| UBND TP. TAM KỲ<br>PHÒNG GD VÀ ĐÀO TẠO | KỲ THI KHẢO SÁT HSG GIỎI LỚP 9 LẦN 2<br>NĂM HỌC 2023-2024 |
|---|---|
| **ĐỀ CHÍNH THỨC** | **MÔN THI: TOÁN**<br>Ngày 02 tháng 11 năm 2023<br>*Thời gian: 120 phút(Không tính thời gian giao đề)* |

**Câu 1. (4.0 điểm)**

a) Tính giá trị của

$$P=\left(\sqrt{10}+\sqrt{11}+\sqrt{12}\right)\cdot\left(\sqrt{10}+\sqrt{11}-\sqrt{12}\right)\cdot\left(\sqrt{10}-\sqrt{11}+\sqrt{12}\right)\cdot\left(\sqrt{10}-\sqrt{11}-\sqrt{12}\right)$$

b) Cho các số thực $a>0,b>0$ thỏa mãn $\sqrt{2ab}=a-4b$. Tính $Q=\dfrac{\sqrt[3]{ab}\left(2024\sqrt[3]{a}-2023\sqrt[3]{b}\right)}{\sqrt{2ab}}$

**Câu 2. (4.0 điểm)**

a) Giải phương trình: $\sqrt{x-7}+\sqrt{9-x}=3x^2-48x+194$

b) Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho điểm $B(-1;2)$ và đường thẳng $(d_1): y=m^2x-m^4+2$ và $(d_2): y=\dfrac{m^2}{m^2+1}x+2$ ($m$ là tham số thực khác 0). Gọi $A$ là giao điểm của $(d_1)$ và $(d_2)$; hai điểm $C,D$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $B$ và $A$ lên trục hoành. Tìm tất cả các giá trị của $m$ để diện tích $ABCD$ bằng $\dfrac{15}{2}$.

**Câu 3. (4.0điểm)**

a) Một số nguyên tố liên tiếp cách nhau 2 đơn vị được gọi là "**cặp số nguyên tố sinh đôi**". Chứng minh rằng một cặp số gồm hai số nguyên tố lớn hơn 5 sinh đôi bất kì đều có dạng $(6m-1,6m+1)$ với $m$ là số nguyên dương.

b) Cho hai số nguyên dương $a,b$ sao cho là số nguyên. Chứng minh rằng $|a-2b|$ là số chính phương.

**Câu 4. (5.0 điểm)** Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ tiếp xúc ngoài tại $A$ sao cho $R>R'$. Vẽ dây của đường $AM$ của đường tròn $(O)$ và dây $AN$ của đường tròn $(O')$ sao cho tam giác $AMN$ vuông tại $A$. Gọi $BC$ là một tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn $(O)$ và $(O')$ trong đó $B\in(O),C\in(O')$.

a) Chứng minh rằng $OM//O'N$.

b) Chứng minh rằng ba đường thẳng $MN,BC$ và $OO'$ đồng quy.

c) Xác định vị trí các điểm $M$ và $N$ để tứ giác $MNO'O$ có diện tích lớn nhất và tìm diện tích lớn nhất đó.

**Câu 5. (3 điểm)**

Cho $a,b,c$ là các số thực không âm, không có hai số nào cùng bằng 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{a\sqrt{a^2+3bc}}{b+c}+\frac{b\sqrt{b^2+3ca}}{c+a}+\frac{c\sqrt{c^2+3ab}}{a+b}\ge a+b+c$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

......................................**HẾT**......................................

**HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ ĐÁP ÁN**

| CÂU | NỘI DUNG | ĐIỂM |
|---|---|---|
| **Câu 1. (4.0 điểm)**<br>a) Tính giá trị của<br>$P=\left(\sqrt{10}+\sqrt{11}+\sqrt{12}\right)\cdot\left(\sqrt{10}+\sqrt{11}-\sqrt{12}\right)\cdot\left(\sqrt{10}-\sqrt{11}+\sqrt{12}\right)\cdot\left(\sqrt{10}-\sqrt{11}-\sqrt{12}\right)$<br>b) Cho các số thực $a>0,b>0$ thỏa mãn $\sqrt{2ab}=a-4b$. Tính $Q=\dfrac{\sqrt[3]{ab}\left(2024\sqrt[3]{a}-2023\sqrt[3]{b}\right)}{\sqrt{2ab}}$ | | |
| | a) (1,5 điểm)<br>Ta có: $P=\left[\left(\sqrt{10}+\sqrt{11}\right)^2-\left(\sqrt{12}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{10}-\sqrt{11}\right)^2-\left(\sqrt{12}\right)^2\right]$<br>$=\left(9+2\sqrt{10}\cdot\sqrt{11}\right)\left(9-2\sqrt{10}\cdot\sqrt{11}\right)$<br>$=9^2-\left(2\sqrt{10}\cdot\sqrt{11}\right)^2\ 81-440=-359$ | |
| | **b) (2,4 điểm)**<br>Ta có: $\sqrt{2ab}=a-4b\Leftrightarrow\sqrt{2ab}+2b=a-2b$<br>$\Leftrightarrow\sqrt{2b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{2b}\right)=\left(\sqrt{a}-\sqrt{2b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{2b}\right)$<br>Vì $a>0,b>0$ nên $\sqrt{a}+\sqrt{2b}>0$<br>Suy ra $\sqrt{2b}=\sqrt{a}-\sqrt{2b}\Leftrightarrow\sqrt{a}=2\sqrt{2b}\Leftrightarrow a=8b$<br>Thay $a=8b$ vào biểu thức $Q$ ta được<br>$Q=\dfrac{\sqrt[3]{8b^2}\cdot\left(2024\sqrt[3]{8b}-2023\sqrt[3]{b}\right)}{\sqrt{16y^2}}=\dfrac{2\sqrt[3]{b^2}\left(4048\sqrt[3]{b}-2023\sqrt[3]{b}\right)}{4b}$<br>$=\dfrac{2\sqrt[3]{b^2}\cdot2025\sqrt[3]{b}}{4b}=\dfrac{2\cdot2025b}{4b}=\dfrac{2025}{2}$ | |
| **Câu 2. (4.0 điểm)**<br>a) Giải phương trình: $\sqrt{x-7}+\sqrt{9-x}=3x^2-48x+194$<br>b) Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho điểm $B(-1;2)$ và đường thẳng $(d_1): y=m^2x-m^4+2$ và $(d_2): y=\dfrac{m^2}{m^2+1}x+2$ ($m$ là tham số thực khác 0). Gọi $A$ là giao điểm của $(d_1)$ và $(d_2)$; hai điểm $C,D$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $B$ và $A$ lên trục hoành. Tìm tất cả các giá trị của $m$ để diện tích $ABCD$ bằng $\dfrac{15}{2}$. | | |
| | a) (2,0 điểm)<br>Điều kiện: $7\le x\le9$<br>Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có: | |

$\sqrt{x-7}+\sqrt{9-x}=\sqrt{(x-7)\cdot 1}+\sqrt{(9-x)\cdot 1}\le \frac{(x-7)+1}{2}+\frac{(9-x)+1}{2}=2$

(Đánh giá đúng ở mỗi căn thức được 0,5 điểm)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x-7=1 \\ 9-x=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=8$

Mặt khác, ta có: $3x^2-48x+194=3(x-8)^2+2\ge 2$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $(x-8)^2=0 \Leftrightarrow x=8$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=8$

Nếu vế trái của phương trình, thí sinh đánh giá bằng BĐT Cauchy-Schwarz thì vẫn cho điểm tương tự như trên.

