(Đề học sinh giỏi môn toán lớp 9 tỉnh Thái Nguyên 2023-2024)
Thời gian làm bài : 150 phút

Bài 1 (3 điểm). Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{\sqrt[3]{2}+\sqrt{7+2\sqrt{10}}+\sqrt[3]{3\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{2}-1}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}+1}$

Bài 2 (6 điểm). Cho biểu thức $B=\left(\dfrac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}\right):\dfrac{\sqrt{x}-1}{2}$.

a. Rút gọn biểu thức B.

b. Tìm giá trị của x để $B=\dfrac{2}{7}$.

c. Tìm giá trị nguyên của x để giá trị của biểu thức B là số nguyên.

d. So sánh B^2 và $2B$.

Bài 3 (3 điểm).

a. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng $(d): y=(m-2)x+3 (m\neq 3)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng (d) cắt Ox tại điểm A, cắt Oy tại điểm B sao cho $\widehat{ABO}=30^\circ$.

b. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+4y^2=5 \\ 4x^2y+8xy^2+5x+10y=1 \end{cases}$.

Bài 4 (6 điểm). Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB, điểm M di động trên nửa đường tròn đó $(M\neq A, M\neq B)$. Gọi điểm H là hình chiếu vuông góc với điểm M trên đường thẳng AB. Vẽ đường tròn đường kính AH, đường tròn đường kính BH. Đường thẳng MA cắt đường tròn đường kính AH tại điểm $E (E\neq A)$. Đường thẳng MB cắt đường tròn đường kính BH tại điểm $F (F\neq B)$.

a. Chứng minh: $ME\cdot MA=MF\cdot MB$.

b. Gọi K, G lần lượt là hai điểm đối xứng của điểm H qua các đường thẳng MA, MB. Chứng minh rằng ba điểm M, K, G thẳng hàng.

c. Chứng minh : $MH^3=AB\cdot AE\cdot BF$

d. Gọi I, J lần lượt là tâm của đường tròn đường kính AH và BH. Cho $AB=2R$. Xác định vị trí của điểm M để diện tích tứ giác IEFJ đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị đó theo R.

Bài 5 (2 điểm).

a. Cho số tự nhiên n bất kỳ. Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho số $A = 2026n^2 + 1014(n+p)$ luôn viết được dưới dạng hiệu hai số chính phương.

b. Tìm các số nguyên x, y thoả mãn phương trình: $x^2 - 2x = 27y^3$

ĐÁP ÁN

Bài 1 (3 điểm).

$$A = \frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt{7 + 2\sqrt{10}} + \sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{2} - 1}{\sqrt{5} + \sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt{\left(\sqrt{2} + \sqrt{5}\right)^2} + \sqrt[3]{1 - 3\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2^3}}}{\sqrt{5} + \sqrt{2} + 1}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt{\left(\sqrt{2} + \sqrt{5}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(1 - \sqrt[3]{2}\right)^3}}{\sqrt{5} + \sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt{2} + \sqrt{5} + 1 - \sqrt[3]{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2} + 1} = 1$$

Vậy $A = 1$

Bài 2 (6 điểm).

a.

$$B = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} + \frac{1}{1 - \sqrt{x}}\right) : \frac{\sqrt{x} - 1}{2}$$

$$= \left(\frac{(x+2)}{\left(\sqrt{x} - 1\right)\left(x + \sqrt{x} + 1\right)} + \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 1\right)}{\left(\sqrt{x} - 1\right)\left(x + \sqrt{x} + 1\right)} - \frac{\left(x + \sqrt{x} + 1\right)}{\left(x + \sqrt{x} + 1\right)\left(\sqrt{x} - 1\right)}\right) : \frac{\sqrt{x} - 1}{2}$$

$$= \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{\left(\sqrt{x} - 1\right)\left(x + \sqrt{x} + 1\right)} \cdot \frac{2}{\sqrt{x} - 1} = \frac{2\left(\sqrt{x} - 1\right)^2}{\left(\sqrt{x} - 1\right)^2\left(x + \sqrt{x} + 1\right)} = \frac{2}{x + \sqrt{x} + 1}.$$

Vậy $B = \dfrac{2}{x + \sqrt{x} + 1}$ Với $x \geq 0; x \neq 1$.

