

Câu 1. (2,0 điểm)

- a) Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{x-y}{x+y}$. Biết $x^2 - 2y^2 = xy$ ($x \neq 0; y \neq 0$)
- b) Tìm x, y nguyên dương thỏa mãn: $x^2 - y^2 + 2x - 4y - 10 = 0$

Câu 2. (2,0 điểm)

- a) Tìm số dư trong phép chia của đa thức $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+2017$ cho đa thức $x^2 + 10x + 21$
- b) Cho $A = n^6 + 10n^4 + n^3 + 98n - 6n^5 - 26$ và $B = 1 + n^3 - n$. Chứng minh với mọi $n \in \mathbb{Z}$ thì thương của phép chia A cho B là bội số của 6

Câu 3. (2,0 điểm)

- a) Cho a và b thỏa mãn : $a + b = 1$. Tính giá trị của biểu thức $B = a^3 + b^3 + 3ab$
- b) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$

$$P = \frac{1}{x^2 + x} + \frac{1}{y^2 + y} + \frac{1}{z^2 + z}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

Câu 4. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC , đường trung tuyến AM . Qua điểm D thuộc cạnh BC , vẽ đường thẳng song song với AM cắt đường thẳng AB và AC lần lượt tại E và F .

- a) Chứng minh $DE + DF = 2AM$
- b) Đường thẳng qua A song song với BC cắt EF tại N . Chứng minh N là trung điểm của EF
- c) Ký hiệu S_x là diện tích của hình X . Chứng minh $S_{FDC}^2 \geq 16S_{AMC} \cdot S_{FNA}$

Câu 5. (1,0 điểm)

Trong một đề thi có 3 bài toán A, B, C . Có 25 học sinh mỗi người đều đã giải được ít nhất một trong 3 bài đó. Biết rằng:

- Trong số thí sinh không giải được bài A thì số thí sinh đã giải được bài B nhiều gấp hai lần số thí sinh đã giải được bài C
- Số thí sinh chỉ giải được bài A nhiều hơn số thí sinh giải được bài A và thêm bài khác là 1 người
- Số thí sinh chỉ giải được bài A bằng số thí sinh chỉ giải được bài B cộng với số thí sinh chỉ giải được bài C .

Hỏi có bao nhiêu thí sinh chỉ giải được bài B ?

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) $x^2 - 2y^2 = xy \Leftrightarrow x^2 - xy - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow (x + y)(x - 2y) = 0$

Vì $x + y \neq 0$ nên $x - 2y = 0 \Leftrightarrow x = 2y$

Khi đó
$$P = \frac{2y - y}{2y + y} = \frac{y}{3y} = \frac{1}{3}$$

b) Ta có:

$$x^2 - y^2 + 2x - 4y - 10 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2x + 1) - (y^2 + 4y + 4) - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 - (y + 2)^2 = 7 \Leftrightarrow (x - y - 1)(x + y + 3) = 7$$

Vì x, y nguyên dương nên

$$x + y + 3 > x - y - 1 > 0 \Rightarrow x + y + 3 = 7 \text{ và } x - y - 1 = 1 \Rightarrow x = 3; y = 1$$

Phương trình có nghiệm dương duy nhất $(x, y) = (3, 1)$

Câu 2.

a) Ta có:

$$P(x) = (x + 2)(x + 4)(x + 6)(x + 8) + 2017 = (x^2 + 10x + 16)(x^2 + 10x + 24) + 2017$$

Đặt $t = x^2 + 10x + 21$ ($t \neq -3; t \neq -7$), biểu thức $P(x)$ được viết lại:

$$P(x) = (t - 5)(t + 3) = 2017 = t^2 - 2t + 2002$$

Do đó khi chia $t^2 - 2t + 2000$ cho t ta có số dư là 2002

b) Thực hiện phép chia, ta được:

Thương của A chia cho B là $n^3 - 6n^2 + 11n - 6$

Ta có:

$$n^3 - 6n^2 + 11n - 6 = n^3 - n + 12n - 6n^2 - 6$$

$$= (n - 1)n(n + 1) + 6(2n - n^2 - 1)$$

Vì $(n - 1)n(n + 1)$ là tích 3 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 6

Và $6(2n - n^2 - 1)$ chia hết cho 6

\Rightarrow Thương của phép chia A cho B là bội số của 6

Câu 3.

