

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH HÓA
TRƯỜNG THPT HÀM RỒNG

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC
BẰNG PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ

Người thực hiện : Nguyễn Văn Hải
Chức vụ : Tổ trưởng chuyên môn
SKKN thuộc lĩnh vực môn Toán

MỤC LỤC

1. Mở đầu :

Lý do chọn đề tài	Trang 2
Mục đích nghiên cứu	Trang 3
Đối tượng nghiên cứu	Trang 3
Phương pháp nghiên cứu	Trang 3

2. Nội dung sáng kiến kinh nghiệm

2.1 Cơ sở lý luận của sáng kiến kinh nghiệm	Trang 4
2.2 Chứng minh bất đẳng thức bằng phương pháp hàm số:	Trang 5
2.2.1 Chọn một đại lượng làm biến	Trang 5
2.2.2. Chọn lần lượt các đại lượng làm biến	Trang 8
2.2.3 Chọn nhóm các đại lượng làm biến (kỹ thuật dồn biến)	Trang 11

3. Kết luận

3.1. Kết quả thực nghiệm	Trang 16
3.2. Bài học kinh nghiệm	Trang 16
3.3. Kết luận	Trang 16
3.4. Kiến nghị	Trang 17
Tài liệu tham khảo	Trang 18

1. MỞ ĐẦU

Lý do chọn đề tài

Trong chương trình toán học bậc Trung học phổ thông. Chứng minh bất đẳng thức hoặc tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức là một bài toán phổ biến và rất thông dụng trong các đề thi tuyển sinh vào Đại học – Cao đẳng trước đây và trong đề thi Tốt nghiệp THPT Quốc Gia hiện nay. Bài toán chứng minh bất đẳng thức hoặc tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức còn là một chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi trong nhà trường và thường gặp trong các đề thi học sinh giỏi các cấp ở bậc học Trung học phổ thông hiện nay.

Các bài toán chứng minh bất đẳng thức hoặc tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức rất đa dạng và phong phú. Cần lý luận và thực tiễn đầy đủ để chứng tỏ rằng các hiệu quả trong việc phát triển tư duy cho học sinh.

Bài toán chứng minh bất đẳng thức hoặc tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức là một trong những nội dung khó trong chương trình Toán học phổ thông. Để làm tốt loại bài toán này đòi hỏi học sinh phải có kiến thức cơ bản, hệ thống cùng với óc sáng tạo, khả năng tổng hợp và tư duy logic. Trong các đề thi tuyển sinh vào Đại học và Cao đẳng môn Toán trước đây và trong đề thi Tốt nghiệp THPT Quốc Gia hiện nay, bài toán chứng minh bất đẳng thức hoặc tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức dành để kiểm tra đánh giá năng lực của nhóm học sinh khá giỏi. Trong thang điểm nó được đánh giá ở bậc điểm chín và điểm mười. Tuy nhiên trong chương trình của môn Toán THPT học sinh chỉ được học và luyện tập trong năm học lớp 10, số tiết dạy dành cho nội dung này quá ít, vì vậy đa số học sinh ngay cả các em học sinh khá cũng gặp không ít khó khăn, lúng túng khi gặp dạng toán này.

Các tài liệu, sách tham khảo về trình bày các chứng minh bất đẳng thức, trong bài viết này tác

THPT Hàm Rồng

xin tiếp trung vào phần tiếp theo mà học sinh đã được trang bị đầy đủ kiến thức trong chương trình môn Toán lớp 12 Trung học phổ thông.

Qua kinh nghiệm giảng dạy, cùng với nghiên cứu tài liệu, trong bài viết này, tác giả đưa ra phần tiếp theo giúp học sinh bắt đầu thức bằng phương pháp hàm số với mục đích giúp học sinh có hướng giải quyết một dạng bài toán khó, rèn luyện tư duy và phát huy tính tích cực trong học tập và rèn luyện kỹ năng giải toán.

Hy vọng với nội dung vừa trình bày, bài viết này phần nào giúp các em học sinh cảm thấy tự tin hơn với các bài toán chứng minh bất đẳng thức. Cũng sẽ kiến thức để chuẩn bị thi vào Tốt nghiệp THPT Quốc gia.

MỤC ĐÍCH NGHIÊN CỨU

Với mục đích giúp học sinh nắm vững phương pháp hàm số để giải bài toán chứng minh bất đẳng thức. Đặc biệt có thể giúp học sinh lớp 12 chuẩn bị ôn thi tốt nghiệp THPT Quốc gia được tốt hơn.

Do đây là phần nội dung kiến thức khó nên nhiều học sinh còn chưa quen với tính tư duy logic của nó, nên tôi nghiên cứu nội dung này nhằm tìm ra những phương pháp truyền đạt phù hợp với học sinh, bên cạnh cũng nhằm tháo gỡ những vướng mắc, khó khăn mà học sinh thường hay gặp phải với mong muốn nâng dần chất lượng giảng dạy môn Toán THPT.

