà Nội, năm học 2014-2015)

Hướng dẫn giải – đáp số

$2^3 \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow (2^3)^n \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow 2^{3n+1} = 2.(2^3)^n \equiv 2 \pmod 7$

và $2^{3n-1} = 2^2.(2^3)^{n-1} \equiv 4 \pmod 7$

nên $A \equiv 2 + 4 + 1 \equiv 0 \pmod 7$ nghĩa là $A \vdots 7$. Mà với $n \in N^*$ thì A>7.

Vậy A là hợp số.

26.24. Chứng minh $A = 2012^{4n} + 2013^{4n} + 2014^{4n} + 2015^{4n}$ không phải là số chính phương với mọi số nguyên dương n.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên trường ĐHSP TP Hồ Chí Minh, năm học 2015-2016)

Hướng dẫn giải – đáp số

$\forall n \in N^*$ ta có $2012^{4n} \equiv 0 \pmod 2$; $2013^{4n} \equiv 1 \pmod 2$;

$2014^{4n} \equiv 0 \pmod 2; 2015^{4n} \equiv 1 \pmod 2$. Do đó $A \equiv 2 \equiv 0 \pmod 2$

* Ta lại có $2012 \equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow 2012^{4n} \equiv 0 \pmod 4$;

$2014 \equiv 2 \pmod 4 \Rightarrow 2014^2 \equiv 2^2 \equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow 2014^{4n} \equiv (2014^2)^{2n} \equiv 0 \pmod 4$

Do $2013 \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow 2013^{4n} \equiv 1 \pmod 4$;

Do $2015 \equiv -1 \pmod 4 \Rightarrow 2015^{4n} = (-1)^{4n} \equiv 1 \pmod 4$

Vậy $A \equiv 2 \pmod 4$ nghĩa là A chia cho 4 dư 2. Ta có $A \vdots 2; A \not\vdots 2^2; 2$ là số nguyên tố. Vậy A không là số chính phương $\forall n \in N^*$.