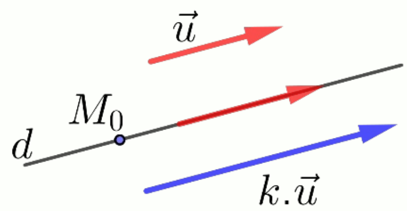
MỤC LỤC

Ⓐ. Tóm tắt kiến thức

1. Phương trình đường thẳng

Vectơ chỉ phương của đường thẳng:

- Cho đường thẳng Δ và vectơ $\vec{u}$ khác $\vec{0}$.
- Vectơ $\vec{u}$ được gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ nếu giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với Δ.



Nhận xét:

- Một đường thẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm mà nó đi qua và một vectơ chỉ phương của nó.
- Nếu $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng thì $k.\vec{u}\ (k \neq 0)$ cũng là một vectơ chỉ phương của đường thẳng đó.

Phương trình tham số của đường thẳng:

- Trong không gian *Oxyz*,
- phương trình tham số của đường thẳng Δ qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và nhận $\vec{u}=(a;b;c)$ làm vectơ chỉ phương có dạng: $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$ với $t\in\mathbb{R}$ *(t được gọi là tham số và $a^2+b^2+c^2\neq 0$)*

Phương trình chính tắc của đường thẳng:

- Trong không gian *Oxyz*,
- phương trình chính tắc của đường thẳng Δ qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và nhận $\vec{u}=(a;b;c)$ làm vectơ chỉ phương có dạng: $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ ($a.b.c\neq 0$)

- **Phương trình đường thẳng qua hai điểm cho trước:**
  - Trong không gian *Oxyz*,
  - cho đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A(x_A;y_A;z_A),B(x_B;y_B;z_B)$ và nhận $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$ làm vectơ chỉ phương có:
  - Phương trình tham số : $\begin{cases} x=x_A+(x_B-x_A)t \\ y=y_A+(y_B-y_A)t \\ z=z_A+(z_B-z_A)t \end{cases}$ với $t\in\mathbb{R}$
  - Phương trình chính tắc: $\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}=\dfrac{z-z_A}{z_B-z_A}$ (với $x_B\neq x_A,y_B\neq y_A,z_B\neq z_A$)

2. Vị trí tương đối hai đường thẳng. Điều kiện để hai đường thẳng vuông góc

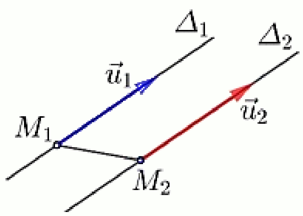
- **Sự cùng phương – Sự đồng phẳng:**
  - Trong không gian *Oxyz*, Hai vectơ được gọi là ***cùng phương*** khi giá của chúng cùng song song với một đường thẳng.
  - Ba vectơ được gọi là ***đồng phẳng*** khi giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.
  - Trong không gian *Oxyz*, cho ba vecto $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3),\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ và $\vec{c}=(c_1;c_2;c_3)$
  - Hai $\vec{a},\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$.
  - Hai $\vec{a},\vec{b}$ không cùng phương $\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right]\neq\vec{0}$.
  - Ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}=0$.
  - Ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng $\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}\neq0$.
- **Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng:**
  - Trong không gian *Oxyz*, cho hai đường thẳng Δ_1,Δ_2 lần lượt đi qua các điểm M_1,M_2 và tương ứng có $\vec{u}_1=(a_1;b_1;c_1);\vec{u}_2=(a_2;b_2;c_2)$ là hai vectơ chỉ phương. Khi đó, ta có:

• $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1, \vec{u}_2 & \text{cùng phương} \\ \vec{u}_1, \overline{M_1M_2} & \text{cùng phương} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \vec{0} \\ [\vec{u}_1, \overrightarrow{M_1M_2}] = \vec{0} \end{cases}$

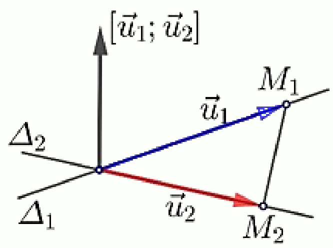
• $\Delta_1 / \text{¿} \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1, \vec{u}_2 & \text{cùng phương} \\ \vec{u}_1, \overline{M_1M_2} & \text{không cùng phương} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \vec{0} \\ [\vec{u}_1, \overrightarrow{M_1M_2}] \neq \vec{0} \end{cases}$

• Δ_1 cắt $\Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1, \vec{u}_2 & \text{không cùng phương} \\ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \overline{M_1M_2} & \text{Đồng phẳng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \neq \vec{0} \\ [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \neq 0 \end{cases}$

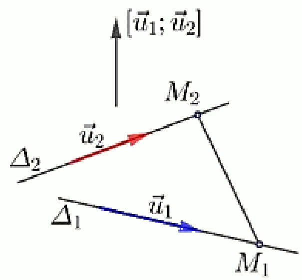
• Δ_1 và Δ_2 chéo nhau $\Leftrightarrow [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \overline{M_1M_2} \neq 0$



Δ_1 song song Δ_2



Δ_1 cắt Δ_2



Δ_1 chéo Δ_2

- Để xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng.
- Trong không gian *Oxyz*, hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 tương ứng có $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1)$ và $\vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$ là hai vectơ chỉ phương và có phương trình tham số:

$$\Delta_1: \begin{cases} x = x_1 + a_1t_1 \\ y = y_1 + b_1t_1 \\ z = z_1 + c_1t_1 \end{cases} (t_1 \in \text{¡}), \quad \Delta_2: \begin{cases} x = x_2 + a_2t_2 \\ y = y_2 + b_2t_2 \\ z = z_2 + c_2t_2 \end{cases} (t_2 \in \text{¡})$$

- Xét hệ phương trình hai ẩn t_1, t_2: $\begin{cases} x_1 + a_1t_1 = x_2 + a_2t_2 \\ y_1 + b_1t_1 = y_2 + b_2t_2 \\ z_1 + c_1t_1 = z_2 + c_2t_2 \end{cases} (*)$
- Khi đó :
- $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1$ cùng phương với $\vec{u}_2$ và hệ $(*)$ vô nghiệm.
- $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow$ Hệ $(*)$ có vô số nghiệm.
- Δ_1 cắt $\Delta_2 \Leftrightarrow$ Hệ $(*)$ có nghiệm duy nhất.
- Δ_1 và Δ_2 chéo nhau $\Leftrightarrow \vec{u}_1$ không cùng phương với $\vec{u}_2$ và hệ $(*)$ vô nghiệm.

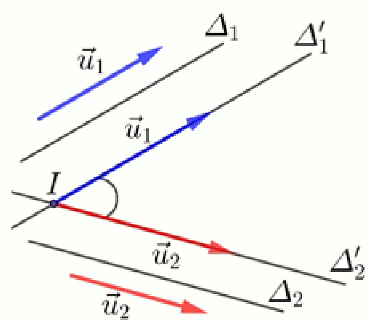
Điều kiện để hai đường thẳng vuông góc:

- Trong không gian *Oxyz*, cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 tương ứng có $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1)$ và $\vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$ là hai vectơ chỉ phương. Khi đó, ta có: $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1 \perp \vec{u}_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1.\vec{u}_2 = 0 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$
-

3. Góc

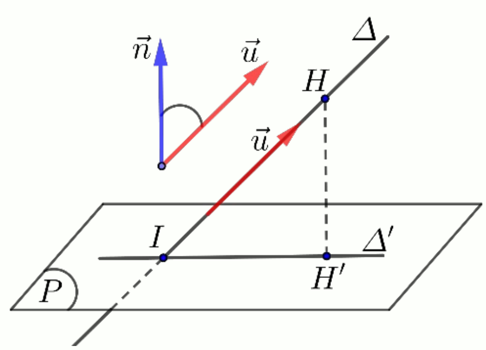
Góc giữa hai đường thẳng:

- Trong không gian *Oxyz*,
- cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 tương ứng có $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1)$ và $\vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$ là hai vectơ chỉ phương.
- Khi đó, ta có: $$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \left|\cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2)\right| = \frac{\left|\vec{u}_1.\vec{u}_2\right|}{\left|\vec{u}_1\right|.\left|\vec{u}_2\right|} = \frac{\left|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2\right|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}.\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$



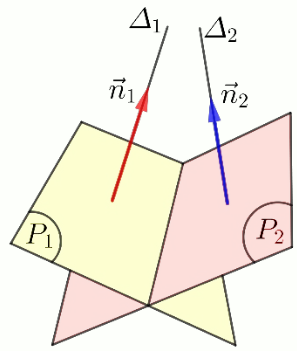
Góc giữa đường thẳng với mặt phẳng:

- Trong không gian *Oxyz*,
- cho đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$.
- Khi đó, ta có: $$\sin(\Delta, (P)) = \left|\cos(\vec{u}, \vec{n})\right| = \frac{\left|\vec{u}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{n}\right|} = \frac{\left|aA + bB + cC\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



Góc giữa hai mặt phẳng:

- Trong không gian *Oxyz*,
- cho hai mặt phẳng $(P_1),(P_2)$ có hai vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$ và $\vec{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$.
- Khi đó, ta có: $\cos((P_1),(P_2))=\left|\cos(\vec{n}_1,\vec{n}_2)\right|=\dfrac{\left|\vec{n}_1.\vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right|.\left|\vec{n}_2\right|}=\dfrac{\left|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}.\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$



Ⓑ. Phân dạng toán cơ bản

•Dạng ❶: Xác định vecto chỉ phương của đường thẳng

Phương pháp

- Trong không gian $Oxyz$, vecto $\vec{u}=(a;b;c)\neq\vec{0}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ thì vecto $\vec{m}=k\vec{u}$ cũng là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ.
- Phương trình tham số $\Delta:\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\ (t\in\mathbb{R})\\z=z_0+ct\end{cases}$ có VTCP $\vec{u}=(a;b;c)$ (hệ số trước *t*).
- Phương trình chính tắc $\Delta:\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ có VTCP $\vec{u}=(a;b;c)$ (hệ số ở mẫu).

Nhận xét:

- Với phương trình tham số lấy đúng thứ tự hệ số trước *tham số t*.
- Với phương trình chính tắc lấy hệ số dưới mẫu.
- Nếu giả thiết chưa đúng cấu trúc, ta phải sắp xếp lại rồi mới lấy hệ số.

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Trong không gian $Oxyz,$ xác định một vectơ chỉ phương của đường thẳng dưới đây:

(1) $d:\begin{cases} x=2-t \\ y=1+2t \\ z=3+t \end{cases}$ (2) $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{2}$ (3) $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{2-z}{1}$

Lời giải

(1) $d:\begin{cases} x=2-t \\ y=1+2t \\ z=3+t \end{cases}$

Đường thẳng d có một VTCP là $\vec{u}=(-1;2;1)$.

(2) $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{2}$

Đường thẳng d có một VTCP là $\vec{v}=(2;1;2)$.

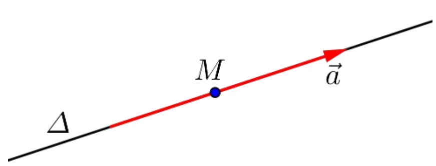
(3) $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{2-z}{1}$

Ta viết lại $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{2-z}{1}\Leftrightarrow d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}\Rightarrow \vec{u_1}=(2;2;-1)$.

⬩Dạng ❷: Đường thẳng qua điểm & có sẵn VTCP

Phương pháp

- Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ

Loại	Phương pháp
Qua M, có véctơ chỉ phương $\vec{a}=(a;b;c)$  	≫ Phương trình $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$ hoặc $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ nếu $\{a;b;c\}\neq 0$. ▶ **Lưu ý:** Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra

☞**Các ví dụ minh họa**

Câu 1: Trong không gian Oxyz, viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua điểm

(1) $M(2;0;-1)$ và có véctơ chỉ phương $\vec{a}=(2;-3;1)$

(2) $N(1;0;-2)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;3;1)$

Lời giải

(1) $M(2;0;-1)$ và có véctơ chỉ phương $\vec{a}=(2;-3;1)$

Đường thẳng đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và có VTCP $\vec{a}=(2;-3;1)$ là $\begin{cases}x=2+2t\\y=-3t\\z=-1+t\end{cases}$.

Và phương trình chính tắc là $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+1}{1}$.