$\sqrt{x-7}+\sqrt{9-x}\le\sqrt{(1+1)(x-7+9-x)}=2$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{x-7}=\sqrt{9-x}\Leftrightarrow x=8$

b) (2,0 điểm)

Phương trình hoành độ giao điểm của $(d_1)$ và $(d_2)$ là

$\frac{m^2}{m^2+1}x+2=m^2x-m^4+2\Leftrightarrow x=m^2+1$

Suy ra $A(m^2+1;m^2+2)$

Vì $C,D$ lần lượt là hình chiếu của $B$ và $A$ lên trục hoành nên ta có

$BC=2, AD=m^2+2, CD=m^2+2$

$S_{ABCD}=\frac{1}{2}\cdot CD\cdot(BC+AD)=\frac{1}{2}(m^2+2)(2+m^2+2)$

$=\frac{1}{2}(m^2+2)(m^2+4)=\frac{1}{2}(m^4+6m+8)$

$S_{ABCD}=\frac{15}{2}\Leftrightarrow \frac{1}{2}(m^4+6m^2+8)=\frac{15}{2}\Leftrightarrow m^4+6m^2-7=0$

Giải phương trình trùng phương này, tìm được $m=\pm 1$

**Câu 3. (4.0điểm)**

a) Một số nguyên tố liên tiếp cách nhau 2 đơn vị được gọi là "**cặp số nguyên tố sinh đôi**". Chứng minh rằng một cặp số gồm hai số nguyên tố lớn hơn 5 sinh đôi bất kì đều có dạng $(6m-1,6m+1)$ với $m$ là số nguyên dương.

b) Cho hai số nguyên dương $a,b$ sao cho là số nguyên. Chứng minh rằng $|a-2b|$ là số chính phương.

a) (2,0 điểm)

Giả sử $(P,P+2)$ là một cặp số nguyên tố sinh đôi với $p>5$.

* Nếu $p$ có dạng $6m+1$ (với $m\in\mathbb{Z}^+$) thì $p+2=3(2m+1)$ là hợp số. Nên mâu thuẫn.

* Nếu $p$ có dạng $6m-1$ (với $m\in\mathbb{Z}^+$) thì $p+2=6m+1$.

Vậy ta hoàn thành chứng minh.

b) (2,0 điểm)

Do cho $\frac{a^2-4b+1}{(a-2b)(2b-1)}$ là số nguyên nên $a^2-4b+1$ chia hết cho

$(a-2b)(2b-1)$, tức là tồn tại số nguyên $k$ sao cho

$a^2-4b+1=k(a-2b)(2b-1)$

Đẳng thức này tương đương với

$a^2-4b^2+4b^2-4b+1=k(a-2b)(2b-1)$

$\Leftrightarrow (2b-1)^2=(a-2b)\left[k(2b-1)-(a+2b)\right]$

Đặt $(a-2b,k(2b-1)-(a+2b))=d$. Khi đó

$$\begin{cases}(a-2b)\vdots d\\ \left[k(2b-1)-(a+2b)\right]\vdots d\\ (2b-1)\vdots d\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a-2b)\vdots d\\ (a+2b)\vdots d\\ (2b-1)\vdots d\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4d\vdots d\\ (2b-1)\vdots d\end{cases}$$

Do $(2b-1)\vdots d$ và $2b-1$ là số lẻ nên $d$ lẻ.

Mặt khác $\begin{cases}4b\vdots d\\ (2b-1)\vdots d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4b\vdots d\\ (4b-2)\vdots d\end{cases}\Rightarrow 2\vdots d$ nên $d=1$

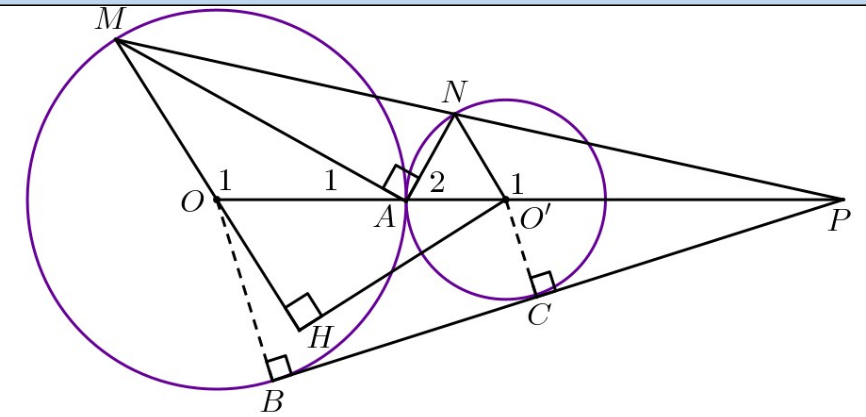
Vậy $|a-2b|$ là số chính phương.

