SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BẮC NINH

CHUYÊN ĐỀ VẬN DỤNG, VẬN DỤNG CAO
KỲ THI TỐT NGHIỆP THPT NĂM 2023
Môn: Toán

TÊN CHUYÊN ĐỀ: CỰC TRỊ HÀM ẨN

Người biên soạn: Nguyễn Minh Nhiên.
Đơn vị công tác: Sở Giáo dục và Đào tạo Bắc Ninh.

Trong đề thi tốt nghiệp THPT những năm gần đây, các bài toán về xác định cực trị của hàm số cho bởi bảng biến thiên, đồ thị hay đạo hàm của nó (ta vẫn gọi là cực trị hàm ẩn) thường gây khó khăn cho nhiều thí sinh. Bài viết này sẽ giúp các em có tìm ra hướng tiếp cận đơn giản nhất để giải quyết các bài toán đó thật dễ dàng.

I. KIẾN THỨC LIÊN QUAN

1. Định nghĩa

Giả sử hàm số f xác định trên tập K và $x_0 \in K$. Ta nói:

- x_0 là **điểm cực tiểu** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa x_0 sao cho $(a;b) \subset K$ và $f(x) > f(x_0), \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$. Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số f.
- x_0 là **điểm cực đại** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa x_0 sao cho $(a;b) \subset K$ và $f(x) < f(x_0), \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$. Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số f.
- Điểm cực đại và điểm cực tiểu gọi chung là **điểm cực trị**.
- Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu gọi chung là **cực trị**.
- Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là ***điểm cực trị của hàm số*** và điểm cực trị phải là một điểm trong tập hợp *K*.
- Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là ***giá trị cực trị (hay cực trị)*** *của hàm số*.
- Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số thì điểm $(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực trị của đồ thị** hàm số f .

*** Nhận xét:**

- Giá trị cực đại (cực tiểu) $f(x_0)$ nói chung không phải là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số f trên tập D; $f(x_0)$ chỉ là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số f trên một khoảng $(a;b)$ nào đó chứa x_0 hay nói cách khác khi x_0 điểm cực đại (cực tiểu) sẽ tồn tại khoảng (a;b) chứa x_0 sao cho $f(x_0)$ là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số f trên khoảng $(a;b)$.
- Hàm số f có thể đạt cực đại hoặc cực tiểu tại nhiều điểm trên tập K . Hàm số có thể không có cực trị trên một tập cho trước.

2. Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị

Định lí 1:

Giả sử hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0. Khi đó, nếu $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

Chú ý:

- Đạo hàm $f'(x)$ *có thể* bằng 0 tại điểm x_0 nhưng hàm số f không đạt cực trị tại điểm x_0.
- Hàm số *có thể* đạt cực trị tại một điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm.
- Hàm số *chỉ có thể* đạt cực trị tại một điểm mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0 hoặc tại đó hàm số không có đạo hàm.

3. Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị

Định lí 2:

Giả sử hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0. Khi đó, nếu hàm số f có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

- Nếu $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.
- Nếu $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

4. Quy tắc tìm cực trị

Quy tắc 1:

- *Bước 1:* Tìm tập xác định. Tìm $f'(x)$.
- *Bước 2:* Tìm các điểm x_i $(i = 1;2;...)$ mà tại đó *đạo hàm của hàm số bằng* 0 hoặc hàm số *liên tục nhưng không có đạo hàm*.
- *Bước 3:* Lập bảng biến thiên hoặc bảng xét dấu $f'(x)$. Nếu $f'(x)$ *đổi dấu khi đi qua* x_i thì hàm số đạt cực trị tại x_i.

Định lí 3:

Giả sử $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trong khoảng $(x_0 - h; x_0 + h)$ với $h > 0$. Khi đó:

- Nếu $f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại x_0.
- Nếu $f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại x_0.

Từ định lí trên, ta có một quy tắc khác để tìm cực trị của hàm số

Quy tắc 2:

- *Bước 1:* Tìm tập xác định. Tìm $f'(x)$.
- *Bước 2:* Tìm các nghiệm x_i $(i = 1;2;...)$ của phương trình $f'(x) = 0$.
- *Bước 3:* Tính $f''(x)$ và tính $f''(x_i)$.

  * Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_i.

  * Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_i.

II. CÁC DẠNG TOÁN

1. Dựa vào bảng biến thiên hoặc đồ thị hàm $f'(x)$ xác định số lần đổi dấu của $f'(x)$.

Nếu xác định được số lần đổi dấu từ $(+)$ sang $(-)$ của $f'(x)$ ta sẽ xác định được số điểm cực đại của $f(x)$; số lần đổi dấu từ $(-)$ sang $(+)$ của $f'(x)$ ta sẽ xác định được số điểm cực tiểu của $f(x)$.

*** Lỗi thường gặp:** Đếm thừa điểm mà qua đó đạo hàm không đổi dấu.

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Dễ thấy, $f'(x)$ một lần đổi dấu từ $(+)$ sang $(-)$ và một lần đổi dấu từ $(-)$ sang $(+)$ nên hàm số có hai điểm cực trị.

