

PHẦN I: ĐẶT VẤN ĐỀ

Ở trường Phổ thông, dạy toán là dạy hoạt động Toán học. Đối với học sinh, có thể coi việc giải toán là hoạt động chủ yếu của hoạt động toán học. Các bài toán ở trường phổ thông là một phương tiện rất hiệu quả và không thể thay thế được trong việc giúp học sinh nắm vững tri thức, phát triển tư duy, hình thành kỹ năng, kỹ xảo ứng dụng toán học vào thực tiễn. Hoạt động giải bài tập toán là điều kiện để thực hiện tốt các mục đích dạy học toán ở trường phổ thông. Vì vậy, tổ chức có hiệu quả giải bài tập toán học có vai trò quyết định đối với chất lượng dạy học toán.

Hệ phương trình là một dạng toán khá phổ biến trong các đề thi tuyển sinh ĐH, CĐ và đề thi HSG các cấp. Đối với nhiều học sinh, bài toán giải hệ phương trình được coi là bài toán khó, thậm chí là câu khó nhất trong cấu trúc đề thi ĐH, CĐ, thi THPT Quốc gia.

Qua quá trình giảng dạy học sinh ôn thi ĐH, CĐ và bồi dưỡng học sinh giỏi phải trực tiếp hướng dẫn học sinh giải các hệ phương trình này, tôi thấy cần phải rèn cho học sinh thành thạo các kỹ năng giải hệ phương trình thông thường và chú ý tới một số kỹ năng thường áp dụng khi giải “**hệ không mẫu mực**”. Trong bài viết này tôi xin gọi như vậy đối với các hệ phương trình mà thuật giải không được trình bày trong sách giáo khoa.

Bài viết được chia làm ba mục: Mở đầu là tóm tắt các hệ phương trình thường gặp, đã được giới thiệu khá chi tiết trong sách giáo khoa. Mục thứ hai là một số kỹ năng giải hệ phương trình không mẫu mực. Các bài toán đưa ra phần lớn là tôi sưu tầm từ nhiều nguồn tài liệu khác nhau, trong các kì thi KS, thi HSG,...Lời giải các bài toán này tôi chú ý đến cách đưa hệ không mẫu mực về dạng quen thuộc. Cuối cùng là hệ thống các bài tập để bạn đọc tham khảo.

Chuyên đề dùng giảng dạy ôn thi ĐH, CĐ và ôn thi HSG cho học sinh khối 12. Thời gian giảng dạy chuyên đề này cho học sinh khối 12 khi ôn thi ĐH, CĐ là 3 buổi.

Mặc dù rất tâm huyết với chuyên đề, nhưng do thời gian và khả năng có hạn nên bài viết khó tránh khỏi những thiếu sót. Tôi rất mong nhận được sự góp ý của quý thầy cô, bạn bè đồng nghiệp và các em học sinh để chuyên đề được hoàn thiện hơn và trở thành tài liệu có ích trong giảng dạy và học tập.

PHẦN II: MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG MẪU MỰC

I. MỘT SỐ HỆ PHƯƠNG TRÌNH THƯỜNG GẶP.

Một số hệ phương trình được học trong chương trình phổ thông có phương pháp giải rõ ràng, học sinh chỉ cần nhớ thuật giải, rèn luyện các kĩ năng biến đổi, tính toán là có thể làm được. Thực chất các hệ phương trình này ta gặp rất nhiều ở cả THCS và THPT, không riêng bộ môn toán mà cả môn lí, môn hóa,... Một lần nữa ta nhắc lại các dạng hệ phương trình như vậy.

1. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn.

a) Định nghĩa: Là hệ phương trình có dạng
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases},$$
 trong đó x, y là ẩn.

b) Cách giải: Với hệ này ta có thể giải bằng nhiều cách khác nhau như: Phương pháp thế, phương pháp cộng, sử dụng đồ thị, sử dụng máy tính cầm tay, tính định thức, đặt ẩn phụ,...

2. Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn.

a) Định nghĩa: Là hệ phương trình có dạng
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases},$$
 trong

đó x, y, z là ẩn.

b) Cách giải: Với hệ này ta có thể giải bằng nhiều cách khác nhau như: Phương pháp thế, phương pháp cộng, sử dụng máy tính cầm tay, tính định thức, phương pháp khử Gauss,...

3. Hệ gồm một phương trình bậc nhất và một phương trình khác.

a) Định nghĩa: Là hệ phương trình có dạng
$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ f(x, y) = 0 \end{cases},$$
 trong đó x, y là ẩn còn $f(x, y)$ là biểu thức hai biến x, y .

b) Cách giải: Sử dụng phương pháp thế.

4. Hệ đối xứng loại 1.

a) Định nghĩa: Là hệ mà khi ta đổi vai trò của hai ẩn cho nhau trong mỗi phương trình, từng phương trình đó không thay đổi.

b) Cách giải: Biến đổi tương đương làm xuất hiện tổng và tích của các nghiệm rồi đặt tổng bằng S , tích bằng P ($S^2 \geq 4P$). Thông thường sau bước này ta được một hệ đơn giản.

5. Hệ đối xứng loại 2.

a) Định nghĩa: Là hệ mà khi ta đổi vai trò của hai ẩn cho nhau trong mỗi phương trình, phương trình này biến thành phương trình kia.

b) Cách giải: Trừ vế cho vế làm xuất hiện nhân tử chung $x-y$ rồi đưa hệ đã cho về hai hệ mới đơn giản hơn.

6. Hệ đẳng cấp.

a) Định nghĩa: Là hệ có dạng $\begin{cases} f_1(x; y) = f_2(x; y) \\ g_1(x; y) = g_2(x; y) \end{cases}$, ở đó $f_i(x; y) & g_i(x; y)$ là các đa thức đẳng cấp hai biến và cùng bậc.

b) Cách giải: Xét riêng $x=0$. Nếu x khác 0 thì ta đặt $y=kx$ rồi nhận xét và chia vế cho vế ta được phương trình một ẩn k . Tìm được k ta tìm được x và y .

II. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG MẪU MỤC.

1. Phương pháp biến đổi tương đương

Một số kĩ năng thường áp dụng như phân tích thành tích, bình phương hoặc lập phương hai vế, thêm bớt làm xuất hiện nhân tử chung,...

