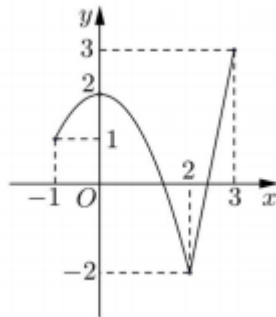


PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**NHÓM CÂU HỎI DÀNH CHO HỌC SINH TRUNG BÌNH**

- Câu 1.** (Đề Tham Khảo 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 3]$. Giá trị của $M - m$ bằng



- A. 1 B. 4 C. 5 D. 0

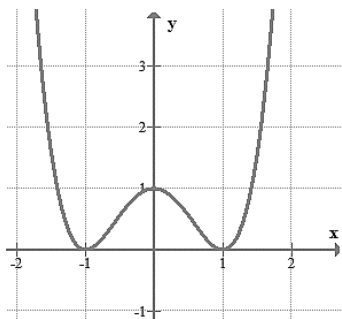
Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị suy ra $M = f(3) = 3; m = f(2) = -2$

Vậy $M - m = 5$

- Câu 2.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 1]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 1]$. Giá trị của $M - m$ bằng

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Từ đồ thị ta thấy $M = 1, m = 0$ nên $M - m = 1$.

- Câu 3.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-3; 2]$ và có bảng biến thiên như sau. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$. Tính $M + m$.

x	-3	-1	0	1	2
$f(x)$	-2	3	0	2	1

A. 3.

B. 2.

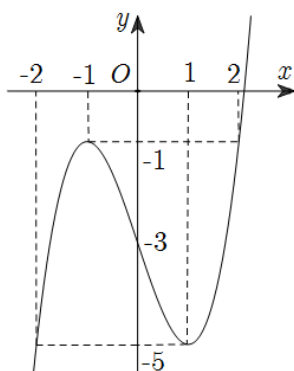
C. 1.

D. 4.

Lời giải

Trên đoạn $[-1; 2]$ ta có giá trị lớn nhất $M = 3$ khi $x = -1$ và giá trị nhỏ nhất $m = 0$ khi $x = 0$.
 Khi đó $M + m = 3 + 0 = 3$.

Câu 4. (Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 2]$.



A. $m = -5; M = -1$.

B. $m = -2; M = 2$.

C. $m = -1; M = 0$.

D. $m = -5; M = 0$.

Lời giải

Nhìn vào đồ thị ta thấy:

$$M = \max_{[-2; 2]} f(x) = -1 \text{ khi } x = -1 \text{ hoặc } x = 2.$$

$$m = \min_{[-2; 2]} f(x) = -5 \text{ khi } x = -2 \text{ hoặc } x = 1.$$

Câu 5. (Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trên đoạn $[-1; 3]$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

x	-1	0	2	3		
y'		+	0	-	0	+
y	0	5	1	4		

A. $\max_{[-1; 3]} f(x) = f(0)$.

B. $\max_{[-1; 3]} f(x) = f(3)$.

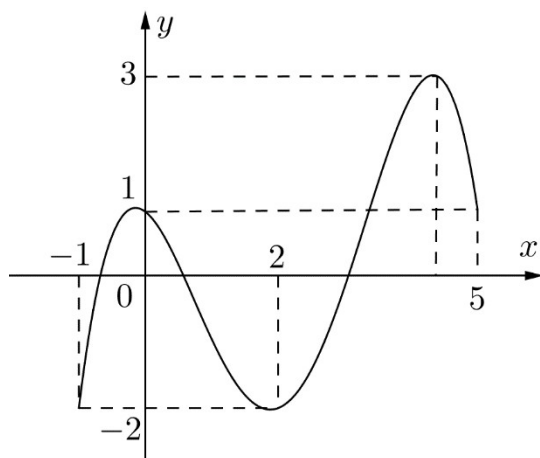
C. $\max_{[-1; 3]} f(x) = f(2)$.

D. $\max_{[-1; 3]} f(x) = f(-1)$.

Lời giải

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy $\max_{[-1;3]} f(x) = f(0)$.

Câu 6. (VTED 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;5]$ và có đồ thị trên đoạn $[-1;5]$ như hình vẽ bên dưới. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1;5]$ bằng



A. - 1

B. 4

C. 1

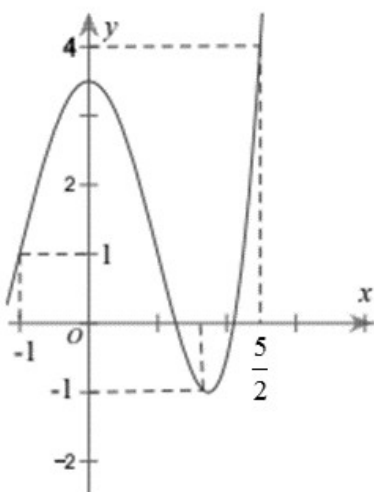
D. 2

Lời giải

Từ đồ thị ta thấy:

$$\begin{cases} M = \max_{[-1;5]} f(x) = 3 \\ n = \min_{[-1;5]} f(x) = -2 \end{cases} \Rightarrow M + n = 1.$$

Câu 7. (THPT Yên Mỹ Hưng Yên 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\left[-1, \frac{5}{2}\right]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ.



Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)$ trên $\left[-1, \frac{5}{2}\right]$ là:

A. $M = 4, m = 1$

B. $M = 4, m = -1$

C. $M = \frac{7}{2}, m = -1$

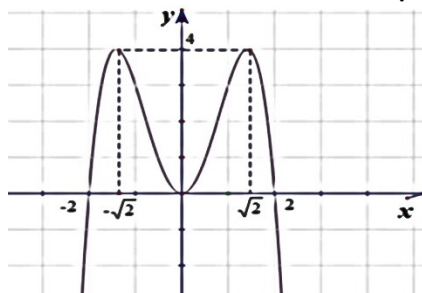
D. $M = \frac{7}{2}, m = 1$

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị $M = 4, m = -1$.

Câu 8. (THPT Nghĩa Hưng Nam Định 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 2]$ là:



- A. $\text{Max}_{[0;2]} f(x) = 2$ B. $\text{Max}_{[0;2]} f(x) = \sqrt{2}$
 C. $\text{Max}_{[0;2]} f(x) = 4$ D. $\text{Max}_{[0;2]} f(x) = 0$

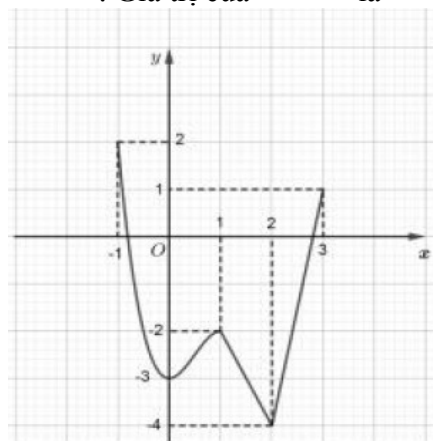
Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị ta thấy trên đoạn $[0; 2]$ hàm số $f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng 4 khi $x = \sqrt{2}$

Suy ra $\text{Max}_{[0;2]} f(x) = 4$

Câu 9. (Sở Bắc Giang 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 3]$. Giá trị của $M + m$ là



- A. 2 B. -6 C. -5 D. -2

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy GTLN của hàm số trên đoạn $[-1; 3]$ là $M = 2$ đạt được tại $x = -1$ và GTNN của hàm số trên đoạn $[-1; 3]$ là $m = -4$ đạt được tại $x = 2$
 $\Rightarrow M + m = 2 + (-4) = -2$

Câu 10. (Sở Hà Nội 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên trên $[-5; 7]$ như sau

x	-5	1		7
y'		-	0	+
y	6			9
		2		

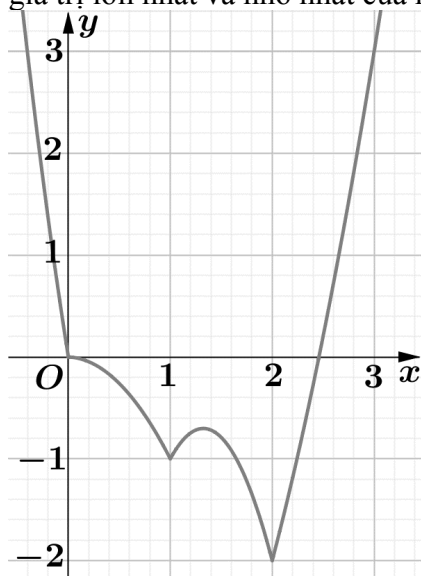
Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. $\min_{[-5;7]} f(x) = 6$. B. $\min_{[-5;7]} f(x) = 2$. C. $\max_{[-5;7]} f(x) = 9$. D. $\max_{[-5;7]} f(x) = 6$.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên trên $[-5;7)$, ta có: $\min_{[-5;7]} f(x) = f(1) = 2$.

- Câu 11.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0;3]$. Giá trị của $M + m$ bằng?

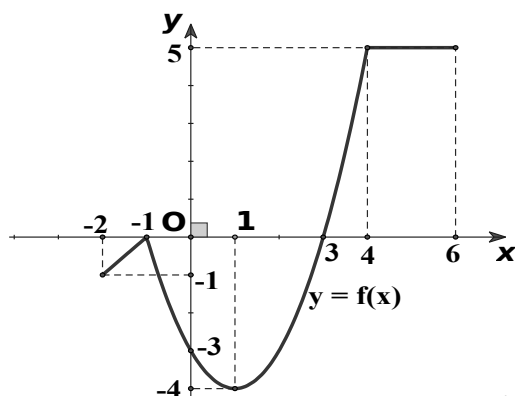


- A. 5 . B. 3 . C. 2 . D. 1 .

Lời giải

Dựa vào hình vẽ ta có: $M = 3$, $m = -2$ nên $M + m = 1$.

- Câu 12.** (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;6]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2; 6]$. Giá trị của $M - m$ bằng

A. 9.

B. - 8.

C. - 9.

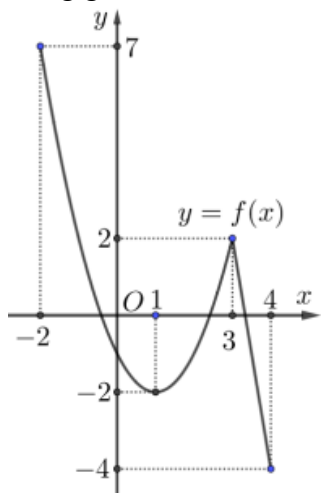
D. 8.