2. Cực trị hàm $g(x)=f(u(x))$.

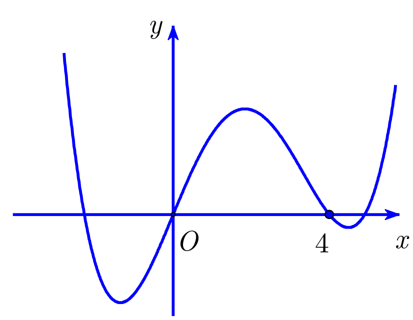
Để xác định số cực trị của hàm $g(x)=f(u(x))$ ta thường hướng đến việc xét dấu

$$g'(x)=u'(x)f'(u(x)).$$

Nếu $g'(x)$ đổi dấu $x_0 \in$ TXĐ của $g(x)$ thì x_0 là điểm cực trị. Trường hợp đơn giản khi $f(x), u(x)$ là hàm đa thức thì nghiệm đơn và nghiệm bội lẻ là các điểm cực trị của $g(x)$.

*** Lỗi thường gặp:** Nhầm lẫn giữa nghiệm bộ chẵn và nghiệm bội lẻ.

Ví dụ 2: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(x^3+3x^2)$ là

A. 5. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 11.

Lời giải

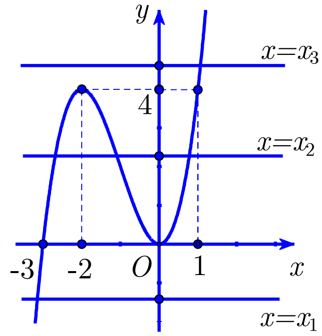
Chọn C

Từ đồ thị suy ra hàm số $y=f(x)$ có 3 điểm cực trị $x_1<0<x_2<4<x_3$

Xét hàm số $g(x)=f(x^3+3x^2)$, ta có $g'(x)=(3x^2+6x)f'(x^3+3x^2)$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x^2+6x=0\\ f'(x^3+3x^2)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-2\\ x^3+3x^2=x_i, i=1;2;3\end{array}\right.$$

Ta có đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2$

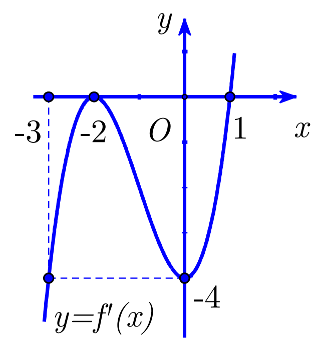


Ta có nhận xét rằng phương trình $x^3+3x^2=x_1$ có 1 nghiệm; phương trình $x^3+3x^2=x_2$ có 3 nghiệm; phương trình $x^3+3x^2=x_3$ có 1 nghiệm cả 5 nghiệm này đôi một phân biệt, đều khác $0;-2$.

Như vậy, $g'(x)=0$ có 7 nghiệm đơn phân biệt

Do đó hàm số $g(x)$ có 7 điểm cực trị.

Ví dụ 3: Cho $f(x)$ là đa thức bậc 4 và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ.



Số điểm cực đại của hàm số $g(x)=f(x^3-3x)$ là

A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=(3x^2-3)f'(x^3-3x)$, $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}3x^3-3=0 & (1)\\ f'(x^3-3x)=0 & (2)\end{array}\right.$

$(1) \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Dựa vào đồ thị đã cho thì $(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^3-3x=-2\\ x^3-3x=1\end{array}\right.$

Trong đó phương trình $x^3 - 3x = -2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

Còn phương trình: $x^3 - 3x = 1$ có 3 nghiệm phân biệt: $-2 < x_1 < -1$, $-1 < x_2 < 0$ và $1 < x_3 < 2$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g\left(x\right)$

x	$-\infty$		-2		x_1		-1		x_2		1		x_3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Vậy hàm số $g\left(x\right)$ có 2 điểm cực đại.

3. Cực trị hàm $g\left(x\right) = f\left(u\left(x\right)\right) + v\left(x\right)$.

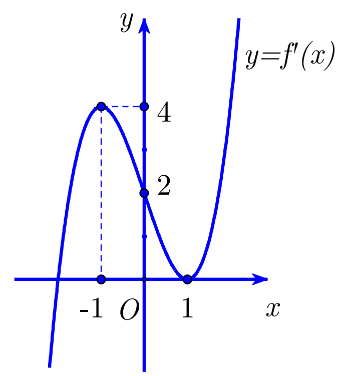
Để xác định số cực trị của hàm $g\left(x\right) = f\left(u\left(x\right)\right) + v\left(x\right)$ ta cần xét dấu

$$g'\left(x\right) = u'\left(x\right)f'\left(u\left(x\right)\right) + v'\left(x\right).$$

+ Hướng 1: Xét dấu $g'\left(x\right)$ dựa vào đồ thị hai hàm $y = u'\left(x\right)f'\left(u\left(x\right)\right); y = v'\left(x\right)$

+ Hướng 2: Đưa $u'\left(x\right)f'\left(u\left(x\right)\right) + v'\left(x\right)$ về dạng tích.

*** Lỗi thường gặp:** Xác định sai dấu hoặc nhầm lẫn giữa nghiệm bộ chẵn và nghiệm bội lẻ.



Ví dụ 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x) - 5x$ là

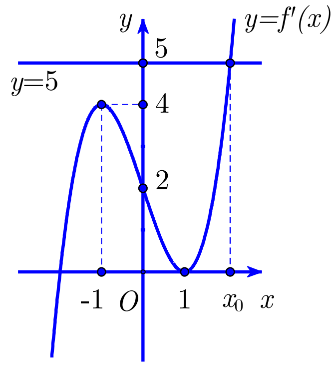
A. 3. **B.** 4.

