UBND TỈNH HÀ NAM **KỲ THI TUYẾN SINH LỚP 10 THPT**

 **SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO** **NĂM HỌC 2023 – 2024**

 **Môn: Toán**

 **ĐỀ CHÍNH THỨC** *Thời gian làm bài: 120 phút, không kể thời gian giao đề*

**Câu I. (*1,5 điểm)***Cho biểu thức $P=$ $\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{x-1}\right)∶\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-1\right)$ (với $x\geq 0, x\ne 1).$

1. Rút gọn biểu thức *P*.
2. Tìm tất cả các giá trị của nguyên của *x* để biểu thức *P* nhận giá trị nguyên.

**Câu II. (*2,0 điểm)***

1. Giải phương trình $x^{2}-4x+2\sqrt{3}=0.$
2. Giải hệ phương trình $\left\{\begin{array}{c}2\sqrt{x-1}+\frac{1}{y}=4\\\sqrt{x-1}-\frac{1}{y}=-1\end{array}\right.$

**Câu III. *(1,5 điểm*)**. Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho parabol (*P*) có phương trình $y=x^{2}$ và đường thẳng (*d*) có phương trình $y=2mx-m^{2}-m-2$ (với *m* là tham số).

1. Tìm tọa độ điểm *M* thuộc (*P*) biết điểm *M* có hoành độ bằng –3.
2. Tìm điều kiện của *m* để đường thẳng (*d*) cắt parabol (*P*) tại hai điểm phân biệt. Gọi $A\left(x\_{1};y\_{1}\right), B\left(x\_{2};y\_{2}\right)$ là hai giao điểm của đường thẳng (*d*) và parabol (*P*), xác định *m* để $x\_{1}y\_{2}+x\_{2}y\_{1}=2m^{3}+6.$

**Câu IV (*1,0 điểm*)** Trong tháng 4 năm 2023, hai hộ gia đình bác An và bác Bình dùng hết tổng cộng 500 nghìn đồng tiền điện. Sang tháng 5 năm 2023, do tăng cường thực hiện việc sử dụng điện an toàn, tiết kiệm và hiệu quả; nhà bác An giảm được 15% tiền điện và nhà bác Bình giảm được 10% tiền điện; kết quả là cả hai hộ gia đình tiết kiệm được tổng cộng 65 nghìn đồng tiền điện so với tháng 4 năm 2023. Hỏi trong tháng 4 năm 2023, mỗi hộ gia đình dùng hết bao nhiêu đồng tiền điện?

**Câu V. (*3,5 điểm***) Cho đường tròn (*O; R*) và một điểm *S* nằm bên ngoài đường tròn. Kẻ các tiếp tuyến *SA, SB* với đường tròn (*A, B* là các tiếp điểm). Một đường thẳng đi qua *S* (không đi qua tâm *O*) cắt đường tròn (*O; R*) tại hai điểm *M* và *N* với *M* nằm giữa *S* và *N*.

1. Chứng minh tứ giác *SAOB* nội tiếp.
2. Chứng minh $SB^{2}=SM.SN$
3. Cho $SO=R\sqrt{5}$ và $MN=R\sqrt{2}$. Gọi *E* là trung điểm của *MN*. Tính độ dài đoạn thẳng *OE* và diện tích tam giác *SOM* theo *R*.
4. Tiếp tuyến tại *M* của đường tròn (*O; R*) cắt *SA, SB* lần lượt tại *P, Q*. Gọi giao điểm của *OQ*, *OP* với *AB* lần lượt là *I* và *H*. Chứng minh ba đường thẳng *OM, QH, PI* đồng quy.

**Câu VI. (*0,5 điểm)*** Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức *P* = $\frac{ab}{\sqrt{c+ab}}+\frac{bc}{\sqrt{a+bc}}+\frac{ca}{\sqrt{b+ca}}.$

- - - **HẾT**- - -**Đáp án đề thi vào lớp 10 môn Toán – Hà Nam năm 2023**

**Câu I. (*1,5 điểm)***

***Cách giải:***

***Cho biểu thức*** $P=$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{x-1}\right)∶\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-1\right)$ ***(với*** $x\geq 0, x\ne 1).$

***1. Rút gọn biểu thức P.***

Với $x\geq 0, x\ne 1$, ta có: $P=$ $\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{x-1}\right)∶\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-1\right)$

$$P= \left(\frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}+\frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\right)∶\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}\right)$$

$$P= \frac{2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}∶\frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

$$P=\frac{2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}∙\left(\sqrt{x}-1\right)$$

$$P=\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$$

$$Vậy P=\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$$

***2. Tìm tất cả các giá trị của nguyên của x để biểu thức P nhận giá trị nguyên.***

Với $x\geq 0, x\ne 1$, ta có:

$$P=\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\frac{2\sqrt{x}+2-1}{\sqrt{x}+1}=2-\frac{1}{\sqrt{x}+1}.$$