Lời giải

Từ đồ thị suy ra $-4 \leq f(x) \leq 5 \quad \forall x \in [-2; 6]; f(1) = -4; f(4) = 5$

$$\Rightarrow \begin{cases} M = 5 \\ m = -4 \end{cases} \Rightarrow M - m = 9.$$

Câu 13. (VTED 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đồ thị trên đoạn $[-2; 4]$ như hình vẽ bên. Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 4]$ bằng



A. 5

B. 3

C. 0

D. - 2

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị hàm số ta có

$$m = \min_{x \in [-2; 4]} f(x) = -4, \quad M = \max_{x \in [-2; 4]} f(x) = 7$$

Khi đó $M + m = 3$

Câu 14. (THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	$-$	0	$+$	$-$

Mệnh đề nào sau đây đúng

A. $\max_{(-1; 1]} f(x) = f(0)$

B. $\max_{(0; +\infty)} f(x) = f(1)$

C. $\min_{(-\infty; -1)} f(x) = f(-1)$

D. $\min_{(-1; +\infty)} f(x) = f(0)$

Lời giải

Chọn B

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$
y						

$f(-1)$ $f(0)$ $f(1)$

- Câu 15. (Mã 102 - 2020 Lần 1)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 21x$ trên đoạn $[2; 19]$ bằng
- A. - 36. **B. $-14\sqrt{7}$.** C. $14\sqrt{7}$. D. - 34.

Lời giải**Chọn B**

Trên đoạn $[2; 19]$, ta có:

$$y' = 3x^2 - 21 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{7} \notin [2; 19] \\ x = \sqrt{7} \in [2; 19] \end{cases}$$

Ta có: $y(2) = -34$; $y(\sqrt{7}) = -14\sqrt{7}$; $y(19) = 6460$. Vậy $m = -14\sqrt{7}$.

- Câu 16. (Mã 104 - 2020 Lần 1)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 33x$ trên đoạn $[2; 19]$ bằng
- A. - 72. **B. $-22\sqrt{11}$.** C. - 58. D. $22\sqrt{11}$.

Lời giải**Chọn B**

Ta có

$$f'(x) = 3x^2 - 33 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{11} \in [2; 19] \\ x = -\sqrt{11} \notin [2; 19] \end{cases}$$

Khi đó ta có $f(2) = -58$, $f(\sqrt{11}) = -22\sqrt{11}$, $f(19) = 6232$. Vậy $f_{\min} = f(\sqrt{11}) = -22\sqrt{11}$.

- Câu 17. (Mã 102 - 2020 Lần 2)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 12x^2 - 4$ trên đoạn $[0; 9]$ bằng
- A. - 39. **B. - 40.** C. - 36. D. - 4.

Lời giải**Chọn B**

Ta có:

$$f'(x) = 4x^3 - 24x \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{6} \end{cases}$$

Tính được: $f(0) = -4$; $f(9) = 5585$; $f(\sqrt{6}) = -40$ và

Suy ra $\min_{[0; 9]} f(x) = -40$.

- Câu 18. (Mã 103 - 2020 Lần 2)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 10x^2 - 2$ trên đoạn $[0; 9]$ bằng
 A. - 2. B. - 11. C. - 26. **D. - 27.**

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x) = 4x^3 - 20x$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 20x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin (0; 9) \\ x = \sqrt{5} \in (0; 9) \\ x = -\sqrt{5} \notin (0; 9) \end{cases}$$

$$f(0) = -2; \quad f(\sqrt{5}) = -27; \quad f(9) = 5749$$

$$\text{Vậy } \min_{[0;9]} f(x) = -27$$

- Câu 19. (Mã 104 - 2020 Lần 2)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 12x^2 - 1$ trên đoạn $[0; 9]$ bằng
 A. - 28. B. - 1. C. - 36. **D. - 37.**

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x) = 4x^3 - 24x$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 24x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [0; 9] \\ x = \sqrt{6} \in [0; 9] \\ x = -\sqrt{6} \notin [0; 9] \end{cases}$$

$$f(0) = -1; \quad f(\sqrt{6}) = -37; \quad f(9) = 5588$$

- Câu 20. (Chuyên Bắc Ninh 2018)** Tìm tập giá trị của hàm số $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{9-x}$
 A. $T = [1; 9]$ **B. $T = [2\sqrt{2}; 4]$** C. $T = (1; 9)$ D. $T = [0; 2\sqrt{2}]$

Lời giải

Tập xác định: $D = [1; 9]$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{1}{2\sqrt{9-x}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{9-x} = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 9-x = x-1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5$$

$$f(1) = f(9) = 2\sqrt{2}; \quad f(5) = 4$$

Vậy tập giá trị là $T = [2\sqrt{2}; 4]$

- Câu 21. (Mã 123 2017)** Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^3 - 7x^2 + 11x - 2$ trên đoạn $[0; 2]$
 A. $m = 3$ B. $m = 0$ C. $m = -2$ **D. $m = 11$**

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số trên đoạn $[0; 2]$. Ta có $y' = 3x^2 - 14x + 11$ suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Tính $f(0) = -2; f(1) = 3, f(2) = 0$. Suy ra $\min_{[0;2]} f(x) = f(0) = -2 = m$

- Câu 22. (Mã 101 2018)** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 9$ trên đoạn $[-2; 3]$ bằng
 A. 201 B. 2 C. 9 D. 54

Lời giải

Chọn D

$$y' = 4x^3 - 8x; \quad y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } y(-2) = 9; y(3) = 54; y(0) = 9; y(\pm\sqrt{2}) = 5$$

$$\text{Vậy } \max_{[-2;3]} y = 54$$

- Câu 23. (Đề Tham Khảo 2018)** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 4x^2 + 5$ trên đoạn $[-2; 3]$ bằng
 A. 122 B. 50 C. 5 D. 1

Lời giải

Chọn B

$$f'(x) = 4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases} \in [-2; 3];$$

$$f(0) = 5; f(\pm\sqrt{2}) = 1; f(-2) = 5; f(3) = 50$$

$$\text{Vậy } \max_{[-2;3]} y = 50$$

- Câu 24. (Mã 105 2017)** Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-2; 3]$.
 A. $m = 13$ B. $m = \frac{51}{4}$ C. $m = \frac{51}{2}$ D. $m = \frac{49}{4}$

Lời giải

Chọn B

$$y' = 4x^3 - 2x; \quad y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-2; 3] \\ x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \in [-2; 3] \end{cases};$$

$$\text{Tính } y(-2) = 25, y(3) = 85, y(0) = 13, y\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{51}{4} = 12,75;$$

$$\text{Kết luận: giá trị nhỏ nhất } m \text{ của hàm số là } m = \frac{51}{4}.$$

- Câu 25. (Mã 104 2019)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng

A. - 18.

B. - 2.

C. 2.

D. 18.

Lời giải

Chọn A

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Ta có

$$f(-3) = -18; f(-1) = 2; f(1) = -2; f(3) = 18.$$

Mà

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng - 18.

- Câu 26. (Mã 103 2018)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 3x^2$ trên đoạn $[-4; -1]$ bằng
- A. - 16 B. 0 C. 4 D. - 4

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 + 6x; \quad y' = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin [-4; -1] \\ x = -2 \in [-4; -1] \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } y(-4) = -16; y(-2) = 4; y(-1) = 2.$$

$$\text{Nên } \min_{[-4; -1]} y = -16.$$

- Câu 27. (THPT Hoa Lư A 2018)** Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{1}{2}x - \sqrt{x+1}$ trên đoạn $[0; 3]$. Tính tổng $S = 2m + 3M$.
- A. $S = -\frac{7}{2}$. B. $S = -\frac{3}{2}$. C. - 3. D. $S = 4$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{2\sqrt{x+1}}, \text{ cho } f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} = 1 \Leftrightarrow x = 0 \in [0; 3].$$

$$\text{Khi đó: } f(0) = -1, f(3) = -\frac{1}{2} \text{ nên } m = -1 \text{ và } M = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } S = 2m + 3M = -\frac{7}{2}.$$

- Câu 28. (THPT Hà Huy Tập - 2018)** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2\cos x - \frac{4}{3}\cos^3 x$ trên $[0; \pi]$.
- A. $\max_{[0; \pi]} y = \frac{2}{3}$. B. $\max_{[0; \pi]} y = \frac{10}{3}$. C. $\max_{[0; \pi]} y = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. D. $\max_{[0; \pi]} y = 0$.

Lời giải

$$\text{Đặt: } t = \cos x \Rightarrow t \in [-1; 1] \Rightarrow y = 2t - \frac{4}{3}t^3$$

$$y' = 2 - 4t^2 \quad y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{\sqrt{2}} \in [-1; 1] \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} \in [-1; 1] \end{cases}$$

$$\text{Tính: } y(-1) = \frac{-2}{3}, \quad y\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-2\sqrt{2}}{3}, \quad y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad y(1) = \frac{2}{3}$$

$$\text{Vậy: } \max_{[0; \pi]} y = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

- Câu 29.** Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{3\sin x + 2}{\sin x + 1}$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Khi đó giá trị của $M^2 + m^2$ là
- A. $\frac{31}{2}$ B. $\frac{11}{2}$ C. $\frac{41}{4}$ D. $\frac{61}{4}$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } t = \sin x, \quad t \in [0; 1]$$

$$\text{Xét hàm } f(t) = \frac{3t + 2}{t + 1} \text{ liên tục trên đoạn } [0; 1] \text{ có } f'(t) = \frac{1}{(t + 1)^2} > 0, t \in [0; 1]$$

$$\text{Suy ra hàm số đồng biến trên } [0; 1]$$

$$\Rightarrow M = \max_{[0; 1]} f(t) = f(1) = \frac{5}{2} \text{ và } m = \min_{[0; 1]} f(t) = f(0) = 2$$

$$\text{Khi đó } M^2 + m^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 2^2 = \frac{41}{4}$$

- Câu 30. (Đề Tham Khảo 2017)** Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3x + \frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.
- A. $\min_{(0; +\infty)} y = \frac{33}{5}$ B. $\min_{(0; +\infty)} y = 2\sqrt[3]{9}$ C. $\min_{(0; +\infty)} y = 3\sqrt[3]{9}$ D. $\min_{(0; +\infty)} y = 7$

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

$$y = 3x + \frac{4}{x^2} = \frac{3x}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{4}{x^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{3x}{2} \cdot \frac{3x}{2} \cdot \frac{4}{x^2}} = 3\sqrt[3]{9}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{3x}{2} = \frac{4}{x^2} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{8}{3}}$.