(2) $N(1;0;-2)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;3;1)$

Đường thẳng đi qua điểm $N(1;0;-2)$ và có VTCP $\vec{u}=(2;3;1)$ là $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=0+3t\\z=-2+t\end{cases}$.

Và phương trình chính tắc là $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+2}{1}$.

Câu 2: Trong không gian Oxyz, viết phương trình tham số của đường thẳng d qua điểm bất kỳ thuộc d và có vectơ chỉ phương tương ứng. Biết đường thẳng d

(1) Đi qua điểm $A(1;1;2)$ và có véctơ chỉ phương $\vec{b}=(1;2;-3)$

(2) Đi qua điểm $C(3;2;1)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;2;3)$

Lời giải

(1) Đi qua điểm $A(1;1;2)$ và có véctơ chỉ phương $\vec{b}=(1;2;-3)$

Đường thẳng d đi qua điểm $A(1;1;2)$ và có VTCP $\vec{b}=(1;2;-3)$ là $d:\begin{cases}x=1+t\\y=1+2t\\z=2-3t\end{cases}$.

Xét $t=1\Rightarrow\begin{cases}x=1+1\\y=1+2.1\\z=2-3.1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=3\\z=-1\end{cases}\Rightarrow M(2;3;-1)$

Khi đó đường thẳng d đi qua điểm $M(2;3;-1)$ có VTCP $\vec{b}=(1;2;-3)$ là $d:\begin{cases}x=2+t\\y=3+2t\\z=-1-3t\end{cases}$.

(2) Đi qua điểm $C(3;2;1)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;2;3)$

Đường thẳng d đi qua điểm $C(3;2;1)$ và có VTCP $\vec{u}=(1;2;3)$ là $d:\begin{cases}x=3+t\\y=2+2t\\z=1+3t\end{cases}$.

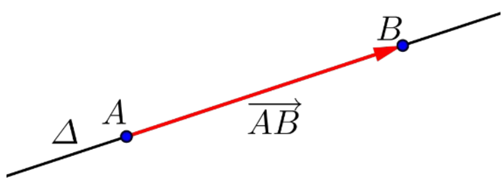
Xét $t=-1\Rightarrow\begin{cases}x=3+(-1)\\y=2+2.(-1)\\z=1+3.(-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=0\\z=-2\end{cases}\Rightarrow N(2;0;-2)$

Khi đó đường thẳng d đi qua điểm $N(2;0;-2)$ có VTCP $\vec{u}=(1;2;3)$ là $d:\begin{cases}x=2+t\\y=0+2t\\z=-2+3t\end{cases}$.

⬩Dạng ❸: Đường thẳng qua hai điểm

Phương pháp

- Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng D

Loại	**Phương pháp**
Qua hai điểm A và B. 	≫ Chọn A hoặc B là điểm mà D đi qua. ≫ Nhận $\overrightarrow{AB}$ làm VTCP $\rightarrow \vec{u}=\overrightarrow{AB}$. ▶ **Lưu ý:** Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra.

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Trong không gian Oxyz, viết phương trình chính tắc của đường thẳng

(1) Đi qua gốc tọa độ và $H(1;4;-2)$.

(2) Đi qua hai điểm $M(2;0;-1)$ và $N(2;-3;1)$

Lời giải

(1) Đi qua gốc tọa độ và $H(1;4;-2)$.

Ta có: $\overrightarrow{OH}=(1;4;-2)$.

Đường thẳng OH qua H nhận $\overrightarrow{OH}=(1;4;-2)$ làm VTCP: $\frac{x}{1}=\frac{y}{4}=\frac{z}{-2}$.

(2) Đi qua hai điểm $M(2;0;-1)$ và $N(2;-3;1)$

Ta có: $\overrightarrow{MN}=(-1;3;2)$.

Đường thẳng MN qua N nhận $\overrightarrow{MN}=(-1;3;2)$ làm VTCP: $\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{2}$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho DABC có $A(-1;3;2), B(2;0;5), C(0;-2;1)$. Viết phương trình đường trung tuyến AM của DABC

Lời giải

Gọi $M(x;y;z)$ là trung điểm BC. Khi đó $M(1;-1;3)$

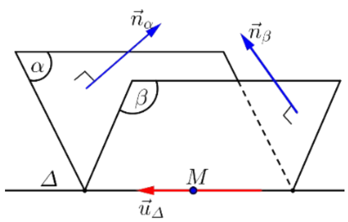
Ta có $\overrightarrow{AM}=\vec{u}=(2;-4;1)$

Khi đó phương trình đường trung tuyến $AM:\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z-2}{1}$

•Dạng ❹: Đường thẳng là giao tuyến của hai mặt phẳng

Phương pháp

- Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng D

Loại	**Phương pháp**
Giao tuyến của hai mặt phẳng $(a):Ax+By+Cz+D=0$ và $(b):A'x+B'y+C'z+D'=0$ 	≫ Cho 1 trong 3 ẩn $x;y;z=0$ để tìm 2 ẩn còn lại $x=0 \longrightarrow \begin{cases} By+Cz+D=0 \\ B'y+C'z+D'=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=? \\ z=? \end{cases} \Rightarrow M(0;?;?)$ ≫ Vecto chỉ phương $\vec{u}=\left[\vec{n}_a;\vec{n}_b\right]$. ▶ **Lưu ý:** Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P):2x+y-z-1=0$, $(Q):x-2y+z-5=0$. Giao tuyến hai mặt phẳng (P) và (Q) có một vectơ chỉ phương là?

Lời giải

Gọi $d=(P)\cap(Q)$.

Khi đó một vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}=\left[\vec{n}_P,\vec{n}_Q\right]=(-1;-3;-5)$.

Vậy $\vec{u}=(1;3;5)$ cũng là một vectơ chỉ phương của d.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(a): 2x+y-z+3=0$ và $(b): x+y+z-1=0$. Phương trình chính tắc đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (a) và (b) là?

Lời giải

Ta có $\begin{cases} \vec{n}_{(a)}=(2;1;-1) \\ \vec{n}_{(b)}=(1;1;1) \end{cases} \Rightarrow \left[\vec{n}_{(a)},\vec{n}_{(b)}\right]=(2;-3;1) \Rightarrow \vec{u}_{\Delta}=\left[\vec{n}_a,\vec{n}_b\right]=(2;-3;1).$.

Gọi $M=(a)\cap(b)$, thì $M\in\Delta$ và M thỏa

$$\begin{cases} 2x+y-z+3=0 \\ x+y+z-1=0 \end{cases} \xrightarrow{x=0} \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \Rightarrow M(0;-1;2) \\ z=2 \end{cases}$$

Đường thẳng Δ đi qua $M(0;-1;2)$ và nhận $\vec{u}_{\Delta}=(2;-3;1)$ làm một vectơ chỉ phương có phương trình chính tắc là $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-2}{1}$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-5z+4=0$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+5}{6}$. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với (P). Xác định phương trình giao tuyến d' của (Q) và (P)?

Lời giải

Gọi đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên (P)

Đường thẳng d đi qua điểm $A(-1;-1;-5)$ và có $\vec{u}_d=(2;1;6)$.

(P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_P=(1;1;-5)$.

(Q) chứa d và vuông góc với $(P) \Rightarrow (P)\cap(Q)=d'$.

Vectơ pháp tuyến của (Q) là $\vec{n}_Q=\left[\vec{n}_P,\vec{u}_d\right]=(11;-16;-1)$.

Phương trình của mặt phẳng (Q) là : $11x-16y-z-10=0$.

Do $(P)\cap(Q)=d'$ nên VTCP của đường thẳng d' là $\vec{u}_{d'}=\left[\vec{n}_Q,\vec{n}_P\right]=-27(3;2;1)$,

$\longrightarrow d'$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1=(3;2;1)$.

Gọi $I = d \cap (P)$, khi đó tọa độ I là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + y - 5z + 4 = 0 \\ \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z+5}{6} \end{cases}$.

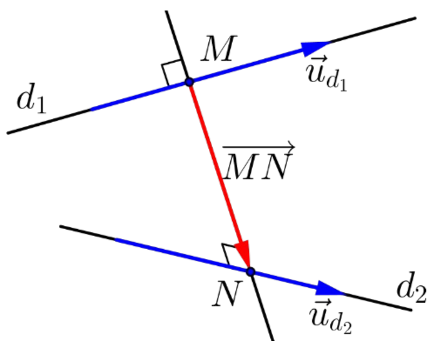
Giải hệ ta được $(x; y; z) = (1; 0; 1)$.

Do đó $d' : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$, suy ra đường thẳng d' đi qua điểm $P(4; 2; 2)$.

•Dạng ❺: Đường thẳng là đường vuông góc chung của hai đường thẳng

Phương pháp

- Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ

Loại	Phương pháp
Là đường vuông góc chung của d_1 và d_2  	≫ Gọi $\begin{cases} M\in d_1 \\ N\in d_2 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MN}(?)$ (tọa độ theo $t;k$). ≫ MN là đường vuông góc chung $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1.\overrightarrow{MN}=0 \\ \vec{u}_2.\overrightarrow{MN}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=? \\ k=? \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(?) \\ N(?) \end{cases}$. ≫ Khi đó đường thẳng $\Delta: \begin{cases} qua \left[\begin{array}{l} M \\ N \end{array}\right. \\ \vec{u}_\Delta=\overrightarrow{MN} \end{cases}$. ▶ **Lưu ý:** Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d_1:\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+t \\ z=-2+5t \end{cases}$ và $d_2:\begin{cases} x=1+s \\ y=2+s \\ z=1+3s \end{cases}$. Viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng $d_1;d_2$.

Lời giải

Gọi Δ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng $d_1;d_2$.

Đường thẳng d_1 có VTCP là $\vec{u}_1=(2;1;5)$; d_2 có VTCP là $\vec{u}_2=(1;1;3)$.

Gọi $A=\Delta\cap d_1 \Rightarrow A(1+2t;2+t;-2+5t)$; $B=\Delta\cap d_2 \Rightarrow B(1+s;2+s;1+3s)$.

$\overrightarrow{AB}=(s-2t;s-t;3+3s-5t)$.

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\vec{u}_1=0 \\ \overrightarrow{AB}.\vec{u}_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(s-2t)+s-t+5(3+3s-5t)=0 \\ s-2t+s-t+3(3+3s-5t)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18s-30t=-15 \\ 11s-18t=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=0 \\ t=\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

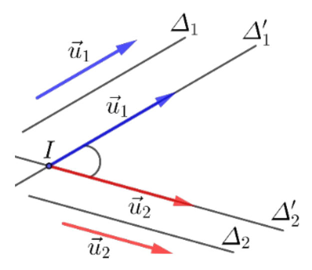
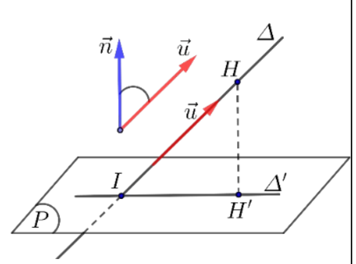
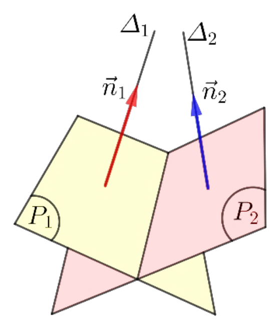
Suy ra $B(1;2;1)$ và $\overrightarrow{AB}=\left(-1;-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Phương trình đường thẳng đi qua B và có VTCP $\vec{u}=(-2;-1;1)$ là $\begin{cases} x=1-2t \\ y=2-t \\ z=1+t \end{cases}$.