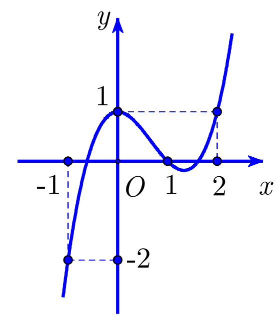
C. 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = f(x) - 5x$. Suy ra $y' = f'(x) - 5$.





Dựa vào đồ thị ta có $y = f'(x)$ cắt đường thẳng $y = 5$ tại đúng một điểm x_0 (x_0 là nghiệm đơn của phương trình $f'(x) = 5$).

Vậy hàm số $y = f(x) - 5x$ có đúng 1 điểm cực trị.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ là hàm đa thức bậc bốn có đồ thị hàm số $y = f'\left(x\right)$ như hình bên vẽ. Hàm số $g(x) = f(x) - \dfrac{x^3}{3} + x^2 - x + 2$ đạt cực đại tại điểm nào?

A. $x = 1$. **B.** $x = -1$.

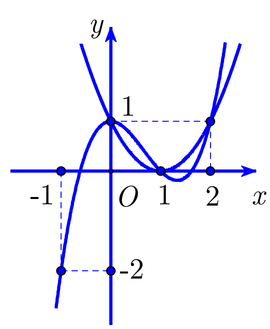
C. $x = 0$. **D.** $x = 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và $g'(x) = f'(x) - (x-1)^2$.

Số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ bằng số giao điểm của hai đồ thị $y = f'(x)$ và parabol $y = (x-1)^2$; $g'(x) > 0$ khi đồ thị $y = f'(x)$ nằm trên parabol $y = (x-1)^2$ và ngược lại.



Từ đồ thị suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \\ x = 1 \end{array}\right.$ nhưng $g'(x)$ chỉ đổi dấu từ dương sang âm khi qua $x = 1$.

Do đó hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

4. Dựa vào biến đổi đồ thị

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $\left(C\right)$ và $a > 0$. Khi đó

+ Tịnh tiến $\left(C\right)$ lên trên a đơn vị ta được đồ thị hàm số $y = f\left(x\right) + a$.

+ Tịnh tiến $\left(C\right)$ xuống dưới a đơn vị ta được đồ thị hàm số $y = f\left(x\right) - a$.

+ Tịnh tiến (C) sang trái a đơn vị ta được đồ thị hàm số $y = f(x+a)$.

+ Tịnh tiến (C) sang phải a đơn vị ta được đồ thị hàm số $y = f(x-a)$.

+ Lấy đối xứng (C) qua Ox ta được đồ thị hàm số $y = -f(x)$.

+ Lấy đối xứng (C) qua Oy ta được đồ thị hàm số $y = f(-x)$.

*** Lỗi thường gặp:** Biến đổi đồ thị sai.

*** Đặc biệt khi $f(x)$ là hàm đa thức**

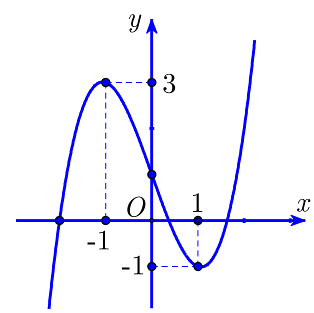
1) Với hàm $y = |f(x)|$ (có thể mở rộng với hàm $y = |f(x) - m|$)

Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ bằng tổng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với Ox và số điểm cực trị không thuộc Ox của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

2) Với hàm $y = f(|x|)$ (có thể mở rộng với hàm $y = f(|x| + m)$)

Số điểm cực trị của hàm số là $2k+1$ trong đó k là số điểm cực trị dương.

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \neq 0$ có đồ thị như hình vẽ. Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = f(4-x)+1$ là



A. $A(5;4)$. **B.** $B(3;2)$.

C. $C(-3;4)$. **D.** $D(5;8)$.

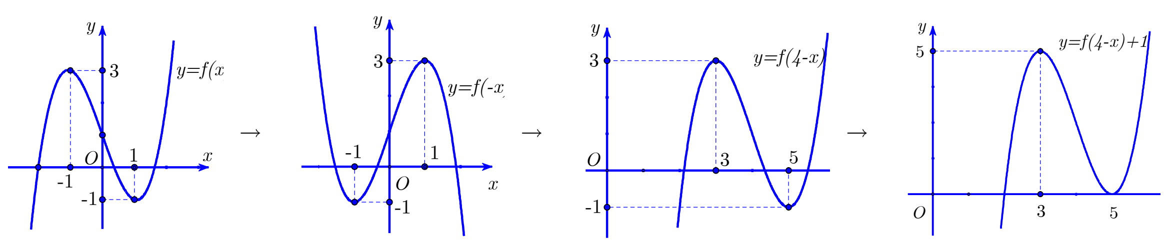
Lời giải

Chọn A

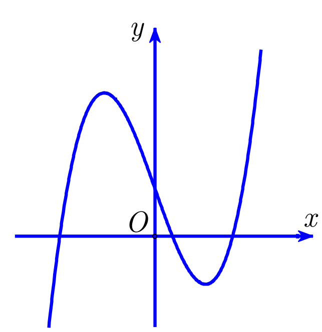
Từ đồ thị hàm số $f(x)$ ta thực hiện các phép biến đổi

$f(x) \to f(-x) \to f(4-x) \to f(4-x)+1$.