Vậy $\min_{(0; +\infty)} y = 3\sqrt[3]{9}$

Cách 2:

Xét hàm số $y = 3x + \frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$

Ta có $y = 3x + \frac{4}{x^2} \Rightarrow y' = 3 - \frac{8}{x^3}$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{x^3} = 3 \Leftrightarrow x^3 = \frac{8}{3} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{8}{3}}$

x		0	$\sqrt[3]{\frac{8}{3}}$	$+\infty$
y'			- 0 +	
y			$3\sqrt[3]{9}$	

$$\Rightarrow \min_{(0; +\infty)} y = y\left(\sqrt[3]{\frac{8}{3}}\right) = 3\sqrt[3]{9}$$

Câu 31. (THPT Minh Châu Hưng Yên 2019) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - 5 + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ bằng bao nhiêu?

A. 0

B. -1

C. -3

D. -2

Lời giải

Chọn C

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si ta có:

$$y = x + \frac{1}{x} - 5 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} - 5 = -3$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ (vì $x > 0$).

Vậy $\min_{(0; +\infty)} y = -3$

Câu 32. (Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019) Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{4}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$. Tìm m

A. $m = 4$.

B. $m = 2$.

C. $m = 1$.

D. $m = 3$.

Lời giải

$$y' = 1 - \frac{4}{x^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2; \quad x = 2 \in (0; +\infty).$$

Bảng biến thiên:

x	0	2	$+\infty$
y'		0	+
y	$+\infty$	4	$+\infty$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $y(2) = 4 \Rightarrow m = 4$.

NHÓM CÂU HỎI DÀNH CHO HỌC SINH KHÁ – GIỎI

- Câu 33.** (Mã 123 2017) Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[2;4]} y = 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. $m > 4$ B. $3 < m \leq 4$ C. $m < -1$ D. $1 \leq m < 3$

Lời giải

Chọn A

$$y' = \frac{-1-m}{(x-1)^2}$$

Ta có

* TH 1. $-1-m > 0 \Leftrightarrow m < -1$ suy ra y đồng biến trên $[2;4]$ suy ra

$$\min_{[2;4]} f(x) = f(2) = \frac{2+m}{1} = 3 \Leftrightarrow m = 1 \quad (\text{loại})$$

* TH 2. $-1-m < 0 \Leftrightarrow m > -1$ suy ra y nghịch biến trên $[2;4]$ suy ra

$$\min_{[2;4]} f(x) = f(4) = \frac{4+m}{3} = 3 \Leftrightarrow m = 5 \quad \text{suy ra } m > 4.$$

- Câu 34.** (Mã 110 2017) Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = \frac{16}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. $m > 4$ B. $2 < m \leq 4$ C. $m \leq 0$ D. $0 < m \leq 2$

Lời giải

Chọn A

$$y' = \frac{1-m}{(x+1)^2}$$

Ta có

☑ Nếu $m = 1 \Rightarrow y = 1, \forall x \neq -1$. Không thỏa mãn yêu cầu đề bài.

☑ Nếu $m < 1 \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên đoạn $[1; 2]$.

Khi đó: $\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = \frac{16}{3} \Leftrightarrow y(1) + y(2) = \frac{16}{3} \Leftrightarrow \frac{m+1}{2} + \frac{m+2}{3} = \frac{16}{3} \Leftrightarrow m = 5$ (loại).

☑ Nếu $m > 1 \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên đoạn $[1; 2]$.

Khi đó: $\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = \frac{16}{3} \Leftrightarrow y(2) + y(1) = \frac{16}{3} \Leftrightarrow \frac{2+m}{3} + \frac{1+m}{2} = \frac{16}{3} \Leftrightarrow m = 5$ (t/m)

- Câu 35.** Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ trên đoạn $[1; 2]$ bằng 8 (m là tham số thực). Khẳng định nào sau đây là đúng?
A. $m > 10$. **B.** $8 < m < 10$. **C.** $0 < m < 4$. **D.** $4 < m < 8$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = \frac{1-m}{(x+1)^2}$.

- Nếu $m = 1 \Rightarrow y = 1$ (loại).

- Nếu $m \neq 1$ khi đó $y' < 0, \forall x \in [1; 2]$ hoặc $y' > 0, \forall x \in [1; 2]$ nên hàm số đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất tại $x = 1, x = 2$.

Theo bài ra: $\max_{[1;2]} y + \min_{[1;2]} y = 8 \Leftrightarrow y(1) + y(2) = \frac{1+m}{2} + \frac{2+m}{3} = 8 \Leftrightarrow m = \frac{41}{5} \in (8; 10)$.

- Câu 36.** Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-m^2}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[-3;-2]} y = \frac{1}{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
A. $3 < m \leq 4$. **B.** $-2 < m \leq 3$. **C.** $m > 4$. **D.** $m \leq -2$.

Lời giải

Chọn B

+TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{m^2\}, [-3; -2] \subset D$.

+ Ta có $y' = \frac{-m^2 - 1}{(x - m^2)^2} < 0, \forall x \in D$.

Nên hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Nên $\min_{[-3;-2]} y = \frac{1}{2} = y(-2) = \frac{-2+1}{-2-m^2} \Rightarrow -2-m^2 = -2 \Leftrightarrow m = 0 \Rightarrow -2 < m \leq 3$.

- Câu 37.** Cho hàm số $y = \frac{x-m^2}{x+8}$ với m là tham số thực. Giả sử m_0 là giá trị dương của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 3]$ bằng -3. Giá trị m_0 thuộc khoảng nào trong các khoảng cho dưới đây?

A. $(2;5)$.

B. $(1;4)$.

C. $(6;9)$.

D. $(20;25)$.

Lời giải

Chọn A

+ TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-8\}$.

$y' = \frac{8+m^2}{(x+8)^2} > 0, \forall x \in D$

Vậy hàm số $y = \frac{x-m^2}{x+8}$ đồng biến trên $[0;3]$.

$\Rightarrow \min_{[0;3]} y = y(0) = \frac{-m^2}{8}$

Để $\min_{[0;3]} y = -3 \Leftrightarrow \frac{-m^2}{8} = -3 \Leftrightarrow m = \pm 2\sqrt{6}$.

$\Rightarrow m_0 = 2\sqrt{6} \in (2;5)$. Vậy chọn A.

Câu 38. (Thpt Vĩnh Lộc - Thanh Hóa 2019) Tìm các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm

số $y = \frac{x-m^2+m}{x+1}$ trên đoạn $[0;1]$ bằng -2 .

A. $\begin{cases} m = -1 \\ m = -2 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Hàm số đã cho liên tục trên $[0;1]$.

Ta có: $y' = \frac{1-(-m^2+m)}{(x+1)^2} = \frac{m^2-m+1}{(x+1)^2} > 0; \forall x \in D$.

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên đoạn $[0;1]$.

Trên $[0;1]$ hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=0$.

Ta có: $y(0) = -2 \Leftrightarrow -m^2+m = -2 \Leftrightarrow m^2-m-2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$.

- Câu 39. (THPT Lê Văn Thịnh Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min y = 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. $1 \leq m < 3$ B. $m > 6$ C. $m < 1$ **D. $3 < m \leq 6$**

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Với $m = 1$ $\Rightarrow y = 1$, "x" $\hat{=}$ 0, 1 thì $\min y = 1 < 3$.

Suy ra $m \neq 1$. Khi đó $y' = \frac{1-m}{(x+1)^2}$ không đổi dấu trên từng khoảng xác định.

TH 1: $y' > 0 \Leftrightarrow m < 1$ thì $\min y = y(0) \Rightarrow m = 3$ (loại).

TH 2: $y' < 0 \Leftrightarrow m > 1$ thì $\min y = y(1) \Rightarrow m = 5$ (thỏa mãn).

- Câu 40. (Chuyên KHTN 2019)** Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ trên $[1; 2]$ bằng 8 (m là tham số thực). Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. $m > 10$ **B. $8 < m < 10$** C. $0 < m < 4$ D. $4 < m < 8$

Lời giải

Nếu $m = 1$ thì $y = 1$ (không thỏa mãn tổng của giá trị lớn nhất và nhỏ nhất bằng 8)

Nếu $m \neq 1$ thì hàm số đã cho liên tục trên $[1; 2]$ và $y' = \frac{1-m}{(x+1)^2}$.

Khi đó đạo hàm của hàm số không đổi dấu trên đoạn $[1; 2]$.

Do vậy $\min_{x \in [1; 2]} y + \max_{x \in [1; 2]} y = y(1) + y(2) = \frac{m+1}{2} + \frac{m+2}{3} = 8 \Leftrightarrow m = \frac{41}{5}$.

- Câu 41. (Sở Hưng Yên)** Cho hàm số $f(x) = \frac{x-m^2}{x+8}$ với m là tham số thực. Giả sử m_0 là giá trị dương của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 3]$ bằng -3. Giá trị m_0 thuộc khoảng nào trong các khoảng cho dưới đây?
- A. $(20; 25)$ B. $(5; 6)$ C. $(6; 9)$ **D. $(2; 5)$**

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x) = \frac{x - m^2}{x + 8}$ trên đoạn $[0; 3]$.

Ta có: $y' = \frac{8 + m^2}{(x + 8)^2} > 0, \forall x \in [0; 3] \Rightarrow$ hàm số $f(x) = \frac{x - m^2}{x + 8}$ đồng biến trên đoạn $[0; 3]$

$$\Rightarrow \min_{[0; 3]} f(x) = f(0) = \frac{-m^2}{8}.$$

Theo giả thiết, ta có: $\min_{[0; 3]} f(x) = -3 \Leftrightarrow \frac{-m^2}{8} = -3 \Leftrightarrow m^2 = 24 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2\sqrt{6} \\ m = -2\sqrt{6} \end{cases}$

Mà $m > 0, m \in \mathbb{R} \Rightarrow m = 2\sqrt{6} \approx 4,9 \in (2; 5)$.

Câu 42. (Sở Quảng Trị 2019) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1; 1]$ bằng $\sqrt{2}$

- A. $m = \sqrt{2}$. B. $m = 2 + \sqrt{2}$. C. $m = 4 + \sqrt{2}$. D. $m = 2 + \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$y' = 3x^2 - 6x$$

$$y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Trên $[-1; 1]$ thì $y'(-1) = m - 4; y'(0) = m; y'(1) = m - 2$

Min $y = \sqrt{2} \Rightarrow m - 4 = \sqrt{2} \Rightarrow m = 4 + \sqrt{2}$
nên

Câu 43. (Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019) Có một giá trị m_0 của tham số m để hàm số $y = x^3 + (m^2 + 1)x + m + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5 trên đoạn $[0; 1]$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $2018m_0 - m_0^2 \geq 0$. B. $2m_0 - 1 < 0$. C. $6m_0 - m_0^2 < 0$. D. $2m_0 + 1 < 0$.