•Dạng ❻: Góc

Phương pháp

- Trong không gian *Oxyz*,

Loại	**Hình vẽ**
Hai đường thẳng Δ_1,Δ_2 tương ứng có $\vec{u_1}=(a_1;b_1;c_1)$ và $\vec{u_2}=(a_2;b_2;c_2)$ là hai vectơ chỉ phương. Khi đó, ta có: $\cos(\Delta_1,\Delta_2)=\left\|\cos(\vec{u_1},\vec{u_2})\right\|=\frac{\left\|\vec{u_1}.\vec{u_2}\right\|}{\left\|\vec{u_1}\right\|.\left\|\vec{u_2}\right\|}=\frac{\left\|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2\right\|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}.\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$	
Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(a;b;c)$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$. Khi đó, ta có: $\sin(\Delta,(P))=\left\|\cos(\vec{u},\vec{n})\right\|=\frac{\left\|\vec{u}.\vec{n}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|.\left\|\vec{n}\right\|}=\frac{\left\|aA+bB+cC\right\|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$	
Hai mặt phẳng $(P_1),(P_2)$ có hai vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n_1}=(A_1;B_1;C_1)$ và $\vec{n_2}=(A_2;B_2;C_2)$. Khi đó, ta có: $\cos((P_1),(P_2))=\left\|\cos(\vec{n_1},\vec{n_2})\right\|=\frac{\left\|\vec{n_1}.\vec{n_2}\right\|}{\left\|\vec{n_1}\right\|.\left\|\vec{n_2}\right\|}=\frac{\left\|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2\right\|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$	

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\begin{cases} x=t \\ y=5-2t \\ z=14-3t \end{cases}$ và $d_2:\begin{cases} x=1-4t' \\ y=2+t' \\ z=-1+5t' \end{cases}$.
Tính góc giữa hai đường thẳng đã cho.

Lời giải

Đường thẳng d_1 có một VTCP $\vec{u_1}=(1;-2;-3)$.

Đường thẳng d_2 có một VTCP $\vec{u}_2=(-4;1;5)$.

Ta có: $$\cos(d_1,d_2)=\frac{|\vec{u}_1.\vec{u}_2|}{|\vec{u}_1|.|\vec{u}_2|}=\frac{|1.(-4)+(-2).1+(-3).5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-3)^2}.\sqrt{(-4)^2+1^2+5^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow(d_1,d_2)=30^\circ$$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x-3}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z+3}{-1}$ và mặt phẳng $(P):2x+y+z-1=0$. Tính góc giữa Δ và (P)

Lời giải

Đường thẳng Δ có một VTCP $\vec{u}=(1;2;-1)$.

Mặt phẳng (P) có một VTPT $\vec{n}=(2;1;1)$.

Ta có: $$\sin(\Delta,(P))=\frac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}|.|\vec{n}|}=\frac{|1.2+2.1+(-1).1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}.\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow(\Delta,(P))=30^\circ$$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa hai mặt phẳng $(P):x+2y+z+10=0$ và $(Q):-x+y+2z+13=0$.

Lời giải

Mặt phẳng (P) có một VTPT là $\vec{n}_1=(1;2;1)$.

Mặt phẳng (Q) có một VTPT là $\vec{n}_2=(-1;1;2)$.

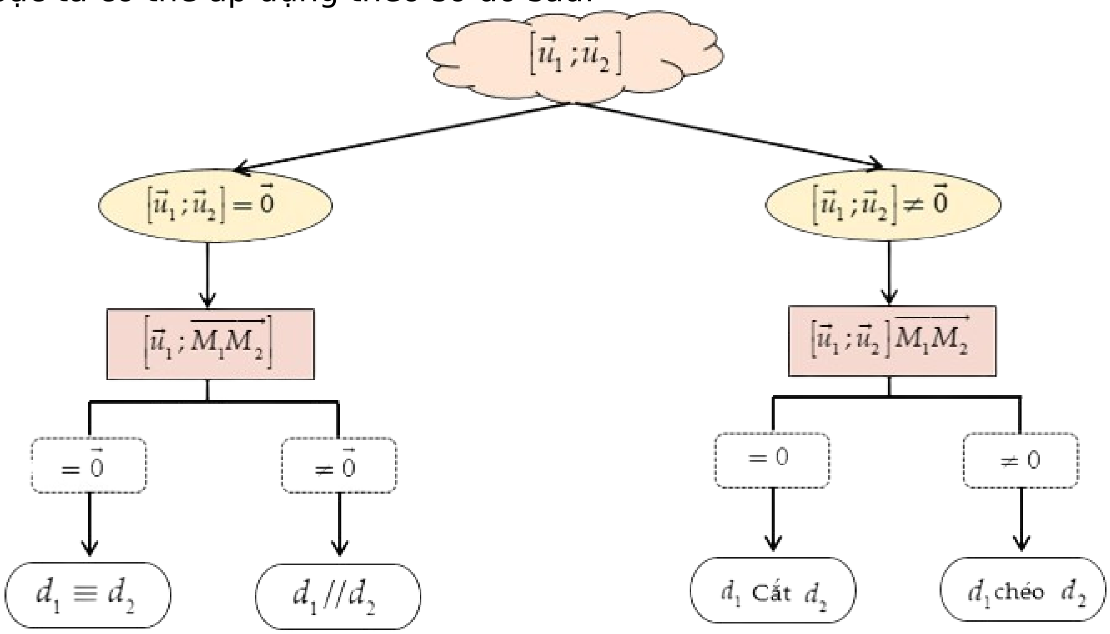
Ta có: $$\cos((P),(Q))=\frac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|}=\frac{|1.(-1)+2.1+1.2|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow((P),(Q))=60^\circ$$

Dạng ❼: Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Phương pháp

- Trong không gian *Oxyz*, cho hai đường thẳng:
- $d:\begin{cases}x=x_0+a_1t\\y=y_0+a_2t\\z=z_0+a_3t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$ có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $M_0(x_0;y_0;z_0)\in d$;
- $d':\begin{cases}x=x'_0+a'_1t'\\y=y'_0+a'_2t'\\z=z'_0+a'_3t'\end{cases}(t'\in\mathbb{R})$ có vectơ chỉ phương $\vec{a}'=(a'_1;a'_2;a'_3)$.
- Khi đó:
- $d//d'\Leftrightarrow\vec{a},\vec{a}'$ cùng phương và $M_0\notin d'$.

- d trùng d' $\Leftrightarrow$ $\vec{a},\vec{a'}$ cùng phương $M_0 \in d'$
- $d \cap d' \Leftrightarrow$ hệ phương trình ẩn t, t' sau: $\begin{cases} x_0 + a_1 t = x'_0 + a'_1 t' \\ y_0 + a_2 t = y'_0 + a'_2 t' \\ z_0 + a_3 t = z'_0 + a'_3 t' \end{cases}$ có đúng một nghiệm.
- d và d' chéo nhau $\Leftrightarrow$ $\vec{a}$ và $\vec{a'}$ không cùng phương và $\begin{cases} x_0 + a_1 t = x'_0 + a'_1 t' \\ y_0 + a_2 t = y'_0 + a'_2 t' \\ z_0 + a_3 t = z'_0 + a'_3 t' \end{cases}$ vô nghiệm.
- Hoặc ta có thể áp dụng theo sơ đồ sau:



☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau:

(1) $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3 - t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = 2 + 2t' \\ y = 3 + 4t' (t' \in \mathbb{R}) \\ z = 5 - 2t' \end{cases}$

(2) $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t (t \in \mathbb{R}) \\ z = 5 + t \end{cases}$ và $d': \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z+1}{2}$

(3) $d: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{2}$ và $d': \dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+2}{-2}$

Lời giải

(1) $d:\begin{cases}x=1+t\\y=2t\quad(t\in\mathbb{R})\\z=3-t\end{cases}$ và $d':\begin{cases}x=2+2t'\\y=3+4t'(t'\in\mathbb{R})\\z=5-2t'\end{cases}$

Ta có các vectơ chỉ phương của d và d' lần lượt là $\vec{a}=(1;2;-1)$ và $\vec{a'}=(2;4;-2)$.

Vì $\vec{a'}=2\vec{a}$ nên $\vec{a}$ và $\vec{a'}$ cùng phương.

$\Rightarrow$ d và d' song song với nhau hoặc trùng nhau.

Xét điểm $M(1;0;3)\in d$, ta có $M\notin d'$ nên $d//d'$.

(2) $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+3t(t\in\mathbb{R})\\z=5+t\end{cases}$ và $d':\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{2}$

Ta có d và d' lần lượt nhận $\vec{a}=(2;3;1)$ và $\vec{a'}=(3;2;2)$ là các vectơ chỉ phương.

Vì $\vec{a}$ và $\vec{a'}$ không cùng phương nên d và d' cắt nhau hoặc chéo nhau.

d' qua $M(1;-2;-1)$; có VTCP $\vec{a'}=(3;2;2)$ nên có phương trình là:

$d':\begin{cases}x=1+3t'\\y=-2+2t'(t'\in\mathbb{R})\\z=-1+2t'\end{cases}$

Xét hệ phương trình: $\begin{cases}1+2t=1+3t'\\-1+3t=-2+2t'\\5+t=-1+2t'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-\frac{3}{5}\\t'=-\frac{2}{5}\\5+t=-1+2t'\end{cases}\Rightarrow$ Hệ vô nghiệm

Vậy hai đường thẳng d và d' chéo nhau.

(3) $d:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}$ và $d':\frac{x-1}{5}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+2}{-2}$

Ta có: d đi qua $M(0;1;0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(1;-1;2)$;

d' đi qua $M'(1;2;-2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a'}=(5;1;-2)$.

Nên phương trình tham số của d và d' lần lượt là:

$d:\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$ và $d':\begin{cases} x = 1 + 5t' \\ y = 2 + t' \\ z = -2 - 2t' \end{cases}$

Xét hệ phương trình $\begin{cases} t = 1 + 5t' \\ 1 - t = 2 + t' \\ 2t = -2 - 2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - 5t' = 1 \\ -t - t' = 1 \\ 2t + 2t' = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\dfrac{2}{3} \\ t' = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow$ hệ có nghiệm duy nhất

Vậy hai đường thẳng d và d' cắt nhau.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho $d_1: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-2}{-3}$ và $d_2: \begin{cases} x = 2t \\ y = -3 - t \\ z = 0 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(1) d_1 và d_2 đồng phẳng. (2) d_1 cắt và vuông góc với d_2.

(3) d_1 vuông góc d_2 và không cắt nhau. (4) d_1 song song với d_2.

Lời giải

Ta có: VTCP của d_1 là $\vec{u}_1 = (1;2;-3)$; VTCP của d_2 là $\vec{u}_2 = (2;-1;0)$.

Từ đó ta có: $\vec{u}_1.\vec{u}_2 = 0 \Rightarrow \vec{u}_1 \perp \vec{u}_2 \Rightarrow d_1 \perp d_2$ (1).

Giao điểm d_1, d_2 (nếu có) là nghiệm: $\begin{cases} \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-2}{-3} \\ x = 2t \\ y = -3 - t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2t}{1} = \dfrac{-2}{-3} \\ \dfrac{-3-t}{2} = \dfrac{-2}{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{1}{3} \\ t = -\dfrac{13}{3} \end{cases}$ (vô lý).

Từ đó ta có d_1 không cắt d_2 (2).

Từ (1) và (2) ta có d_1 vuông góc d_2 và không cắt nhau.

Vậy mệnh đề (3) là mệnh đề đúng.

•Dạng ❽: Bài toán thực tế

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Trong một khu du lịch, người ta cho du khách trải nghiệm thiên nhiên bằng cách đu theo đường trượt zipline từ vị trí A cao 15 m của tháp 1 này sang vị trí B cao 10 m của tháp 2 trong khung cảnh tuyệt đẹp xung quanh. Với hệ trục toạ độ **Oxyz** cho trước (đơn vị: mét), toạ độ của A và B lần lượt là $(3;2,5;15)$ và $(21;27,5;10)$

(1) Viết phương trình đường thẳng chứa đường trượt zipline này.

(2) Xác định toạ độ của du khách khi ở độ cao 12 mét.

Lời giải

(1) Viết phương trình đường thẳng chứa đường trượt zipline này.

Ta có: $A(3;2,5;15)$, $B(21;27,5;10) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(18;15;-5)$

Phương trình tham số đường thẳng AB là: $\begin{cases} x=3+18t \\ y=2,5+15t \\ z=15-5t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

Vậy phương trình đường thẳng chứa đường trượt zipline là $\begin{cases} x=3+18t \\ y=2,5+15t \\ z=15-5t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

(2) Xác định toạ độ của du khách khi ở độ cao 12 mét.