ĐỐI TƯỢNG NGHIÊN CỨU

Đối tượng nghiên cứu trong đề tài là học sinh khối 12 qua các năm giảng dạy từ trước đến nay, các học sinh đang chuẩn bị thi THPT Quốc Gia

PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Phương pháp nghiên cứu là trên cơ sở lý thuyết hàm, phân tích sự biến thiên giữa các đại lượng thay đổi, thiết lập mối quan hệ giữa các đại lượng biến thiên để đưa ra các bài khảo sát hàm số.

Thông qua việc tạm quy ước lại vai trò các đại lượng biến thiên, ta có thể chứng minh một bất đẳng thức đại số nhiều biến nhờ khảo sát hàm số một biến. Phương pháp này về nguyên tắc luôn có hiệu quả, còn trong thực tế áp dụng được cho nhiều dạng bài toán chứng minh bất đẳng thức, hơn nữa có khả năng mang lại những lời giải hay, độc đáo cho dạng bài tập này.

2. NỘI DUNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

2.1 CƠ SỞ LÝ LUẬN CỦA SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

Một bất đẳng thức đúng cho mọi giá trị của nhiều đại lượng biến thiên (có thể thỏa mãn một số ràng buộc nào đó). Vậy với giá trị xác định của một nhóm đại lượng và giá trị biến thiên của chỉ một nhóm đại lượng còn lại bất đẳng thức vẫn phải đúng. Do đó nếu ta coi nhóm đại lượng còn lại đó là biến thì hàm số với biến đó phải đạt được giá trị max hoặc min. Như vậy ta đưa bài toán chứng minh bất đẳng thức về bài toán khảo sát hàm số, tìm giá trị max, min. Từ bài toán “Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng $(a; b)$ hoặc trên đoạn $[a; b]$ ” trong chương trình lớp 12, ta có thể chuyển bài toán chứng minh bất đẳng thức hoặc tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức thành bài toán Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

Ta xét hai bài toán cơ bản sau:

Bài toán 1: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số trên khoảng $(a; b)$.

Phương pháp giải:

- *Tìm tập xác định của hàm số (Chỉ xét trên $(a; b)$)
- * Tính đạo hàm và tìm điểm tới hạn của hàm số trên thuộc khoảng $(a; b)$
- * Lập bảng biến thiên
- * Dựa vào bảng biến thiên kết luận về giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Bài toán 2: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[a; b]$.

Phương pháp giải:

- * Tìm tập xác định của hàm số (Chỉ xét trên $[a; b]$)
- * Tính đạo hàm và tìm điểm tới hạn x_i của hàm số trên thuộc khoảng $(a; b)$

THPT Hàm Rồng

* Tính $f(x_i), f(a), f(b)$

$$\max_{[a;b]} f(x) = \max\{f(x_i); f(a); f(b)\}$$

$$\min_{[a;b]} f(x) = \min\{f(x_i); f(a); f(b)\}$$

Trên cơ sở hai bài toán trên chứng minh bất đẳng thức hoặc tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức bằng phương pháp hàm số theo các bước sau:

* Biến đổi các số hạng của bất đẳng thức về cùng một đại lượng giống nhau

* Đặt biến mới t bằng đại lượng đã biến đổi được ở trên

* Tìm điều kiện cho biến t. Giả sử t thuộc D

* Xét hàm số $P=f(t)$ trên D

* Giải bài toán: Tìm giá trị lớn nhất(nhỏ nhất) của hàm số $f(t)$ trên D

Chú ý:

Trường hợp không xây dựng trực tiếp được hàm số $f(t)$ thì ta tìm hàm số $f(t)$ thỏa mãn $P \geq f(t)$ (Đối với bài toán tìm giá trị nhỏ nhất) hoặc $P \leq f(t)$ (Đối với bài toán tìm giá trị lớn nhất)

Nếu P là biểu thức gồm nhiều đại lượng thay đổi thì có thể coi P là một hàm số với biến số là một trong các đại lượng thay đổi đó và tìm giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số P

2.2. Chứng minh bất đẳng thức bằng phương pháp hàm số

2.2.1 Chọn một đại lượng làm biến , các đại lượng còn lại làm tham số .

Xét hàm số theo biến được chọn

VÝ dụ 1.1: Cho $a, b, c \in [0;1]$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1$$

Lời giải:

THPT Hàm Rồng

Coi a là biến x. Xét hàm số:

$$f(x) = \frac{x}{b+c+1} + \frac{b}{c+x+1} + \frac{c}{x+b+1} + (1-x)(1-b)(1-c) \text{ trên } [0;1]. \text{ Ta có :}$$

$$f'(x) = -\frac{b}{(x+c+1)^2} - \frac{c}{(x+b+1)^2} + D \quad (\text{Với } D \text{ là hằng số})$$

Rất dụng $f'(x)$ là một hàm đồng biến trên khoảng $\mathbb{R}$. Xét (vì $f''(x) > 0$)

* Nếu $f'(x) \geq 0 \forall x \in [0,1]$ thì

$$\max_{[0;1]} f(x) = f(1) = \frac{1}{b+c+1} + \frac{b}{c+1+1} + \frac{c}{1+b+1} \leq \frac{1}{b+c+1} + \frac{b}{b+c+1} + \frac{c}{b+c+1} = 1$$

* Nếu $f'(x) \leq 0 \forall x \in [0,1]$ thì

$$\max_{[0;1]} f(x) = f(0) = \frac{b}{c+1} + \frac{c}{b+1} + (1-b)(1-c) = \frac{b+c+b^2c^2+1}{b+c+bc+1} \leq 1$$

* Nếu $f'(x)$ nhận hai dấu trên $\mathbb{R}$ ở $[0;1]$ thì bằng biến thiên của $f(x)$ phải cần:

x	0	x_0	1
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$f(0)$	$f(x_0)$	$f(1)$

Khi đó : $\max_{[0;1]} f(x) = \max\{f(0), f(1)\} \leq 1$

Vậy bài toán đã chứng minh.