Bài 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + xy + 2y = 2y^2 + 2x & (1) \\ y\sqrt{x-y+1} + x = 2. & (2) \end{cases}$

Giải: **Cách 1:** Nhận thấy, nếu coi phương trình (1) là phương trình bậc hai ẩn x còn y là tham số, ta có phương trình (1) $\Leftrightarrow x^2 + x(y-2) + 2y - 2y^2 = 0$

$$\Delta = (y-2)^2 - 4(2y-2y^2) = (3y-2)^2$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x=y & (3) \\ x=2-2y & (4) \end{cases}$$

Từ (3) & (2) ta có $x=y=1$. Từ (4) & (2) ta có $\begin{cases} x=2-2y \\ y\sqrt{3-3y}=2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0; x=2 \\ y=-\frac{1}{3}; x=\frac{8}{3} \end{cases}$.

Kết luận: Hệ có 3 nghiệm $(1; 1); (2; 0); (\frac{8}{3}; -\frac{1}{3})$

Cách 2: ĐK: $x-y+1 \geq 0$. Ta biến đổi phương trình (1) làm xuất hiện nhân tử chung

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - y^2 + xy - y^2 + 2y - 2x = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+2y-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=y & (3) \\ x=2-2y & (4) \end{cases}$$

Từ (3) & (2) ta có $x=y=1$. Từ (4) & (2) ta có $\begin{cases} x=2-2y \\ y\sqrt{3-3y}=2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0; x=2 \\ y=-\frac{1}{3}; x=\frac{8}{3} \end{cases}$.

Kết luận: Hệ có 3 nghiệm $(1; 1); (2; 0); (\frac{8}{3}; -\frac{1}{3})$

Bài 2. (Báo TH&TT) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 & (1) \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y & (2) \end{cases}$

Giải: ĐK: $x+y > 0$. Ta có

$$(1) \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 + \frac{2xy}{x+y} - 2xy = 1 \Leftrightarrow (x+y)^2 - 1 - 2xy \cdot \frac{x+y-1}{x+y} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-1) \left(x+y+1 - \frac{2xy}{x+y} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-y & (3) \\ \frac{x^2+y^2+x+y}{x+y} = 0 & (4) \end{cases}$$

$$\text{- Từ (3) và (2) ta có } y^2 - 3y = 0 \Rightarrow \begin{cases} y=0; x=1 \\ y=3; x=-2 \end{cases}$$

- Vì $x+y > 0$ nên (4) không thỏa mãn. Vậy hệ có hai nghiệm.

Bài 3. (Đề thi TS cũ) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 1+x^3y^3=19x^3 & (1) \\ y+xy^2=-6x^2 & (2) \end{cases}$

Giải: Nếu $x=0$, (1) trở thành $1=0$, vô lí. Vậy x khác 0. Nhân hai vế của

$$(1) \text{ với } 6, \text{ hai vế của (2) với } 19x \text{ ta được: } \begin{cases} 6+6x^3y^3=114x^3 \\ 19xy+19x^2y^2=-114x^3 \end{cases}$$

Cộng vế với vế ta được: $6x^3y^3 + 19x^2y^2 + 19xy + 6 = 0$, giải phương trình bậc ba này ta được $xy = -\frac{2}{3}; xy = -\frac{3}{2}; xy = -1$.

$$\text{- Nếu } xy = -\frac{2}{3} \text{ thì } (1) \Leftrightarrow 1 - \frac{8}{27} = 19x^3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow y = -2.$$

$$\text{- Nếu } xy = -\frac{3}{2}, (1) \Leftrightarrow 1 - \frac{27}{8} = 19x^3 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = 3$$

$$\text{- Nếu } xy = -1, (1) \Leftrightarrow x = 0, \text{ vô lí.}$$

Bài 4. (HSG QG 1996) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{3x}(1 + \frac{1}{x+y}) = 2 & (1) \\ \sqrt{7y}(1 - \frac{1}{x+y}) = 4\sqrt{2} & (2) \end{cases}$

Giải:

ĐK $x \geq 0$ & $y \geq 0$.

Dễ thấy $x=0$ hoặc $y=0$ không thỏa mãn hệ.

Với $x>0, y>0$ ta có

$$\begin{cases} 1 + \frac{1}{x+y} = \frac{2}{\sqrt{3x}} \\ 1 - \frac{1}{x+y} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \frac{1}{\sqrt{3x}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \\ \frac{1}{x+y} = \frac{1}{\sqrt{3x}} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x+y} = \frac{1}{3x} - \frac{8}{7y} \text{ (nhân vế với vế)}$$

$$\Rightarrow 21xy = (7y - 24x)(x + y) \Rightarrow 24x^2 + 38xy - 7y^2 = 0 \Rightarrow y = 6x \text{ (vì } x, y \text{ dương)}.$$

$$\text{Thay vào phương trình (1) ta được } \frac{1}{7x} - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = 7 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \pm \frac{2}{\sqrt{21}} \right).$$

Từ đó suy ra x và y .

2. Phương pháp đặt ẩn phụ.

Một số phương trình sau khi nhân hoặc chia hai vế cho cùng một biểu thức khác không hoặc bằng một số động tác tách và ghép khéo léo ta làm xuất hiện các đại lượng mà nhờ cách đặt ẩn phụ ta có thể đưa hệ phức tạp về một hệ đơn giản, quen thuộc.