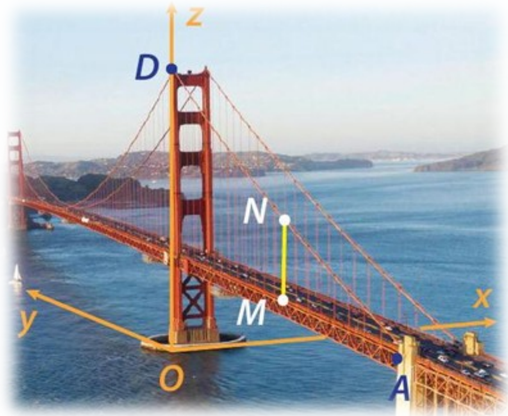
Khi du khách khi ở độ cao 12 mét $\Rightarrow z=12 \Rightarrow 15-5t=12 \Rightarrow t=\frac{3}{5}$

Thay $t=\frac{3}{5}$ vào phương trình đường thẳng AB ta được $\begin{cases} x=13,8 \\ y=11,5 \\ z=12 \end{cases} \Rightarrow C(13,8;11,5;12)$

Vậy toạ độ của du khách khi ở độ cao 12 mét là $C(13,8;11,5;12)$.

Câu 2: Cầu Cổng Vàng (The Golden Gate Bridge) ở Mỹ. Xét hệ trục toạ độ Oxyz với O là bệ của chân cột trụ tại mặt nước, trục Oz trùng với cột trụ, mặt phẳng (Oxy) là mặt nước và xem như trục Oy cùng phương với cầu như hình vẽ.

Dây cáp AD (xem như là một đoạn thẳng) đi qua đỉnh D thuộc trục Oz và điểm A thuộc mặt phẳng Oyz, trong đó điểm D là đỉnh cột trụ cách mặt nước $227m$, điểm A cách mặt nước $75m$ và cách trục Oz $343m$.



Giả sử ta dùng một đoạn dây nối điểm N trên dây cáp AD và điểm M trên thành cầu, biết M cách mặt nước $75m$ và MN song song với cột trụ.

(1) Tính độ dài MN, biết điểm M cách trục Oz một khoảng bằng $230m$.

(2) Người ta có thể dùng đoạn dây dài $100m$ để nối dây cáp AD với thành cầu tại vị trí điểm M cách trục Oz một khoảng bằng 148 m không? Vì sao?

Lời giải

(1) Tính độ dài MN, biết điểm M cách trục Oz một khoảng bằng $230m$.

Ta có $A \in Oyz$ và A cách mặt nước $75m$ và cách trục Oz $343m \Rightarrow A(0;343;75)$

Điểm D là đỉnh cột trụ cách mặt nước $227m \Rightarrow D(0;0;227)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = (0;-343;152)$

$\Rightarrow$ phương trình đường thẳng AD là $\begin{cases} x = 0 \\ y = -343t \\ z = 227 + 152t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

Vì $N \in AD \Rightarrow N(0;-343t;227+152t)$

Điểm M trên thành cầu, M cách mặt nước $75m$ và cách trục Oz một khoảng bằng $230m$ nên tọa độ điểm M là $M(0;230;75)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (0;-343t-230;152+152t)$

MN song song với cột trụ $\Rightarrow MN \perp Oy \Rightarrow \overrightarrow{MN}.\vec{j} = 0 \Rightarrow -343t - 230 = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{230}{343}$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \left(0;0;\frac{17176}{343}\right) \Rightarrow MN = \frac{17176}{343}$$

(2) Người ta có thể dùng đoạn dây dài $100m$ để nối dây cáp AD với thành cầu tại vị trí điểm M cách trục Oz một khoảng bằng 148 m không? Vì sao?

Điểm M cách trục Oz một khoảng bằng $148m$

$$\Rightarrow M(0;148;75) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (0;-343t-148;152+152t)$$

$$MN // Oz \Rightarrow MN \perp Oy \Rightarrow \overrightarrow{MN}.\vec{j} = 0 \Rightarrow -343t-148 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{148}{343}.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \left(0;0;\frac{29640}{343}\right) \Rightarrow MN = \frac{29640}{343} \approx 86,41m.$$

Vậy có thể dùng đoạn dây dài $100m$ để nối dây cáp AD với thành cầu tại vị trí điểm M cách trục Oz một khoảng bằng $148m$.

Ⓒ. Dạng toán rèn luyện

✦Dạng ❶: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Cho đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2;-4;-6)$. Vectơ nào sau đây không phải là vectơ chỉ phương của Δ?

A. $\vec{u_1} = (1;-2;-3)$. **B.** $\vec{u_2} = (-1;2;3)$. **C.** $\vec{u_3} = (-2;-4;6)$. **D.** $\vec{u_4} = (-3;6;9)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\frac{2}{-2} \neq \frac{-4}{-4}$ nên $\vec{u_3}$ không cùng phương với $\vec{u}$.

Vậy $\vec{u_3}$ không phải là vectơ chỉ phương của Δ.

Câu 2: Cho đường thẳng Δ có phương trình $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{4}$. Vectơ nào sau đây là vectơ chỉ phương của Δ?

A. $\vec{u_1} = (-1;2;-1)$. **B.** $\vec{u_2} = (1;-2;1)$. **C.** $\vec{u_3} = (-3;2;-4)$. **D.** $\vec{u_4} = (3;2;4)$.

Lời giải

Chọn C

$\Delta: \frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-1}{4}$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(3;-2;4)$.

$\vec{u_3}=(-3;2;-4)=-\vec{u_1}$ nên $\vec{u_3}$ là một vectơ chỉ phương của Δ.

Câu 3: Cho đường thẳng Δ có phương trình $\begin{cases} x=3-t \\ y=-1 \quad (t\in \mathbb{R}) \\ z=3t \end{cases}$. Vectơ nào sau đây là vectơ chỉ phương của Δ?

A. $\vec{u_1}=(3;-1;3)$. **B.** $\vec{u_2}=(3;-1;0)$. **C.** $\vec{u_3}=(-1;-1;3)$. **D.** $\vec{u_4}=(-1;0;3)$.

Lời giải

Chọn D

$\Delta: \begin{cases} x=3-t \\ y=-1 \quad (t\in \mathbb{R}) \\ z=3t \end{cases}$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u_4}=(-1;0;3)$.

Câu 4: Cho đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (Oxy). Vectơ nào sau đây là vectơ chỉ phương của Δ?

A. $\vec{i}=(1;0;0)$. **B.** $\vec{j}=(0;1;0)$. **C.** $\vec{k}=(0;0;1)$. **D.** $\vec{u}=(1;1;0)$.

Lời giải

Chọn C

Mặt phẳng (Oxy) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{k}=(0;0;1)$.

Đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (Oxy) nên $\vec{k}=(0;0;1)$ là một vectơ chỉ phương của Δ.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, phương trình chính tắc của đường thẳng AB với $A(1;1;2)$ và $B(-4;3;-2)$ là:

A. $\frac{x+4}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+2}{-2}$. **B.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{-2}$.

C. $\frac{x+1}{-5}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+2}{-4}$. **D.** $\frac{x+4}{-5}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+2}{-4}$.

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng AB đi qua điểm $B(-4;3;-2)$, nhận $\overrightarrow{AB}=(-5;2;-4)$ làm vectơ chỉ phương, có phương trình chính tắc là: $\frac{x+4}{-5}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+2}{-4}$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $A(2;0;-1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P):2x-y+z+3=0$ là:

A. $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-t \\ z=-1+t \end{cases} \quad (t\in \mathbb{R})$.

B. $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-1 \\ z=1-t \end{cases} \quad (t\in \mathbb{R})$.

C. $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-1 \\ z=-1+t \end{cases} \quad (t\in \mathbb{R})$.

D. $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-t \\ z=1-t \end{cases} \quad (t\in \mathbb{R})$.

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng đi qua điểm $A(2;0;-1)$, nhận $\overrightarrow{n_{(P)}}=(2;-1;1)$ làm vectơ chỉ phương, có phương trình tham số là: $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-t \\ z=-1+t \end{cases} \quad (t\in \mathbb{R})$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua hai điểm $A(1;-3;5)$, $B(2;-1;7)$ có phương trình chính tắc là

A. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-7}{2}$.

B. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-5}{-2}$.

C. $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-5}{-2}$.

D. $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+5}{-2}$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng đi qua hai điểm $A(1;-3;5)$, $B(2;-1;7)$ có một VTCP là $\overrightarrow{BA}=(-1;-2;-2)$,

Suy ra PTCT là $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-5}{-2}$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz,$ cho đường thẳng Δ có phương trình $\frac{x-1}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-7}{5}$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng Δ?

A. $M(1;-3;5)$. **B.** $N(2;-1;7)$. **C.** $P(1;-3;7)$ **D.** $Q(3;-5;7)$.

Lời giải

Chọn C

Thay tọa độ các điểm vào PT đường thẳng ta có $P(1;-3;7)\in\Delta$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz,$ cho đường thẳng Δ có phương trình $\begin{cases}x=3-t\\y=1+3t\\z=2t\end{cases}$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng Δ?

A. $M(3;1;2)$. **B.** $N(3;1;0)$. **C.** $P(-1;3;2)$ **D.** $Q(-1;-3;0)$.

Lời giải

Chọn D

Thay tọa độ các điểm vào PT đường thẳng ta có $N(3;1;0)\in\Delta$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz,$ đường thẳng nào dưới đây đi qua điểm $A(3;-3;2)$

A. $\frac{x-3}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+2}{2}$. **B.** $\frac{x+3}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+2}{-2}$.

C. $\frac{x-3}{-1}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z-2}{2}$. **D.** $\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z+5}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Thay tọa độ điểm A vào các PT đường thẳng ta có $\frac{x-3}{-1}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z-2}{2}$ đi qua A.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz,$ điểm nào dưới đây **không** thuộc đường thẳng Δ: $\begin{cases}x=5-3t\\y=1-t\\z=2+2t\end{cases}$.

A. $M(3;1;-2)$. **B.** $N(5;1;2)$. **C.** $P(-1;-1;6)$ **D.** $Q(2;0;4)$.

Lời giải

Chọn A

Thay tọa độ các điểm vào PT đường thẳng ta có $M(3;1;-2)\notin\Delta$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz,$ cho hai đường thẳng $\Delta_1:\begin{cases}x=5-2t\\y=5+3t\\z=2t\end{cases}$, $\Delta_2:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-6}{4}$. Góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 bằng

A. 30^o. **B.** 90^o. **C.** 60^o **D.** 45^o.

Lời giải

Chọn B

Ta có VTCP của Δ_1 và Δ_2 lần lượt là $\vec{a_1}(2;-3;2)$ và $\vec{a_2}(1;-2;4)\Rightarrow \vec{a_1}.\vec{a_2}=0$

Vậy góc giữa Δ_1 và Δ_2 bằng 90^o.

Câu 13: Trong không gian $Oxyz,$ cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{-2},$ $d_2:\dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}.$ Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng đã cho.

A. Chéo nhau. **B.** Trùng nhau. **C.** Song song. **D.** Cắt nhau.

Lời giải

Chọn C

$\begin{cases}\vec{u_{d_1}}=(2;1;-2)\\\vec{u_{d_2}}=(-2;-1;2)\end{cases}\Rightarrow \vec{u_1}=-\vec{u_2}.$ Do đó d_1 song song hoặc trùng với d_2.

Ta có

Gọi điểm $M(1;0-2)\in d_1.$ Thay M vào d_2 ta được: $\dfrac{1+2}{-2}=\dfrac{0-1}{-1}=\dfrac{-2}{2}$ (vô lí).

Vậy d_1 // d_2.

Câu 14: Trên một phần mềm đã thiết kế sân khấu 3D trong không gian $Oxyz$. Tính $\cos$ giữa hai tia sáng có phương trình lần lượt là $d_1:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-1},$ $d_2:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-1}{9}.$

A. $-\frac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

d_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u_1}=(2;1;-1)$.

d_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u_2}=(3;3;9)$.

Ta có $\cos(d_1,d_2)=\frac{|2.3+1.3+(-1).9|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}.\sqrt{3^2+3^2+9^2}}=0$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Gọi M_1, M_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên các trục Ox, Oy. Vectơ nào dưới đây là một véctơ chỉ phương của đường thẳng M_1M_2?

A. $\vec{u_4}=(-1;2;0)$ **B.** $\vec{u_1}=(0;2;0)$ **C.** $\vec{u_2}=(1;2;0)$ **D.** $\vec{u_3}=(1;0;0)$

Lời giải

Chọn A

M_1 là hình chiếu của M lên trục $Ox\Rightarrow M_1(1;0;0)$.

M_2 là hình chiếu của M lên trục $Oy\Rightarrow M_2(0;2;0)$.