Suy ra đồ thị hàm số $y = f(4-x)+1$ có điểm cực đại là $A(5;4)$.



Ví dụ 7: Cho $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên vẽ. Hỏi hàm số $y = f(|x|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 5. **B.** 3.

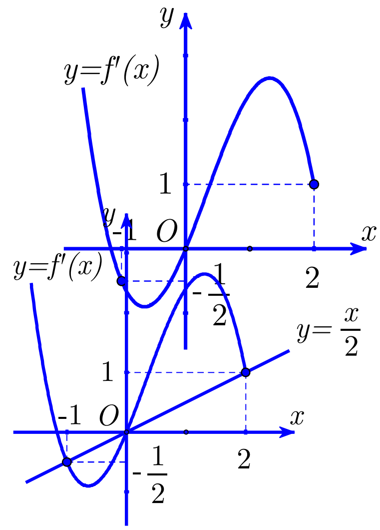
C. 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị hàm số của $f'(x)$ ta thấy $f(x)$ có hai cực trị dương nên hàm số $y = f(|x|)$ có 5 cực trị.

Ví dụ 8: Cho $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e\,(ae < 0)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = |4f(x) - x^2|$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?



A. 3. **B.** 4.
C. 2. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x) = 4f(x) - x^2$.

Ta có $g'(x) = 4f'(x) - 2x; g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{x}{2}$

Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt đường thẳng $y = \dfrac{x}{2}$ tại các điểm có hoành độ $-1; 0; 2$.

Bảng biến thiên của $g(x)$

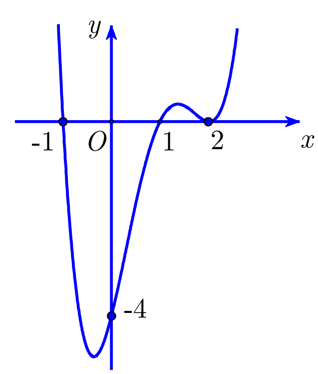
x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$g(-1)$	$\searrow$	$g(0)$	$\nearrow$	$g(2)$	$\searrow$	$-\infty$

Từ đồ thị của $f'(x) \Rightarrow a < 0$ mà $ae < 0 \Rightarrow e > 0 \Rightarrow g(0) = 4f(0) = 4.e > 0$.

Nhận thấy $g(x)$ có 1 điểm cực tiểu và đồ thị hàm số $y = g(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt nên hàm số $y = |g(x)|$ có 3 điểm cực tiểu.

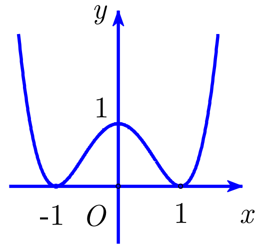
III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Cho $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc 5 có đồ thị của hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Số điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ là



A. 1. **B.** 0.
C. 2. **D.** 3.

Câu 2: Cho $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc 5 có đồ thị của hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Số điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ là



Số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(x\right)$ là

A. 4. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

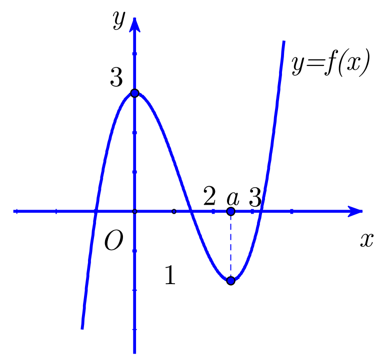
Câu 3: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	-2	↗	1	↘	$-\infty$

Hàm số $y = f\left(3-x\right)$ đạt cực đại tại

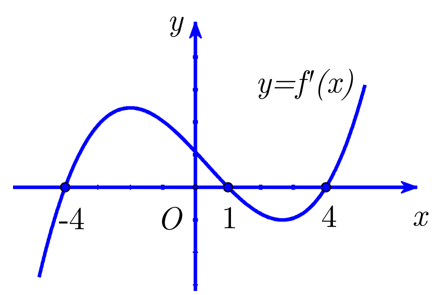
A. $x = -1$. **B.** $x = 2$.
C. $x = 0$. **D.** $x = 3$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f\left(x\right) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có các điểm cực trị là $0; a$ $\left(2 < a < 3\right)$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Đặt $g\left(x\right) = f\left(f\left(x\right)\right)$. Số điểm cực trị của hàm số là



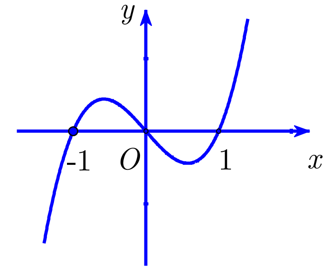
A. 2. **B.** 8.
C. 10. **D.** 6.

Câu 5: Cho hàm số $y = f\left(x\right) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Biết rằng hàm số $y = f'\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $g\left(x\right) = f\left(2x - x^2\right)$ có bao nhiêu điểm cực đại?