**Câu 4. (5.0 điểm)** Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ tiếp xúc ngoài tại $A$ sao cho $R>R'$. Vẽ dây của đường $AM$ của đường tròn $(O)$ và dây $AN$ của đường tròn $(O')$ sao cho tam giác $AMN$ vuông tại $A$. Gọi $BC$ là một tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn $(O)$ và $(O')$ trong đó $B\in(O),C\in(O')$.

a) Chứng minh rằng $OM//O'N$.

b) Chứng minh rằng ba đường thẳng $MN,BC$ và $OO'$ đồng quy.

c) Xác định vị trí các điểm $M$ và $N$ để tứ giác $MNO'O$ có diện tích lớn nhất và tìm diện tích lớn nhất đó.




a) (1,5 điểm)

Ta có: $\widehat{O_1}=180^\circ-2\widehat{A_1}$ (do $\Delta OAM$ cân tại $O$).

$\widehat{O'_1}=2\widehat{A_2}=2\left(90^\circ-\widehat{A_1}\right)=180^\circ-2\widehat{A_1}$ (do $\Delta O'AN$ cân tại $O'$ và $\widehat{A_1}+\widehat{A_2}=90^\circ$)

Do đó $\widehat{O_1}=\widehat{O'_1}$ hay $OM//O'N$

b) (1,5 điểm)

| | | |
|---|---|---|
| | Gọi $P$ là giao điểm của $MN$ và $OO'$. Ta có: $\frac{PO'}{PO}=\frac{O'N}{OM}=\frac{R'}{R}$<br>Gọi $P'$ là giao điểm của $BC$ và $OO'$.<br>Vì $OB//O'C$ nên $\frac{P'O'}{P'O}=\frac{O'C}{OB}=\frac{R'}{R}$<br>Suy ra $\frac{PO'}{PO}=\frac{P'O'}{P'O}$. Do đó $P\equiv P'$.<br>Vậy ba đường thẳng $MN, BC$ và $OO'$ đồng quy. | |
| | c) (1,5 điểm)<br>Gọi $H$ là hình chiếu của $O'$ trên $OM$<br>Do $MNO'O$ là hình thang nên $S=\frac{(OM+O'N)\cdot O'H}{2}$<br>$S=\frac{R+R'}{2}\cdot O'H\le\frac{R+R'}{2}\cdot OO'=\frac{(R+R')^2}{2}$ (do $OO'=R+R'$)<br>Vậy tứ giác $MNO'O$ có diện tích lớn nhất là $\frac{(R+R')^2}{2}$ khi và chỉ khi $H\equiv O\Leftrightarrow OM\perp OO', O'N\perp OO'$. | |
| **Câu 5. (3 điểm)**<br>Cho $a,b,c$ là các số thực không âm, không có hai số nào cùng bằng 0. Chứng minh rằng:<br>$$\frac{a\sqrt{a^2+3bc}}{b+c}+\frac{b\sqrt{b^2+3ca}}{c+a}+\frac{c\sqrt{c^2+3ab}}{a+b}\ge a+b+c$$<br>Dấu đẳng thức xảy ra khi nào? | | |
| | Áp dụng BĐT AM-GM ta có:<br>$$\frac{a\sqrt{a^2+3bc}}{b+c}=\frac{a(a^2+3bc)}{\sqrt{(b+c)^2(a^2+3bc)}}\ge\frac{2a(a^2+3bc)}{(b+c)^2+(a^2+3bc)}=\frac{2a^3+6abc}{S+5bc}$$<br>Trong đó $S=a^2+b^2+c^2$<br>Suy ra $\frac{2a^3+6abc}{S+5bc}-a\ge\frac{a^3+abc-a(b^2+c^2)}{S+5bc}$<br>Ta sẽ chứng minh BĐT $AX+BY+CZ=0$ trong đó<br>$A=\frac{1}{S+5bc}, B=\frac{1}{S+5ca}, C=\frac{1}{S+5ab}$<br>$X=a^3+abc-a(b^2+c^2), Y=b^3+abc-b(c^2+a^2)$,<br>$Z=c^3+abc-c(a^2+b^2)$<br>Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c$. Khi đó $A\ge B\ge C$; | |