Khi đó: $\overrightarrow{M_1M_2}=(-1;2;0)$ là một vectơ chỉ phương của M_1M_2.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, tọa độ nào sau đây là tọa độ của một véctơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=2+4t\\y=1-6t\\z=9t\end{cases},(t\in\mathbb{R})$?

A. $\left(\frac{1}{3};\frac{-1}{2};\frac{3}{4}\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$. **C.** $(2;1;0)$. **D.** $(4;-6;0)$.

Lời giải

Chọn A

Từ phương trình Δ suy ra véctơ chỉ phương của Δ là $\vec{u}=(4;-6;9)=12\left(\frac{1}{3};\frac{-1}{2};\frac{3}{4}\right)$.

Câu 17: Trong không gian $Oxyz,$ tính góc giữa hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$ và $d_2: \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{1}$

A. 45°. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Lời giải

Chọn D

VTCP $\vec{u}_{d_1} = (1;-1;2)$, VTCP $\vec{u}_{d_2} = (-1;1;1)$

Ta có $\cos(d_1,d_2) = \left|\cos(\vec{u}_{d_1},\vec{u}_{d_2})\right| = \frac{|1.(-1)-1.1+2.1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}.\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}} = 0$

Vậy $(d_1,d_2) = 90^\circ$.

Câu 18: Tính cosin góc giữa đường thẳng d với trục Ox biết $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}$.

A. $\frac{\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Lời giải

Chọn B

VTCP $\vec{u}_d = (2;1;1)$, VTCP của trục Ox là $\vec{i} = (1;0;0)$.

Vậy $\cos(d,Ox) = \left|\cos(\vec{u}_d,\vec{i})\right| = \frac{|2+0+0|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}.\sqrt{1^2+0^2+0^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 19: Trong không gian $Oxyz,$ cho đường thẳng $d:\begin{cases} x = 6+5t \\ y = 2+t \\ z = 1 \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): 3x-2y+1=0.$ Góc hợp bởi giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) bằng

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Lời giải

Chọn B

Gọi φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P).

Ta có $\vec{u}_d = (5;1;0)$ và $\vec{n}_{(P)} = (3;-2;0)$

Khi đó $\sin\varphi = \left|\cos\left(\vec{u}_d,\vec{n}_{(P)}\right)\right| = \dfrac{\left|\vec{u}_d.\vec{n}_{(P)}\right|}{\left|\vec{u}_d\right|.\left|\vec{n}_{(P)}\right|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^\circ.$

Câu 20: Trong không gian $Oxyz,$ cho đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{2}$ và mặt phẳng $(\alpha): x+y-z-2=0.$ Cosin của góc tạo bởi đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) bằng

A. $-\dfrac{\sqrt{78}}{9}.$ **B.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{9}.$ **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{9}.$ **D.** $\dfrac{\sqrt{78}}{9}.$

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2;-1;2)$ và mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;1;-1).$

Ta có $\sin(\Delta,(\alpha)) = \left|\cos(\vec{u},\vec{n})\right| = \dfrac{\left|\vec{u}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{n}\right|} = \dfrac{\sqrt{3}}{9} \Rightarrow \cos(\Delta,(\alpha)) = \dfrac{\sqrt{78}}{9}.$

Câu 21: Trong không gian $Oxyz,$ cho hai mặt phẳng $(P): 2x-y-z-3=0$ và $(Q): x-z-2=0.$ Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

A. $30^\circ.$ **B.** $45^\circ.$ **C.** $60^\circ.$ **D.** $90^\circ.$

Lời giải

Chọn A

Mp (P) có một VTPT $\vec{n}_P = (2;-1;-1).$ Mp (Q) có một VTPT $\vec{n}_Q = (1;0;-1).$

Ta có $\cos\left[(P),(Q)\right] = \left|\cos\left(\vec{n}_P,\vec{n}_Q\right)\right| = \dfrac{\left|\vec{n}_P.\vec{n}_Q\right|}{\left|\vec{n}_P\right|.\left|\vec{n}_Q\right|} = \dfrac{|2+0+1|}{\sqrt{4+1+1}.\sqrt{1+1}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

Vậy $\left[(P),(Q)\right] = 30^\circ.$

Câu 22: Trong không gian $Oxyz,$ cho ba điểm $M(1;0;0),\ N(0;1;0)$ và $P(0;0;1).$ Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (MNP) và mặt phẳng (Oxy) bằng

A. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}.$ **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}.$ **C.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}.$ **D.** $\dfrac{1}{3}.$

Lời giải

Chọn A

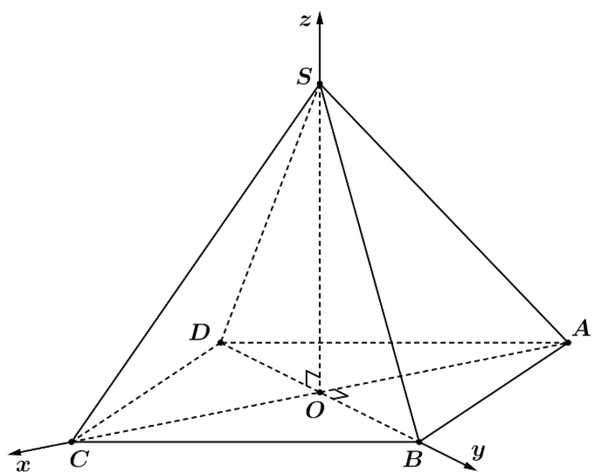
Mặt phẳng (MNP) có một VTPT là $\vec{n} = \left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right] = (1;1;1).$

Mặt phẳng (Oxy) có một VTPT là $\vec{k} = (0;0;1).$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (MNP) và $(Oxy).$

Ta có $\cos\varphi = \left|\cos\left(\vec{n}, \vec{k}\right)\right| = \dfrac{|1.0 + 1.0 + 1.1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}.$

Câu 23: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2},$ chiều cao bằng $2a$ và O là tâm của đáy. Bằng cách thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ bên dưới, khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB) bằng



A. $\dfrac{2a}{3}.$ **B.** $\dfrac{2a}{\sqrt{17}}.$ **C.** $\dfrac{4a}{\sqrt{17}}.$ **D.** $\dfrac{4a}{3}.$

Lời giải

Chọn D

Vì $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên $SO \perp (ABCD)$ và $ABCD$ là hình vuông.

Suy ra $OA = OB = OC = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}.\sqrt{2}}{2} = a.$

Dựa vào hình vẽ, ta có $C(a;0;0), B(0;a;0), A(-a;0;0), S(0;0;2a).$

Suy ra $\overrightarrow{AS} = (a;0;2a), \overrightarrow{BS} = (0;-a;2a).$

Mặt phẳng (SAB) có một cặp vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;0;2)$ và $\vec{v}=(0;-1;2)$ nên có VTPT là $\vec{n}=[\vec{u},\vec{v}]=\left(\begin{vmatrix}0 & 2\\-1 & 2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2 & 1\\2 & 0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{vmatrix}\right)=(2;-2;-1).$

Suy ra (SAB) có phương trình là $(SAB):2x-2y-z+2a=0.$

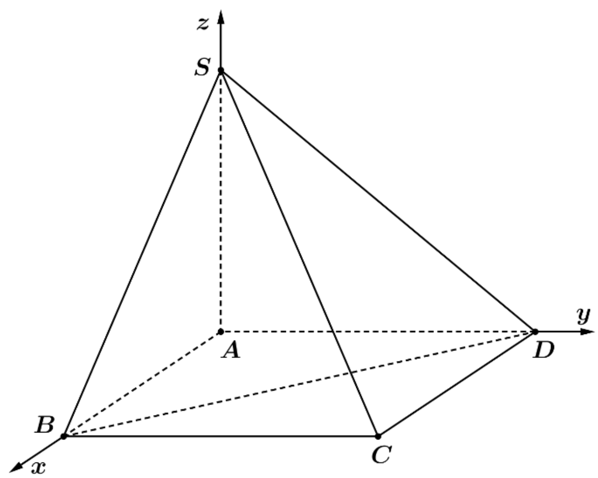
Vậy $d(C,(SAB))=\dfrac{|2.a-2.0-2.0+2a|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\dfrac{4a}{3}.$

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA\perp(ABCD).$ Cho biết $AB=2a, AD=3a$ và $SA=2a.$ Cosin góc giữa hai đường thẳng SC và BD bằng

A. $-\dfrac{5}{\sqrt{221}}.$ **B.** $\dfrac{5}{\sqrt{221}}.$ **C.** $\dfrac{3}{\sqrt{221}}.$ **D.** $-\dfrac{3}{\sqrt{221}}.$

Lời giải

Chọn B



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ sao cho $A\equiv O.$

Ta có $B(2a;0;0), D(0;3a;0), S(0;0;2a)$ và $C(2a;3a;0).$

Suy ra $\overrightarrow{SC}=(2a;3a;-2a)$ và $\overrightarrow{BD}=(-2a;3a;0).$

Hai đường thẳng SC và BD có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}=(2;3;-2)$ và $\vec{v}=(-2;3;0).$

Vậy $\cos(SC,BD)=\dfrac{|\vec{u}.\vec{v}|}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}=\dfrac{|2.(-2)+3.3+(-2).0|}{\sqrt{2^2+3^2+(-2)^2}.\sqrt{(-2)^2+3^2+0^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{221}}.$

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$, với mặt phẳng (Oxy) là mặt đất, một máy bay cất cánh từ vị trí $A(0;10;0)$ với vận tốc $\vec{v}=(150;150;40)$. Tính góc nâng của máy bay (góc giữa hướng chuyển động bay lên của máy bay với đường băng và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

A. 10°. **B.** 12°. **C.** 11°. **D.** 9°.

Lời giải

Chọn C

Gọi Δ là đường thẳng biểu thị cho hướng chuyển động bay lên của máy bay.

Ta có Δ nhận vectơ $\vec{v}=(150;150;40)=10(15;15;4)$ làm vectơ chỉ phương.

Mặt phẳng (Oxy) có VTPT $\vec{n}=(0;0;1)$.

Gọi φ là góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (Oxy).

Suy ra $\sin\varphi=\left|\cos\left(\vec{v},\vec{n}\right)\right|=\dfrac{\left|\vec{v}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{v}\right|.\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{\left|15.0+15.0+4.1\right|}{\sqrt{15^2+15^2+4^2}.\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{466}}$.

Vậy góc nâng của máy bay là $\varphi\approx 11^\circ$.

Dạng ❷: Câu trắc nghiệm đúng, sai

Câu 1: Trong không gian Oxyz, cho các đường thẳng $\Delta_1:\begin{cases}x=1\\y=2-3t\\z=3+4t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$, $\Delta_2:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+3}{2}$ và mặt phẳng $(P):x+3y-2z+1=0$.

(a) Vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ_1 là $\vec{a}=(1;-3;4)$

(b) Đường thẳng d_1 vuông góc với (P) có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;3;-2)$

(c) Đường thẳng d_2 vuông góc với Δ_2 và song song với mặt phẳng (Oxy) có vectơ chỉ phương là $\vec{u_2}=(3;-3;2)$

(d) Đường thẳng d_3 qua $A(1;-1;2)$, cắt và vuông góc với trục Oz có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_3=(-1;-1;0)$

Lời giải

(a) Vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ_1 là $\vec{a}=(1;-3;4)$.

Vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ_1 là $\vec{a}=(0;-3;4)$.

» **Chọn** SAI.

(b) Đường thẳng d_1 vuông góc với (P) có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;3;-2)$

Mặt phẳng (P) có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{u}=(1;3;-2)$.

Đường thẳng d_1 vuông góc với (P) nên có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;3;-2)$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) Đường thẳng d_2 vuông góc với Δ_2 và song song với mặt phẳng (Oxy) có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_2=(3;-3;2)$

Mặt phẳng (Oxy) có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{k}=(0;0;1)$.

Đường thẳng Δ_2 có vectơ chỉ phương là $\vec{v}=(3;-3;2)$

Đường thẳng d_2 vuông góc với Δ_2 và song song với mặt phẳng (Oxy) có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_2=\left[\vec{v},\vec{k}\right]=(-3;3;0)=-3(1;-1;0)$

» **Chọn** SAI.