Lời giải

+ Đặt $f(x) = x^3 + (m^2 + 1)x + m + 1$

+ Ta có: $y' = 3x^2 + m^2 + 1$. Dễ thấy rằng $y' > 0$ với mọi x, m thuộc $\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, suy ra hàm số đồng biến trên $[0; 1]$. Vì thế $\min_{[0; 1]} y = \min_{[0; 1]} f(x) = f(0) = m + 1$.

+ Theo bài ra ta có: $m + 1 = 5$, suy ra $m = 4$.

+ Như vậy $m_0 = 4$ và mệnh đề đúng là $2018m_0 - m_0^2 \geq 0$.

- Câu 44. (HSG Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y = ax^3 + cx + d, a \neq 0$ có $\min_{x \in (-\infty; 0)} f(x) = f(-2)$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng
- A. $d - 11a$. B. $d - 16a$. C. $d + 2a$. D. $d + 8a$.

Lời giải

Vì $y = ax^3 + cx + d, a \neq 0$ là hàm số bậc ba và có $\min_{x \in (-\infty; 0)} f(x) = f(-2)$ nên $a < 0$ và $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Ta có $y' = 3ax^2 + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow ac < 0$.

Vậy với $a < 0, c > 0$ thì $y' = 0$ có hai nghiệm đối nhau $x = \pm \sqrt{-\frac{c}{3a}}$

Từ đó suy ra $\min_{x \in (-\infty; 0)} f(x) = f\left(-\sqrt{-\frac{c}{3a}}\right) \Leftrightarrow -\sqrt{-\frac{c}{3a}} = -2 \Leftrightarrow \sqrt{-\frac{c}{3a}} = 2 \Leftrightarrow c = -12a$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	1	2	3	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$				$f(2)$		$-\infty$

$\swarrow$ $f(-2)$ $\searrow$

Ta suy ra $\max_{x \in [1; 3]} f(x) = f(2) = 8a + 2c + d = -16a + d$.

- Câu 45. (THPT Nghĩa Hưng Nam Định 2019)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x+m}{x^2+x+1}$ có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$ nhỏ hơn hoặc bằng 1.
- A. $m \leq 1$. B. $m \geq 1$. C. $m \geq -1$. D. $m \leq -1$.

Lời giải

Chọn A

+ TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

+ $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$

+ $y' = \frac{-x^2 - 2mx + 1 - m}{(x^2 + x + 1)^2}$

+ $y' = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 2mx + 1 - m = 0 (*)$

$\Delta'_{(*)} = m^2 - m + 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên (*) có 2 nghiệm phân biệt $x_1 < x_2, \forall m \in \mathbb{R}$

+ BBT:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	0	$f(x_1)$	$f(x_2)$	0	

Vậy hàm số đạt giá trị lớn nhất là $f(x_2) = \frac{1}{2x_2 + 1}$ với $x_2 = -m + \sqrt{m^2 - m + 1}$

$$YCBT \Leftrightarrow \frac{1}{-2m + 2\sqrt{m^2 - m + 1} + 1} \leq 1 \Leftrightarrow 1 - 2m + 2\sqrt{m^2 - m + 1} \geq 1 \quad (\text{vì } f(x_2) > 0 \Rightarrow 2x_2 + 1 > 0)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m^2 - m + 1} \geq m \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \geq 0 \\ m^2 - m + 1 \geq m^2 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 1$$

Câu 46. (Chuyên Vĩnh Phúc 2018) Tìm tất cả các giá trị của $m > 0$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ trên đoạn $[m+1; m+2]$ luôn bé hơn 3.

- A. $m \in (0; 2)$ B. $m \in (0; 1)$ C. $m \in (1; +\infty)$ D. $m \in (0; +\infty)$

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ do đó $y_{CT} = y(1) = -1$ và $y_{CB} = y(-1) = 3$.

Thấy ngay với $m > 0$ thì trên đoạn $[m+1; m+2]$ hàm số luôn đồng biến.

Vậy GTNN của hàm số đã cho trên đoạn $[m+1; m+2]$ là $y(m+1) = (m+1)^3 - 3(m+1) + 1$.

$$\text{GTNN luôn bé hơn } 3 \Leftrightarrow (m+1)^3 - 3(m+1) - 2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 < 2 \\ m+1 \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \neq -2 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện $m > 0$ ta được $m \in (0; 1)$.

Câu 47. (Chuyên Đh Vinh 2018) Biết rằng giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = mx + \frac{36}{x+1}$ trên $[0; 3]$ bằng 20. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $0 < m \leq 2$ B. $4 < m \leq 8$ C. $2 < m \leq 4$ D. $m > 8$

Lời giải

$$y = mx + \frac{36}{x+1} \Rightarrow y' = m - \frac{36}{(x+1)^2}$$

Trường hợp 1: $m = 0$, ta có $y' = -\frac{36}{(x+1)^2} < 0, \forall x \neq -1$. Khi đó $\min_{x \in [0; 3]} y = y(3) = 9$ (loại).

Trường hợp 2: $m \neq 0$

□ Nếu $m < 0$, ta có $y' < 0, \forall x \neq -1$ Khi đó $\min_{x \in [0;3]} y = y(3) \Leftrightarrow 20 = 3m + 9 \Leftrightarrow m = \frac{11}{3}$ (loại).

□ Nếu $m > 0$, khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow m - \frac{36}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = \frac{36}{m} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{\sqrt{m}} - 1 \\ x = -\frac{6}{\sqrt{m}} - 1 \end{cases} (l)$

□ $0 < \frac{6}{\sqrt{m}} - 1 \leq 3 \Leftrightarrow \frac{4}{9} < m \leq 36$, $\min_{x \in [0;3]} y = y\left(\frac{6}{\sqrt{m}} - 1\right) = 12\sqrt{m} - m = 20 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = 100 (l) \end{cases}$

□ $\frac{6}{\sqrt{m}} - 1 > 3 \Leftrightarrow m < \frac{9}{4}$, $\min_{x \in [0;3]} y = y(3) \Leftrightarrow 20 = 3m + 9 \Leftrightarrow m = \frac{11}{3} (l)$

Câu 48. (Chuyên Nguyễn Trãi - Hải Dương - Lần 2 - 2020) Cho hàm số $f(x) = \frac{2x - m}{x + 1}$ với $m \neq -2$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. $\max_{[1;3]} f(x) = \max\left\{\frac{2-m}{2}; \frac{6-m}{4}\right\}$

B. $\max_{[1;3]} f(x) = \frac{6-m}{4}$ khi $m < -2$

C. $\min_{[1;3]} f(x) = \min\left\{\frac{2-m}{2}; \frac{6-m}{4}\right\}$

D. $\min_{[1;3]} f(x) = \frac{2-m}{2}$ khi $m > -2$

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(x) = \frac{2x - m}{x + 1}$ với $m \neq -2$.

Tập xác định $x \neq -1$.

Ta có $f'(x) = \frac{2+m}{(x+1)^2}$ suy đạo hàm không đổi dấu $x \in [1;3]$ suy ra

$$\max_{[1;3]} f(x) = \max\{f(1); f(3)\} = \max\left\{\frac{2-m}{2}; \frac{6-m}{4}\right\};$$

$$\min_{[1;3]} f(x) = \min\{f(1); f(3)\} = \min\left\{\frac{2-m}{2}; \frac{6-m}{4}\right\}.$$

Xét với $m < -2 \Rightarrow f'(x) < 0 \forall x \in [1;3]$. Vậy $\forall x \in [1;3] \Rightarrow f(x) \leq f(1) = \frac{2-m}{2}$

$$\Rightarrow \max_{[1;3]} f(x) = \frac{2-m}{2}$$

Xét với $m > -2 \Rightarrow f'(x) > 0 \quad \forall x \in [1; 3]$. Vậy $\forall x \in [1; 3] \Rightarrow f(x) \geq f(1) = \frac{2-m}{2}$
 $\Rightarrow \min_{[1;3]} f(x) = \frac{2-m}{2}$.

Câu 49. (THPT Đông Sơn 1 - Thanh Hóa 2019) Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + 2m - 1|$ trên đoạn $[0; 2]$ là nhỏ nhất. Giá trị của m thuộc khoảng nào?

- A. $\left(-\frac{3}{2}; -1\right)$. B. $\left(\frac{2}{3}; 2\right)$. C. $[-1; 0]$. D. $(0; 1)$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x + 2m - 1$ trên đoạn $[0; 2]$.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \notin [0; 2] \\ x = 1 \end{cases}$$

Ta có

$$f(0) = 2m - 1, \quad f(1) = 2m - 3 \quad \text{và} \quad f(2) = 2m + 1$$

Ta có

$$\text{Suy ra } \max_{[0;2]} |f(x)| = \max\{|2m - 1|; |2m - 3|; |2m + 1|\} = \max\{|2m - 3|; |2m + 1|\} = P$$

$$\text{Trường hợp 1: Xét } |2m - 3| \geq |2m + 1| \Leftrightarrow -4(4m - 2) \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Khi đó } P = |2m - 3| \geq 2, \quad \forall m \leq \frac{1}{2}. \text{ Suy ra } P_{\min} = 2 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$\text{Trường hợp 2: Xét } |2m - 3| < |2m + 1| \Leftrightarrow -4(4m - 2) < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$$

$$\text{Khi đó } P = |2m + 1| > 2, \quad \forall m > \frac{1}{2}. \text{ Suy ra } P_{\min} \text{ không tồn tại.}$$

$$\text{Vậy } m = \frac{1}{2}$$

Câu 50. (Chuyên Lương Văn Tỵ - Ninh Bình - 2020) Cho hàm số $f(x) = |3e^{4x} - 4e^{3x} - 24e^{2x} + 48e^x + m|$. Gọi A, B lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0; \ln 2]$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-23; 10]$ thỏa mãn $A \leq 3B$. Tổng các phần tử của tập S bằng

- A. - 33. B. 0. C. - 111. D. - 74.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } t = e^x, x \in [0; \ln 2] \Rightarrow t \in [1; 2]$$

$$\text{Xét hàm số } h(t) = |3t^4 - 4t^3 - 24t^2 + 48t + m| \text{ trên } [1; 2]$$

$$\text{Đặt } g(t) = 3t^4 - 4t^3 - 24t^2 + 48t + m$$

$$g'(t) = 12t^3 - 12t^2 - 48t + 48; \quad g'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \notin [1; 2] \\ t = 2 \\ t = 1 \end{cases};$$

$$g(1) = m + 23, \quad g(2) = m + 16$$

$$\text{TH1: } -16 \leq m < 10 \Rightarrow m + 23 \geq m + 16 \geq 0 \Rightarrow A = \max_{[1;2]} h(t) = m + 23; \quad B = \min_{[1;2]} h(t) = m + 16.$$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} -16 \leq m < 10 \\ m + 23 \leq 3m + 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -16 \leq m < 10 \\ m \geq \frac{-25}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{-25}{2} \leq m < 10$$