| | | |
|---|---|---|
| | $X = a\left(a^2 - b^2\right) + ac(b - c) \geq 0$; $Z = c\left(c^2 - b^2\right) + ac(b - a) \leq 0$<br>$X + Y + Z = a(a - b)(a - c) + b(b - a)(b - c) + c(c - a)(c - b)$<br>$= c(a - c) + (a - b)\left[a(a - c) - b(b - c)\right] \geq 0$<br>(Nếu có thí sinh nào ghi “áp dụng BĐT Schur” ta có: $X + Y + Z \geq 0$ mà không chứng minh dòng này vẫn cho đủ 0,5 điểm)<br>Ta có: $AX + BY + CZ \geq BX + BY + BZ = B(X + Y + Z) \geq 0$<br>Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = 0, b = c$; $b = 0, c = a; c = 0, a = b$<br>(nếu thí sinh chỉ ghi đúng một phần nào đó trong mục này thì cho 0,25 điểm) | |

**-----------Hết-----------**

**<u>Chú ý</u>:**
**- Các cách làm khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa, điểm thành phần giám khảo tự phân chia trên cơ sở tham khảo điểm thành phần của đáp án.**
**- Các trường hợp khác tổ chấm thống nhất phương án chấm.**

| | |
|---|---|
| UBND TP. TAM KỲ<br>PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO<br>**Đề chính thức** | **KỲ KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI LỚP 9 LẦN 2**<br>**NĂM HỌC 2023 - 2024**<br>**MÔN TOÁN**<br>**Ngày 02 tháng 11 năm 2023**<br>**Thời gian 120 phút**(*không kể thời gian phát đề*) |

**Câu 1.** *(4.0 điểm)*

a) Tính giá trị của $P = (\sqrt{10} + \sqrt{11} + \sqrt{12})(\sqrt{10} + \sqrt{11} - \sqrt{12})(\sqrt{10} - \sqrt{11} + \sqrt{12})(\sqrt{10} - \sqrt{11} - \sqrt{12})$.

b) Cho các số thực $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $\sqrt{2ab} = a - 4b$. Tính $Q = \dfrac{\sqrt[3]{ab}\left(2024\sqrt[3]{a} - 2023\sqrt[3]{b}\right)}{\sqrt{2ab}}$.

**Câu 2.** *(4.0 điểm)*

a) Giải phương trình: $\sqrt{x - 7} + \sqrt{9 - x} = 3x^2 - 48x + 194$.

b) Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho điểm $B(-1; 2)$ và hai đường thẳng $(d_1): y = m^2x - m^4 + 2$ và $(d_2): y = \dfrac{m^2}{m^2 + 1}x + 2$ ($m$ là tham số thực khác 0). Gọi $A$ là giao điểm của $(d_1)$ và $(d_2)$; hai điểm $C, D$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $B$ và $A$ lên trục hoành. Tìm tất cả các giá trị của $m$ để diện tích $ABCD$ bằng $\dfrac{15}{2}$.

**Câu 3.** *(4.0 điểm)*

a) Một cặp số nguyên tố liên tiếp cách nhau 2 đơn vị được gọi là “cặp số nguyên tố sinh đôi”. Chứng minh rằng một cặp số gồm hai số nguyên tố lớn hơn 5 sinh đôi bất kì đều có dạng $(6m - 1, 6m + 1)$ với $m$ là số nguyên dương.

b) Cho hai số nguyên dương $a, b$ sao cho $\dfrac{a^2 - 4b + 1}{(a - 2b)(2b - 1)}$ là số nguyên. Chứng minh rằng $|a - 2b|$ là số chính phương.

**Câu 4.** *(5.0 điểm)* Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc ngoài tại $A$ sao cho $R > R'$. Vẽ dây $AM$ của đường tròn $(O)$ và dây $AN$ của đường tròn $(O')$ sao cho tam giác $AMN$ vuông tại $A$. Gọi $BC$ là một tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn $(O)$ và $(O')$ trong đó $B \in (O), C \in (O')$.

a) Chứng minh rằng $OM \parallel O'N$.

b) Chứng minh rằng ba đường thẳng $MN, BC$ và $OO'$ đồng quy.

c) Xác định vị trí các điểm $M$ và $N$ để tứ giác $MNO'O$ có diện tích lớn nhất và tìm diện tích lớn nhất đó.

