|  |  |
| --- | --- |
|  | **ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 11**  **NĂM HỌC 2018-2019**  **MÔN TOÁN Time: 180 Phút** |

**ĐỀ BÀI**

1. (*3,50 điểm*) Giải và biện luận bất phương trình sau theo tham số *m*:

với .

1. (*3,50 điểm*) Cho bốn số thực thỏa mãn hệ thức

.

Chứng minh rằng hai phương trình

 và 

đều có các nghiệm phân biệt và các nghiệm của chúng nằm xen kẽ nhau khi biểu diễn trên trục số.

1. (*4,00 điểm*) Cho tam giác *ABC* có các cạnh *BC* = *a*, *AC* = *b*, *AB* = *c*. Gọi *I* là tâm đường tròn nội tiếp tam giác.

a)Chứng minh rằng *a.IA*2+*b.IB*2+*c.IC*2 = *abc*.

b) Chứng minh rằng .

Hãy chỉ ra một trường hợp xảy ra dấu đẳng thức.

1. (*4*,*00 điểm*) Cho *x*, *y*, *z* là 3 số thực thỏa mãn .

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức.

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức.

1. (*3,00 điểm*) Cho dãy số thực thỏa mãn điều kiện



a) Chứng minh rằng 

b) Tìm giới hạn của dãy .

1. (*2,00 điểm*) Cho hàm số  liên tục trên , thỏa mãn

i) ;

ii) , , trong đó kí hiệu . Hãy tính .

**---------Hết---------**

**PHẦN ĐÁP ÁN CHI TIẾT**

***Thực hiện lời giải và sưu tầm bởi tập thể tổ 16 Strong team Toán VD-VDC***

1. Giải và biện luận phương trình sau theo tham số :

 với 

**Lời giải**

**Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com**

**https://www.vnteach.com**

**Cách 1**

Điều kiện: 

Đặt  Thì 



Và .

Khi đó bất phương trình đã cho là 

Vì  nên  nên





Nghĩa là 

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là .

**Cách 2**

Điều kiện: 

Với điều kiện trên, hai vế của bất phương trình không âm, bình phương hai vế ta được









+) Nếu  thì bất phương trình .

Kết hợp với điều kiện  ta được 

+) Nếu  thì bất phương trình  ( luôn đúng).

Kết hợp với điều kiện  ta được 

Từ  và  ta có tập nghiệm của bất phương trình là .

1. Cho bốn số thực  thỏa mãn hệ thức  (1). Chứng minh rằng 2 phương trình  (2) và (3) đều có các nghiệm phân biệt và các nghiệm của chúng nằm xen kẽ nhau khi biểu diễn trên trục số.

**Lời giải**

***Cách 1:***

Từ điều kiện suy ra  (4).

Các phương trình (2) và (3) đều có hệ số  nên các parabol biểu diễn đều có bề lõm quay lên trên.

Hai phương trình có nghiệm phân biệt và nằm xen kẽ nhau khi biểu diễn trên trục số khi và chỉ khi đồ thị các hàm số và  cắt nhau tại 1 điểm nằm dưới trục hoành (5).



(Minh họa hình vẽ)

Hoành độ giao điểm của  và  là nghiệm của phương trình



Tung độ giao điểm của  và  là





 (theo (4)).

Vậy (5) được chứng minh, nên khẳng định của đề bài đã chứng minh xong.

***Cách 2:***

Ta có 

. Vì tồn tại  nên

. Do đó phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt  thỏa mãn .

Đặt . Ta có 



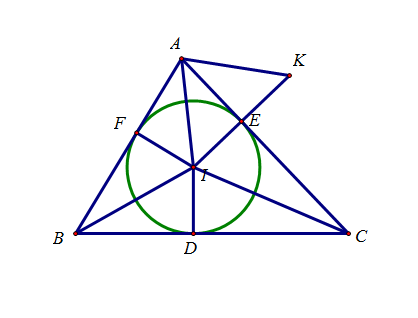
Suy ra phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt  thỏa mãn trong hai số có một số thuộc khoảng và một số không thuộc khoảng . Từ đó ta có điều phải chứng minh.

1. Cho tam giác  có các cạnh . Gọi  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác.

a) Chứng minh rằng .

b) Chứng minh rằng . Hãy chỉ ra một trường hợp xảy ra dấu đẳng thức.

**Lời giải**

a) Giả sử đường tròn  tiếp xúc với  theo thứ tự tại . Gọi  là điểm đối xứng của  qua .

Ta có: .

Tương tự .

Suy ra Suy ra .

b) Theo BĐT Bunhiacopxki ta có:





Theo ý a) ta có 

 ( ĐPCM)

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:



Vậy dễ thấy có một trường hợp xảy ra dấu của đẳng thức là:

  là tam giác đều.

1. Cho , ,  là 3 số thực thỏa mãn .

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức .

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức .

**Lời giải**

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức .

Ta có: .

Suy ra . Dấu đẳng thức xảy ra khi .

Do vậy .

Dấu “=” xảy ra , .

Vậy min khi , .

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức.

Xét các giá trị dương của *x*, *y*, *z*. Vì  nên ta có thể đặt

, với 

Thế thì 

Vì  nên

Dấu “=” xảy ra khi 

Biến đổi (1) với dạng



Dấu “=” xảy ra 

Suy ra ; tức là 

Vậy khi 

**Đề tương tự**

**Câu 4\*.** Cho  là 3 số thực dương thỏa mãn . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức .

**Lời giải**

Ta có 

Áp dụng bất đẳng thức .

Ta được .

Đẳng thức xảy ra 

Vậy  đạt được khi .

1. Cho dãy số thực  thỏa mãn điều kiện



a) Chứng minh rằng 

b) Tìm giới hạn của dãy .

**Lời giải**

a) Với *n* = 1, bất đẳng thức đã cho đúng.

Giả sử bất đẳng thức đúng với *n* = *k* (với ), ta có .

Vì 

Lại có:  suy ra 

Vậy bất đẳng đúng với *n* = *k* +1. Vậy bất đẳng thức đúng với .

b) Vì nên dãy  bị chặn.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương  và  ta được:



 là dãy tăng.

Theo định lý Weierstrass thì dãy  có giới hạn hữu hạn, giả sử 

Từ bất đẳng thức  cho  ta được 

Vậy 

1. Cho hàm số  liên tục trên , thỏa mãn

i) ;

ii) , , trong đó kí hiệu . Hãy tính .

**Lời giải**

***Tác giả: Thành Đức Trung; Fb: Thành Đức Trung***

Kí hiệu , .

Gọi  là tập giá trị của hàm số .

Từ i) suy ra .

Từ ii) suy ra 

và , .

Do  liên tục trên  nên , .

Suy ra  là đơn ánh trên  và do  liên tục trên  nên  nghịch biến trên .

Giả sử tồn tại  sao cho  .

Do  là hàm nghịch biến nên  .

Và  suy ra  .

Từ  và  suy ra  hay , mâu thuẫn với .

Tương tự, ta cũng chứng minh được không tồn tại  sao cho .

Vậy , . Do  nên suy ra .