Do đó: có 22 giá trị

$$\text{TH2: } -23 \leq m < -16 \Rightarrow |m + 23| = m + 23, \quad |m + 16| = -m - 16$$

$$\text{Dễ thấy } B = 0. \text{ Suy ra } \begin{cases} m + 23 < -m - 16 \\ -m - 16 \leq 0 \\ m + 23 \geq -m - 16 \\ m + 23 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -16 \leq m < -19.5 \\ -19.5 \leq m \leq -23 \end{cases} (VL)$$

Vậy $S = \{-12; -11; \dots; 0; 1; \dots; 9\}$ và tổng các phần tử của tập S bằng $-12 + (-11) + (-10) = -33$

- Câu 51. (Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 3. Số phần tử của S là
- A.** 2. **B.** 6. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Xét hàm số } g(x) = x^3 - 3x + m, \text{ ta có } g'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \notin [0; 2] \\ x = 1 \in [0; 2] \end{cases}$$

$$g(0) = m, \quad g(1) = m - 2, \quad g(2) = m + 2$$

$$\text{Vậy giá trị lớn nhất của hàm số } f(x) = |x^3 - 3x + m| \text{ bằng max của } F = \{|m|; |m - 2|; |m + 2|\}$$

$$\text{TH1: } |m| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -3 \end{cases}$$

Với $m = 3 \Rightarrow F = \{3; 1; 5\}$ loại vì max bằng 5.

Với $m = -3 \Rightarrow F = \{3; 5; 1\}$ loại vì max bằng 5.

$$\text{TH2: } |m - 2| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ m = -1 \end{cases}$$

Với $m = 5 \Rightarrow F = \{5; 3; 7\}$ loại vì max bằng 7.

Với $m = -1 \Rightarrow F = \{1; 3; 1\}$ có max bằng 3. Chọn $m = -1$.

$$\text{TH3: } |m+2|=3 \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=-5 \end{cases}$$

Với $m=1 \Rightarrow F=\{1;1;3\}$ có max bằng 3. Chọn $m=1$.

Với $m=-5 \Rightarrow F=\{5;7;3\}$ loại vì max bằng 7.

Vậy $S=\{-1;1\} \Rightarrow$ có 2 giá trị m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 52. (Sở Sơn La 2023) Cho số thực a thỏa mãn giá trị lớn nhất của biểu thức $\left| \ln(x^2+1) - \frac{x^2}{2} - a \right|$ trên đoạn $[0;4]$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó, giá trị của a thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(-4; -3)$.

B. $(-3; -2)$.

C. $(-2; -1)$.

D. $(-1; 0)$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(x) = \ln(x^2+1) - \frac{x^2}{2} - a$ trên đoạn $[0;4]$.

Ta có $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - x; f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \in [0;4] \\ x=1 \in [0;4] \end{cases}$

$$f(0) = -a; f(1) = \ln 2 - \frac{1}{2} - a; f(4) = \ln 17 - 8 - a.$$

Ta có $M = \max_{[0;4]} f(x) = \ln 2 - \frac{1}{2} - a; m = \min_{[0;4]} f(x) = \ln 17 - 8 - a$

$$\text{Khi đó } \max_{[0;4]} |f(x)| = \frac{|M+m| + |M-m|}{2} = \frac{\left| \ln 2 + \ln 17 - \frac{17}{2} - 2a \right| + \left| \ln 2 - \ln 17 + \frac{15}{2} \right|}{2}$$

$$\geq \frac{\ln 2 - \ln 17 + \frac{15}{2}}{2} = \frac{\ln \frac{2}{17} + \frac{15}{2}}{2}.$$

$$\text{Đạt được khi } \ln 2 + \ln 17 - \frac{17}{2} - 2a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{\ln 34}{2} - \frac{17}{4} \Rightarrow a \in (-3; -2)$$

Câu 53. (THPT Thái Phiên - Hải Phòng 2023) Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + 2m - 1|$ trên đoạn $[0;2]$ là nhỏ nhất. Giá trị của m thuộc khoảng nào?

A. $(0;1)$.

B. $\left(\frac{2}{3}; 2 \right)$.

C. $[-1;0]$.

D. $\left(-\frac{3}{2}; -1\right)$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $f(x) = x^3 - 3x + 2m - 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$. Nên: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in (0; 2) \\ x = -1 \notin (0; 2) \end{cases}$

Có: $f(1) = 2m - 3 < f(0) = 2m - 1 < f(2) = 2m + 1$

$$\Rightarrow \max_{[0;2]} |f(x)| = \max\{|2m + 1|, |2m - 3|\}$$

TH1: $\max_{[0;2]} |f(x)| \geq 2m + 1$ thì:

$$|2m + 1| \geq |2m - 3| \Leftrightarrow (2m + 1)^2 \geq (2m - 3)^2 \Leftrightarrow 16m \geq 8 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}$$

Với $m \geq \frac{1}{2} \Rightarrow |2m + 1| \geq 2 \Rightarrow$ GTLN của hàm số trên đoạn $[0; 2]$ đạt GTNN là: 2 khi $m = \frac{1}{2}$.

TH2: $\max_{[0;2]} |f(x)| \geq |2m - 3|$ thì

$$|2m - 3| \geq |2m + 1| \Leftrightarrow (2m - 3)^2 \geq (2m + 1)^2 \Leftrightarrow 16m \leq 8 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{2}$$

Với $m \leq \frac{1}{2} \Rightarrow |2m - 3| \geq 2 \Rightarrow$ GTLN của hàm số trên đoạn $[0; 2]$ đạt GTNN là: 2 khi $m = \frac{1}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0; 2]$ đạt GTNN là: 2 khi $m = \frac{1}{2}$.

Câu 54. (THPT Liên Trường, Nghệ An 2023) Cho hàm số $y = |x^3 + x + b + 1|$ với b là tham số. Gọi $M = \max_{[-1;1]} y$. Giá trị nhỏ nhất của M thuộc khoảng nào sau?

- A. $(0, 5; 1, 5)$. B. $(1, 5; 2, 5)$. C. $(3, 5; 4, 5)$. D. $(2, 5; 3, 5)$.

Lời giải

Chọn B

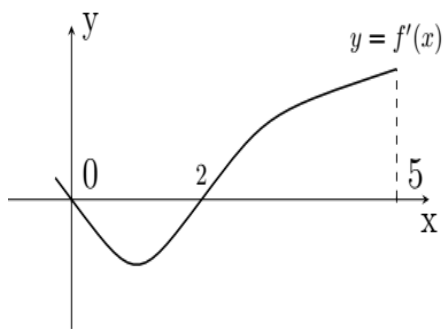
Xét hàm số $f(x) = x^3 + x + b + 1$, có $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $\min_{[-1;1]} f(x) = f(-1) = b - 1; \max_{[-1;1]} f(x) = f(1) = b + 3$

$$\text{Khi đó } M = \max_{[-1;1]} y = \frac{|(b - 1) + (b + 3)| + |(b - 1) - (b + 3)|}{2} = \frac{|2b + 2| + 4}{2} \geq \frac{4}{2} = 2$$

khi $2b + 2 = 0 \Leftrightarrow b = -1$.

Câu 55. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là hàm $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ. Biết rằng $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $y = f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$ lần lượt là:



- A. $f(2); f(5)$ B. $f(0); f(5)$ C. $f(2); f(0)$ D. $f(1); f(5)$

Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ ta có bảng biến thiên.

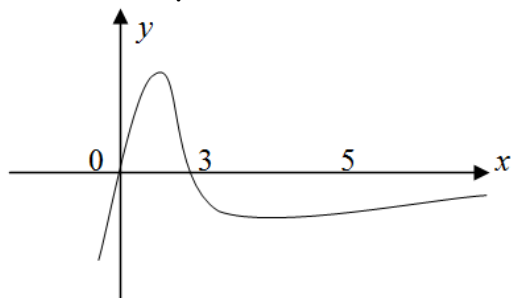
x	0	2	5
f'	0	0	
f	$f(0)$	$f(2)$	$f(5)$

Khi đó:
$$\begin{cases} \min_{[0;5]} f(x) = f(2) \\ f(3) > f(2) \end{cases}$$

mà $f(0) + f(3) = f(2) + f(5) \Rightarrow f(0) + f(2) < f(2) + f(5) \Rightarrow f(0) < f(5)$

Vậy giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $y = f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$ lần lượt là: $f(2); f(5)$.

Câu 56. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0) + f(1) - 2f(3) = f(5) - f(4)$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$.



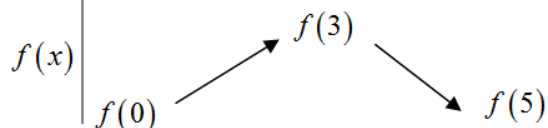
- A. $m = f(5), M = f(3)$ B. $m = f(5), M = f(1)$
C. $m = f(0), M = f(3)$ D. $m = f(1), M = f(3)$

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của $f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$

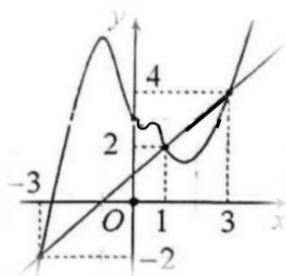
x	0	3	5	
$f'(x)$	0	+	0	-



$$\Rightarrow M = f(3) \text{ và } f(1) < f(3), f(4) < f(3)$$

$$f(5) - f(0) = f(1) - f(3) + f(4) - f(3) < 0 \Rightarrow f(5) < f(0) \Rightarrow m = f(5)$$

Câu 57. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$. Mệnh đề dưới đây đúng.



- A. $\max_{[-3;3]} g(x) = g(3)$. B. $\min_{[-3;3]} g(x) = g(1)$. C. $\max_{[-3;3]} g(x) = g(0)$. D. $\max_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.

Lời giải

Chọn D

$$g(x) = 2f(x) - (x+1)^2 \Rightarrow g'(x) = 2f'(x) - 2(x+1)$$

Dựa vào đồ thị ta thấy

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Và

$$\text{với } x \in (-\infty; -3): f'(x) < x+1 \Rightarrow g'(x) < 0$$

$$\text{với } x \in (-3; 1): f'(x) > x+1 \Rightarrow g'(x) > 0$$

$$\text{với } x \in (1; 3): f'(x) < x+1 \Rightarrow g'(x) < 0$$

$$\text{với } x \in (3; +\infty): f'(x) > x+1 \Rightarrow g'(x) > 0$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-3	1	3	$+\infty$		
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$							

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $\max_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.