b. Ta có

$$B = \frac{2}{7} \Leftrightarrow \frac{2}{x + \sqrt{x} + 1} = \frac{2}{7} \Leftrightarrow x + \sqrt{x} + 1 = 7$$

$$\Leftrightarrow x + \sqrt{x} + 6 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = -3 \text{ (L)} \\ \sqrt{x} = 2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \text{ (TMĐK)}.$$

c. Do $x \geq 0; x \neq 1$ nên $x+\sqrt{x}+1 \geq 1 \forall x$

Do đó $0 \leq \dfrac{2}{x+\sqrt{x}+1} \leq \dfrac{2}{1}=2$ mà $B \in Z \Rightarrow B \in \{1;2\}$

+) Nếu $B=1 \Leftrightarrow \dfrac{2}{x+\sqrt{x}+1}=1 \Leftrightarrow x+\sqrt{x}+1=2$

$\Leftrightarrow x+\sqrt{x}-1=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$ mà $\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{2}>0\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{3-2\sqrt{5}}{2}$ (TM)

+) Nếu $B=2 \Leftrightarrow \dfrac{2}{x+\sqrt{x}+1}=2 \Leftrightarrow x+\sqrt{x}+1=1$

$\Leftrightarrow x+\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x}+1)=0$ mà $(\sqrt{x}+1>0)$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=0(\text{tm})$.

Vậy để $B \in Z \Leftrightarrow x \in \left\{0;\dfrac{3-2\sqrt{5}}{2}\right\}$.

d. Xét hiệu $B-2=\dfrac{2}{x+\sqrt{x}+1}-2=\dfrac{-2(x+\sqrt{x})}{x+\sqrt{x}+1}<0$

Vì $x \geq 0; x \neq 1 \Rightarrow x+\sqrt{x}>0$ và $x+\sqrt{x}+1>0$

Ta có $B^2-2B=B(B-2)<0$ do $B>0$

Vậy $B^2<2B$.

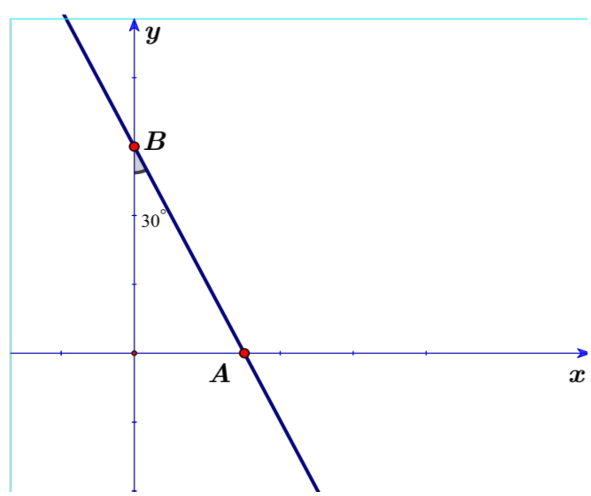
Bài 3 (3 điểm).

a. Cho $x=0; y=3$ ta được $B(0;3) \in Oy$

Cho $y=0; x=\dfrac{-3}{m-2}$ ta được $A\left(\dfrac{-3}{m-2};0\right) \in Ox$.

Suy ra, ta có: $OA=\left|\dfrac{-3}{m-2}\right|; OB=3$

Ta có:



$\tan \widehat{OBA} = \dfrac{OA}{OB} \Rightarrow \left|\dfrac{-3}{m-2}\right| : 3 = \tan 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow |m-2| = \sqrt{3} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = \sqrt{3} + 2 \\ m = -\sqrt{3} + 2 \end{array}\right.$.

b. $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 5 \\ 4x^2y + 8xy^2 + 5x + 10y = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2y)^2 - 4xy + 5 = 0 \\ (x+2y)(4xy+5) = 1 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} x + 2y = a \\ 4xy + 5 = b \end{cases}$