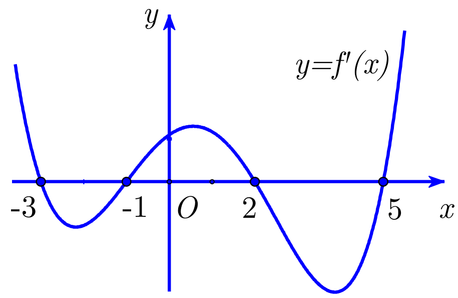
A. 5. **B.** 3.
C. 1. **D.** 2.

Câu 6: Cho $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left[f'(x)\right]$ là



A. 7. **B.** 11.
C. 9. **D.** 8.

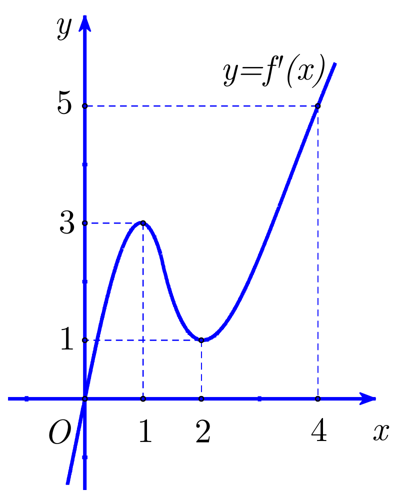
Câu 7: Cho $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc 5 có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x)=f(|x|+m)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)$ có đúng 7 điểm cực trị?



A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** Vô số.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ và $f(0)=0;\ f''(x)>-\dfrac{1}{6},\forall x\in\mathbb{R}$.

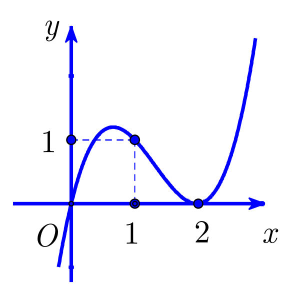
Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=\left|f(x^2)-mx\right|$, với m là tham số dương, có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?



A. 1 **B.** 2 **C.** 5 **D.** 3

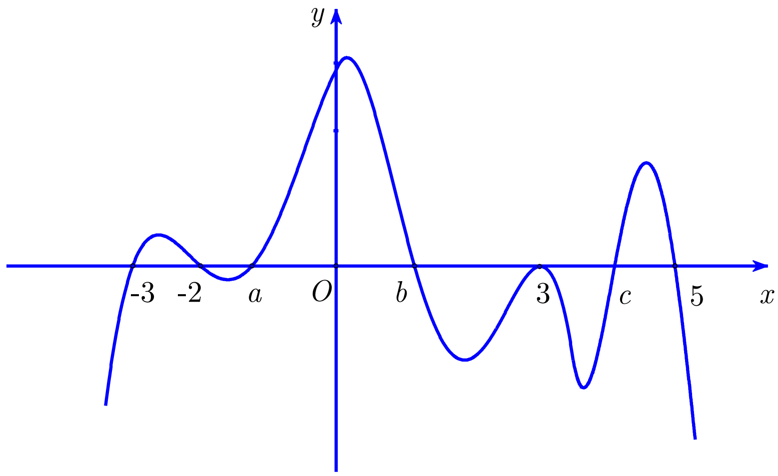
Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn thỏa mãn $f(0)f(2)<0$.

Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=\left|f(x^2)+\dfrac{x^4}{2}-2x^2\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 7. **B.** 8.
C. 5. **D.** 3.

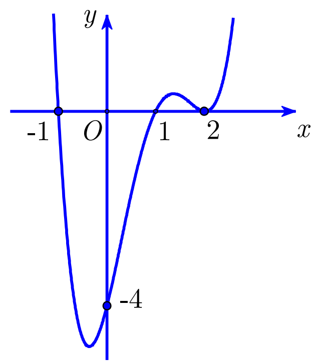
Câu 10: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'\left(x\right)$ cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ $-3;-2;a;b;3;c;5$ với $-\dfrac{4}{3} < a < -1; 1 < b < \dfrac{4}{3}; 4 < c < 5$ có dạng như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = f\left(2\left|x\right| + m - 3\right)$ có 7 điểm cực trị?



A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** Vô số.

ĐÁP ÁN

Câu 1: Cho $y = f\left(x\right)$ là hàm đa thức bậc 5 có đồ thị của hàm $y = f'\left(x\right)$ như hình vẽ dưới đây. Số điểm cực tiểu của hàm số $y = f\left(x\right)$ là



A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

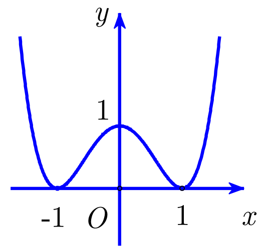
Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị của hàm số $y = f'\left(x\right)$ ta thấy đạo hàm $f'\left(x\right)$ đổi dấu từ $\left(-\right)$ sang $\left(+\right)$ đúng 1 lần.

Vậy hàm số $y = f\left(x\right)$ có 1 điểm cực tiểu.

Câu 2: Cho $y = f\left(x\right)$ là hàm đa thức bậc 5 có đồ thị của hàm $y = f'\left(x\right)$ như hình vẽ dưới đây.



Số điểm cực tiểu của hàm số $y = f\left(x\right)$ là

A. 4. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị hàm số $y = f'\left(x\right)$ suy ra $f'\left(x\right) \geq 0, \forall x$. Do đó, hàm số $y = f\left(x\right)$ không có cực trị.