Câu 58. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0) = 3$, $f'(2) = -2018$ và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = f(x + 2017) + 2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

- A.** $(-\infty; -2017)$ **B.** $(2017; +\infty)$ **C.** $(0; 2)$ **D.** $(-2017; 0)$

Lời giải

Dựa vào bảng xét dấu của $f''(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f'(x)$		3	-2018		

Đặt $t = x + 2017$.

Ta có $y = f(x + 2017) + 2018x = f(t) + 2018t - 2017 \cdot 2018 = g(t)$.

$$g'(t) = f'(t) + 2018$$

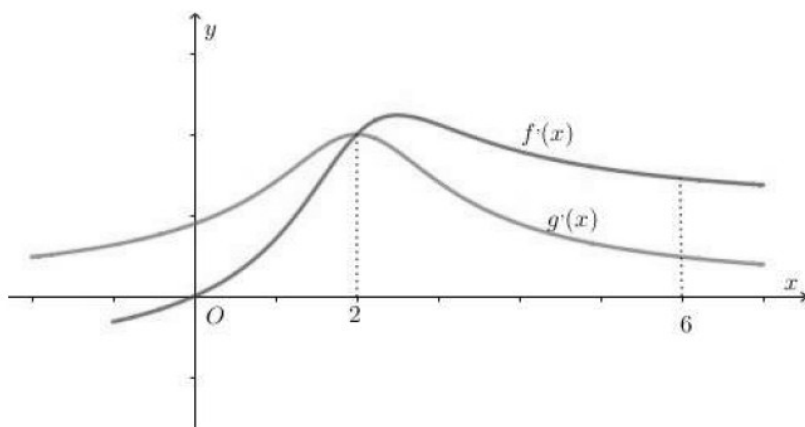
Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ suy ra phương trình $g'(t)$ có một nghiệm đơn $\alpha \in (-\infty; 0)$ và một nghiệm kép $t = 2$.

Ta có bảng biến thiên $g(t)$

Hàm số $g(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $t_0 = \alpha \in (-\infty; 0)$.

Suy ra hàm số $y = f(x + 2017) + 2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0 mà $x_0 + 2017 \in (-\infty; 0) \Leftrightarrow x_0 \in (-\infty; -2017)$.

Câu 59. Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$, $g'(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và $g'(x)$ được cho như hình vẽ bên dưới.



Biết rằng $f(0) - f(6) < g(0) - g(6)$. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$ trên đoạn $[0; 6]$ lần lượt là:

- A. $h(6), h(2)$ B. $h(2), h(6)$ C. $h(0), h(2)$ D. $h(2), h(0)$

Lời giải

Ta có $h'(x) = f'(x) - g'(x)$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên:

x	0	2	6
$h'(x)$		- 0 +	
$h(x)$	$h(0)$	$h(2)$	$h(6)$

$$\text{Và } f(0) - f(6) < g(0) - g(6) \Leftrightarrow f(0) - g(0) < f(6) - g(6)$$

$$\text{Hay } h(0) < h(6)$$

$$\text{Vậy } \max_{[0;6]} h(x) = h(6) \quad \min_{[0;6]} h(x) = h(2)$$

Câu 60. (Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0) = 3, f'(2) = f'(-2018) = 0$, và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f''(x)$	+	0	-	0	+

Hàm số $y = f(|x - 1| - 2018)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(-\infty; -2015)$ B. $(1; 3)$ C. $(-1009; 2)$ D. $(-2015; 1)$

Lời giải.

Chọn C

Từ bảng xét dấu của $f''(x)$ và giả thiết $f'(0)=3, f'(2)=f'(-2018)=0$ suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-2018	0	2	$+\infty$	
$f''(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$						

Từ đó suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$:

x	$-\infty$	-2018	2	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$					

Hàm số $y=f(|x-1|-2018)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $|x-1|-2018=-2018$
 $\Leftrightarrow |x-1|=0 \Leftrightarrow x=1 \in (-1009; 2)$

Câu 61. (THPT Anh Sơn - Nghệ An - 2020) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0)=3, f'(2)=-2020, \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x)=-\infty$ và bảng xét dấu của $f''(x)$ như hình sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y=f(x+2019)+2020x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm x_0 thuộc khoảng nào sau đây?
A. $(-\infty; -2019)$ **B.** $(0; 2)$ **C.** $(-2019; 0)$ **D.** $(2019; +\infty)$

Lời giải

Chọn A

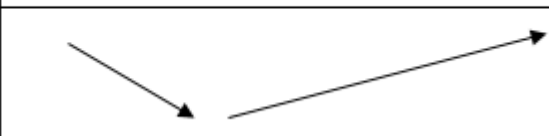
Theo giả thiết ta có

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$			3			
	$-\infty$				-2020	

Ta có $y'=f'(x+2019)+2020 \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow f'(x+2019)=-2020$

Từ bảng biến thiên trên ta có $y'=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2019=a \\ x+2019=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=a-2019 \\ x=-2017 \end{cases}$, với $a < 0$.

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x+2019)+2020x$

x	$-\infty$	$a-2019$	-2017	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y					

Từ bảng biến thiên có hàm số $y = f(x + 2019) + 2020x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = a - 2019$.

Vì $a < 0$ nên $x_0 \in (-\infty; -2019)$.

- Câu 62.** (THPT Lê Lợi - Thanh Hóa - 2021) Cho hàm số $y = f(x) = 2x^2 - 4x - 2$. Gọi S là tổng tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = g(x) = |f^2(x) - 2f(x) + m|$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1; 3]$ bằng 15. Tổng S thuộc khoảng nào sau đây?
- A. $(-25; -15)$. B. $(-14; 1)$. C. $(1; 8)$. D. $(8; 12)$.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y = f(x) = 2x^2 - 4x - 2$ có $f'(x) = 4x - 4; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow f(1) = -4$

Xét hàm số $h(x) = f^2(x) - 2f(x) + m$ có $h'(x) = 2f'(x)[f(x) - 1]$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = 1 \end{cases}$$

□ Với $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow h(1) = m + 24$

□ Với $f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 1 \pm a$, với $a > 0 \Rightarrow h(1 \pm a) = m - 1$

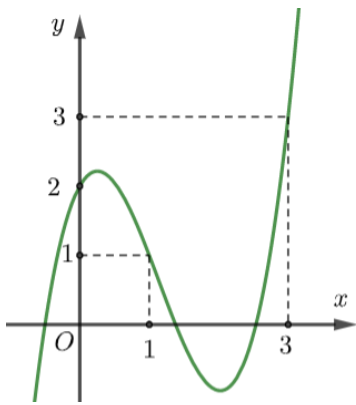
Tại $x = -1 \Rightarrow h(-1) = m + 8$; tại $x = 3 \Rightarrow h(3) = m + 8$

Khi đó $B = \max_{[-1; 3]} h(x) = m + 24; b = \min_{[-1; 3]} h(x) = m - 1$.

$$\text{Mà } \max_{[-1; 3]} g(x) = 15 \Leftrightarrow \frac{|B + b| + |B - b|}{2} = 15 \Leftrightarrow |2m + 23| + 25 = 30 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -9 \\ m = -14 \end{cases}$$

Vậy tổng các giá trị của m là $-23 \in (-25; -15)$.

- Câu 63.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Trên $[-2; 4]$, gọi x_0 là điểm mà tại đó hàm số $g(x) = f\left(\frac{x}{2} + 1\right) - \ln(x^2 + 8x + 16)$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó x_0 thuộc khoảng nào?



A. $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

B. $\left(2; \frac{5}{2}\right)$.

C. $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$.

D. $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn D

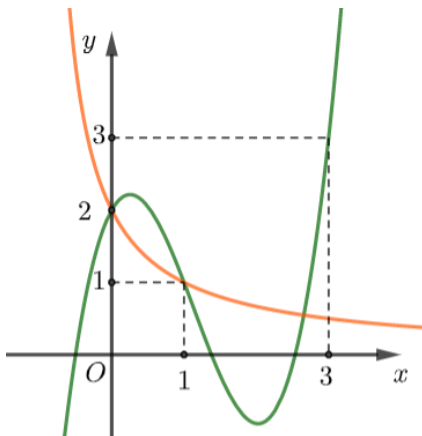
Ta có
$$g'(x) = \frac{1}{2}f'\left(\frac{x}{2}+1\right) - \frac{2x+8}{x^2+8x+16} = \frac{1}{2}f'\left(\frac{x}{2}+1\right) - \frac{2}{x+4}.$$

Cho
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'\left(\frac{x}{2}+1\right) = \frac{4}{x+4}.$$

Đặt
$$t = \frac{x}{2}+1 \Rightarrow t \in [0; 3]$$

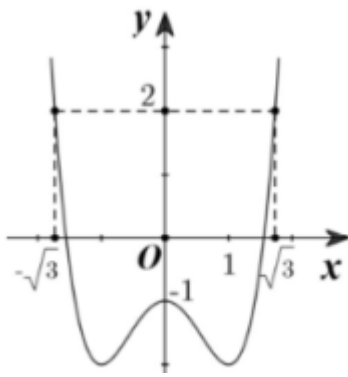
Phương trình trở thành
$$f'(t) = \frac{4}{2t+2} = \frac{2}{t+1}.$$

Vẽ đồ thị $y = \frac{2}{x+1}$ lên cùng một hệ tọa độ ta được:



Từ đồ thị ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $t=1 \Rightarrow x=0$.

Câu 64. (Sở Thanh Hóa 2022) Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị của đạo hàm như hình vẽ:

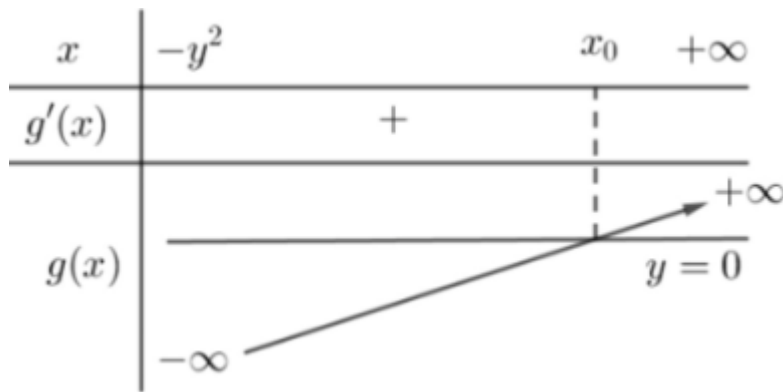


Giá trị lớn nhất của hàm số $h(x) = 3f(x) - x^3 + 3x$ trên đoạn $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$ bằng

- A. $3f(1) + 2$.
- B. $3f(0)$.
- C. $3f(-\sqrt{3})$.
- D. $3f(\sqrt{3})$.