a) Ta có:

$$B = a^3 + b^3 + 3ab = a^3 + b^3 + 3ab.(a+b) = (a+b)^3 = 1 \text{ (Vi } a+b=1)$$

$$b) P = \frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{y^2+y} + \frac{1}{z^2+z} = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{y(y+1)} + \frac{1}{z(z+1)}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \right)$$

Áp dụng BĐT $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$ và $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$ với a, b, c dương, dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + 1 \right); \frac{1}{y+1} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{y} + 1 \right); \frac{1}{z+1} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{z} + 1 \right)$$

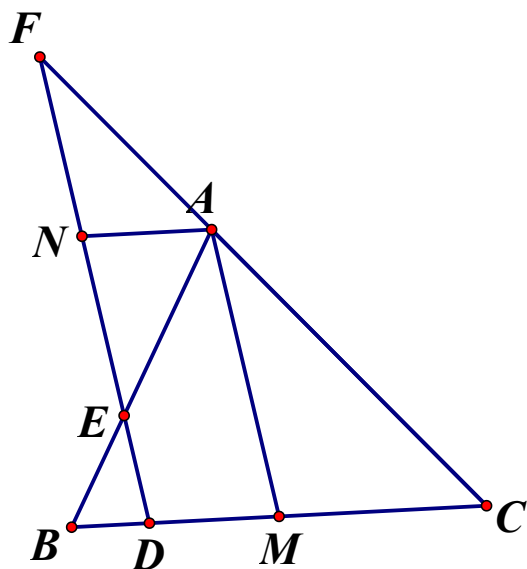
Bởi vậy :

$$P = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \right) \geq \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{y} + 1 + \frac{1}{z} + 1 \right)$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{x+y+z} - \frac{3}{4} = \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Vậy } \text{Min} P = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x=y=z=1$$

Câu 4.



a) Lập luận được: $\frac{DF}{AM} = \frac{DC}{MC}$ (do $AM \parallel DF$) (1)

$$\frac{DE}{AM} = \frac{BD}{BM} \text{ (do } AM \parallel DE \text{)} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{DE + DF}{AM} = \frac{BD + DC}{BM} = \frac{BC}{BM} = 2$ (vì $MB = MC$)
 $\Rightarrow DE + DF = 2AM$

b) $AMDN$ là hình bình hành

$$\frac{NE}{ND} = \frac{AE}{AB}$$

Ta có: $\frac{ND}{AB} = \frac{AM}{AB}$

$$\frac{NF}{ND} = \frac{FA}{AC} = \frac{DM}{BM} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow \frac{NE}{ND} = \frac{NF}{ND} \Rightarrow NE = NF$$

c) $\Delta AMC \sim \Delta FDC \Rightarrow \frac{S_{AMC}}{S_{FDC}} = \left(\frac{AM}{FD}\right)^2 = \left(\frac{ND}{FD}\right)^2$ (Do $AM = ND$)

$$\Delta FNA \sim \Delta FDC \Rightarrow \frac{S_{FNA}}{S_{FDC}} = \left(\frac{FN}{FD}\right)^2$$

Do đó $\frac{S_{AMC}}{S_{FDC}} \cdot \frac{S_{FNA}}{S_{FDC}} = \left(\frac{ND}{FD}\right)^2 \cdot \left(\frac{FN}{FD}\right)^2 \leq \frac{1}{16} \left(\frac{ND}{FD} + \frac{FN}{FD}\right)^4 = \frac{1}{16}$

$$\Rightarrow S_{FDC}^2 \geq 16 S_{AMC} \cdot S_{FNA}$$

Do $(x - y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x + y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow (x + y)^4 \geq 16x^2y^2$ với $x \geq 0; y \geq 0$)

Câu 5.

Gọi a là số học sinh chỉ giải được bài A, b là số thí sinh chỉ giải được bài B, c là số thí sinh chỉ giải được bài C, d là số thí sinh giải được 2 bài B và C nhưng không giải được bài A. Khi đó số thí sinh giải được bài A và thêm ít nhất một trong hai bài B và C là : $25 - a - b - c - d$

Theo bài ra ta có:

$$b + d = 2(c + d) \quad a = 1 + 25 - a - b - c - d \quad \text{và} \quad a = b + c$$

$$\begin{cases} 4b + c = 26 \\ d = b - 2c > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 6 \\ c = 2 \end{cases}$$

Từ các đẳng thức trên ta có:

Vậy số thí sinh chỉ giải được bài B là 6 thí sinh.