VÍ DỤ 1.2: Cho $a, b \in [0;1]$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} + (1-a)(1-b) \leq 1$$

Lời giải:

Coi a là biến x. Xét hàm $f(x) = \frac{x}{b+1} + \frac{b}{x+1} + (1-x)(1-b)$ trên $[0;1]$

$$f'(x) = \frac{1}{1+b} - \frac{b}{(x+1)^2} - 1 + b$$

Rất rùng $f'(x)$ là một hàm tăng biến trên khoảng $[0, 1]$ (vì $f''(x) > 0$)

$$* \text{ Nếu } f'(x) \geq 0 \forall x \in [0, 1] \text{ thì } \max_{[0,1]} f(x) = f(1) = \frac{1}{b+1} + \frac{b}{1+1} \leq \frac{1}{1+b} + \frac{b}{b+1} = 1$$

$$* \text{ Nếu } f'(x) \leq 0 \forall x \in [0, 1] \text{ thì } \max_{[0,1]} f(x) = f(0) = b+1 - b = 1$$

* Nếu $f'(x)$ đổi dấu hai lần trên đoạn $[0, 1]$ thì bằng biến thiên thấy $f(x)$ phải có đúng:

x	0	x_0	1
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$f(0)$	$f(x_0)$	$f(1)$

Khi đó: $\max_{[0,1]} f(x) = \max\{f(0), f(1)\} \leq 1$

Vậy bài toán được chứng minh.

Nhận xét: Có thể mở rộng bài toán như sau:

Cho $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, 1]$. Chứng minh rằng:

$$\left(\sum_{j=1}^n \frac{a_j}{s - a_j + 1} \right) + \prod_{j=1}^n (1 - a_j) \leq 1, \text{ với } s = \sum_{j=1}^n a_j$$

Ví dụ 1.3: 1. Cho $a, b \geq 1$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$

2. Cho $a, b, c \geq 1$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{1+a^3} + \frac{1}{1+b^3} + \frac{1}{1+c^3} \geq \frac{3}{1+abc}$

Lời giải:

1. Không mất tính tổng quát giả sử $1 \leq b \leq a$.

Coi b là biến x , xét hàm $f(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+a^2} - \frac{2}{1+ax}$ trên $[1; a]$.

Đạo hàm $f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} + \frac{2a}{(1+ax)^2} = \frac{2(a-x)(1-ax^3)}{(1+x^2)^2(1+ax)^2} \leq 0$ chứng tỏ $f'(x)$ nghịch

biến $\Rightarrow \min_{(0;a]} f(x) = f(a) = 0 \Rightarrow (\text{đpcm})$

2. Không mất tính tổng quát giả sử $1 \leq a \leq c \leq b$.

Coi c là biến x , xét hàm $f(x) = \frac{1}{1+x^3} + \frac{1}{1+a^3} + \frac{1}{1+b^3} - \frac{3}{1+abx}$ trên $[a; b]$

Đạo hàm $f'(x) = \frac{3(ab-x^2)(1-abx^4)}{[(1+abx)(1+x^3)]^2}$ từ đó ta có bảng biến thiên :

x	a	$\sqrt{ab}$	b
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$f(a)$	$f(\sqrt{ab})$	$f(b)$

$$\Rightarrow \min f(x) = f(\sqrt{ab}) = \frac{1}{1+(a\sqrt{a})^2} + \frac{1}{1+(b\sqrt{b})^2} - \frac{2}{1+a\sqrt{a}b\sqrt{b}} \geq 0 \quad (\text{theo câu 1})$$

Nhận xét: Có thể mở rộng bài toán như sau:

Chứng minh rằng với $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 1$ thì

$$\frac{1}{1+a_1^n} + \frac{1}{1+a_2^n} + \dots + \frac{1}{1+a_n^n} \geq \frac{n}{1+a_1 a_2 \dots a_n}$$

2.2.2. Chọn lần lượt các đại lượng làm biến, đại lượng còn lại làm tham số. Xét lần lượt hàm số theo biến được chọn.

Ví dụ 2.1: Cho $a, b, c > 0$, chứng minh rằng $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

Lời giải:

Không mất tính tổng quát giả sử $a \leq b \leq c$

Coi c là biến x . Xét hàm số $f(x) = \frac{x}{a+b} + \frac{a}{x+b} + \frac{b}{a+x}$ trên $[b; +\infty)$

$$\text{Đạo hàm } f'(x) = \frac{1}{a+b} - \frac{a}{(b+x)^2} - \frac{b}{(a+x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2a}{(b+x)^3} + \frac{2b}{(a+x)^3} > 0$$

Từ đó $f'(x)$ đồng biến. Ngoài ra $f'(b) = a \left[\frac{1}{(a+b)^2} - \frac{1}{4b^2} \right] \geq 0 \Rightarrow f' \geq 0$ trên $[b; +\infty)$

suy ra f đồng biến trên $[b; +\infty)$.