Câu 3: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y = f\left(3 - x\right)$đạt cực đại tại

A. $x = -2$. **B.** $x=4$. **C.** $x = -3$. **D.** $x=3$.

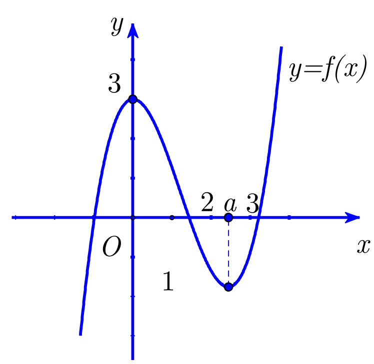
Lời giải

Chọn B

Thực hiện các biến đổi $f\left(x\right) \to f\left(-x\right) \to f\left(3-x\right)$.

Điểm cực đại của $f\left(x\right)$ là $-1;2$ $\to$ Điểm cực đại của $f\left(-x\right)$ là $1;-2$ $\to$ Điểm cực đại của $f\left(3-x\right)$ là $4;1$

Câu 4: Cho hàm số $y = f\left(x\right) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có các điểm cực trị là $0;a$ $\left(2 < a < 3\right)$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ.

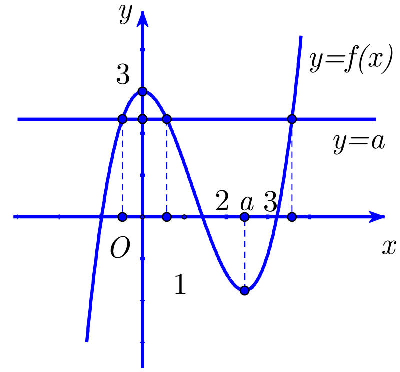


Đặt $g\left(x\right) = f\left(f\left(x\right)\right)$. Số điểm cực trị của hàm số là

A. 2. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B



$g'(x) = f'(f(x)).f'(x)$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(f(x)).f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(f(x)) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f(x) = a \\ x = 0 \\ x = a \end{array}\right., (2 < a < 3)$.

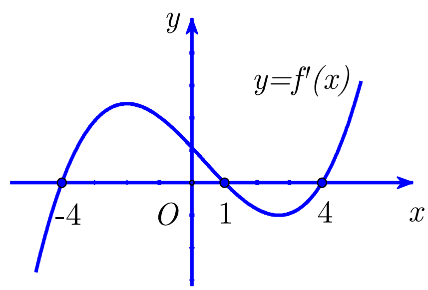
$f(x) = 0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt x_1, x_2, x_3 khác 0 và a.

Vì $2 < a < 3$ nên $f(x) = a$ có 3 nghiệm đơn phân biệt x_4, x_5, x_6 khác x_1, x_2, x_3, 0, a.

Suy ra $g'(x) = 0$ có 8 nghiệm đơn phân biệt.

Do đó hàm số $g(x)$ có 8 điểm cực trị.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Biết rằng hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $g(x) = f(2x - x^2)$ có bao nhiêu điểm cực đại?



A. 5. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

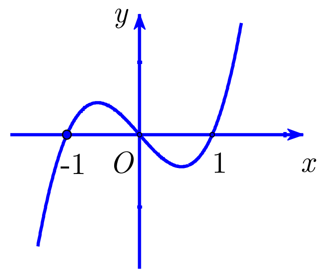
Chọn C

Ta có $y' = (2 - 2x).f'(2x - x^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ 2x - x^2 = -4 \\ 2x - x^2 = 1 \\ 2x - x^2 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 1 \pm \sqrt{5} \end{array}\right.$.

x	$-\infty$		$1-\sqrt{5}$		1		$1+\sqrt{5}$		$+\infty$
$2-2x$		$+$	|	$+$	0	$-$		$-$	
$f'(2-2x)$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra hàm số có 1 cực đại.

Câu 6: Cho $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $y = f\left[f'\left(x\right)\right]$ là

A. 7. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị và giả thiết suy ra $f'\left(x\right) = x\left(x^2 - 1\right) = x^3 - x \Rightarrow f''\left(x\right) = 3x^2 - 1$

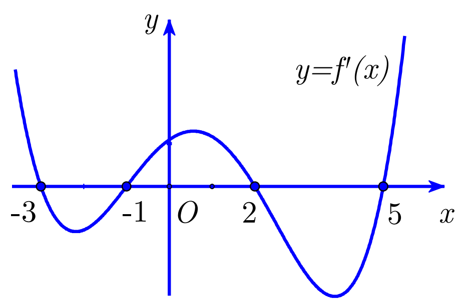
Ta có $g'\left(x\right) = \left(f\left[f'\left(x\right)\right]\right)' = f'\left[f'\left(x\right)\right].f''\left(x\right) = \left[\left(x^3 - x\right)^3 - \left(x^3 - x\right)\right]\left(3x^2 - 1\right)$

$= x\left(x - 1\right)\left(x + 1\right)\left(x^3 - x - 1\right)\left(x^3 - x + 1\right)\left(3x^2 - 1\right)$

$$g'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \\ x^3 - x - 1 = 0 \\ x^3 - x + 1 = 0 \\ 3x^2 - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \\ x = a\,(\approx 0,76) \\ x = b\left(b \approx -1,32\right) \\ x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$$

Do đó, hàm số $g\left(x\right)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 7: Cho $y = f\left(x\right)$ là hàm đa thức bậc 5 có đồ thị hàm số $y = f'\left(x\right)$ như hình vẽ. Đặt $g\left(x\right) = f\left(\left|x\right| + m\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g\left(x\right)$ có đúng 7 điểm cực trị?