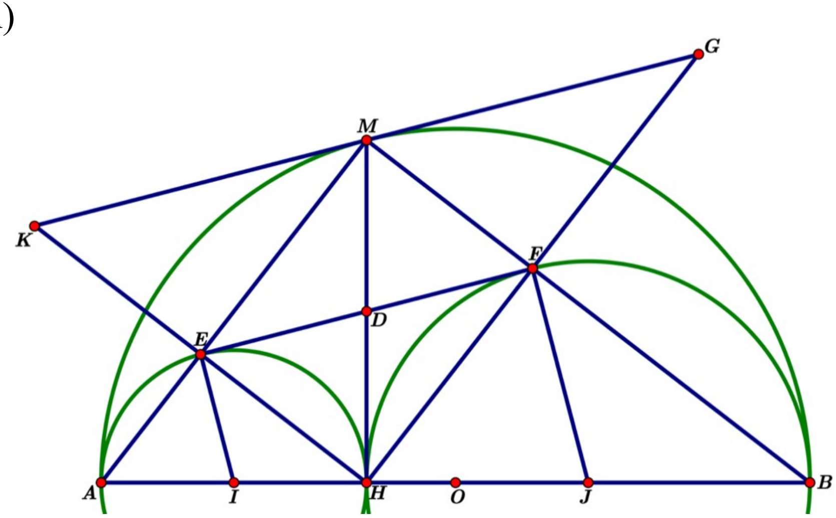
Ta có hệ phương trình $\begin{cases} a^2 - b = 0 \\ ab = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 4xy + 5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2y \\ 4y(1-2y) + 5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2y \\ -8y^2 + 4y + 4 = 0 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} x = -1; y = 1 \\ x = 2; y = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Vậy $(x;y)$ thoả mãn là $(-1;1); \left(2; \dfrac{-1}{2}\right)$.

Bài 4.(6 điểm)



a) Xét $\triangle AHM$ vuông tại H có $HE \perp AM$ (Vì $\widehat{AEH}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AH nên $\widehat{AEH} = 90^\circ$), áp dụng hệ thức về cạnh góc vuông và hình chiếu của nó trên cạnh huyền ta có: $MH^2 = ME.MA$.

Xét $\triangle BHM$ vuông tại H có $HF \perp BM$ (Vì $\widehat{BFH}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính BH nên $\widehat{BFH} = 90^\circ$), áp dụng hệ thức về cạnh góc vuông và hình chiếu của nó trên cạnh huyền ta có: $MH^2 = MF.MB$

$\Rightarrow ME.MA = MF.MB$ (Vì cùng bằng MH^2)

b) Có K đối xứng với H qua $AM \Rightarrow AM$ là đường trung trực của KH

$\Rightarrow KM = KH, MA \perp KH$ tại $E \Rightarrow \Delta MKH$ cân tại M, có ME là đường cao nên cũng là đường phân giác của $\widehat{KMH} \Rightarrow \widehat{KME} = \widehat{EMH} = \dfrac{\widehat{KMH}}{2} \Rightarrow \widehat{KMH} = 2\widehat{EMH}$

CMTT ta có $MG = MH, \widehat{GMH} = 2.\widehat{FMH}$

Xét đường tròn (O) đường kính AB, có $\widehat{AMB}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn nên $\widehat{AMB} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{KMH} + \widehat{GMH} = 2\widehat{EMH} + 2 \cdot \widehat{FMH} = 2(\widehat{EMH} + \widehat{FMH}) = 2 \cdot \widehat{AMB} = 2.90^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow K, M, G$ thẳng hàng.

c) Áp dụng một số hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông ta có:

$AM \cdot BM = MH \cdot AB; AH^2 = AE \cdot AM; BH^2 = BF \cdot BM; MH^2 = AH \cdot HB$

$\Rightarrow MH^4 = AH^2 \cdot HB^2 = (AE \cdot AM) \cdot (BF \cdot BM) = (AM \cdot BM) \cdot AE \cdot BF = MH \cdot AB \cdot AE \cdot BF$

$\Rightarrow MH^3 = AB.AE.F$

d) Tứ giác $MEHF$ có $\hat{M} = \hat{E} = \hat{F} = 90^\circ$ nên là hình chữ nhật. Gọi D là giao điểm của MH và $EF \Rightarrow EF = MH; DE = DH$ (Tính chất đường chéo hình chữ nhật)

Xét $\triangle DEI$ và $\triangle DHI$, có: $EI = HI, DI$ chung, $DE = DH$

$\Rightarrow \Delta DEI = \Delta DHI \Rightarrow \widehat{DEI} = \widehat{DHI} = 90^\circ$