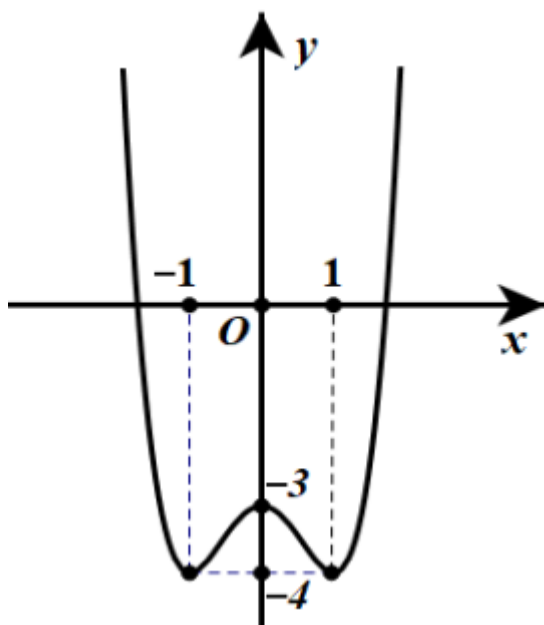
Lời giải

Ta có $h'(x) = 3f'(x) - 3x^2 + 3 = 3[f'(x) - (x^2 - 1)] \leq 0, \forall x \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$. Vì vẽ thêm parabol $y = x^2 - 1$ qua các điểm $(0; -1); (-\sqrt{3}; 2); (\sqrt{3}; 2)$. Nhận thấy $f'(x)$ nằm dưới parabol trên đoạn $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$.



Vậy $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]} h(x) = h(-\sqrt{3}) = 3f(-\sqrt{3})$.

Câu 65. (Sở Bắc Giang 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Đặt $g(x) = f(\sqrt{x^2 - 4x + 6}) - 2(x^2 - 4x)\sqrt{x^2 - 4x + 6} - 12\sqrt{x^2 - 4x + 6} + 1$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ trên đoạn $[1; 4]$ bằng

- A. $12 - 2\sqrt{4}$.
 B. $-12 - 12\sqrt{6}$.
 C. $-12 - 2\sqrt{4}$.
D. $12 - 12\sqrt{6}$.

Lời giải

Từ đồ thị suy ra $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 4x$

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 4x + 6}, x \in [1; 4] \Rightarrow t \in [\sqrt{2}; \sqrt{6}]$.

Ta có: $g(x) = f(\sqrt{x^2 - 4x + 6}) - 2(x^2 - 4x + 6)\sqrt{x^2 - 4x + 6} + 1$

Suy ra hàm số đã cho trở thành

$$h(t) = f(t) - 2t^3 + 1 \Rightarrow h'(t) = f'(t) - 6t^2$$

$$h(t) = 0 \Leftrightarrow f'(t) - 6t^2 = 0 \Leftrightarrow 4t^3 - 6t^2 - 4t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \notin (\sqrt{2}; \sqrt{6}) \\ t = -\frac{1}{2} \notin (\sqrt{2}; \sqrt{6}) \\ t = 2 \in (\sqrt{2}; \sqrt{6}) \end{cases}$$

Ta có:

$$h(\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) - 2 \cdot (\sqrt{2})^3 + 1 = -2 - 4\sqrt{2}$$

$$h(2) = f(2) - 2 \cdot (2)^3 + 1 = -10$$

$$h(\sqrt{6}) = f(\sqrt{6}) - 2 \cdot (\sqrt{6})^3 + 1 = 22 - 12\sqrt{6}$$

Suy ra giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(t)$ trên đoạn $[\sqrt{2}; \sqrt{6}]$ lần lượt là $22 - 12\sqrt{6}$ và -10 .

Vậy tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $g(x)$ trên $[1; 4]$ là tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $h(t)$ trên $[\sqrt{2}; \sqrt{6}]$ và bằng $12 - 12\sqrt{6}$.

- Câu 66. (Chuyên Lê Quý Đôn - Quảng Trị -2019)** Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x + y = \frac{3}{2}$ và biểu thức $P = \frac{4}{x} + \frac{1}{4y}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $x^2 + y^2$.
- A.** $\frac{153}{100}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{2313}{1156}$. **D.** $\frac{25}{16}$.

Lời giải

Chọn A

Từ $x + y = \frac{3}{2}$ suy ra $y = \frac{3}{2} - x$. Ta có: $0 < x, y < \frac{3}{2}$.

Xét hàm $P(x) = \frac{4}{x} + \frac{1}{4\left(\frac{3}{2} - x\right)} = \frac{4}{x} + \frac{1}{6 - 4x}$ trên khoảng $\left(0; \frac{3}{2}\right)$, ta có:

$$P'(x) = -\frac{4}{x^2} - \frac{-4}{(6 - 4x)^2}$$

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{(6 - 4x)^2} = \frac{4}{x^2} \Leftrightarrow x^2 = (6 - 4x)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 - 4x \\ x = 4x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên của $P(x)$ trên $\left(0; \frac{3}{2}\right)$:

x	0		$\frac{6}{5}$		$\frac{3}{2}$
$P'(x)$		-	0	+	
$P(x)$	$+\infty$	↘		↗	
			$\frac{25}{6}$		$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\min_{\left(0; \frac{3}{2}\right)} P(x) = \frac{25}{6}$ khi $x = \frac{6}{5}$.

Với $x = \frac{6}{5}$ thì $y = \frac{3}{10}$.

Như vậy $\min P = \frac{25}{6}$ khi $x = \frac{6}{5}, y = \frac{3}{10}$.

Khi đó, $x^2 + y^2 = \frac{153}{100}$.

- Câu 67. (Sở Lào Cai - 2019)** Cho hàm số $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ có ít nhất một giao điểm với trục hoành. Bất đẳng thức nào sau đây là đúng?
- A. $a^2 + b^2 + c^2 > \frac{4}{3}$ B. $a^2 + b^2 + c^2 < \frac{4}{3}$ C. $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{3}$ D. $a^2 + b^2 + c^2 \leq \frac{4}{3}$

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0 \quad (1)$

Nhận xét $x = 0$ không phải là nghiệm. Với $x \neq 0$ phương trình trở thành

$$(1) \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = -\left(x^3 + \frac{1}{x}\right) \quad (x \neq 0)$$

$$\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^2 = (ax^2 + bx + c)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^4 + x^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^2}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2}{x^2 + \frac{1}{x^2} + 1}$$

$$t = x^2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow t \geq 2 \Rightarrow f(t) = \frac{t^2}{t+1}, \forall t \geq 2 \Rightarrow f'(t) = \frac{t^2 + 2t}{(t+1)^2} > 0, \forall t \geq 2$$

Bảng biến thiên

Vậy để đồ thị hàm số $y = f(x)$ có ít nhất một giao điểm với trục hoành thì $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{3}$

- Câu 68. (THPT Nguyễn Huệ - Ninh Bình - 2018)** Cho $x, y > 0$ và $x + y = \frac{5}{4}$ sao cho biểu thức $P = \frac{4}{x} + \frac{1}{4y}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó

A. $x^2 + y^2 = \frac{25}{32}$ B. $x^2 + y^2 = \frac{17}{16}$ C. $x^2 + y^2 = \frac{25}{16}$ D. $x^2 + y^2 = \frac{13}{16}$

Lời giải

Từ $x + y = \frac{5}{4} \Rightarrow y = \frac{5}{4} - x$, nên $P = \frac{4}{x} + \frac{1}{5 - 4x}$.

Xét hàm số $P = \frac{4}{x} + \frac{1}{5 - 4x}$ với $0 < x < \frac{5}{4}$.

$$P' = -\frac{4}{x^2} + \frac{4}{(5 - 4x)^2}, P' = 0 \Leftrightarrow x^2 = (5 - 4x)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in \left(0; \frac{5}{4}\right) \\ x = \frac{5}{3} \notin \left(0; \frac{5}{4}\right) \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	0	1	$\frac{5}{4}$	
P'		-	0	+
P				

A diagram below the table shows a horizontal line with three points marked: 0, 1, and $\frac{5}{4}$. Above this line, there are signs: a minus sign (-) between 0 and 1, a 0 between 1 and $\frac{5}{4}$, and a plus sign (+) to the right of $\frac{5}{4}$. Below the line, there are two arrows. The first arrow starts at 0 and points to a point labeled 5. The second arrow starts at 5 and points to $\frac{5}{4}$.

Như vậy: $\min P = 5$ khi $x = 1$; $y = \frac{1}{4}$.

Khi đó $x^2 + y^2 = \frac{17}{16}$.

Câu 69. (Xuân Trường - Nam Định -2018) Cho x, y là hai số thực dương thay đổi thỏa mãn điều kiện $(xy+1)(\sqrt{xy+1} - \sqrt{y}) \leq 1 - x - \frac{1}{y}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x+y}{\sqrt{x^2 - xy + 3y^2}} - \frac{x-2y}{6(x+y)}?$$

A. $\frac{\sqrt{5}}{3} - \frac{7}{30}$.

B. $\frac{7}{30} - \frac{\sqrt{5}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{7}{30}$.

D. $\frac{\sqrt{5}+7}{30}$.

Lời giải

$$(xy+1)(\sqrt{xy+1} - \sqrt{y}) \leq 1 - x - \frac{1}{y}$$

$$\Leftrightarrow y(xy+1)(\sqrt{xy+1} - \sqrt{y}) + (\sqrt{xy+1}^2 - \sqrt{y}^2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{xy+1} - \sqrt{y})[y(xy+1) + (\sqrt{xy+1} + \sqrt{y})] \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{xy+1} - \sqrt{y} \leq 0 \Leftrightarrow xy+1 \leq y$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{y} \leq -\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{x}{y} \leq \frac{1}{4}. \text{ Dấu bằng đạt được khi } y=2, x=\frac{1}{2}.$$

$$P = \frac{x+y}{\sqrt{x^2 - xy + 3y^2}} - \frac{x-2y}{6(x+y)} = \frac{t+1}{\sqrt{t^2 - t + 3}} - \frac{t-2}{6(t+1)} \text{ với } t = \frac{x}{y} \text{ và } t \in \left(0; \frac{1}{4}\right].$$