A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g\left(x\right) = f\left(\left|x\right| + m\right) = \begin{cases} f\left(x + m\right)\ \ , khi\ x \geq 0 \\ f\left(-x + m\right), khi\ x < 0 \end{cases}$

Do hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$Hàm số $g\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$

Và ta lại có $g\left(-x\right) = f\left(\left|x\right| + m\right) = g\left(x\right)$ $\Rightarrow$Hàm số $g\left(x\right)$ là hàm số chẵn$\Rightarrow$Đồ thị hàm số $y = g\left(x\right)$ đối xứng qua trục Oy .

Hàm số $y = g\left(x\right)$ có 7 điểm cực trị$\Leftrightarrow$Hàm số $y = g\left(x\right)$ có 3 điểm cực trị dương, 3 điểm cực trị âm và một điểm cực trị bằng 0

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'\left(x\right)$, ta có: $f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = -1 \\ x = 2 \\ x = 5 \end{array}\right.$

Xét trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$, ta được $g\left(x\right) = f\left(x+m\right)$

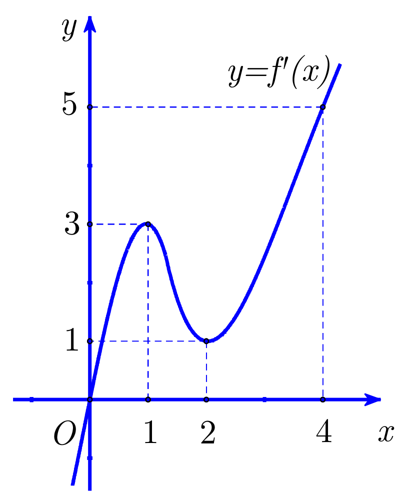
+ Ta có $g'\left(x\right) = f'\left(x+m\right)$

+ $g'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+m = -3 \\ x+m = -1 \\ x+m = 2 \\ x+m = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -m-3 \\ x = -m-1 \\ x = -m+2 \\ x = -m+5 \end{array}\right.$

+ Nhận thấy $-m-3 < -m-1 < -m+2 < -m+5$

Theo yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} -m-1 > 0 \\ -m-3 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \le m < -1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in \left\{-3;-2\right\} \end{cases}$

Câu 8: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ và $f\left(0\right) = 0;\ f''\left(x\right) > -\frac{1}{6}, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g\left(x\right) = \left|f\left(x^2\right) - mx\right|$, với m là tham số dương, có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?



A. 1 **B.** 2 **C.** 5 **D.** 3

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm số $y = f'\left(x\right)$ suy ra $f'\left(x\right) > 0, \forall x \in \left(0;+\infty\right)$.

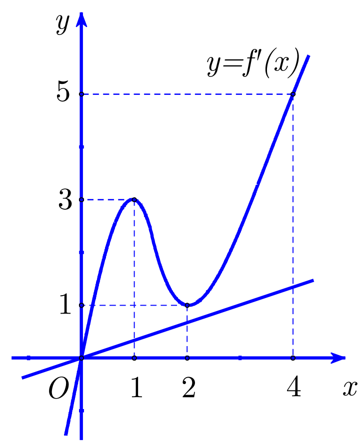
Do đó, $f'\left(x^2\right) > 0, \forall x \in \left(0;+\infty\right)$.

Xét hàm số $h\left(x\right) = f\left(x^2\right) - mx$; $h'\left(x\right) = 2x.f'\left(x^2\right) - m$.

Với $x < 0$, $h'\left(x\right) < 0 \Rightarrow$ Phương trình $h'\left(x\right) = 0$ vô nghiệm.

Với $x \geq 0$ ta có $h''\left(x\right) = 2f'\left(x^2\right) + 4x^2 f''\left(x^2\right) > 2f'\left(x^2\right) - \dfrac{2x^2}{3}$.

Từ đồ thị hàm số $y = f'\left(x\right)$ ta thấy với $x \geq 0$, đồ thị hàm số $y = f'\left(x\right)$ luôn nằm trên đường thẳng $y = \dfrac{x}{3}$.



Do đó, $2f'\left(x^2\right) - \dfrac{2x^2}{3} \geq 0, \forall x \geq 0 \Rightarrow h''\left(x\right) \geq 0, \forall x \geq 0$ hay hàm số $y = h'\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$.

Mà $h'\left(0\right) = -m < 0$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} h'\left(x\right) = +\infty$ nên phương trình $h'\left(x\right) = 0$ có một nghiệm duy nhất $x_0 \in \left(0;+\infty\right)$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		x_0		$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$h\left(x_0\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

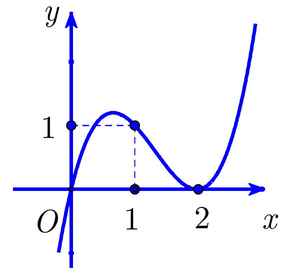
Khi đó phương trình $h\left(x\right) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Đồng thời hàm số $y = h\left(x\right)$ đạt cực tiểu tại $x = x_0$, giá trị cực tiểu $h\left(x_0\right) < 0$.