CMTT ta có: $\widehat{DFJ} = \widehat{DHJ} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{IEF} = \widehat{JFE} = 90^\circ \Rightarrow$ Tứ giác IEFJ là hình thang vuông

$\Rightarrow$ Diện tích tứ giác IEFJ: $S_{IEFJ} = \dfrac{(EI + FJ) \cdot EF}{2}$

Mà

$$EI=\frac{1}{2}\cdot AH;FJ=\frac{1}{2}\cdot HB\Rightarrow S_{IEFJ}=\frac{\left(\frac{AH}{2}+\frac{HB}{2}\right)\cdot EF}{2}=\frac{AB\cdot EF}{4}=\frac{2R\cdot MH}{4}=\frac{R\cdot MH}{2}$$

Diện tích tứ giác IEFJ lớn nhất khi và chi khi MH lớn nhất $\Leftrightarrow$ M nằm chính giữa cung AB.

Khi đó $MH=R\Rightarrow S_{IEFJ}=\frac{R\cdot MH}{2}=\frac{R^2}{2}$

Vậy diện tích tứ giác IEFJ lớn nhất bằng $\frac{R^2}{2}$ khi M nằm chính giữa cung AB.

Khi đó $MH=R\Rightarrow S_{IEFJ}=\frac{R\cdot MH}{2}=\frac{R^2}{2}$.

Vậy diện tích tứ giác IEFJ lớn nhất bằng $\frac{R^2}{2}$ khi M nằm chính giữa cung AB.

Bài 5

a. Giả sử $A=a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ với $\left(a,b\in N^*\right)$

Do $a-b$ và $a+b$ có cùng tính chẵn lẻ mà $A\vdots 2$ nên $a-b$ và $a+b$ đều là số chẵn

$\Rightarrow (a+b)(a-b)\vdots 4$ hay $A\vdots 4$.

Mặt khác, $A=2026n^2+1014(n+p)=2028n^2+1016(n+p)-2\left(n^2+n+p\right)$

Vì $A\vdots 4\Rightarrow 2\left(n^2+n+p\right)\vdots 4\Rightarrow n^2+n+p\vdots 2$ mà $n^2+n=n(n+1)\vdots 2\,\forall n\in N$

$\Rightarrow p$: 2 mà p là số nguyên tố nên $p=2$.

b. Ta có $x^2-2x=27y^3\Leftrightarrow (x-1)^2=27y^3+1$

$\Leftrightarrow (x-1)^2=(3y+1)(9y^2-3y+1)$

Đặt $\left(3y+1;9y^2-3y+1\right)=d\left(d\in N^*\right)$

$\Rightarrow 9y^2-3y+1-3y(3y+1)\vdots d$

$\Rightarrow -6y+1\vdots d$ mà $6y+2\vdots d$ nên $3\vdots d\Rightarrow d\in\{1;3\}$

Mặt khác, $3y+1$ không chia hết cho 3 nên $d=1\Rightarrow \left(3y+1;9y^2-3y+1\right)=1$

Khi đó từ (1) suy ra ta có: $\begin{cases}3y+1=a^2\\ 9y^2-3y+1=b^2\end{cases}\left(a,b\in N^*\right)$

$$\Rightarrow b^2 = (a^2 - 1)^2 - (a^2 - 1) + 1$$

$$\Leftrightarrow b^2 = a^4 - 3a^2 + 3 \Leftrightarrow 4b^2 = 4a^2 - 12a^2 + 12$$

$$\Leftrightarrow 4b^2 = (2a^2 - 3)^2 + 3$$

$$\Leftrightarrow 3 = (2b - 2a^2 + 3)(2b + 2a^2 - 3).$$

Mà $2b + 2a^2 - 3 > 0$ do $a,b \in N^*$

Ta có bảng giá trị sau:

$2b - 2a^2 + 3$	1	3
$2b + 2a^2 - 3$	3	1
a	$\sqrt{2}$	1
b	1	1

Từ bảng trên ta thấy $a = b = 1 \Rightarrow y = 0$

$$\Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right..$$

Vậy cặp $(x;y)$ thoả mãn là: $(0;0);(2;0)$.