**Câu 5.** *(3.0 điểm)*
Cho $a, b, c$ là các số thực không âm, không có hai số nào cùng bằng 0. Chứng minh rằng

$$\frac{a\sqrt{a^2 + 3bc}}{b + c} + \frac{b\sqrt{b^2 + 3ca}}{c + a} + \frac{c\sqrt{c^2 + 3ab}}{a + b} \geq a + b + c.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

===Hết===

*Lưu ý:* Thí sinh không được phép sử dụng tài liệu. Giám thị không được gợi ý gì thêm.

*Họ và tên thí sinh*.......................................................*Số báo danh*.........................

UBND THÀNH PHỐ TAM KỲ
**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**

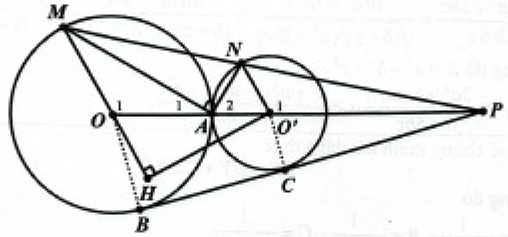
**KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI LỚP 9-LẦN 2**
**Năm học: 2023 – 2024**
*Ngày 02 tháng 11 năm 2023*
**Môn: TOÁN**

## HƯỚNG DẪN CHẤM

| Câu | Nội dung | Điểm |
|---|---|---|
| **1 (4.0 điểm)** | **a) (1.5 điểm)**<br>Ta có<br>$P=\left[\left(\sqrt{10}+\sqrt{11}\right)^2-\left(\sqrt{12}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{10}-\sqrt{11}\right)^2-\left(\sqrt{12}\right)^2\right]$ | 0.5 |
| | $=\left(9+2\sqrt{10}.\sqrt{11}\right)\left(9-2\sqrt{10}.\sqrt{11}\right)$ | 0.5 |
| | $=9^2-\left(2\sqrt{10}.\sqrt{11}\right)^2=81-440=-359$. | 0.5 |
| | **b) (2.5 điểm)**<br>Ta có<br>$\sqrt{2ab}=a-4b \Leftrightarrow \sqrt{2ab}+2b=a-2b$<br>$\Leftrightarrow \sqrt{2b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{2b}\right)=\left(\sqrt{a}-\sqrt{2b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{2b}\right)$. | 0.5 |
| | Vì $a>0, b>0$ nên $\sqrt{a}+\sqrt{2b}>0$. | 0.5 |
| | Suy ra $\sqrt{2b}=\sqrt{a}-\sqrt{2b} \Leftrightarrow \sqrt{a}=2\sqrt{2b} \Leftrightarrow a=8b$. | 0.5 |
| | Thay $a=8b$ vào biểu thức $Q$ ta được<br>$Q=\dfrac{\sqrt[3]{8b^3}.\left(2024\sqrt[3]{8b}-2023\sqrt[3]{b}\right)}{\sqrt{16b^2}}=\dfrac{2\sqrt[3]{b^3}\left(4048\sqrt[3]{b}-2023\sqrt[3]{b}\right)}{4b}$ | 0.5 |
| | $=\dfrac{2\sqrt[3]{b^2}.2025\sqrt[3]{b}}{4b}=\dfrac{2.2025b}{4b}=\dfrac{2025}{2}$. | 0.5 |
| **2 (4.0 điểm)** | **a) (2.0 điểm)**<br>Điều kiện: $7 \le x \le 9$ | 0.25 |
| | Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có<br>$\sqrt{x-7}+\sqrt{9-x}=\sqrt{(x-7).1}+\sqrt{(9-x).1} \le \dfrac{(x-7)+1}{2}+\dfrac{(9-x)+1}{2}=2$.<br>***(Đánh giá đúng ở mỗi căn thức được 0.5 điểm)*** | 1.0 |
| | Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x-7=1 \\ 9-x=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=8$. | 0.25 |
| | Mặt khác, ta có $3x^2-48x+194=3(x-8)^2+2 \ge 2$. | 0.25 |