(d) Đường thẳng d_3 qua $A(1;-1;2)$, cắt và vuông góc với trục Oz có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_3=(-1;-1;0)$

Gọi $H=d_3\cap Oz$. Ta có $\begin{cases} d_3\perp Oz \\ A\in d_3 \end{cases}$,

Suy ra H là hình chiếu của A lên $Oz\Rightarrow H(0;0;2)$.

Vậy đường thẳng d_3 có 1 vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AH}=(-1;1;0)$.

» **Chọn** SAI.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+3}{2}$; $d_2:\begin{cases}x=-1+t\\ y=3+t\\ z=2-mt\end{cases}$ và mặt phẳng $(P):2x+2y+z-3=0$.

(a) Khi $m=0$, số đo góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 bằng 135°

(b) $\cos(d_1,Ox)=\frac{-1}{3}$

(c) Đường thẳng Δ đi qua gốc toạ độ O và vuông góc với (P) tạo với đường thẳng d_1 một góc α có $\cos\alpha=\frac{4}{9}$

(d) Khi $m=\frac{a}{b}, a,b\in\mathbb{Z}$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản, số đo góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 bằng 90°. Giá trị biểu thức $a^2+b^2=13$

Lời giải

$d_1:\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+3}{2}$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(-1;-2;2)$

(a) Khi $m=0$, số đo góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 bằng 135°.

Khi $m=0$, đường thẳng d_2 có vectơ chỉ phương là $\vec{v}=(1;1;0)$

$\cos(d_1,d_2)=\left|\cos(\vec{u},\vec{v})\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Suy ra số đo góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 bằng 45°.

» **Chọn** SAI.

(b) $\cos(d_1,Ox)=\frac{-1}{3}$.

Trục Ox có vectơ chỉ phương là $\vec{i}=(1;0;0)$

$\cos(d_1,Ox)=\left|\cos(\vec{u},\vec{i})\right|=\frac{1}{3}$

» **Chọn** SAI.

(c) Đường thẳng Δ đi qua gốc toạ độ O và vuông góc với (P) tạo với đường thẳng d_1 một góc α có $\cos\alpha=\frac{4}{9}$.

Mặt phẳng $(P): 2x+2y+z-3=0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;2;1)$

Đường thẳng Δ đi qua gốc toạ độ O và vuông góc với (P) nên có vectơ chỉ phương là $\vec{n}=(2;-2;1)$

$\cos(d_1,\Delta)=\left|\cos(\vec{u},\vec{n})\right|=\frac{4}{9}$

» Chọn ĐÚNG.

(d) Khi $m=\frac{a}{b}, a,b\in\mathbb{Z}$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản, số đo góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 bằng 90°. Giá trị biểu thức $a^2+b^2=13$.

Số đo góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 bằng 90° khi hai đường thẳng vuông góc

Khi đó $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v}=0\Leftrightarrow -3-2m=0\Leftrightarrow m=\frac{-3}{2}$

Suy ra $a=-3; b=2$

Vậy $a^2+b^2=13$

» Chọn ĐÚNG.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{-1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-2}{3}$ và mặt phẳng $(P): x+2y-z+2025=0$.

(a) Số đo góc giữa hai đường thẳng Δ và (P) bằng 90°

(b) Biết hình chiếu của O lên (P) là $H(3;-1;2)$. α là số đo góc giữa (P) và đường thẳng Δ, $\cos\alpha=\frac{1}{14}$

(c) Đường thẳng d_1 là giao tuyến của (P) và (Oxy). Gọi β là góc giữa d_1 và mặt phẳng (Oxz). Khi đó $\beta>30^\circ$

(d) Đường thẳng d_2 vuông góc với (P) tạo với $(Q): x+my-3=0$ một góc 30°. Khi đó tổng tất cả các giá trị của tham số m bằng $\frac{-16}{5}$.

Lời giải

$\Delta: \frac{x}{-1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-2}{3}$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(-1;2;3)$

(a) Số đo góc giữa hai đường thẳng Δ và (P) bằng 90°.

$(P): x+2y-z+2025=0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{v}=(1;2;-1)$

$\sin(\Delta,(P))=\left|\cos(\vec{u},\vec{v})\right|=0$, suy ra số đo góc giữa hai đường thẳng Δ và mặt phẳng $(P): x+2y-z+2025=0$ bằng 0°.

» **Chọn** SAI.

(b) Biết hình chiếu của O lên mặt phẳng (P) là $H(3;-1;2)$. α là số đo góc giữa mặt phẳng (P) và đường thẳng Δ, $\cos\alpha=\frac{1}{14}$

Hình chiếu của O lên mặt phẳng (P) là $H(3;-1;2)$ nên vectơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{OH}=(3;-1;2)$

$$\sin\alpha=\left|\cos\left(\vec{u},\overrightarrow{OH}\right)\right|=\frac{|-3-2+6|}{14}=\frac{1}{14}$$

» **Chọn** SAI.

(c) Đường thẳng d_1 là giao tuyến của (P) và (Oxy). Gọi β là góc giữa d_1 và mặt phẳng (Oxz). Khi đó $\beta>30^\circ$

(Oxy) có vectơ pháp tuyến là $\vec{k}=(0;0;1)$

$(P): x+2y-z+2025=0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{v}=(1;2;-1)$

Suy ra vectơ chỉ phương của d là $\left[\vec{k},\vec{v}\right]=(-2,1,0)=\vec{a}$

$$\sin\beta=\left|\cos\left(\vec{a},\vec{j}\right)\right|=\frac{1}{\sqrt{5}}\Rightarrow \beta\approx 27^\circ<30^\circ$$

» **Chọn** SAI.

(d) Đường thẳng d_2 vuông góc với (P) tạo với $(Q): x+my-3=0$ một góc 30°.

Khi đó tổng tất cả các giá trị của tham số m bằng $\frac{-16}{5}$.

Đường thẳng d_2 vuông góc với (P) nên có vectơ chỉ phương là $\vec{v}=(1;2;-1)$

$(Q): x+my-3=0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_Q=(1;m;0)$

$$\sin(d_2,(Q))=\left|\cos(\vec{n}_Q,\vec{v})\right|=\frac{|2+2m|}{\sqrt{6}.\sqrt{m^2+1}}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2|2+2m|=\sqrt{6}.\sqrt{m^2+1}$$

$$\Leftrightarrow 2(4+8m+4m^2)=3(m^2+1) \Leftrightarrow 5m^2+16m+5=0 \Leftrightarrow m=\frac{-8\pm\sqrt{39}}{5}$$

Tổng tất cả các giá trị của tham số m bằng $\frac{-16}{5}$

» Chọn ĐÚNG.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABC$ có ba điểm $S(0;0;3)$, $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(0;2;0)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng? Khẳng định nào sai?

(a) Côsin góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (ABC) bằng 0

(b) Côsin góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) bằng $\frac{2}{7}$

(c) Côsin góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (P) bằng $\frac{10\sqrt{3}}{21}$

(d) Góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (ABC) bằng 90°

Lời giải

(a) Côsin góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (ABC) bằng 0

Nhận xét bốn điểm $S(0;0;3)$, $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(0;2;0)$ thuộc một tứ diện vuông $S.ABC$ nên dễ thấy $(SAB)\perp(ABC) \Rightarrow \cos((SAB);(ABC))=0$

» Chọn ĐÚNG.

(b) Côsin góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) bằng $\frac{2}{7}$

Ta có: $(SBC): \frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1 \Rightarrow (SBC): 6x+3y+2z-6=0 \Rightarrow \vec{n}_{(SBC)}=(6;3;2)$

(ABC) có $\vec{n}_{(ABC)}=\overrightarrow{SA}=(0;0;3)$

$$\cos((SBC);(ABC))=\frac{\left|\vec{n}_{(ABC)}.\vec{n}_{(SBC)}\right|}{\left|\vec{n}_{(ABC)}\right|.\left|\vec{n}_{(SBC)}\right|}=\frac{|6.0+3.0+2.3|}{\sqrt{0^2+0^2+3^2}.\sqrt{6^2+3^2+2^2}}=\frac{2}{7}$$

» Chọn ĐÚNG

(c) Côsin góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (P) bằng $\frac{10\sqrt{3}}{21}$

Ta có: $\begin{cases} \vec{n}_{(SBC)}=(6;3;2) \\ \vec{n}_{(P)}=(1;1;1) \end{cases}$

Nên $$\cos((SBC);(P))=\frac{\left|\vec{n}_{(SBC)}.\vec{n}_{(P)}\right|}{\left|\vec{n}_{(SBC)}\right|.\left|\vec{n}_{(P)}\right|}=\frac{|6.1+3.1+2.1|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}.\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{10\sqrt{3}}{21}$$

» Chọn ĐÚNG.

(d) Góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (ABC) bằng 90°

Nhận xét bốn điểm $S(0;0;3)$, $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(0;2;0)$ thuộc một tứ diện vuông $S.ABC$ nên dễ thấy $(SAC)\perp(ABC) \Rightarrow ((SAB);(ABC))=90^\circ$

» Chọn ĐÚNG

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x=-3+2t \\ y=1-t \\ z=-1+4t \end{cases}$ và $d': \frac{x+4}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-4}{-1}$; $(\Delta): \frac{x-2}{-3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-1}{1}$ Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng? Khẳng định nào sai?

(a) Hai đường thẳng d và d' vuông góc với nhau

(b) Hai đường thẳng d và d' cắt nhau tại điểm có tọa độ $(-1;0;3)$

(c) Hai đường thẳng d' và (Δ) song song hoặc trùng nhau

(d) Hai đường thẳng d' và (Δ) trùng nhau

Lời giải

(a) Hai đường thẳng d và d' vuông góc với nhau

Ta có: $\begin{cases} \vec{u}_d = (2;-1;4) \\ \vec{u}_{d'} = (3;2;-1) \end{cases}$ và $\vec{u}_d.\vec{u}_{d'} = 2.3 + (-1)2 + 4.(-1) = 0$ $\Rightarrow d \perp d'$

» Chọn ĐÚNG.

(b) Hai đường thẳng d và d' cắt nhau tại điểm có tọa độ $(-1;0;3)$

Hai đường thẳng d và d' cắt nhau tại điểm có tọa độ

Ta có: $d': \frac{x+4}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-4}{-1} \Rightarrow d': \begin{cases} x = -4 + 3t' \\ y = -2 + 2t' \\ z = 4 - t' \end{cases}$ và $d: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$

Xét hệ: $\begin{cases} -3 + 2t = -4 + 3t' \\ 1 - t = -2 + 2t' \\ -1 + 4t = 4 - t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t - 3t' = -1 \\ -t - 2t' = -3 \\ 4t + t' = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t' = 1 \\ 4.1 + 1 = 5\ (\text{đúng}) \end{cases}$

Vậy tọa độ giao điểm của d và d' là $(-1;0;3)$

» Chọn ĐÚNG.

(c) Hai đường thẳng d' và (Δ) song song hoặc trùng nhau

Ta có: $\begin{cases} \vec{u}_\Delta = (-3;-2;1) \\ \vec{u}_{d'} = (3;2;-1) \end{cases}$, có: $\frac{-3}{3} = \frac{-2}{2} = \frac{1}{-1} \Rightarrow \vec{u}_\Delta$ cùng phương $\vec{u}_{d'}$ suy ra $\left[\begin{array}{l} d' // \Delta \\ d' \equiv \Delta \end{array}\right.$

» Chọn ĐÚNG.

(d) Hai đường thẳng d' và (Δ) trùng nhau

Ta có: $A(-4;-2;4) \in d'$, ta kiểm tra A có thuộc Δ hay không?

$\frac{-4-2}{-3} = \frac{-2-2}{-2} = \frac{4-1}{1}$ (vô lí) $\Rightarrow A \notin \Delta$ nên $d' // \Delta$

» Chọn SAI.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, Hai máy bay cùng xuất phát từ hai phi trường, trên màn hình rađa của trạm điều khiển (với đơn vị trên ba trục chính theo đơn vị km), sau khi xuất phát t giờ $(t \geq 0)$, vị trí của máy bay số một được xác định bởi công thức $\begin{cases} x = 20 + 2t \\ y = 20 + t \\ z = -10 - t \end{cases}$, vị trí máy bay số hai có tọa độ là

$(30+t';20+t';-10-t')$ Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng? Khẳng định nào sai?