Ta có $\frac{t+1}{\sqrt{t^2 - t + 3}} \leq \frac{\sqrt{5}}{27}(8t+7)$ với mọi $t \in \left(0; \frac{1}{4}\right]$

Thật vậy $\frac{t+1}{\sqrt{t^2 - t + 3}} \leq \frac{\sqrt{5}}{27}(8t+7) \Leftrightarrow -\frac{1}{729} \frac{(4t-1)^2(20t^2+25t+6)}{t^2 - t + 3} \leq 0$ với mọi $t \in \left(0; \frac{1}{4}\right]$.

$$P \leq \frac{\sqrt{5}}{27}(8t+7) - \frac{t-2}{6t+6} = f(t)$$

$$f'(t) = \frac{1}{54} \cdot \frac{16\sqrt{5}t^2 + 32\sqrt{5}t + 16\sqrt{5} - 27}{(t+1)^2} > 0 \quad \text{với mọi } t \in \left(0; \frac{1}{4}\right]$$

Khi đó

$$P \leq \frac{\sqrt{5}}{27}(8t+7) - \frac{t-2}{6t+6} = f(t) \leq f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{7+10\sqrt{5}}{30}, \text{ dấu bằng đạt được khi } x = \frac{1}{2}, y = 2.$$

Câu 70. (Cụm 5 Trường Chuyên - ĐBsh - 2018) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \left| \sin x + \cos x + \tan x + \cot x + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \right|$$

A. $\sqrt{2} - 1$. B. $2\sqrt{2} + 1$. C. $\sqrt{2} + 1$. D. $2\sqrt{2} - 1$.

Lời giải

$$\text{Ta có } y = \left| \sin x + \cos x + \tan x + \cot x + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \right| = \left| \sin x + \cos x + \frac{1 + \sin x + \cos x}{\sin x \cdot \cos x} \right|$$

$$\text{Đặt } t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), t \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \setminus \{1\}, \sin x \cdot \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$$

$$\text{Suy ra } y = \left| t + \frac{1+t}{\frac{t^2-1}{2}} \right| = \left| t + \frac{2}{t-1} \right|$$

$$\text{Xét hàm số } g(t) = t + \frac{2}{t-1}, g'(t) = 1 - \frac{2}{(t-1)^2} = \frac{(t-1)^2 - 2}{(t-1)^2}, g'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{2} + 1 (l) \\ t = -\sqrt{2} + 1 (m) \end{cases}$$

$$g(\sqrt{2}) = 3\sqrt{2} + 2 > 0, g(-\sqrt{2}) < 0, g(-\sqrt{2} + 1) = -2\sqrt{2} + 1 < 0$$

Ta có bảng biến thiên

t	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}+1$	1	$\sqrt{2}$
$g'(t)$		+	0	-
$g(t)$	$g(-\sqrt{2})$	$g(-\sqrt{2}+1)$	$+\infty$	$g(\sqrt{2})$
$y = g(t) $	$ g(-\sqrt{2}) $	$ g(-\sqrt{2}+1) $	$+\infty$	$g(\sqrt{2})$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $y_{\min} = \left| y(-\sqrt{2}+1) \right| = 2\sqrt{2} - 1$.

Câu 71. (Sở Bắc Ninh - 2018) Gọi M, m lần lượt là giá lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^{2018} x + \cos^{2018} x$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó:

- A. $M = 2, m = \frac{1}{2^{1008}}$. B. $M = 1, m = \frac{1}{2^{1009}}$. C. $M = 1, m = 0$. D. $M = 1, m = \frac{1}{2^{1008}}$.

Lời giải

Ta có: $y = \sin^{2018} x + \cos^{2018} x = (\sin^2 x)^{1009} + (1 - \sin^2 x)^{1009}$.

Đặt $t = \sin^2 x, 0 \leq t \leq 1$ thì hàm số đã cho trở thành $y = t^{1009} + (1 - t)^{1009}$.

Xét hàm số $f(t) = t^{1009} + (1 - t)^{1009}$ trên đoạn $[0; 1]$.

Ta có: $f'(t) = 1009t^{1008} - 1009(1 - t)^{1008}$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 1009t^{1008} - 1009(1 - t)^{1008} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1 - t}{t} \right)^{1008} = 1 \Leftrightarrow \frac{1 - t}{t} = 1 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\text{Mà } f(1) = f(0) = 1, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{1008}}.$$

$$\text{Suy ra } \max_{[0;1]} f(t) = f(0) = f(1) = 1, \min_{[0;1]} f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{1008}}$$

$$\text{Vậy } M = 1, m = \frac{1}{2^{1008}}.$$

Câu 72. (Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh - 2021) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} x^2 - xy + 3 = 0 \\ 2x + 3y - 14 \leq 0 \end{cases}$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3x^2y - xy^2 - 2x^3 + 2x$ thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(-2; 2)$. B. $(-\infty; -1)$. C. $(1; 3)$. D. $(0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $x^2 - xy + 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{x^2 + 3}{x}$ thay vào $2x + 3y - 14 \leq 0$ ta có bất phương trình

$$2x + 3 \frac{x^2 + 3}{x} - 14 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{9}{5}. \text{ Thay } y = \frac{x^2 + 3}{x} \text{ vào } P = 3x^2y - xy^2 - 2x^3 + 2x \text{ ta có}$$

$$P = 3x^2 \frac{x^2 + 3}{x} - x \left(\frac{x^2 + 3}{x} \right)^2 - 2x^3 + 2x = 3x(x^2 + 3) - \frac{x^4 + 6x^2 + 9}{x} - 2x^3 + 2x = \frac{5x^2 - 9}{x}$$

$$P' = \frac{5x^2 + 9}{x^2} > 0, \forall x \in \left[1; \frac{9}{5}\right]. \text{ Suy ra } P = \frac{5x^2 - 9}{x} \text{ đồng biến trên } \left[1; \frac{9}{5}\right].$$

$$\text{Vậy } \left[\begin{matrix} \text{Max } P = P\left(\frac{9}{5}\right) = 4; \\ \text{Min } P = P(1) = -4 \end{matrix} \right]_{\left[1; \frac{9}{5}\right]}. \text{ Suy ra } \left[\begin{matrix} \text{Max } P + \text{Min } P = 0 \end{matrix} \right]_{\left[1; \frac{9}{5}\right]}.$$

Câu 73. (Sở Bình Phước - 2021) Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \sqrt{\frac{a+bc}{1+\sqrt{bc}}} + \sqrt{\frac{b+ca}{1+\sqrt{ca}}} + \sqrt{c+2021}$$

bằng

A. $\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{51}}{3}$. B. $\sqrt{2021} + 2$. C. $\sqrt{2021}$. D. $\sqrt{2022}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $a + bc \geq a(a + b + c) \geq a^2 + 2a\sqrt{bc} \geq a^2(1 + \sqrt{bc}) \Rightarrow \sqrt{\frac{a+bc}{1+\sqrt{bc}}} \geq a$

Tương tự ta có: $\sqrt{\frac{b+ca}{1+\sqrt{ca}}} \geq b$

Suy ra: $A \geq a + b + \sqrt{c+2021} = 1 + \sqrt{c+2021}$

Xét hàm số $f(c) = 1 + \sqrt{c+2021}; c \in [0; 1]$

Ta có $f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c+2021}} > 0, \forall c \in [0; 1]$

Vậy $f(c)$ là hàm số nghịch biến nên ta có $f(c) \geq f(1) = \sqrt{2022}$.

Câu 74. (Chuyên Hạ Long 2022) Cho các số thực x, y thỏa mãn

$$\begin{cases} \max\{5; 9x + 7y - 20\} \leq x^2 + y^2 \leq 2x + 8 \\ y \leq 1 \end{cases}$$

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x - 2y$. Tính $M - m$

A. $1 + 3\sqrt{5}$.

B. $2\sqrt{2}$.

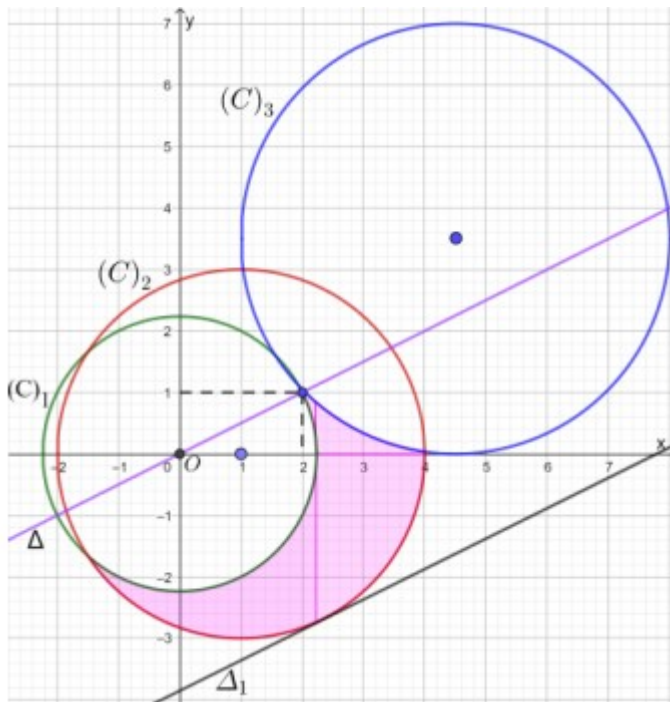
C. $1 + 2\sqrt{2}$.

D. $2 + 3\sqrt{5}$.

Lời giải

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 5 \\ (x-1)^2 + y^2 \leq 9 \\ \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 \geq \frac{25}{2} \end{cases}$$

Từ giả thiết ta có



Tập hợp điểm (x, y) thỏa mãn yêu cầu bài là phần được tô trên hình vẽ kẻ cả biên. Ta thấy (C_1) cắt (C_3) tại hai điểm phân biệt trong đó có điểm $(2, 1)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Xét đường thẳng Δ đi qua (x, y) thỏa mãn yêu cầu bài toán: $x - 2y = c$.

$x - 2y$ đạt GTNN khi Δ đi qua $(2, 1)$ nên $m = 0$.

$$(C_2): x^2 + y^2 = 2x + 8 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 9$$

$$+x - 2y = (x-1) + (-2)y + 1 \leq \sqrt{(1+(-2)^2) \cdot 9} + 1 = 3\sqrt{5} + 1$$

$\Delta_1: x - 2y - 1 - 3\sqrt{5} = 0$. Δ_1 cắt (C_2) tại điểm thỏa mãn bài toán.

Khi đó $M = 3\sqrt{5} + 1$.

Vậy $M - m = 3\sqrt{5} + 1$.