| | | |
|---|---|---|
| | Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $(x-8)^2=0 \Leftrightarrow x=8$.<br>Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=8$. | 0.25 |
| | ***Nếu vế trái của phương trình, thí sinh đánh giá bằng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz thì vẫn cho điểm tương tự như trên.***<br>$\sqrt{x-7}+\sqrt{9-x} \le \sqrt{(1+1)(x-7+9-x)}=2$.<br>Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{x-7}=\sqrt{9-x} \Leftrightarrow x=8$. | |
| | **b) (2.0 điểm)**<br>Phương trình hoành độ giao điểm của $(d_1)$ và $(d_2)$ là<br>$\dfrac{m^2}{m^2+1}x+2=m^2x-m^4+2 \Leftrightarrow x=m^2+1$.<br>Suy ra $A(m^2+1;m^2+2)$. | 0.5 |
| | Vì $C,D$ lần lượt là hình chiếu của $B$ và $A$ lên trục hoành nên ta có<br>$BC=2, AD=m^2+2, CD=m^2+2$. | 0.5 |
| | $S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}.CD.(BC+AD)=\dfrac{1}{2}(m^2+2)(2+m^2+2)$<br>$=\dfrac{1}{2}(m^2+2)(m^2+4)=\dfrac{1}{2}(m^4+6m^2+8)$. | 0.5 |
| | $S_{ABCD}=\dfrac{15}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(m^4+6m^2+8)=\dfrac{15}{2} \Leftrightarrow m^4+6m^2-7=0$.<br>Giải phương trình trùng phương này, tìm được $m=\pm 1$. | 0.5 |
| **3 (4.0 điểm)** | **a) (2.0 điểm)**<br>Giả sử $(p,p+2)$ là một cặp số nguyên tố sinh đôi với $p>5$.<br>• Nếu $p$ có dạng $6m+1$ (với $m \in \mathbb{Z}^+$) thì $p+2=3(2m+1)$ là hợp số. Đây là điều mâu thuẫn. | 1.0 |
| | • Nếu $p$ có dạng $6m-1$ (với $m \in \mathbb{Z}^+$) thì $p+2=6m+1$.<br>Vậy ta hoàn thành chứng minh. | 1.0 |
| | **b) (2.0 điểm)**<br>Do cho $\dfrac{a^2-4b+1}{(a-2b)(2b-1)}$ là số nguyên nên $a^2-4b+1$ chia hết cho $(a-2b)(2b-1)$, tức là tồn tại số nguyên $k$ sao cho<br>$a^2-4b+1=k(a-2b)(2b-1)$ | 0.5 |
| | Đẳng thức này tương đương với<br>$a^2-4b^2+4b^2-4b+1=k(a-2b)(2b-1)$<br>$\Leftrightarrow (2b-1)^2=(a-2b)[k(2b-1)-(a+2b)]$ | 0.5 |