(a) Côsin góc giữa hai máy bay số một và máy bay số hai là $\frac{5\sqrt{2}}{6}$

(b) Sau 10 giờ kể từ thời điểm bay hai máy bay gần nhau nhất

(c) Nếu máy bay số một vẫn ở phi trường (đứng ở vị trí ban đầu) thì vị trí tọa độ của máy bay là $(20;20;-10)$

(d) Sau 5 giờ thì vị trí tọa dộ máy bay số 2 trong không gian là $(35;25;-10)$

Lời giải

(a) Côsin góc giữa hai máy bay số một và máy bay số hai là $\frac{5\sqrt{2}}{6}$

Giả sử đường bay của máy bay số 1 là $(\Delta_1):\begin{cases}x=20+2t\\y=20+t\\z=-10-t\end{cases}$ có $\vec{u}_1=(2;1;-1)$ và đường bay của máy bay số 2 thỏa $(30+t';20+t';-10-t')\in(\Delta_2)\begin{cases}x=30+t'\\y=20+t'\\z=-10-t'\end{cases}$ có $\vec{u}_2=(1;1;-1)$

Ta có: $\cos(\Delta_1,\Delta_2)=\frac{|\vec{u}_1.\vec{u}_2|}{|\vec{u}_1|.|\vec{u}_2|}=\frac{|2.1+1.1+2|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}.\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{6}$

» Chọn ĐÚNG.

(b) Sau 10 giờ kể từ thời điểm bay hai máy bay gần nhau nhất.

Sau bao lâu kể từ thời điểm bay hai máy bay gần nhau nhất?

Kể từ thời điểm xuất phát, để hai may bay gần nhau nhất thì hai máy bay phải gần tọa độ giao điểm của Δ_1 và Δ_2

Ta có: $\Delta_1\cap\Delta_2\Leftrightarrow\begin{cases}20+2t=30+t'\\20+t=20+t'\\-10-t=-10-t'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2t-t'=10\\t-t'=0\\t-t'=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=10\\t'=10\end{cases}$

Vậy sau 10 giờ thì hai máy bay gần nhau nhất.

» Chọn ĐÚNG.

(c) Nếu máy bay số một vẫn ở phi trường (đứng ở vị trí ban đầu) thì vị trí tọa độ của máy bay là $(20;20;-10)$

Nếu máy bay số một vẫn ở phi trường thì thời điểm lúc đó là 0 giờ $\Rightarrow t=0$

thay $(\Delta_1):\begin{cases}x=20+2t\\y=20+t\\z=-10-t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=20\\y=20\\z=-10\end{cases}$ thì vị trí tọa độ của máy bay là $(20;20;-10)$

» Chọn ĐÚNG.

(d) Sau 5 giờ thì vị trí tọa dộ máy bay số 2 trong không gian là $(35;25;-10)$

Sau 5 giờ thì vị trí tọa dộ máy bay số 2 trong không gian nên $t'=5$

Suy ra $\begin{cases}x=30+5\\y=20+5\\z=-10-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=35\\y=25\\z=-15\end{cases}$, vậy trí tọa độ máy bay số 2 trong không gian là $(35;25;-15)$

» Chọn SAI.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, một cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(10;3;0)$ và chuyển động đều theo đường cáp có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;-2;1)$ với tốc độ là $4{,}5\,\text{m/s}$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét).

Các khẳng định sau đúng hay sai?

(a) Phương trình tham số của đường cáp là: $\begin{cases}x=10+2t\\y=3-2t\\z=t\end{cases},t\in\mathbb{R}$.

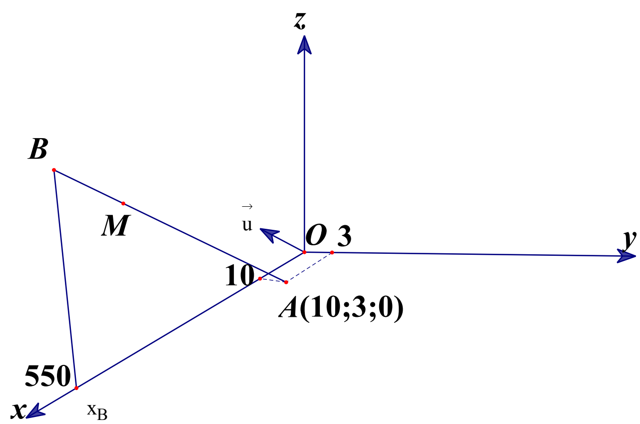
(b) Giả sử sau thời gian $t(\text{s})$ kể từ lúc xuất phát $(t \geq 0)$, cabin đến điểm M. Khi đó tọa độ điểm M là $M\left(3t+10;-3t+3;\frac{3t}{2}\right)$

(c) Cabin dừng ở điểm B có hoành độ $x_B = 550$, khi đó quảng đường AB dài 800m.

(d) Đường cáp AB tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc 30°.

Lời giải

Gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$



(a) Phương trình tham số của đường cáp là: $\begin{cases} x = 10 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Phương trình tham số của đường cáp là: $\begin{cases} x = 10 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) Giả sử sau thời gian $t(\text{s})$ kể từ lúc xuất phát $(t \geq 0)$, cabin đến điểm M. Khi đó tọa độ điểm M là $M\left(3t+10;-3t+3;\frac{3t}{2}\right)$.

Do tốc độ di chuyển của cabin là $4{,}5\text{m/s}$ nên độ dài $AM = 4{,}5t(\text{m})$. Vì vậy $\left|\overrightarrow{AM}\right| = 4{,}5t$ với $t \geq 0$.

Ta có $\overrightarrow{AM}$ và $\vec{u}$ cùng hướng nên $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$ với $k > 0$.

Suy ra $\left|\overrightarrow{AM}\right| = k\left|\vec{u}\right| = k\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1} = 3k$

$\Rightarrow 3k = 4,5t \Rightarrow k = \dfrac{3t}{2} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \dfrac{3t}{2}\vec{u} = \left(3t; -3t; \dfrac{3t}{2}\right)$

Gọi tọa độ điểm M là $M(x_M; y_M; z_M)$.

Vì $\overrightarrow{AM} = \left(3t; -3t; \dfrac{3t}{2}\right)$ nên $\begin{cases} x_M = 3t + x_A \\ y_M = -3t + y_M \\ z_M = \dfrac{3t}{2} + z_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 3t + 10 \\ y_M = -3t + 3 \\ x_M = \dfrac{3t}{2} \end{cases}$.

Vậy điểm M có tọa độ là $M\left(3t + 10; -3t + 3; \dfrac{3t}{2}\right)$.

» Chọn ĐÚNG.

(c) Cabin dừng ở điểm B có hoành độ $x_B = 550$, khi đó quảng đường AB dài 800m.

Do $x_B = 550$ nên $3t + 10 = 550 \Rightarrow t = 180\,(\text{s})$.

Do đó điểm $B(550; -537; 270)$.

Vậy $AB = \sqrt{(550 - 10)^2 + (-537 - 3)^2 + (270 - 0)^2} = \sqrt{656100} = 810\,(\text{m})$.

» Chọn SAI.

(d) Đường cáp AB tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc 30°.

Đường thẳng AB có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; -2; 1)$ và (Oxy) có một vectơ pháp tuyến $\vec{k} = (0; 0; 1)$. Do đó ta có: $\sin(AB, (Oxy)) = \left|\cos\left(\vec{u}, \vec{k}\right)\right| = \dfrac{\left|\vec{u}.\vec{k}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{k}\right|} = \dfrac{1}{3.1} = \dfrac{1}{3}$.

Vậy $(AB, (Oxy)) \approx 19^\circ$.

» Chọn SAI.

•Dạng ❸: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Trong không gian $Oxyz,$ cho điểm $A(0; 2; -4)$ và hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$. Gọi H là hình chiếu của A trên đường thẳng d_1. Đường thẳng AH có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(a;b;c)$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Khi đó $2a-b+c$ bằng

Lời giải

Trả lời: 1

Ta có phương trình tham số của d_1 là $\begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=-1+2t \end{cases}$.

Đường thẳng d_1 có một vectơ chỉ phương là $\vec{u_1}=(1;-1;2)$

Điểm $H\in d_1$ nên $H(2+t;1-t;-1+2t)\Rightarrow \overrightarrow{AH}=(2+t;-1-t;3+2t)$.

Vì H là hình chiếu của A trên đường thẳng d_1 nên $\overrightarrow{AH}\perp\vec{u_1}\Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\vec{u_1}=0$ hay

$(2+t).1+(-1-t).(-1)+(3+2t).2=0\Leftrightarrow 6t+9=0\Leftrightarrow t=-\dfrac{3}{2}$

Khi đó $\overrightarrow{AH}=\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};0\right)$.

Vì $a,b,c\in\mathbb{Z}$ nên đường thẳng AH có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=2\overrightarrow{AH}=(1;1;0)$.

Vậy $2a-b+c=2.1-1+0=1$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-3;5)$ có hình chiếu vuông góc trên các trục Ox, Oy, Oz là B, C, D. Gọi H là trực tâm tam giác BCD. Phương trình chính tắc của đường thẳng OH có dạng $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{-b}=\dfrac{z}{-c}$. Khi đó $a+b+c$ bằng

Lời giải

Trả lời: 19

Ta có $B(2;0;0)$, $C(0;-3;0)$, $D(0;0;5)$.

Mặt phẳng (BCD) có phương trình $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-3}+\dfrac{y}{5}=1$ hay $15x-10y+6z-60=0$.

H là trực tâm tam giác BCD nên $OH\perp(BCD)$. Do đó OH có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=(15;-10;6)$.

Vậy phương trình chính tắc của OH là $\dfrac{x}{15}=\dfrac{y}{-10}=\dfrac{z}{6}$. Suy ra $a=15;b=10;c=-6\Rightarrow a+b+c=15+10-6=19$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$ và mặt phẳng $(\alpha):x-2y-2z+5=0$. Điểm $A(a;b;c)$ có hoành độ dương thuộc đường thẳng d sao cho khoảng cách từ A đến (α) bằng 3. Tính tổng $a+b-c$?

Lời giải

Trả lời: 1

Điểm A có hoành độ dương thuộc đường thẳng d, tọa độ A là $(2t;-t;-1+t)$ với $t>0$.

Khoảng cách từ A đến (α) bằng 3 nên ta có: $\dfrac{\left|2t-2(-t)-2(-1+t)+5\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=3$

$\Leftrightarrow \dfrac{\left|2t+7\right|}{3}=3 \Leftrightarrow \left|2t+7\right|=\pm 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-8\ (L) \\ t=1\ (TM)\end{array}\right.$.

Vậy tọa độ A là $(2;-1;0) \Rightarrow a+b-c=2-1-0=1$

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{2}, d_2:\begin{cases} x=2t \\ y=1 \\ z=1-t\end{cases}$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng d_1,d_2. Giá trị $\cos\varphi$ có dạng $\dfrac{a\sqrt{c}}{b}$. Tính giá trị biểu thức $P=b-3a+c$?

Lời giải

Trả lời: 8

Ta có $\vec{u}_{d_1}=(-1;2;2), \vec{u}_{d_2}=(2;0;-1)$

Khi đó $\cos\varphi=\dfrac{\left|\vec{u}_{d_1}.\vec{u}_{d_2}\right|}{\left|\vec{u}_{d_1}\right|\left|\vec{u}_{d_2}\right|}=\dfrac{\left|-1.2+2.0+2.(-1)\right|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}.\sqrt{2^2+0^2+(-1)^2}}=\dfrac{4}{3\sqrt{5}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{15}$.

Vậy $a=4, b=15, c=5 \Rightarrow b-3a+c=15-3.4+5=8$

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$ cho tam giác ABC có $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Tọa độ chân đường phân giác góc $\widehat{ABC}$ của tam giác ABC là $I(a;b;c)$. Tính tổng $a+b+c$?

Lời giải

Trả lời: 4

Ta có: Ta có phương trình đường thẳng AC là $\begin{cases} x=1-5t \\ y=2+5t \\ z=-1+6t \end{cases}, (t\in\mathbb{R})$.

Gọi I là chân đường phân giác góc $\widehat{ABC}$ của tam giác ABC $\Rightarrow I(1-5t;2+5t;-1+6t)$.

Lại có $\overrightarrow{BA}=(-1;3;-4)$, $\overrightarrow{BC}=(-6;8;2)$, $\overrightarrow{BI}=(-5t-1;5t+3;6t-4)$.