$\Rightarrow \min f(x) = f(b) = \frac{2b}{a+b} + \frac{a}{2b}$. Lại coi b như biến t , xét hàm

$$g(t) = \frac{2t}{a+t} + \frac{a}{2t}, t \in [a; +\infty). \text{ Ta có } g'(t) = 2a \left[\frac{1}{(a+t)^2} - \frac{1}{4t^2} \right] \geq 0$$

$\Rightarrow \min g(t) = g(a) = \frac{3}{2}$ trên $[a; +\infty)$ suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 2.2: Cho $a, b, c \geq 0$, chứng minh rằng $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$

Lời giải:

Không mất tính tổng quát giả sử $a \leq b \leq c$

Coi c là biến x , xét hàm số $f(x) = \frac{x^2}{a+b} + \frac{a^2}{x+b} + \frac{b^2}{a+x} - \frac{x+a+b}{2}$ trên $[b; +\infty)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x}{a+b} - \frac{a^2}{(b+x)^2} - \frac{b^2}{(a+x)^2} - \frac{1}{2} = \\ &= \left(\frac{x}{a+b} - \frac{1}{2} \right) + a \left[\frac{x}{(a+b)^2} - \frac{a}{(x+b)^2} \right] + b \left[\frac{x}{(a+b)^2} - \frac{b}{(x+a)^2} \right] \geq 0 \end{aligned}$$

suy ra f đồng biến trên $[b; +\infty) \Rightarrow f(x) \geq f(b) = \frac{2b^2}{a+b} + \frac{a^2}{2b} - b - \frac{a}{2}$.

Lại coi b như biến t , xét hàm $g(t) = \frac{2t^2}{a+t} + \frac{a^2}{2t} - t - \frac{a}{2}$ trên $[a; +\infty)$. Ta có

$$g'(t) = \frac{4at+2t^2}{(a+t)^2} - \frac{2a^2}{4t^2} - 1 \geq 0 \Rightarrow g \text{ đồng biến} \Rightarrow g(t) \geq g(a) = 0$$

suy ra điều phải chứng minh.

Nhận xét: Có thể mở rộng bài toán như sau:

Cho $a, b, c \geq 0$, chứng minh rằng $\frac{a^{n+1}}{b+c} + \frac{b^{n+1}}{c+a} + \frac{c^{n+1}}{a+b} \geq \frac{a^n + b^n + c^n}{2}$

Ví dụ 2.3 Cho $a, b, c, d > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{c+d+a} + \frac{c}{d+a+b} + \frac{d}{a+b+c} \geq \frac{4}{3}$$

Lời giải: Không mất tính tổng quát giả sử $a \leq b \leq c \leq d$. Coi d là biến x.

Xét hàm số $f(x) = \frac{a}{b+c+x} + \frac{b}{c+x+a} + \frac{c}{x+a+b} + \frac{x}{a+b+c}$ trên $[c; +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{a+b+c} - \left[\frac{a}{(b+c+x)^2} + \frac{b}{(a+c+x)^2} + \frac{c}{(a+b+x)^2} \right] = a \left[\frac{1}{(a+b+c)^2} - \frac{1}{(b+c+x)^2} \right] \\ + b \left[\frac{1}{(a+b+c)^2} - \frac{1}{(a+c+x)^2} \right] + c \left[\frac{1}{(a+b+c)^2} - \frac{1}{(a+b+x)^2} \right] \geq 0$$

Từ đó $f'(x)$ đồng biến $\Rightarrow f(x) \geq f(c) = \frac{2c}{a+b+c} + \frac{a}{b+2c} + \frac{b}{a+2c}$. Lại coi c như biến t,

xét hàm $g(t) = \frac{2t}{a+b+t} + \frac{a}{b+2t} + \frac{b}{a+2t}$ trên $[b; +\infty)$. Ta có

$$g'(t) = \frac{2(a+b)}{(a+b+t)^2} - \frac{2a}{(b+2t)^2} - \frac{2b}{(a+2t)^2} = \\ = 2a \left[\frac{1}{(a+b+t)^2} - \frac{1}{(b+2t)^2} \right] + 2b \left[\frac{1}{(a+b+t)^2} - \frac{1}{(a+2t)^2} \right] \geq 0$$

Suy ra g đồng biến trên $[b; +\infty) \Rightarrow g(t) \geq g(b) = \frac{3b}{a+2b} + \frac{a}{3b}$

Lại coi b là biến u, xét hàm số $h(u) = \frac{3u}{a+2u} + \frac{a}{3u}$ trên $[a; +\infty)$