Bài 5. (Thi KSCL môn thi THPT QG của THPT Lê Lợi năm học 2014-2015)

$$\text{Giải hệ phương trình: } \begin{cases} \sqrt{y-1} + 8 = y^3 + \sqrt{x} \\ (y - \sqrt[4]{x})^2 + (\sqrt[4]{x} + 1)^2 = 2(y-1)^2 - y(\sqrt[4]{x} - 3) - 1 \end{cases}$$

$$\text{Giải: Điều kiện: } \begin{cases} y \geq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} (*)$$

Từ pt (1), đặt $t = \sqrt[4]{x}$ ta có pt

$$y^2 - (1-t)y - 2t(t+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2t \\ y = t+1 \end{cases}$$

- Với $y = -2t$ kết hợp với đk (*) suy ra vô nghiệm.
- Với $y = t+1 \Rightarrow y = \sqrt[4]{x} + 1 \Leftrightarrow x = (y-1)^4$

Thay vào (1) ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{y-1} + 8 &= y^3 + (y-1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{y-1} - 1 - [(y-1)^2 - 1] - (y^3 - 8) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{y-2}{\sqrt{y-1}+1} - y(y-2) - (y-2)(y^2+2y+4) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (y-2) \left(\frac{1}{\sqrt{y-1}+1} - y^2 - 3y - 4 \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \text{ (tm(*))} \\ \frac{1}{\sqrt{y-1}+1} - y^2 - 3y - 4 = 0 \text{ (3)} \end{cases}$$

Thay $y=2$ vào (2) suy ra $x=1$

$$\text{Xét } f(y) = \frac{1}{\sqrt{y-1}+1} - y^2 - 3y - 4$$

$$\text{Với } y \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{y-1}+1} \leq 1; -y^2 - 3y - 4 \leq -8 \Rightarrow f(y) < 0 \text{ suy ra pt (3) vô nghiệm}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;2)$

Bài 6. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 1 = 4y & (1) \\ y(x+y)^2 = 2x^2 + 7y + 2 & (2) \end{cases}$$

Giải: Nhận thấy $y=0$ không thỏa mãn hệ. Với y khác không, chia cả hai vế

của (1) và (2) cho y ta được:
$$\begin{cases} \frac{x^2 + 1}{y} + x + y = 4 \\ (x+y)^2 = 2\frac{x^2 + 1}{y} + 7 \end{cases}$$

Đặt
$$\begin{cases} a = x + y \\ b = \frac{x^2 + 1}{y} \end{cases}$$

ta được
$$\begin{cases} a + b = 4 \\ a^2 = 2b + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 - a \\ a^2 = 2(4 - a) + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 - a \\ a^2 + 2a - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5, b = 9 \\ a = 3, b = 1 \end{cases}$$

Từ đây ta tìm được x và y .

Bài 7. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2y(4y^2 + 3x^2) = x^4(x^2 + 3) \\ 2015^x(\sqrt{2y - 2x + 5} - x + 1) = 4030 \end{cases}$$

Giải: Điều kiện: $2y - 2x + 5 \geq 0$

Nếu $x = 0$, từ (1) suy ra $y = 0$. Khi đó không thỏa mãn (2). Vậy $x \neq 0$

Chia cả hai vế của (1) cho x^3 , ta được:
$$\left(\frac{2y}{x}\right)^3 + 3 \cdot \frac{2y}{x} = x^3 + 3x \quad (3)$$

Xét hàm số: $f(t) = t^3 + 3t, t \in \mathbb{R}$. Dễ thấy $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

Do đó từ (3) ta được:
$$\frac{2y}{x} = x \Leftrightarrow 2y = x^2$$

Thế vào (2) ta có:
$$2015^{x-1} \left[\sqrt{(x-1)^2 + 4} - (x-1) \right] = 2$$

Đặt $u = x - 1$, ta được PT:
$$2015^u (\sqrt{u^2 + 4} - u) = 2 \quad (4) \quad \text{Xét hàm số:}$$

$$g(u) = 2015^u (\sqrt{u^2 + 4} - u) \text{ trên } \mathbb{R} \text{ có } g'(u) = 2015^u (\sqrt{u^2 + 4} - u) \left(\ln 2015 - \frac{1}{\sqrt{u^2 + 4}} \right)$$

Vì $\sqrt{u^2+4} - u > 0$ và $\frac{1}{\sqrt{u^2+4}} < 1 < \ln 2015$ nên $g'(u) > 0, \forall u \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm $g(u)$ đồng

biến trên $\mathbb{R}$. Mặt khác $g(0) = 2$ nên $u = 0$ là nghiệm duy nhất của (4) $\Rightarrow x = 1; y = \frac{1}{2}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất : $(x; y) = \left(1; \frac{1}{2}\right)$

Bài 8. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} y + xy^2 = 6x^2 & (1) \\ 1 + x^2y^2 = 5x^2 & (2) \end{cases}$$

Giải: Nhận thấy $x=0$ không thỏa mãn hệ. Chia cả hai vế của (1) và (2) cho

$$x^2 \text{ ta được hệ } \begin{cases} \frac{y}{x^2} + \frac{y^2}{x} = 6 \\ \frac{1}{x^2} + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} \left(\frac{1}{x} + y \right) = 6 \\ \left(\frac{1}{x} + y \right)^2 - 2\frac{y}{x} = 5 \end{cases}.$$

$$\text{Đến đây ta đặt } \begin{cases} S = \frac{1}{x} + y \\ P = \frac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P.S = 6 \\ S^2 - 2P = 5 \end{cases}.$$

Giải hệ này ta tìm được S và P , từ đó ta tìm được x và y .

Bài 9. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x+y)\left(1 + \frac{1}{xy}\right) = 5 \\ (x^2+y^2)\left(1 + \frac{1}{x^2y^2}\right) = 49 \end{cases}$$

Giải: Trước hết ta thấy hệ này có dạng quen thuộc là hệ đối xứng loại 1, tuy nhiên nếu đặt ẩn phụ theo tổng và tích như cách thông thường ta sẽ gặp một hệ khó, phức tạp và không có nghiệm đẹp. Nhưng sau khi đặt điều kiện và khai triển ra ta được:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{y} + y + \frac{1}{x} = 5 \\ x^2 + \frac{1}{y^2} + y^2 + \frac{1}{x^2} = 49 \end{cases}, \text{ và nếu đặt } \begin{cases} x + \frac{1}{x} = a \\ y + \frac{1}{y} = b \end{cases} \text{ thì ta được } \begin{cases} a + b = 5 \\ a^2 + b^2 = 53. \end{cases}$$

Đến đây ta có một hệ quen thuộc.