\* Nếu $x\in Z, \sqrt{x}\notin Z$ thì $\sqrt{x}$ là số vô tỉ $⇒P\notin Z$ $⇒$ Loại

\* Nếu $x\in Z, \sqrt{x}\in Z$:

Để $P\in Z $ thì $\sqrt{x}+1\in \left\{-1;1\right\}$

Mà $\sqrt{x}+1\geq 1, ∀x\geq 0⇒\sqrt{x}=0⇔x=0$: thỏa mãn

Vậy để *P* nhận giá trị nguyên thì $x=0.$

**Câu II. (*2,0 điểm)***

***Cách giải:***

***1. Giải phương trình*** $x^{2}-4x+2\sqrt{3}=0.$

Xét phương trình $x^{2}-4x+2\sqrt{3}=0$ có $a=1, b^{'}=-2, , c=2\sqrt{3.}$

$$∆^{'}=b^{'2}-ac=\left(-2\right)^{2}-1.2\sqrt{3}=4-2\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}-1\right)^{2}>0$$

=> Phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x\_{1}=\frac{-b^{'}+\sqrt{∆'}}{a}=\frac{2+\sqrt{3}-1}{1}=1+\sqrt{3}$$

$$x\_{2}=\frac{-b^{'}-\sqrt{∆'}}{a}=\frac{2-\sqrt{3}+1}{1}=3-\sqrt{3}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm$S=\left\{1+\sqrt{3};3-\sqrt{3}\right\}$

***2. Giải hệ phương trình*** $\left\{\begin{array}{c}2\sqrt{x-1}+\frac{1}{y}=4\\\sqrt{x-1}-\frac{1}{y}=-1\end{array}\right.$

Điều kiện xác định: $\left\{\begin{array}{c}x\geq 1\\y\ne 0\end{array}\right.$.

$$Đặt \left\{\begin{array}{c}\sqrt{x-1}=a\\\frac{1}{y}=b \end{array}\right.$$

Hệ phương trình trở thành: $\left\{\begin{array}{c}2a+b=4\\a-b=-1\end{array}⇔\left\{\begin{array}{c}3a=3\\a-b=-1\end{array}⇔\left\{\begin{array}{c}a=1\\1-b=-1\end{array}⇔\left\{\begin{array}{c}a=1\\b=2\end{array}\right.\right.\right.\right.$

\* $a=1⇒\sqrt{x-1}=1⇔x-1=1⇔x=2$ : thỏa mãn

$$\*b=2⇒\frac{1}{y}=2⇔y=\frac{1}{2}:thỏa mãn$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(a;y)$ là $(2;\frac{1}{2})$

**Câu III. *(1,5 điểm*)**.

***Cách giải:***

***Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình*** $y=x^{2}$ ***và đường thẳng (d) có phương*** ***trình*** $y=2mx-m^{2}-m-2$ ***(với m là tham số).***

***1. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) biết điểm M có hoành độ bằng –3.***

Xét $\left(P\right):y=x^{2}:$ Cho $x=-2⇒y=\left(-3\right)^{2}=9.$

Vậy tọa độ điểm *M* thỏa mãn là $M\left(-3;9\right).$

***2. Tìm điều kiện của m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt. Gọi*** $A\left(x\_{1};y\_{1}\right), B\left(x\_{2};y\_{2}\right)$ ***là hai giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P), xác định m để*** $x\_{1}y\_{2}+x\_{2}y\_{1}=2m^{3}+6.$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của $(P)$ và (*d*):

$$x^{2}=2mx-m^{2}-m-2⇔x^{2}-2mx+m62+m+2=0 \left(\*\right)$$

Ta có: $∆^{'}=b^{'2}-ac=m^{2}-\left(m^{2}+m+2\right)=-m-2$

Để (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt thì phương trình (\*) có hai nghiệm phân biệt

$$⇔∆^{'}>0⇔-m-2>0⇔m<-2$$

Theo Vi-ét ta có:

$$\left\{\begin{array}{c}x\_{1}+x\_{2}=-\frac{b}{a}=2m\\x\_{1}x\_{2}=\frac{c}{a}=m^{2}+m+2\end{array}\right.$$

Do $A\left(x\_{1};y\_{1}\right), B\left(x\_{2};y\_{2}\right)\in P$ nên $y\_{1}=x\_{1}^{2}, y\_{2}=x\_{2}^{2}$.