Đạo hàm $h'(u) = 3a \left[\frac{1}{(a+2u)^2} - \frac{1}{9u^2} \right] \geq 0$ suy ra h đồng biến trên $[a; +\infty)$

$$\Rightarrow h(u) \geq h(a) = \frac{4}{3} \quad (\text{đpcm})$$

Ví dụ 2.4 Cho $a, b, c \geq 0$ chứng minh rằng $\frac{a^n + b^n + c^n}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^n$

Lời giải:

Không mất tính tổng quát giả sử $a \leq b \leq c$

Coi c là biến x, xét hàm số $f(x) = \frac{a^n + b^n + x^n}{3} - \left(\frac{a+b+x}{3} \right)^n$ trên $[b; +\infty)$

Đạo hàm $f'(x) = \frac{n}{3} \left[x^{n-1} - \left(\frac{x+a+b}{3} \right)^{n-1} \right] \geq 0 \Rightarrow f$ đồng biến trên $[b; +\infty)$

$$\Rightarrow f(x) \geq f(b) = \frac{a^n + 2b^n}{3} - \left(\frac{a+2b}{3} \right)^n$$

* Coi b là biến t xét hàm số $g(t) = \frac{a^n + 2t^n}{3} - \left(\frac{a+2t}{3}\right)^n$ trên $[a; +\infty)$

Đạo hàm $g'(t) = \frac{2n}{3} \left[t^{n-1} - \left(\frac{a+2t}{3}\right)^{n-1} \right] \geq 0 \Rightarrow g$ đồng biến $\Rightarrow g(t) \geq g(a) = 0 \Rightarrow$ đpcm

Ví dụ 2.5: Cho $a, b, c > 0$ chứng minh rằng: $4(a^3 + b^3 + c^3 + 6abc) \geq (a+b+c)^3$

Lời giải:

Không mất tính tổng quát giả sử $a \leq b \leq c$

Coi c là biến x, xét hàm số $f(x) = 4(a^3 + b^3 + x^3 + 6abx) - (a+b+x)^3$ trên $[b; +\infty)$

Đạo hàm $f'(x) = 3[3x^2 - 2(a+b)x + 6ab - a^2 - b^2]$

Phương trình $f' = 0$ có $\Delta' = 4(a^2 + b^2 - 4ab)$

* Nếu $a \leq b \leq a(2 + \sqrt{3}) \Rightarrow \Delta' \leq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in [b; +\infty) \Rightarrow \min_{x \in [b; +\infty)} f(x) = f(b)$

* Nếu $a \leq a(2 + \sqrt{3}) \leq b (\leq c) \Rightarrow \Delta' \geq 0$, f' có hai nghiệm $x_{1,2} = \frac{a+b \pm \sqrt{\Delta'}}{3}$

Dễ thấy $x_2 \leq b$. Bảng biến thiên của f có dạng :

x	$-\infty$	x_1	x_2	b	$+\infty$				
$f'(x)$	+	0	-	$f(x_1)$	+	+	$+\infty$		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	$f(b)$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy ta luôn có $f(x) \geq f(b) = 3a(a^2 - 2ab + 4b^2) \geq 0$ suy ra (đpcm)

2.2.2. Chọn nhóm các đại lượng làm biến (kỹ thuật dồn biến), biểu thị nhóm biến khác theo biến. Xét lần lượt hàm số theo biến được chọn.

Ví dụ 3.1: Cho $x^2 + y^2 = x + y$. Chứng minh $x^3 + y^3 + x^2y + y^2x \leq 4$

Lời giải:

Đặt $t = x + y$ từ giả thiết ta có $2xy = (x + y)^2 - (x + y) = t^2 - t$ hay $xy = \frac{t^2 - t}{2}$.

Áp dụng BĐT $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2) = 2(x + y)$ hay $t^2 \leq 2t$ suy ra $0 \leq t \leq 2$.

Ta có $x^3 + y^3 + x^2y + y^2x = (x + y)^3 - 2xy(x + y) = t^3 - t^2$

Hàm số $P = f(t) = t^3 - t^2$ liên tục và đồng biến trên $[0; 2]$

THPT Hàm Rồng

Do đó Max $P=4$ đạt được khi $t=2$ hay $x+y=2$ và $xy=1$ suy ra $x=1; y=1$

Ta có min $P=0$ khi $t=0$ hay $x=0; y=0$

Ví dụ 3.2: Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh $\frac{1}{xz} + \frac{1}{yz} \geq 16$

Lời giải:

Đặt $t = x + y$ từ giả thiết ta có $z = 1 - t$ và $0 < t < 1$.