Vậy hàm số $y = \left|h\left(x\right)\right|$ có 3 điểm cực trị.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn thỏa mãn $f(0)f(2) < 0$.

Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x) = \left|f(x^2) + \dfrac{x^4}{2} - 2x^2\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

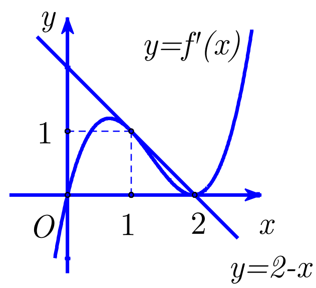


A. 7. **B.** 8.
C. 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $h(x) = f(x^2) + \dfrac{x^4}{2} - 2x^2$; $h'(x) = 2x.f'(x^2) + 2x^3 - 4x = 2x\left[f'(x^2) + x^2 - 2\right]$.



Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và hàm số $y = -x + 2$ suy ra

$f'(x) + x - 2 > 0, \forall x \in (2; +\infty)$ và $f'(x) + x - 2 < 0, \forall x \in (-\infty; 2)$.

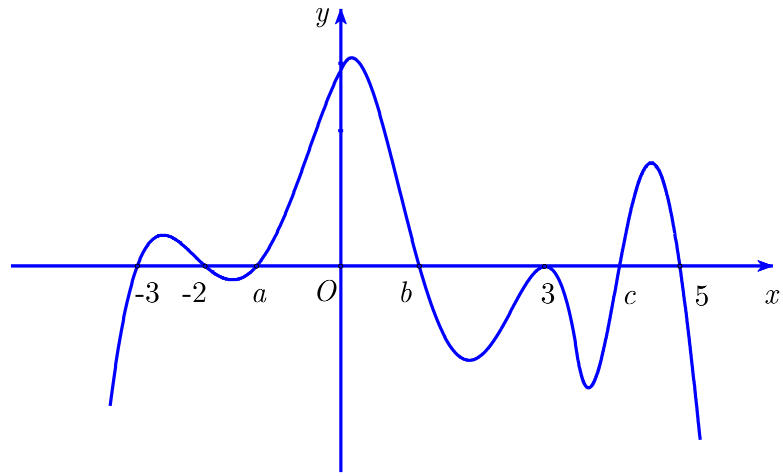
Do đó, $f'(x^2) + x^2 - 2 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		–	0	+	0	+	0	–	0	–	0	+	
$g(x)$	$+\infty$		$f(2)$				$f(0)$				$f(2)$		$+\infty$

Từ giả thiết $f(0)f(2) < 0$ suy ra $g(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt và hàm số $g(x)$ có 3điểm cực trị do đó hàm số $h(x) = |g(x)|$ có 7điểm cực trị.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ $-3; -2; a; b; 3; c; 5$ với $-\dfrac{4}{3} < a < -1; 1 < b < \dfrac{4}{3}; 4 < c < 5$ có dạng như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = f(2|x| + m - 3)$ có 7 điểm cực trị?



A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

Từ hình vẽ ta thấy hàm số $y = f\left(x\right)$ đạt cực trị tại các điểm $-3;-2;a;b;c;5$.

Xét hàm số $y = g\left(x\right) = f\left(2\left|x\right| + m - 3\right)$

$$g'\left(x\right) = \frac{2x}{\left|x\right|}.f'\left(2\left|x\right| + m - 3\right).$$

Khi đó, để xác định số điểm cực trị của hàm số $y = g\left(x\right)$ ta cần xác định số nghiệm của hệ

$$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2\left|x\right| + m - 3 \in \left\{-3;-2;a;b;c;5\right\} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \left|x\right| \in \left\{\frac{-m}{2};\frac{-m+1}{2};\frac{a+3-m}{2};\frac{b+3-m}{2};\frac{c+3-m}{2};\frac{m+8}{2}\right\} \end{array}\right.$$

Đặt $x_1 = \frac{-m}{2};x_2 = \frac{-m+1}{2};x_3 = \frac{a+3-m}{2};x_4 = \frac{b+3-m}{2};x_5 = \frac{c+3-m}{2};x_6 = \frac{m+8}{2}$.

Ta có $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6$.

Với mỗi $i = 1;2;\ldots;7$

Nếu $x_i > 0$ phương trình $\left|x\right| = x_i$ có hai nghiệm phân biệt $x = \pm x_i$, dẫn đến $x = \pm x_i$ là hai điểm cực trị của hàm số $y = g\left(x\right)$.

Nếu $x_i = 0$ phương trình $\left|x\right| = x_i$ có duy nhất $x=0$, dẫn đến $x=0$ là điểm cực trị của hàm số $y = g\left(x\right)$.

Nếu $x_i < 0$ phương trình $\left|x\right| = x_i$ vô nghiệm.

Do đó, hàm số $y = g\left(x\right)$ có 7 điểm cực trị

$$\Leftrightarrow x_3 \le 0 < x_4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{a+3-m}{2} \le 0 \\ \dfrac{b+3-m}{2} > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow a+3 \le m < b+3 \Rightarrow -1+3 \le m < \frac{4}{3}+3.$$

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn là $2;3;4$.