Theo đề bài ta có:

$$x\_{1}y\_{2}+x\_{2}y\_{1}=2m^{3}+6⇔x\_{1}x\_{2}^{2}+x\_{2}x\_{1}^{2}=2m^{3}+6⇔x\_{1}x\_{2}\left(x\_{1}+x\_{2}\right)=2m^{3}+6$$

$$⇔\left(m^{2}+m+2\right).2m=2m^{3}+6⇔2m^{3}+2m^{2}+4m-6=0⇔2m^{2}+4m-6=0$$

$$⇔m^{2}+2m-3=0⇔m^{2}+3m-m-3=0⇔m\left(m+3\right)-\left(m+3\right)=0$$

$$⇔\left(m+3\right)\left(m-1\right)=0⇔\left[\begin{array}{c}m+3=0\\m-1=0\end{array}⇔\left[\begin{array}{c}m=-3 (TM)\\m=1 (L)\end{array}\right.\right.$$

Vậy $m=-3$

**Câu IV (*1,0 điểm*)**

***Cách giải:***

***Trong tháng 4 năm 2023, hai hộ gia đình bác An và bác Bình dùng hết tổng cộng 500 nghìn đồng tiền điện. Sang tháng 5 năm 2023, do tăng cường thực hiện việc sử dụng điện an toàn, tiết kiệm và hiệu quả; nhà bác An giảm được 15% tiền điện và nhà bác Bình giảm được 10% tiền điện; kết quả là cả hai hộ gia đình tiết kiệm được tổng cộng 65 nghìn đồng tiền điện so với tháng 4 năm 2023. Hỏi trong tháng 4 năm 2023, mỗi hộ gia đình dùng hết bao nhiêu đồng tiền điện?***

Gọi số tiền điện nhà bác An và nhà bác Bình dùng hết trong tháng 4 năm 2023 lần lượt là $x, y$ (nghìn đồng) ($0<x,y<500)$

Vì trong tháng 4 năm 2023, hai hộ gia đình bác An và bác Bình dùng hết tổng cộng 500 nghìn đồng tiện điện nên ta có phương trình :

$x+y=500$ (1)

Vì trong tháng 5 năm 2023, nhà bác An giảm được 15% tiền điện, nhà bác Bình giảm được 10% tiền điện và cả hai hộ gia đình tiết kiệm được tổng cộng 65 nghìn đồng tiền điện so với tháng 4 năm 2023 nên ta có phương trình:

$15\%x+10\%y=65$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\left\{\begin{array}{c}x+y=500 \\5\%x+10\%y=65\end{array}\right.$$

$⇔\left\{\begin{array}{c}x+y=500 \\0,15x+0,1y=65\end{array}⇔\left\{\begin{array}{c}x+y=500 \\1,5y+y=550\end{array}⇔\left\{\begin{array}{c}x+y=500\\x=300 \end{array}⇔\left\{\begin{array}{c}x=300\\y=200\end{array}\right.\right.\right.\right.$: thỏa mãn

Vậy trong tháng 4 năm 2023, nhà bác An dùng hết 300 nghìn đồng tiền điện, nhà bác Bình dùng hết 200 nghìn đồng tiền điện.

**Câu V. (*3,5 điểm***)

***Cách giải:***

***Cho đường tròn (O; R) và một điểm S nằm bên ngoài đường tròn. Kẻ các tiếp tuyến SA, SB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Một đường thẳng đi qua S (không đi qua tâm O) cắt đường tròn (O; R) tại hai điểm M và N với M nằm giữa S và N.***

******

***1. Chứng minh tứ giác SAOB nội tiếp.***

Tứ giác SAOB có:

$∠OAS=∠OBS=90^{0}$ (vì SA, SB là tiếp tuyến của (O))

$$⇒∠OAS+∠OBS=90^{0}+90^{0}=180^{0}$$

Mà hai góc này ở vị trí đối nhau

=> Tứ giác SAOB nội tiếp (dấu hiệu nhận biết).