Áp dụng BĐT $(x + y)^2 \geq 4xy$ hay $xy \leq \frac{t^2}{4}$

Khi đó $\frac{1}{xz} + \frac{1}{yz} = \frac{t}{xy(1-t)} \geq \frac{4}{-t^2 + t}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{4}{-t^2 + t}; f'(t) = \frac{4(2t-1)}{(t^2-t)^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$

Bảng biến thiên:

T	0	$\frac{1}{2}$	1
$F'(t)$	-	0	+
$F(t)$	$+\infty$	16	$+\infty$

Từ BBT ta có $\max_{t \in (0;1)} f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 16$ đạt được khi $t = \frac{1}{2}$

Vậy $\frac{1}{xz} + \frac{1}{yz} \geq 16$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x + y = \frac{1}{2}; z = \frac{1}{2}$

Ví dụ 3.3:

Cho $xy \neq 0$ thỏa mãn $x + y = 1$. Chứng minh $\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{x^2}{y^2 + 1} + \frac{y^2}{x^2 + 1} \geq 2$

Lời giải:

Đặt $t = x^2 + y^2$ ta có $(x + y)^2 = 1$ nên $xy = \frac{1-t}{2}$

Áp dụng BĐT $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$ suy ra $t \geq \frac{1}{2}$.

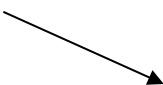
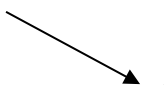
Ta có $\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{x^2}{y^2 + 1} + \frac{y^2}{x^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{(x^4 + y^4) + (x^2 + y^2)}{x^2 y^2 + (x^2 + y^2) + 1} = \frac{1}{t} + \frac{2t^2 + 8t - 2}{t^2 + 2t + 5}$

THPT Hàm Rồng

Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{t} + \frac{2t^2 + 8t - 2}{t^2 + 2t + 5}$ trên $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$

$$f'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{-4t^2 + 24t + 44}{(t^2 + 2t + 5)^2} \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t+1)^2(t-5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=5 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

t	$\frac{1}{2}$	1		5		$+\infty$	
$F'(t)$	-	0	+	0	-		
$f(t)$	$\frac{12}{5}$		2		$\frac{241}{105}$		2

Từ Bảng biến thiên ta có $\min_{t \in [\frac{1}{2}; +\infty]} f(t) = f(1) = 2$ đạt được khi $(x; y) = (1; 0)$ hoặc $(0; 1)$

Vậy $\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{x^2}{y^2 + 1} + \frac{y^2}{x^2 + 1} \geq 2$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow (x; y) = (0; 1)$ và hoán vị

Nhận xét:

Kỹ thuật dồn biến là một bài toán khó. Sử dụng phương pháp này ta có thể giải bài toán trong đề thi Đại học và Cao đẳng và đề thi Tốt nghiệp THPT Quốc Gia. Các bài toán này thường được cho dưới dạng tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức.

Ví dụ 3.4: (Khối B-2007)

Cho các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 3(ab + bc + ca) + 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Lời giải:

$$\text{Đặt } ab + bc + ca = x \Rightarrow x \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow x \in [0, \frac{1}{3}]$$

$$\begin{aligned} A &= 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 3(ab + bc + ca) + 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \geq 3(ab + bc + ca) + 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ &= 3(ab + bc + ca) + 2\sqrt{(a+b+c)^2 - 2(ab + bc + ca)} = 3x + 2\sqrt{1 - 2x} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x) = 3x + 2\sqrt{1 - 2x}$, $\forall x \in [0, \frac{1}{3}]$

$$\text{Đạo hàm } f'(x) = 3 - \frac{2}{\sqrt{1 - 2x}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{1 - 2x} = 2 \Leftrightarrow 9(1 - 2x) = 4 \Leftrightarrow x = \frac{5}{18}$$

Bảng biến thiên:

T	0	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{3}$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	2	$f\left(\frac{5}{18}\right)$	$\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta được $f(x) \geq f(0), \forall x \in [0, \frac{1}{3}]$

$$\Rightarrow A \geq f(x) \geq f(0) = 2$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=0$ hay hoán vị của bộ $(0,0,1)$

Ví dụ 3.6: (Khối B–2012) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 0$ và

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1. \text{ Tìm GTLN của biểu thức } P = x^5 + y^5 + z^5$$

Lời giải:

$$\text{Nếu } x + y + z = 0 \text{ thì } 2(x^5 + y^5 + z^5) = 5xyz(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\text{Thật vậy: Vì } x + y + z = 0 \text{ nên dễ có được } x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$$

$$(x^3 + y^3 + z^3)(x^2 + y^2 + z^2) = 3xyz(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\Leftrightarrow x^5 + y^5 + z^5 - xyz(xy + yz + xz) = 3xyz(x^2 + y^2 + z^2) \Leftrightarrow 2(x^5 + y^5 + z^5) = 5xyz(x^2 + y^2 + z^2)$$

Mà $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nên ta chỉ cần tìm GTLN của:

$$P = \frac{5}{2}xyz = \frac{5}{2}x \cdot \frac{(y+z)^2 - (y^2 + z^2)}{2} = \frac{5}{2}x^3 - \frac{5}{4}x$$

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{5}{4}x \text{ với } x \text{ thuộc } [-1; 1] \quad f'(x) = \frac{15}{2}x^2 - \frac{5}{4} = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{6}}{6}$$

Bảng biến thiên:

X	- 1	$-\frac{\sqrt{6}}{6}$	$\frac{\sqrt{6}}{6}$	1	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$-\frac{5}{4}$	$f\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$	$f\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$	$\frac{5}{4}$	

THPT Hàm Rồng

Từ bảng biến thiên ta có $\max f(x) = f\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = \frac{5\sqrt{6}}{36} \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{6}}{6}$

Vậy $GTLN = \frac{5\sqrt{6}}{36}$ khi x, y, z là bộ hoán vị của $\left(\frac{-1}{\sqrt{6}}; \frac{-1}{\sqrt{6}}; \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

Ví dụ 3.6: (Thi THPT Quốc Gia năm 2015) Cho các số thực a, b, c thuộc đoạn $[1; 3]$ và thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 6$.