Bài 10. (KA 2008) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y + x^3y + xy^2 + xy = -\frac{5}{4} \\ x^4 + y^2 + xy(1+2x) = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

Giải: Hệ đã cho tương đương với
$$\begin{cases} x^2 + y + xy(x^2 + y) + xy = -\frac{5}{4} \\ (x^2 + y)^2 + xy = -\frac{5}{4} \end{cases}.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x^2 + y = a \\ xy = b \end{cases} \text{ ta được hệ mới } \begin{cases} a + ab + b = -\frac{5}{4} \\ a^2 + b = -\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{5}{4} - a^2 \\ a - \frac{5}{4}a - a^3 - \frac{5}{4} - a^2 = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + a^2 + \frac{a}{4} = 0 \\ b = -\frac{5}{4} - a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, b = -\frac{5}{4} \\ a = -\frac{1}{2}; b = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Từ đó ta tìm được x, y .

3. Phương pháp thế.

Nhiều phương trình sau khi rút một ẩn (hoặc một biểu thức) từ phương trình này thế vào phương trình kia ta được một phương trình đơn giản hoặc nhờ đó mà ta có cách biến đổi về một hệ đơn giản. Ta thường áp dụng cách này với các hệ mà ta quan sát thấy một phương trình nào đó của hệ mà một ẩn chỉ có nhất hoặc ở cả hai phương trình của hệ có cùng một biểu thức chung nào đó.

Bài 11. (HSG QG – 2001) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{7x+y} + \sqrt{2x+y} = 5 & (1) \\ \sqrt{2x+y} + x - y = 2 & (2) \end{cases}$$

Giải: ĐK: $\begin{cases} 7x+y \geq 0 \\ 2x+y \geq 0 \end{cases}$, từ (2) ta suy ra $\sqrt{2x+y} = 2 + y - x$, thế vào (1) ta được $\sqrt{7x+y} = 3 + x - y$. Do đó ta có hệ

$$\begin{cases} -3 \leq x - y \leq 2 \\ 7x + y = 9 + x^2 + y^2 + 6x - 2xy - 6y \\ 2x + y = 4 + y^2 + x^2 + 4y - 4x - 2xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x - y \leq 2 \\ x = 2y - 1 \\ y^2 - 11y + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ x = 19; y = 10. \end{cases}$$

Dễ thấy nghiệm $x = y = 1$ thỏa mãn hệ còn nghiệm kia thì không.

Bài 12. (KS-THPT Chuyên VP) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4(x^2 + y^2) + 4xy + \frac{3}{(x+y)^2} = 7 \\ 2x + \frac{1}{x+y} = 3 \end{cases}$$

Giải: ĐK $x + y \neq 0$. Phương trình thứ nhất tương đương với

$$3(x+y)^2 + 6 + \frac{3}{(x+y)^2} + (x-y)^2 = 13 \Leftrightarrow 3\left(x+y + \frac{1}{x+y}\right)^2 + (x-y)^2 = 13 (*)$$

Từ phương trình thứ hai ta suy ra $\frac{1}{x+y} = 3 - 2x$, thế vào phương trình (*) ta được :

$$3(x+y+3-2x)^2 + (x-y)^2 = 13 \Leftrightarrow 4(x-y)^2 - 18(x-y) + 14 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ x-y=7 \end{cases}$$

Từ đây và phương trình thứ hai của hệ ta tìm được các nghiệm x và y .

Bài 13. (HSG QG – 2004) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = -49 & (1) \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x & (2) \end{cases}$$

Giải: Với hệ này, cả hai ẩn và ở hai phương trình đều khó có thể rút ẩn này theo ẩn kia. Tuy nhiên, nếu rút y^2 từ (2) và thế vào (1) thì ta được một phương trình mà ẩn y chỉ có bậc 1:

$$x^3 + 3x(-x^2 + 8xy + 8y - 17x) = -49 \Leftrightarrow 24xy(x+1) = 2x^3 + 2x^2 + 49x^2 - 49 \quad (3)$$

- Nếu $x = 0$ thì (1) vô lí.

- Nếu $x = -1$ thì hệ trở thành $y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4$.

- Nếu $x \neq -1$ & $x \neq 0$ thì từ (3) suy ra $y = \frac{2x^2 + 49x - 49}{24x}$. Thế trở lại

phương trình (2) ta được

$$x^2 - 8x \cdot \frac{2x^2 + 49x - 49}{24x} + \left(\frac{2x^2 + 49x - 49}{24x} \right)^2 = \frac{2x^2 + 49x - 49}{3x} - 17x$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{3} + \left(\frac{2x^2 + 49x - 49}{24x} \right)^2 = \frac{-49}{3x} \Leftrightarrow 192x^4 + (2x^2 + 49x - 49)^2 = -49 \cdot 192x$$

$$\Leftrightarrow 196x^4 + 196x^3 + 2205x^2 + 4606x + 2401 = 0 \Leftrightarrow 196x^3 + 2205x + 2401 = 0$$

$$\Leftrightarrow 196x^3 + 196 + 2205x + 2205 = 0 \Leftrightarrow 196x^2 - 196x + 2401 = 0$$

Phương trình cuối cùng vô nghiệm, chứng tỏ hệ chỉ có hai nghiệm $(-1; 4)$ và $(-1; -4)$.

Không phải lúc nào ta cũng may mắn khi áp dụng phương pháp “ thế đến cùng” như vậy, chẳng hạn như gặp phương trình bậc 4 mà không nhằm được nghiệm như bài toán sau :

$$\text{Bài 14. Giải hệ phương trình : } \begin{cases} b^2 - 2bc + 2c + 4 = 0 & (1) \\ b^2 - c^2 - 2b + 2c - 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải: Rõ ràng phương trình đầu có bậc nhất đối với b và c , điều đó gợi ý cho ta rút một ẩn từ phương trình này và thế vào phương trình kia. Tuy nhiên sau khi rút gọn ta được một phương trình bậc 4 mà nghiệm lẻ. Ở đây ta cần một kỹ năng tách khéo léo hơn :

Ta có $(1) \Leftrightarrow 2c(b-1) = b^2 + 4 \Leftrightarrow 2c(b-1) = b^2 - 2b + 1 + 2b - 2 + 5$, rõ ràng $b=1$ không thỏa mãn, với $b \neq 1$ suy ra $2c = b - 1 + 2 + \frac{5}{b-1}$, thế vào (2) ta được

$$4b^2 - 8b + 4 = 4c^2 - 8c + 16 \Leftrightarrow 4(b-1)^2 = (2c-2)^2 + 12$$

$$\Leftrightarrow 4(b-1)^2 = \left[(b-1) + \frac{5}{b-1} \right]^2 + 12 \Leftrightarrow 3(b-1)^4 - 22(b-1)^2 - 25 = 0$$

Suy ra
$$\begin{cases} b = \frac{5+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}; c = \frac{4+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\ b = \frac{\sqrt{3}-5}{\sqrt{3}}; c = \frac{\sqrt{3}-4}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Hệ phương trình này xuất hiện khi ta giải bài toán hình học phẳng: Trong hệ tọa độ Oxy cho điểm $A(1; 2)$, đường thẳng $\Delta: y=3$. Tìm điểm B thuộc Δ và điểm C thuộc Ox sao cho tam giác ABC đều.