Vì I là chân đường phân giác góc $\widehat{ABC}$ của tam giác nên ABC:

$$\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BI}\right)=\cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BI}\right) \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BI}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BI}\right|}=\frac{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BI}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|.\left|\overrightarrow{BI}\right|}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5t+1+15t+9+16-24t}{\sqrt{(-1)^2+3^2+(-4)^2}}=\frac{30t+6+40t+24+12t-8}{\sqrt{(-6)^2+8^2+2^2}} \Leftrightarrow \frac{-4t+26}{\sqrt{26}}=\frac{82t+22}{\sqrt{104}}$$

$$\Leftrightarrow -8t+52=82t+22 \Leftrightarrow t=\frac{1}{3} \Rightarrow I\left(-\frac{2}{3};\frac{11}{3};1\right).$$

Vậy $a=-\frac{2}{3},b=\frac{11}{3},c=1 \Rightarrow a+b+c=-\frac{2}{3}+\frac{11}{3}+1=4$

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+t \\ z=-2-t \end{cases}$ và $(P):-x+2y+2z+5=0$. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(-1;0;-1)$ cắt đường thẳng Δ_1 và tạo với đường thẳng Δ_2 một góc nhỏ nhất. Vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(a;b;c)$. Tính tổng $a+2b-3c$?

Lời giải

Trả lời: 9

Giả sử đường thẳng d cắt đường thẳng Δ_1 tại B, ta có: $B(1+2t;2+t;-2-t)\in\Delta_1$.

Đường thẳng d có VTCP là: $\overrightarrow{AB}=(2t+2;t+2;-t-1)$, mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}=(-1;2;2)$.

Gọi φ là góc giữa d và Δ_2, ta có: $\sin\varphi = \dfrac{|-2t-2+2t+4-2t-2|}{3\sqrt{6t^2+14t+9}} = \dfrac{|2t|}{3\sqrt{6t^2+14t+9}} \geq 0$, $\Rightarrow d$ tạo với đường thẳng Δ_2 một góc φ nhỏ nhất khi $\varphi = 0^\circ$ hay $\sin\varphi = 0 \Rightarrow t = 0$.

Khi đó đường thẳng d đi qua điểm $A(-1;0;-1)$ và có VTCP $\overrightarrow{AB} = (2;2;-1)$.

Vậy $a=2, b=2, c=-1 \Rightarrow a+2b-3c = 2+2.2-3.(-1) = 9$

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): ax+by+cz-1=0$ với $c<0$ đi qua 2 điểm $A(0;1;0); B(1;0;0)$ và tạo với (Oyz) một góc 60°. Tính tổng $a+b+c$? (Làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,59

Mặt phẳng (P) đi qua 2 điểm A, B nên ta có: $\begin{cases} b-1=0 \\ a-1=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=1$

Và (P) tạo với (Oyz) một góc 60° nên $\cos((P);(Oyz)) = \dfrac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{1}} = \dfrac{1}{2} \quad (*)$

Thay $a=b=1$ vào phương trình $(*)$ được: $\sqrt{2+c^2} = 2 \Rightarrow c = -\sqrt{2}$

Khi đó: $a+b+c = 2-\sqrt{2} \approx 0{,}59$

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=4+t \\ y=-4-t \\ z=6+2t \end{cases}; d_2: \dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y-11}{4} = \dfrac{z-5}{2}$. Đường thẳng d đi qua $A(5;-3;5)$ cắt d_1, d_2 lần lượt ở B, C. Tính tỉ số $\dfrac{AB}{AC}$

Lời giải

Trả lời: 0,5

$B \in d_1 \Rightarrow B(4+t;-4-t;6+2t)$. Phương trình tham số $d_2: \begin{cases} x=5+2s \\ y=11+4s \\ z=5+2s \end{cases}$

$C \in d_2 \Rightarrow C(5+2s;11+4s;5+2s)$. Khi đó: $\overrightarrow{AB} = (-1+t;-1-t;2t+1); \overrightarrow{AC} = (2s;4s+14;2s)$

Do A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}: \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t-1=2ks \\ -t-1=4ks+14k \\ 2t+1=2ks \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-2 \\ s=-3 \\ k=\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

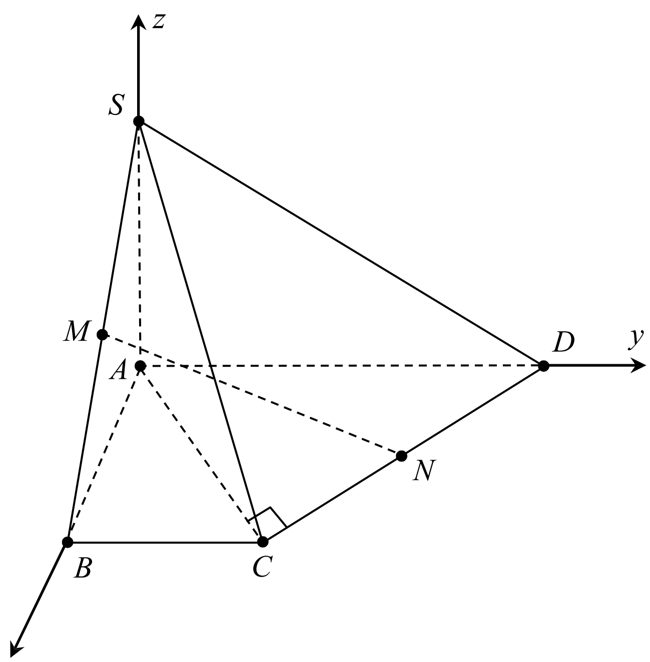
Do đó $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{1}{2}=0,5$

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, thỏa mãn điều kiện, $AB=BC=a$, $AD=2a$, SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$, $SA=a$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SB,CD. Tính cosin của góc giữa MN và (SAC). (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,74

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ



Chọn đơn vị là a

Có $A(0;0;0), B(1;0;0), C(1;1;0), D(0;2;0), S(0;0;1), M\left(\dfrac{1}{2};0;\dfrac{1}{2}\right), N\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2};0\right)$.

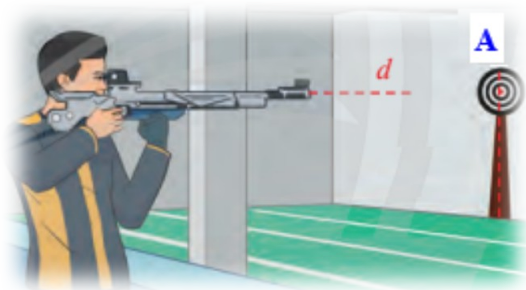
Vecto chỉ phương của $\overrightarrow{MN}$ là $\overrightarrow{MN}=\left(0;\dfrac{3}{2};\dfrac{-1}{2}\right) \Rightarrow 2\overrightarrow{MN}=(0;3;-1)$

Vecto pháp tuyến của (SAC) là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AS}\right]=(1;-1;0)$

Vậy $\sin(MN,(SAC))=\dfrac{|3|}{\sqrt{9+1}.\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$

Suy ra: $\cos(MN,(SAC))=\sqrt{1-\left(\frac{3\sqrt{5}}{10}\right)^2}=\frac{\sqrt{55}}{10}\approx 0,74$

Câu 10: Một phần mềm mô phỏng vận động viên đang tập bắn súng trong không gian $Oxyz$. Cho biết trục d của nòng súng có phương trình : $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-3}{-5}$ và hồng tâm $A(8;-19;6m+4)$. Hỏi m bằng bao nhiêu vận động viên có bắn trúng hồng tâm.



Lời giải

Trả lời: -6

Để vận động viên có bắn trúng hồng tâm thì trục d phải đi qua hồng tâm. Ta thay điểm $A(8;-19;6m+4)$ vào phương trình trục d: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-3}{-5}\Leftrightarrow\frac{8-1}{1}=\frac{-19-2}{-3}=\frac{6m+4-3}{-5}=7\Leftrightarrow 6m=-36\Leftrightarrow m=-6$.

Vậy $m=-6$ thì vận động viên bắn trúng hồng tâm.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, một cabin cáp treo ở Bà Nà Hill xuất phát từ điểm $A(-2;1;5)$ và chuyển động đều theo đường cáp có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(0;-2;6)$ với tốc độ là 4 m/s (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là mét). Giả sử sau 5 (s) kể từ lúc xuất phát , cabin đến điểm M. Gọi tọa độ $M(a;b;c)$. Tính $a+3b+c$.

Lời giải

Trả lời: 6

Phương trình tham số của đường cáp là : $d:\begin{cases} x=-2 \\ y=1-2k \\ z=5+6k \end{cases} \quad (k\in \mathbb{R})$

Do tốc độ chuyển động của cabin là 4 m/s nên độ dài $AM=4t$ (m).

Vì vậy sau 5 (s) kể từ lúc xuất phát, cabin đến điểm M thì $AM=4.5=20$ (m).

Vì $M\in d\Rightarrow M(-2;1-2k;5+6k)$

$\overrightarrow{AM}(0;-2k;6k)$. Do 2 vec tơ $\overrightarrow{AM};\vec{u}$ cùng hướng $k>0$

$AM=20\Leftrightarrow \sqrt{0^2+4k^2+36k^2}=20\Leftrightarrow 40k^2=400\Leftrightarrow k=\pm\sqrt{10}$

Vì $k>0\Rightarrow k=\sqrt{10}$.

Vậy tọa độ $M(-2;1-2\sqrt{10};5+6\sqrt{10})$. Khi đó $a+3b+c=-2+3(1-2\sqrt{10})+5+6\sqrt{10}=6$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, nhà công vụ của một trạm hải đăng nằm trên mặt phẳng $(P):x+2y+z-4=0$ và phương trình trạm hải đăng là đường thẳng $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{3}$. Người ta muốn làm một con đường Δ nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với trạm hải đăng . Giả sử phương trình đường thẳng Δ có dạng $\frac{x-1}{a}=\frac{y-b}{-1}=\frac{z-d}{c}$. Hỏi có bao nhiêu số trong các số a,b,c,d chia hết cho 3

Lời giải

Trả lời: 1

Ta có $\vec{u}_{\Delta}=(2;1;3)$ là VTCP của d và $\vec{n}_{(P)}=(1;2;1)$ là VTPT của (P).

Gọi $A=d\cap\Delta$. Do $\Delta\subset(P)$ nên $A=d\cap(P)$.

Suy ra tọa độ A thỏa hệ: $\begin{cases} x+2y+z-4=0 \\ \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow A(1;1;1)$.

Gọi $\vec{u}_{\Delta}$ là véc-tơ chỉ phương của Δ. Lại có: $\begin{cases} \Delta\subset(P) \\ \Delta\perp d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_{\Delta}\perp\vec{n}_{(P)} \\ \vec{u}_{\Delta}\perp\vec{u}_{d} \end{cases}$ ta chọn $\vec{u}_{\Delta}=\left[\vec{n}_{(P)};\vec{u}_{d}\right]=(5;-1;-3)$.

Vậy phương trình đường thẳng Δ là $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-3} \Rightarrow a=5;b=1;c=-3;d=1$

Vậy có 1 số chia hết cho 3.

Câu 13: Tại một nút giao thông có 2 con đường khác mức. Trên thiết kế, trong không gian Oxyz hai con đường đó thuộc hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{-1}$; $d_2:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{-3}$.

Người ta muốn tạo một con đường Δ cắt d_1, d_2 lần lượt tại A và B sao cho AB nhỏ nhất. Tính độ dài AB, kết quả làm tròn đến hàng phần trăm.

Lời giải

Trả lời: 2,45

Ta có AB ngắn nhất khi AB là đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2.

Gọi $A(2+a;2+a;-a)\in d_1;\ B(2+b;-1+2b;-3b)\in d_2 \Rightarrow \overrightarrow{AB}(b-a;2b-a-3;-3b+a)$.

d_1, d_2 lần lượt có các véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_{d_1}=(1;1;-1)$ và $\vec{u}_{d_2}=(1;2;-3)$

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\vec{u}_{d_1}=0\\ \overrightarrow{AB}.\vec{u}_{d_2}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1(b-a)+1(2b-a-3)-1(-3b+a)=0\\ 1(b-a)+2(2b-a-3)-3(-3b+a)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}6b-3a-3=0\\ 14b-6a-6=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}a=-1\\ b=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A(1;1;1)\\ B(2;-1;0)\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(1;-2;-1)$

Do đó $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{6} \approx 2,45$.