Tìm GTLN của biểu thức $P = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 12abc + 72}{ab + bc + ca} - \frac{1}{2}abc$

Lời giải:

Đặt $t = ab + bc + ca$.

Ta có $36 = (a + b + c)^2 = \frac{1}{2}[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] + 3t \geq 3t \Rightarrow t \leq 12$

Mặt khác $(a - 1)(b - 1)(c - 1) \geq 0 \Rightarrow abc \geq ab + bc + ca - 5 = t - 5$

Và $(3 - a)(3 - b)(3 - c) \geq 0 \Rightarrow 3t = 3(ab + bc + ca) \geq abc + 27 \geq t + 22 \Rightarrow t \geq 11 \Rightarrow t \in [11; 12]$

Khi đó:

$$P = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 12abc + 72}{ab + bc + ca} - \frac{1}{2}abc$$

$$= \frac{(ab + bc + ca)^2 + 72}{ab + bc + ca} - \frac{1}{2}abc \leq \frac{t^2 + 72}{t} - \frac{t - 5}{2} = \frac{t^2 + 5t + 144}{2t}$$

Đặt $f(t) = \frac{t^2 + 5t + 144}{2t}$ với t thuộc $[11; 12]$. Ta có $f'(t) = \frac{t^2 - 144}{2t^2} \leq 0 \quad \forall t \in [11; 12]$

$f(t)$ nghịch biến trên đoạn $[11; 12] \Rightarrow \max_{t \in [11; 12]} f(t) = f(11) = \frac{160}{11} \Leftrightarrow t = 11$

Vậy P đạt $GTLN = \frac{160}{11} \Leftrightarrow a = 1, b = 2, c = 3$

Nhận xét:

Dạng bài toán tìm GTNN- GTLN của biểu thức bằng cách đặt ẩn phụ kết hợp các BĐT cơ bản hoặc thế hai biến qua một biến còn lại cũng như việc sử dụng kỹ thuật dồn biến, từ đó chuyển được về bài toán tìm GTLN, GTNN hàm số được sử dụng nhiều trong các đề thi tuyển sinh vào Đại học và Cao đẳng. Đây là một bài toán khó. Tuy nhiên nếu học sinh vận dụng tốt các kỹ năng biến đổi để

THPT Hàm Rồng

xuất hiện biến mới thì bài toán được giải quyết dễ dàng hơn. Các bạn có thể giải các bài toán sau đây để rèn luyện thêm kỹ năng giải các bài toán dạng này:

Bài 1. Cho x, y, z là ba số thực dương có tổng bằng 3.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 3(x^2 + y^2 + z^2) - 2xyz$$

Hướng dẫn

$$P = 3(x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) - 2xyz = 27 - 6x(y + z) - 2yz(x + 3)$$

$$\geq 27 - 6x(3 - x) - \frac{(y + z)^2}{2}(x + 3) = \frac{1}{2}(-x^3 + 15x^2 - 27x + 27)$$

Xét hàm số $f(x) = -x^3 + 15x^2 - 27x + 27$, với $0 < x < 3$.

Bài 2. (Khối A – 2009)

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x(x + y + z) = 3yz$.

Chứng minh rằng $(x + y)^3 + (x + z)^3 + 3(x + y)(x + z)(y + z) \leq 5(y + z)^3$

Bài 3. (Khối B-2009)

Cho các số thực x, y thay đổi và thỏa mãn $(x + y)^3 + 4xy \geq 2$. Tìm GTNN của biểu thức $A = 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1$.

Bài 4. (Khối B-2006)

Cho x, y là các số thực dương không đổi. Tìm GTNN của biểu thức:

$$A = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} + \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} + |y - 2|.$$

HD. Áp dụng: $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2}$, (dấu bằng xảy ra khi $ad - bc = 0$), $A = \sqrt{(1 - x)^2 + y^2} + \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} + |y - 2| \geq 2\sqrt{4 + 4y^2} + |y - 2|$.