4. Phương pháp sử dụng tính đơn điệu của hàm số.

Để vận dụng phương pháp này ta cần đến một tính chất quan trọng sau đây: Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu và liên tục trên khoảng $(\alpha; \beta)$ thì phương trình $f(x)=0$ có nghiệm duy nhất trên khoảng $(\alpha; \beta)$, hơn nữa $f(a)=f(b)$ khi và chỉ khi $a=b$.

Bài 15. (HSG K12 Đồng Nai) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^5 + xy^4 = y^{10} + y^6 & (1) \\ \sqrt{4x+5} + \sqrt{y^2+8} = 6 & (2) \end{cases}$$

Giải: ĐK: $x \geq -\frac{5}{4}$. Nếu $y=0$ thì từ phương trình (1) ta suy ra $x=0$, thế vào phương trình (2) ta thấy không thỏa mãn, vậy y khác 0. Đặt $x=ky$ ta được (1) trở thành

$k^5 y^5 + ky^5 = y^{10} + y^6 \Leftrightarrow k^5 + k = y^5 + y$ (3). Xét hàm số $f(t) = t^5 + t$ trên R , ta có $f'(t) = 5t^4 + 1 > 0 \forall t \in R$. Do đó $f(t)$ là hàm số đồng biến trên R , vậy (3) $\Leftrightarrow f(k) = f(y) \Leftrightarrow k = y \Rightarrow x = y^2$. Thế vào (2) ta được :

$$\sqrt{4x+5} + \sqrt{x+8} = 6 \Leftrightarrow 5x + 13 + 2\sqrt{4x^2 + 37x + 40} = 36$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{4x^2 + 37x + 40} = 23 - 5x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 23 - 5x \geq 0 \\ 16x^2 + 148x + 160 = 25x^2 - 230x + 529 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x \leq 23 \\ 9x^2 - 378x + 369 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 41 \end{cases}$$

Suy ra $x=1$ và do đó $y = \pm 1$.

Bài 16. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2\sqrt{x^2 + 5} = 2\sqrt{y - 1} + y^2 & (1) \\ 2\sqrt{y^2 + 5} = 2\sqrt{x - 1} + x^2 & (2) \end{cases}$$

Giải: ĐK $x \geq 0, y \geq 0$. Ta thấy đây là một hệ đối xứng loại 2, nên trừ vế cho vế và biến đổi ta được:

$$2\sqrt{x^2 + 5} + 2\sqrt{x - 1} + x^2 = 2\sqrt{y^2 + 5} + 2\sqrt{y - 1} + y^2 \quad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = 2\sqrt{t^2 + 5} + 2\sqrt{t - 1} + t^2$ trên $[1; +\infty)$, dễ thấy $f'(t) > 0$ trên $(1; +\infty)$ nên $f(t)$ đồng biến trên $[1; +\infty)$ và do đó (3) tương đương với $x=y$. Thế vào (1) ta được $2\sqrt{x^2 + 5} = 2\sqrt{x - 1} + x^2$. Giải bằng MTCT ta được $x=2$.

Do đó ta biến đổi như sau $2\sqrt{x^2 + 5} - 6 = 2\sqrt{x - 1} - 2 + x^2 - 4$

$$\Leftrightarrow 2 \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} = 2 \frac{x - 2}{\sqrt{x - 1} + 1} + (x - 2)(x + 2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \frac{2(x + 2)}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} = \frac{2}{\sqrt{x - 1} + 1} + x + 2 \end{cases} \quad (4)$$

Phương trình (4) có VP > 3, VT < 2 nên (4) vô nghiệm. Vậy hệ có nghiệm $x=y=2$.

Bài 17. (KA-2010) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (4x^2 + 1)x + (y - 3)\sqrt{5 - 2y} = 0 \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3 - 4x} = 7 \end{cases}$$

Giải: ĐK : $x \leq \frac{3}{4}$. Đặt $u = 2x$; $v = \sqrt{5 - 2y}$

Phương trình (1) trở thành $u(u^2 + 1) = v(v^2 + 1) \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 1) = 0$
 $\Leftrightarrow u = v$

Nghĩa là : $2x = \sqrt{5 - 2y} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{3}{4} \\ y = \frac{5 - 4x^2}{2} \end{cases}$

Thế vào (2) ta được: $\frac{25}{4} - 6x^2 + 4x^4 + 2\sqrt{3 - 4x} = 7 \quad (*)$

Xét hàm số $f(x) = 4x^4 - 6x^2 + \frac{25}{4} + 2\sqrt{3 - 4x}$ trên $\left[0; \frac{3}{4}\right]$

$$f'(x) = 4x(4x^2 - 3) - \frac{4}{\sqrt{3 - 4x}} < 0$$

Mặt khác : $f\left(\frac{1}{2}\right) = 7$ nên (*) có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{2}$ và $y = 2$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{2}$ và $y = 2$.

Thực tế là các hệ phương trình dạng này có nhiều cách giải phong phú, các kĩ thuật tách cũng rất đa dạng. Trong khuôn khổ chuyên đề tôi chỉ dừng lại ở

bốn kĩ năng thông dụng như trên. Tiếp theo tôi xin giới thiệu các hệ phương trình tương tự để bạn đọc có thêm nguồn tài liệu giảng dạy, rất mong được tiếp tục thảo luận trao đổi về chuyên đề này cùng các thầy cô và các em học sinh.