| | | |
|---|---|---|
| | Đặt $(a-2b, k(2b-1)-(a+2b)) = d$. Khi đó<br>$\begin{cases}(a-2b)\vdots d\\ [k(2b-1)-(a+2b)]\vdots d\\ (2b-1)\vdots d\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(a-2b)\vdots d\\ (a+2b)\vdots d\\ (2b-1)\vdots d\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}4b\vdots d\\ (2b-1)\vdots d\end{cases}$ | 0.5 |
| | Do $(2b-1)\vdots d$ và $2b-1$ là số lẻ nên $d$ lẻ.<br>Mặt khác $\begin{cases}4b\vdots d\\ (2b-1)\vdots d\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}4b\vdots d\\ (4b-2)\vdots d\end{cases} \Rightarrow 2\vdots d$ nên $d=1$.<br>Vậy $\lvert a-2b\rvert$ là số chính phương. | 0.5 |
| **4 (5.0 điểm)** | Vẽ hình đúng đến câu a) được ***0.5 điểm***<br><br> | 0.5 |
| | **a) *(1.5 điểm)***<br>Ta có<br>$\widehat{O_1} = 180^0 - 2\widehat{A_1}$ (do tam giác $OAM$ cân tại $O$). | 0.5 |
| | $\widehat{O'_1} = 2\widehat{A_2} = 2(90^0 - \widehat{A_1}) = 180^0 - 2\widehat{A_1}$ (do tam giác $O'AN$ cân tại $O'$ và $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 90^0$). | 0.5 |
| | Do đó $\widehat{O_1} = \widehat{O'_1}$ hay $OM \parallel O'N$. | 0.5 |
| | **b) *(1.5 điểm)***<br>Gọi $P$ là giao điểm của $MN$ và $OO'$. Ta có<br>$$\frac{PO'}{PO} = \frac{O'N}{OM} = \frac{R'}{R}.$$ | 0.5 |
| | Gọi $P'$ là giao điểm của $BC$ và $OO'$.<br>Vì $OB \parallel O'C$ nên<br>$$\frac{P'O'}{P'O} = \frac{O'C}{OB} = \frac{R'}{R}.$$ | 0.5 |
| | Suy ra $\frac{PO'}{PO} = \frac{P'O'}{P'O}$. Do đó $P = P'$.<br>Vậy ba đường thẳng $MN, BC$ và $OO'$ đồng quy. | 0.5 |

| | | |
|---|---|---|
| | **c) *(1.5 điểm)***<br>Gọi $H$ là hình chiếu của $O'$ trên $OM$.<br>Do $MNO'O$ là hình thang nên $S = \frac{(OM + O'N).O'H}{2}$. | 0.5 |
| | $S = \frac{R+R'}{2}.O'H \le \frac{R+R'}{2}.OO' = \frac{(R+R')^2}{2}$ (do $OO' = R + R'$). | 0.5 |
| | Vậy tứ giác $MNO'O$ có diện tích lớn nhất là $\frac{(R+R')^2}{2}$ khi và chỉ khi<br>$H \equiv O \Leftrightarrow OM \perp OO', O'N \perp OO'$. | 0.5 |
| **5 (3.0 điểm)** | Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có<br>$\frac{a\sqrt{a^2+3bc}}{b+c} = \frac{a(a^2+3bc)}{\sqrt{(b+c)^2(a^2+3bc)}} \ge \frac{2a(a^2+3bc)}{(b+c)^2+(a^2+3bc)} = \frac{2a^3+6abc}{S+5bc}$<br>trong đó $S = a^2+b^2+c^2$.<br>Suy ra $\frac{2a^3+6abc}{S+5bc} - a \ge \frac{a^3+abc-a(b^2+c^2)}{S+5bc}$. | 0.5 |
| | Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức<br>$$AX + BY + CZ \ge 0$$<br>trong đó<br>$A = \frac{1}{S+5bc}, B = \frac{1}{S+5ca}, C = \frac{1}{S+5ab}$<br>$X = a^3+abc-a(b^2+c^2), Y = b^3+abc-b(c^2+a^2), Z = c^3+abc-c(a^2+b^2)$ | 0.5 |
| | Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c$. Khi đó<br>$A \ge B \ge C$; $X = a(a^2-b^2)+ac(b-c) \ge 0$; $Z = c(c^2-b^2)+ac(b-a) \le 0$. | 0.5 |
| | $X+Y+Z = a(a-b)(a-c)+b(b-a)(b-c)+c(c-a)(c-b)$<br>$= c(a-c)(b-c)+(a-b)[a(a-c)-b(b-c)] \ge 0$.<br>***(Nếu có thí sinh nào ghi "áp dụng bất đẳng thức Schur" ta có $X+Y+Z \ge 0$" mà không chứng minh dòng này vẫn cho đủ 0.5 điểm).*** | 0.5 |
| | Ta có $AX + BY + CZ \ge BX + BY + BZ = B(X+Y+Z) \ge 0$. | 0.5 |
| | Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi<br>$a=b=c$ hoặc $a=0, b=c$; $b=0, c=a$; $c=0, a=b$.<br>***(Nếu thí sinh chỉ ghi đúng một phần nào đó trong mục này thì cho 0.25 điểm).*** | 0.5 |