***2. Chứng minh*** $SB^{2}=SM.SN$

Xét $∆SMB và ∆SBN$ có:

$∠S$: chung

$∠SBM=∠SNB$ (tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

$⇒∆SMB ∽∆SBN \left(g.g\right)$ $⇒\frac{SM}{SB}=\frac{SB}{SN} $ (hai cặp cạnh tương ứng tỉ lệ)

$⇒SB^{2}=SM.SN$ (đpcm)

***3. Cho*** $SO=R\sqrt{5}$ ***và*** $MN=R\sqrt{2}$***. Gọi E là trung điểm của MN. Tính độ dài đoạn thẳng OE và diện tích tam giác SOM theo R.***

Do E là trung điểm của MN

$⇒ME=EM=\frac{MN}{2}=\frac{R\sqrt{2}}{2} và OE⊥MN tại E$ (tính chất đường kính và dây cung)

$⇒∆OEM$ vuông tại E

$$⇒OE^{2}+EM^{2}=OM^{2}⇔OE^{2}+\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^{2}=R^{2}⇔OE=\frac{R\sqrt{2}}{2}$$

Lại có: $∆SOE$ vuông tại E

$$⇒OE^{2}+SE^{2}=SO^{2}⇔\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^{2}+SE^{2}=\left(R\sqrt{5}\right)^{2}⇔SE^{2}=\frac{9R^{2}}{2}⇔SE=\frac{3R\sqrt{2}}{2}.$$

Ta có:

$$SE=SM+EM⇔\frac{3R\sqrt{2}}{2}=SM+\frac{R\sqrt{2}}{2}⇔SM=R\sqrt{2}$$

Diện tích tam giác SOM là:

$$\frac{1}{2}.OE.SM=\frac{1}{2}. \frac{R\sqrt{2}}{2}. R\sqrt{2}=\frac{R^{2}}{2}.$$

***4. Tiếp tuyến tại M của đường tròn (O; R) cắt SA, SB lần lượt tại P, Q. Gọi giao điểm của OQ, OP với AB lần lượt là I và H. Chứng minh ba đường thẳng OM, QH, PI đồng quy.***

Vì OA = OM (=R) nên O thuộc trung trực của AM.

Vì PA = PM (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) => P thuộc trung điểm của AM.

=> OP là trung trực của AM.

Mà H thuộc OP => HA = HM.

Xét $∆HAP và ∆HMP$ có: HA = HM (cmt), HP chung, PA = PM (cmt)

=> $ ∆HAP=∆HMP (c.c.c)$ => $∠HMP=∠HAP$ (2 góc tương ứng).

Mà SA = SB (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) => Tam giác SAB cân tại S.

=> $∠HAP=∠BAS=∠ABS=∠HBQ.$

=> $∠HMP=∠HBQ.$

Mà $∠HMP+∠HMQ=180^{0}$ (kề bù) => $∠HBQ+∠HMQ=180^{0}.$

Mà 2 đỉnh B, M đối nhau nên HBQm là tứ giác nội tiếp (dhnb)

=> $∠HBM=∠HQM$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung HM)

Mà $∠HBM=∠ABM=∠AMP$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung AM).

=> $∠HQM=∠AMP$. Mà 2 góc này ở vị trí hai góc đồng vị bằng nhau nên HQ // AM (dhnb).

Ta có: OP là trung trực của AM (cmt) => $OP⊥AM$

=> $OP⊥HQ$ (từ vuông góc đến song song)

=> HQ là đường cao của tam giác OPQ.

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được PI là đường cao của tam giác OPQ.

Theo giả thiết: $OM⊥PQ $=> OM là đường cao của tam giác OPQ.

Vậy OM, QH, PI là ba đường cao của tam giác OPQ nên chúng đồng quy (đpcm)

**Câu VI. (*0,5 điểm)***

***Cách giải:***

***Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện*** $a+b+c=1$***. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P =*** $\frac{ab}{\sqrt{c+ab}}+\frac{bc}{\sqrt{a+bc}}+\frac{ca}{\sqrt{b+ca}}.$

Ta có: $c+ab=c\left(a+b+c\right)+ab=ca+cb+c62+ab=\left(c+a\right)\left(b+C\right)$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{c+ab}}=\frac{1}{\sqrt{(a+c)(b+c)}}\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)$$

Tương tự ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{a+bc}}\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\right);\frac{1}{\sqrt{b+ca}}\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}\right)$$

Suy ra:

$$P\leq \frac{ab}{2}\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)+\frac{bc}{2}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\right)+\frac{ca}{2}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{bc+ca}{a+b}+\frac{ab+ca}{b+c}+\frac{ab+bc}{c+a}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(a+b+c$$

$$=\frac{1}{2}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi

$$a=b=c=\frac{1}{3}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{2}$ khi *a = b = c* = $\frac{1}{3}$

- - - **HẾT**- - -

 *Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com*

*https://www.vnteach.com*