Bài 18. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 - y^3 - 6y^2 + 3(x - 5y) = 14 & (1) \\ \sqrt{3-x} + \sqrt{y+4} = x^3 + y^2 - 5 & (2) \end{cases}$$

Giải: Điều kiện: $x \leq 3; y \geq -4$

Phương trình (1) tương đương với $x^3 + 3x = y^3 + 6y^2 + 15y + 14$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x = (y+2)^3 + 3(y+2) \quad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 3 > 0; \forall t$, vậy $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Phương trình (3) có dạng $f(x) = f(y+2) \Leftrightarrow x = y+2 \Leftrightarrow y = x-2$, thay vào (2) ta

$$\text{được } \sqrt{3-x} + \sqrt{x+2} = x^3 + (x-2)^2 - 5 \Leftrightarrow \sqrt{3-x} + \sqrt{x+2} = x^3 + x^2 - 4x - 1$$

Nhằm thấy, $x=2$ là nghiệm của phương trình ta biến đổi như sau

$$(\sqrt{3-x}-1) + (\sqrt{x+2}-2) = x^3 + x^2 - 4x - 4 \Leftrightarrow \frac{2-x}{\sqrt{3-x}+1} + \frac{x-2}{\sqrt{x+2}+2} = (x-2)(x^2+3x+2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \Rightarrow y=0 \quad (\text{tm}) \\ \frac{-1}{\sqrt{3-x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} = (x^2+3x+2) \end{cases} \quad (4)$$

Phương trình (4) tiếp tục có nghiệm $x=-1$ nên ta biến đổi như sau:

$$(4) \Leftrightarrow \left(\frac{-1}{\sqrt{3-x}+1} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{x+2}+2} - \frac{1}{3} \right) = (x^2+3x+2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2+\sqrt{3-x}}{\sqrt{3-x}+1} + \frac{1-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}+2} = (x^2+3x+2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1-x}{(\sqrt{3-x}+1)(2+\sqrt{3-x})} + \frac{-1-x}{(\sqrt{x+2}+2)(1+\sqrt{x+2})} = (x+1)(x+2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = -3 \text{ (tm)} \\ \frac{-1}{(\sqrt{3-x}+1)(2+\sqrt{3-x})} + \frac{-1}{(\sqrt{x+2}+2)(1+\sqrt{x+2})} = (x+2) \end{cases} \quad (5)$$

Để thấy, (5) có nghĩa khi $x+2 \geq 0 \Rightarrow VP(5) \geq 0$, còn $VT(5) < 0$, do đó (5) vô nghiệm

Kết luận: Vậy hệ đã cho có đúng hai nghiệm $(x; y) = (-1; -3); (2; 0)$.

Bài 19. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} y^3 + 3y^2 + y + 4x^2 - 22x + 21 = (2x+1)\sqrt{2x-1} & (1) \\ 2x^2 - 11x + 9 = 2y & (2) \end{cases}$$

Giải: Điều kiện: $x \geq \frac{1}{2}$

Nhân hai vế của phương trình (2) với 2 ta được hệ tương đương

$$\begin{cases} y^3 + 3y^2 + y + 4x^2 - 22x + 21 = (2x+1)\sqrt{2x-1} & (1) \\ 4x^2 - 22x + 18 - 4y = 0 & (3) \end{cases}$$

Trừ vế với vế của (1) cho (3) ta được phương trình hệ quả

$$\begin{aligned} y^3 + 3y^2 + 5y + 3 &= (2x+1)\sqrt{2x-1} \\ \Leftrightarrow (y^3 + 3y^2 + 3y + 1) + (2y + 2) &= (2x-1)\sqrt{2x-1} + 2\sqrt{2x-1} \\ \Leftrightarrow (y+1)^3 + 2(y+1) &= (\sqrt{2x-1})^3 + 2\sqrt{2x-1} \quad (4) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 2 > 0; \forall t$. Vậy $f(t)$ là hàm đồng biến.

Phương trình (4) có dạng $f(y+1) = f(\sqrt{2x-1}) \Leftrightarrow y+1 = \sqrt{2x-1} \Leftrightarrow y = \sqrt{2x-1} - 1$,

thay vào (2) ta được $2x^2 - 11x + 9 = 2(\sqrt{2x-1} - 1)$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1} = 2x^2 - 11x + 11 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1} - x - 1 = 2x^2 - 12x + 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(2x-1) - (x+1)^2}{2\sqrt{2x-1} + x + 1} = 2(x^2 - 6x + 5) \Leftrightarrow \frac{-(x^2 - 6x + 5)}{2\sqrt{2x-1} + x + 1} = 2(x^2 - 6x + 5)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y=0 \\ x=5 \Rightarrow y=2 \end{cases} \quad (\text{tm}) \\ \frac{-1}{2\sqrt{2x-1}+x+1} = 2 \quad (6) \end{cases}$$

Để thấy với $x \geq \frac{1}{2}$, VT(6) < 0; VP(6) > 0, do đó phương trình (6) vô nghiệm.

Kết luận: Hệ đã cho có hai nghiệm là $(x, y) = (1; 0); (5; 2)$

Lời bình: Trong bài giải trên ta nhận được hai nghiệm của phương trình (5) là $x=1$; và $x=5$, vì vậy cũng có thể phân tích phương trình trên thành các nhóm có chứa $(x-1)(x-5)=x^2-6x+5$. Nếu chỉ nhận được một nghiệm thì sau khi nhân liên hợp được nghiệm đó và một phương trình nữa vẫn có nghiệm, phương trình ấy tuy phức tạp nhưng vẫn có thể dùng cách nhóm và nhân lượng liên hợp sau khi nhận ra nghiệm thứ hai, hoặc dùng phương pháp hàm số như ví dụ 2 ở trên.