Bài 5. (Khảo sát chất lượng lớp 12THPT Sở GDĐT Thanh Hóa năm 2015)

Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $-1 - 2\sqrt{2} < x < -1 + 2\sqrt{2}$; $y > 0, z > 0$ và $x + y + z = -1$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{(x + y)^2} + \frac{1}{(x + z)^2} + \frac{1}{8 - (y + z)^2}$$

Bài 6. (Khảo sát chất lượng lớp 12THPT Sở GDĐT Thanh Hóa năm 2016)

Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (a + b + c) \left(\frac{3a - b}{a^2 + ab} + \frac{3b - c}{b^2 + bc} + \frac{3c - a}{c^2 + ca} \right)$$

3. KẾT LUẬN, KIẾN NGHỊ

3.1 Kết quả thực nghiệm

3.1.1 Kết quả kiểm tra

Lớp	Số số	Điểm TB (5 đến 6,4)		Điểm khá (6,5 đến 7,9)		Điểm giỏi (từ 8 trở lên)		Đạt yêu cầu	
		SL	%	SL	%	SL	%	SL	%
12C1	45	20	44,44	12	26,67	8	17,78	40	88,89
12C12	45	18	40,0	15	33,33	6	13,33	39	86,67

3.1.2 Kết quả chung:

Sau khi triển khai sáng kiến với hai lớp 12C1 và 12C12. Tôi thấy nếu làm tốt sáng kiến này chất lượng học tập của HS tăng nên rõ rệt. Góp phần không nhỏ vào luyện trí thông minh, khả năng tư duy sáng tạo của học sinh. Bởi khi giải những dạng bài tập này học sinh phải vận dụng hợp lí. Xem xét bài toán dưới dạng đặc thù riêng.

3.2 Bài học kinh nghiệm

Qua quá trình áp dụng sáng kiến này tôi thấy để có thể đạt được kết quả cao giáo viên cần lưu ý một số vấn đề sau:

1. Dành thời gian để nghiên cứu tài liệu SGK, SGV và tài liệu tham khảo.
2. Lượng bài tập phải phù hợp với đối tượng học sinh
3. Giáo viên nên khai thác vấn đề ở nhiều khía cạnh khác nhau để củng cố và rèn luyện khả năng tư duy học sinh.

3.3 Kết luận

Sau một thời gian nghiên cứu và được sự giúp đỡ đóng góp ý kiến của đồng nghiệp đề tài hoàn thành với một số ưu nhược điểm sau:

3.3.1 Ưu điểm

- Cách đặt vấn đề là sáng tạo :từ chỗ chứng minh bất đẳng thức chuyển sang tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất, từ bài toán bất đẳng thức chuyển sang bài toán hàm số.
- Việc coi c như là biến để khảo sát hoàn toàn có thể chấp nhận được do vai trò của a , b, c như nhau , từ chỗ 3 đại lượng biến đổi chỉ còn 1 , hay nói cách khác là ta coi 2 đại lượng kia như là các tham số.
- Sáng kiến đã đạt được những yêu cầu đặt ra ở phần đặt vấn đề.
- Tìm hiểu và đưa ra hệ thống bài tập tương đối đầy đủ có lời giải chi tiết.
- Phần lớn bài tập đưa ra phù hợp với trình độ nhận thức của học sinh khá - giỏi THPT. Bên cạnh đó đề tài đưa ra bài tập khó dành cho học sinh giỏi.
- Giúp học sinh có những bài tập tương tự để phát triển tư duy.

3.3.2 Nhược điểm:

THPT Hàm Rồng

- Hệ thống bài tập chưa phong phú.
- Có những lời giải đưa ra vẫn còn dài chưa thật ngắn gọn.

3.3.3 Hướng phát triển

- Do thời gian thực hiện đề tài có hạn nên tôi chỉ giới hạn trong hệ thống bài tập
- Xây dựng hệ thống bài tập phong phú và đa dạng hơn.
- Đưa ra các lời giải ngắn gọn hơn.

3.4 Kiến nghị

Để việc bồi dưỡng nhân lực, đào tạo nhân tài đạt kết quả tốt, tôi cũng mong các cấp các ngành cung cấp tài liệu nâng cao cho giáo viên và tổ chức các đợt bồi dưỡng giáo viên với qui mô lớn để chúng tôi có thể trao đổi học hỏi kinh nghiệm của bạn bè đồng nghiệp, nâng cao trình độ nghiệp vụ sư phạm cho bản thân.

Trong quá trình viết sáng kiến này tôi đã sử dụng một số tư liệu của đồng nghiệp và có thể không tránh phải những sai sót, mong sự góp ý của tất cả các bạn để sáng kiến được hoàn thiện hơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn !

<u>XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG</u> <u>ĐƠN VỊ</u>	<i>Thanh hóa, ngày 25 tháng 3 năm 2016</i> Tôi xin cam đoan SKKN này là của tôi, không có sự sao chép của người khác. <i>Người viết:</i> <i>Nguyễn Văn Hải</i>
---	--

TÀI LIỆU THAM KHẢO :

- 1.Polya . Sáng tạo toán học . NXB Giáo dục, Hà Nội, 1976
- 2.Bùi Văn Nghị .Sáng tạo (creativity)-Bài giảng chuyên đề .
- 3.Nguyễn Vũ Thanh . Bất đẳng thức . NXB tổng hợp Đồng Tháp, 1993
- 4.Phan Huy Khải . 500 Bài toán về bất đẳng thức . NXB Giáo dục, Hà Nội, 1993
- 5.Tạp chí Toán học tuổi trẻ .
- 6.Bộ đề thi tuyển sinh vào các trường Đại học, Cao đẳng . NXB Giáo dục, Hà Nội, 1993