Bài 20. (Đề thi lần 1 năm 2014 của trường HN - Amsterdam)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 4})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 2 & (1) \\ 12y^2 - 10y + 2 = 2\sqrt[3]{x^3 + 1} & (2) \end{cases}$$

Giải:

$$(1) \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 4} = 2(\sqrt{y^2 + 1} - y) \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{(-2y)^2 + 4} + (-2y) \quad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{t^2 + 4} + t$; TXĐ: $\mathbb{R}$

$$\text{Có } f'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 4}} + 1 = \frac{\sqrt{t^2 + 4} + t}{\sqrt{t^2 + 4}}, \text{ mà } \sqrt{t^2 + 4} > |t| \geq -t \Rightarrow \sqrt{t^2 + 4} + t > 0 \Rightarrow f'(t) > 0,$$

vậy $f(t)$ là hàm đồng biến, do vậy $(3) \Leftrightarrow f(x) = f(-2y) \Leftrightarrow x = -2y$, thế vào (2) ta được $3x^2 + 5x + 2 = 2\sqrt[3]{x^3 + 1} \Leftrightarrow (x+1)^3 + 2(x+1) = x^3 + 1 + 2\sqrt[3]{x^3 + 1} \quad (4)$

Xét hàm số $g(t) = t^3 + 2t$; TXĐ: $\mathbb{R}$. Có $g'(t) = 3t^2 + 2 > 0; \forall t \Rightarrow g(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$(4) \Leftrightarrow g(x+1)=g(\sqrt[3]{x^3+1}) \Leftrightarrow x+1=\sqrt[3]{x^3+1} \Leftrightarrow 3x^2+3x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=0 \\ x=-1 \Rightarrow y=2 \end{cases}$$

Kết luận: Hệ đã cho có hai nghiệm $(x; y)=(0; 0); (-1; 2)$.

Bài 21. (Đề thi KS lớp 12 lần 1 năm 2013 của Sở GD – ĐT Vĩnh Phúc)

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} (\sqrt{x^2+1}-3x^2y+2)(\sqrt{4y^2+1}+1)=8x^2y^3 & (1) \\ x^2y-x+2=0 & (2) \end{cases}$$

Giải:

Trường hợp 1: $y=0 \Rightarrow x=2$ không phải là nghiệm của hệ

$$\text{Trường hợp 2: } y \neq 0, (1) \Leftrightarrow (\sqrt{x^2+1}-3x^2y+2)4y^2=8x^2y^3 (\sqrt{4y^2+1}-1)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}-3x^2y+2=2x^2y (\sqrt{4y^2+1}-1) \quad (3)$$

$$\text{Thay } 2=x-x^2y \text{ từ (2) vào (3) ta được } \sqrt{x^2+1}-3x^2y+x-x^2y=2x^2y (\sqrt{4y^2+1}-1)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}+x=2x^2y (\sqrt{4y^2+1}+1) \quad (4)$$

$$\text{Nhận xét: } \sqrt{x^2+1}>|x| \geq -x \Rightarrow VT(4)>0 \Rightarrow VP(4)>0 \Rightarrow y>0, \text{ và } (2) \Leftrightarrow x=x^2y+2>0$$

$$\text{Với } x, y>0, \text{ phương trình (4) } \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x^2}=2y (\sqrt{4y^2+1}+1)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}+\frac{1}{x}=\sqrt{(2y)^4+(2y)^2}+(2y) \quad (5)$$

$$\text{Xét hàm số } f(t)=\sqrt{t^4+t^2}+t; t \in (0; +\infty), \text{ có } f'(t)=\frac{2t^3+t}{\sqrt{t^4+t^2}}+1>0; \forall t>0, f(t) \text{ là hàm}$$

$$\text{đồng biến, do đó } (5) \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=f(2y) \Leftrightarrow \frac{1}{x}=2y, \text{ thế vào (2) ta được } \frac{x}{2}-x+2=0$$

$$\Leftrightarrow x=4 \Rightarrow y=\frac{1}{8} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

$$\text{Kết luận: Hệ đã cho có nghiệm duy nhất } (x; y)=\left(4; \frac{1}{8}\right)$$

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 3x + 4y = 1 \\ 3x^2 - 2y^2 - 9x - 8y = 3 \end{cases}$$

Bài 2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} xy = 18(x^2 + y^2) - 38xy \\ x^2 - xy + y^2 = 7(x - y) + 14 \end{cases}$$

Bài 3. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 5 \\ \frac{y}{x} - \frac{2x}{y} = \frac{-5}{2} - \frac{2}{xy} \end{cases}$$

Bài 4. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y(1 + x^2) = x(1 + y^2) \\ x^2 + 3y^2 = 1 \end{cases}$$

Bài 5. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x(x + y + 1) - 3 = 0 \\ (x + y)^2 - \frac{5}{x^2} + 1 = 0 \end{cases}$$

Bài 6. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - 2y \end{cases}$$

Bài 7. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} xy + x + 1 = 7y \\ x^2y^2 + xy + 1 = 13y^2 \end{cases}$$

Bài 8. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^4 + 2x^3y + x^2y^2 = 2x + 9 \\ x^2 + 2xy = 6x + 6 \end{cases}$$

Bài 9. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (4 + \frac{1}{y+2x})\sqrt{x} = 2\sqrt{3} \\ (4 - \frac{1}{y+2x})\sqrt{y} = 4 \end{cases}$$

Bài 10. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 81x^3y^2 - 81x^2y^2 + 33xy^2 - 29y^2 = 4 \\ 25y^3 + 9x^2y^3 - 6xy^3 - 4y^2 = 24. \end{cases}$$

Bài 11. Tìm tất cả các giá trị của tham số a sao cho hệ phương trình sau có nghiệm với mọi giá trị của tham số b :
$$\begin{cases} (a-1)x^5 + y^5 = 1 \\ e^{bx} + (a+1)by^4 = a^2 \end{cases}$$

Bài 12. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x^4 + y)3^{y-x^4} = 1 \\ 8(x^4 + y) - 6^{x^4+y} = 0 \end{cases}$$

Bài 13. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} \\ 2y = x^3 + 1 \end{cases}$$

Bài 14. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2\sqrt{2x+y} = 3 - 2x - y \\ \sqrt[3]{x+6} + \sqrt{1-y} = 4 \end{cases}$$

Bài 15. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} bc - 4b - c + 2 = 0 \\ b^2 - 2b = c^2 - 8c + 18 \end{cases}$$

Bài 16. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y\sqrt{x-2} + 3y - 3 = \sqrt{x-2} \\ xy^2 + y\sqrt{x-2} + 9 = 13y^2 \end{cases}$$

Bài 17. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3(y^2 + y)(1 + \sqrt{x-2}) = x + 2\sqrt{x-2} + 1 \\ 2y^2 + 2y + \sqrt{x-2} = 2 \end{cases}$$

Bài 18. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - 3x\sqrt{1-2y} - 4y + 2 = 0 \\ \sqrt{x - \sqrt{1-2y}} + x = 2. \end{cases}$$

Bài 19. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 + xy - 5x + y + 2 = \sqrt{y-2x+1} - \sqrt{3-3x} \\ x^2 - y - 1 = \sqrt{4x+y+5} - \sqrt{x+2y-2} \end{cases}$$

PHẦN III: KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

1. KẾT LUẬN.

- Trên đây là những bài tập mà tôi đúc rút được trong quá trình giảng dạy và bồi dưỡng học sinh giỏi.

- Đề tài của tôi đã được kiểm nghiệm trong năm học này, được học sinh đồng tình và đạt được kết quả, nâng cao khả năng giải hệ phương trình. Các em hứng thú học tập hơn, ở những lớp có hướng dẫn kỹ các em học sinh với mức

học trung bình cũng trở lên đã có kỹ năng giải các bài tập. Học sinh biết áp dụng tăng rõ rệt. Cụ thể ở lớp 12A1 sau khi áp dụng sáng kiến này vào giảng dạy thì số học sinh hiểu và có kỹ năng giải được cơ bản các dạng toán nói trên. Kết quả khảo sát qua các bài thi thử như sau:

Tổng số	Lớp thực nghiệm (12A1)			Tổng số	Lớp đối chứng (12A2)		
	<i>Giỏi</i>	<i>Khá</i>	<i>TB</i>		<i>Giỏi</i>	<i>Khá</i>	<i>TB</i>
39 học sinh				39 học sinh			
	35	4	0		20	13	6
	89,7%	10,3%	0%		51,3%	33,3%	15,4%

- Nhìn vào bảng thống kê, ta thấy giữa lớp đối chứng và lớp thực nghiệm có sự chênh lệch rõ rệt, điều đó đã khẳng định tính khả thi trong việc vận dụng đề tài này.

2. KIẾN NGHỊ.

- Đề nghị các cấp lãnh đạo tạo điều kiện giúp đỡ học sinh và giáo viên có nhiều hơn nữa tài liệu sách tham khảo đổi mới vào phòng thư viện để giáo viên và học sinh có thể nghiên cứu học tập nâng cao kiến thức chuyên môn nghiệp vụ.

- Tổ chuyên môn cần tổ chức các buổi trao đổi phương pháp giảng dạy cũng như các mảng chuyên đề hay trong các buổi họp tổ chuyên môn để học hỏi kinh nghiệm của nhau.

- Học sinh cần tăng cường tính tự giác học tập, ôn bài tại nhà để nâng cao chất lượng học tập.

Mặc dù cố gắng tìm tòi, nghiên cứu song chắc chắn còn có nhiều thiếu sót và hạn chế. Tôi rất mong được sự quan tâm của tất cả các đồng nghiệp bổ sung và góp ý cho tôi. Tôi xin chân thành cảm ơn!

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ	<i>Thanh Hóa, ngày 22 tháng 5 năm 2016</i> Tôi cam đoan đây là SKKN của mình viết, không sao chép nội dung của người khác Người viết
---	--

	<i>Đỗ Thị Hồng Hạnh</i>
--	--------------------------------

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Sách giáo khoa Đại số và Giải tích 12 - *Tác giả*: Trần Văn Hạo, Vũ Tuấn -
Nhà xuất bản Giáo dục;

- [2] Bài tập Đại số và Giải tích 12 - *Tác giả*: Vũ Tuấn, Trần Văn Hạo - *Nhà xuất bản Giáo dục*;
- [3] Sách giáo khoa Đại số và Giải tích 12 nâng cao - *Tác giả*: Đoàn Quỳnh, Nguyễn Huy Doan - *Nhà xuất bản Giáo dục*;
- [4] Bài tập Đại số và Giải tích 12 nâng cao - *Tác giả*: Nguyễn Huy Doan, Nguyễn Xuân Liêm - *Nhà xuất bản Giáo dục*;
- [5] Các bài giảng luyện thi môn toán - *Tác giả*: Phan Đức Chính, Vũ Dương Thụy, Đào Tam, Lê Thống Nhất - *Nhà xuất bản Giáo dục*;
- [6] Toán nâng cao Đại số và Giải tích 12 - *Tác giả*: Nguyễn Tuấn Khôi, Nguyễn Vĩnh Cận - *Nhà xuất bản Đại học Sư phạm*;
- [7] Báo Toán học tuổi trẻ - *Nhà xuất bản Giáo dục*;
- [8] Đề thi tuyển sinh môn Toán - *Tác giả*: Phan Đức Chính, Đặng Khải - *Nhà xuất bản Giáo dục*;
- [9] Các đề thi đại học các năm trước;
- [10] Các đề thi thử đại học các năm trước;
- [11] Đề thi học sinh giỏi môn Toán lớp 10, 11, 12 của các tỉnh những năm trước.

□□□□ ●●●●

MỤC LỤC

PHẦN I: ĐẶT VẤN ĐỀ	1
PHẦN II: MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG MẪU MỤC	2
I. MỘT SỐ HỆ PHƯƠNG TRÌNH THƯỜNG GẶP	2
1. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn	2
2. Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn	2
3. Hệ gồm một phương trình bậc nhất và một phương trình khác	2
4. Hệ đối xứng loại 1	2
5. Hệ đối xứng loại 2	3
6. Hệ đẳng cấp	3
II. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG MẪU MỤC	3
1. Phương pháp biến đổi tương đương	3
2. Phương pháp đặt ẩn phụ	5
3. Phương pháp thế	8
4. Phương pháp sử dụng tính đơn điệu của hàm số	10
III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN	16
PHẦN III: KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ	18
TÀI LIỆU THAM KHẢO	20

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH HOÁ
TRƯỜNG THPT LÊ LỢI

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

**HƯỚNG DẪN HỌC SINH GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG
MẪU MỰC TRONG CÁC ĐỀ THI ĐẠI HỌC, THPT QUỐC GIA
VÀ THI HỌC SINH GIỎI**

Người thực hiện: **Đỗ Thị Hồng Hạnh**

Chức vụ: **Phó Hiệu trưởng**

SKKN thuộc lĩnh vực (môn): **Toán**

THANH HOÁ - NĂM 2016