

Mở đầu

I. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI.

Một trong những hướng quan trọng của sự phát triển phương pháp hiện đại trong dạy học toán là xây dựng các phương tiện dạy học và chỉ dẫn phương pháp sử dụng chúng trong các giờ toán, nhằm hình thành ở học sinh các hình ảnh cảm tính của đối tượng nghiên cứu, gợi cho học sinh các tình huống có vấn đề, tạo nên sự hứng thú trong các giờ học toán.

Trong thời gian gần đây dưới ảnh hưởng của sự tiến bộ khoa học kỹ thuật và sự phát triển lý luận dạy học, nhiều dạng phương tiện dạy học đã xuất hiện ở trường phổ thông. Nó không chỉ là nguồn kiến thức, cho hình ảnh minh họa mà còn là phương tiện tổ chức, điều khiển hoạt động nhận thức của học sinh, là phương tiện tổ chức khoa học lao động sư phạm của giáo viên và học sinh.

Thực tế dạy học ở nhà trường Trung học phổ thông nước ta cho thấy học sinh thường gặp không ít khó khăn khi lĩnh hội khái niệm hàm số mũ, hàm số logarit, nhiều học sinh có thể nhớ các biểu thức, học thuộc khái niệm, nhưng không giải thích được đầy đủ ý nghĩa và bản chất của nó, từ đó dẫn tới việc vận dụng một cách máy móc, hoặc không biết hướng vận dụng. Do vậy việc sử dụng các phương tiện trực quan vào quá trình dạy học là việc làm cần thiết và phù hợp với xu thế đổi mới phương pháp dạy học hiện nay ở trường phổ thông.

Từ nhận thức ấy tôi chọn đề tài của mình với tiêu đề:

Sử dụng phương tiện trực quan trong kỹ thuật dạy học tạo tình huống gợi vấn đề nhằm mục đích phát hiện các tính chất, định lý, mệnh đề và tìm lời giải cho các bài toán phân hàm số mũ, logarit.

II. MỤC ĐÍCH NGHIÊN CỨU

xác định một số dạng phương tiện dạy học trực quan cần, thiết *trong việc phát hiện các tính chất, định lý và tìm lời giải cho các bài toán phân hàm số mũ, logarit.*

III. NHIỆM VỤ NGHIÊN CỨU

Hình thành các yêu cầu sư phạm của các dạng phương tiện trực quan trong dạy học phân hàm số mũ, hàm số logarit và thể hiện cụ thể qua một số dạng phương tiện trực quan tương ứng với các hoạt động chủ yếu trong dạy học

IV. GIẢ THUYẾT KHOA HỌC

Trên cơ sở chương trình sách giáo khoa cải cách chúng tôi cho rằng nếu xây dựng được các phương tiện dạy học trực quan và có chỉ dẫn phương pháp sử dụng hợp lý thì sẽ góp phần nâng cao chất lượng dạy học

V. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

1. Nghiên cứu lý luận

Nghiên cứu các tài liệu về cơ sở tâm lý học, giáo dục học, phương pháp dạy học toán và sách giáo khoa, sách giáo viên, sách tham khảo có liên quan đến đề tài nghiên cứu.

Nghiên cứu các bài báo về khoa học toán học, các luận văn, luận án, các công trình nghiên cứu liên quan trực tiếp đến đề tài.

2. Quan sát

Dự giờ, quan sát việc dạy của giáo viên và việc học của học sinh về hàm số mũ, hàm số logarit có sử dụng các phương tiện dạy học trực quan.

Phân tích những khó khăn và sai lầm của học sinh khi học phần hàm số mũ, hàm số logarit làm cơ sở cho việc xây dựng và sử dụng các phương tiện dạy học trực quan.

Chương 1

Cơ sở lý luận và thực tiễn.

1. Tính hiệu quả của quá trình học tập nhờ sử dụng phương tiện trực quan.
2. Đặc điểm yêu cầu và thực tiễn dạy học phần hàm số mũ, hàm số logarit ở trường phổ thông.
3. Kết luận chương 1

Chương 2

1. *Sử dụng phương tiện trực quan trong kỹ thuật dạy học tạo tình huống gợi vấn đề nhằm mục đích phát hiện các tính chất, định lý, mệnh đề và tìm lời giải cho các bài toán phần hàm số mũ, logarit.*
2. Thực nghiệm sư phạm
3. Kết luận chương 2.

Chương 1

CƠ SỞ LÝ LUẬN VÀ THỰC TIỄN.

I. TÍNH HIỆU QUẢ CỦA QUÁ TRÌNH HỌC TẬP NHỜ SỬ DỤNG PHƯƠNG TIỆN TRỰC QUAN.

Khi xây dựng và sử dụng đúng đắn các phương tiện trực quan phục vụ cho việc dạy học theo một chủ đề thì vừa đạt được mục đích dạy học nói chung, vừa đạt được mục đích dạy học một chủ đề nói riêng, đồng thời phải góp phần nâng cao hiệu quả của quá trình dạy học. Việc phân tích đánh giá hiệu quả của quá trình dạy học theo một chủ đề, không chỉ thể hiện ở việc đánh giá kết quả học tập nhất thời của học sinh mà còn phải xem xét việc lựa chọn phương tiện và cả quá trình sử dụng phương tiện của thầy cô và trò ở lớp. Nếu đã lựa chọn phương tiện dạy một cách thích hợp thì khi sử dụng nó có thể khai thác được các chức năng của phương tiện nhằm đạt được yêu cầu đặt ra cho nó và như thế sẽ góp phần nâng cao hiệu quả dạy học.

1. Các yêu cầu của việc lựa chọn và sử dụng phương tiện trong quá trình dạy học

a) Thông tin được trình bày trong phương tiện dạy học phải hướng vào mục đích giáo dục toàn diện. Những thông tin này vừa đảm bảo tính khoa học, phù hợp với chương trình môn học tạo điều kiện hình thành có hiệu quả những tri thức cơ bản phát triển năng lực nhận thức và khả năng công tác tự lập.

b) Phương tiện dạy học phải kích thích và tạo điều kiện sử dụng những phương pháp dạy học đa dạng và có hiệu quả.

c) Phương tiện dạy học phải đảm bảo việc tổ chức hợp lý lao động sư phạm của giáo viên và học sinh, các phương tiện phải hấp dẫn, phù hợp về hình dáng, kích thước...

d) Phương tiện dạy học phải đảm bảo những yêu cầu về kinh tế, kỹ thuật đòi hỏi phương tiện dạy học phải có chất lượng phản ánh cao.

2. Hiệu quả của quá trình học tập nhờ sử dụng phương tiện trực quan

Kết quả của việc giảng dạy khi sử dụng phương tiện trực quan phụ thuộc vào việc lựa chọn đúng đắn các phương tiện trực quan và việc sử dụng đúng đắn các phương tiện đó trong quá trình dạy học toán

Thực tiễn dạy học cho thấy rằng nếu có ý thức và kỹ năng sử dụng các phương tiện trực quan một cách hợp lý thì sẽ góp phần:

- Tạo điều kiện thuận lợi cho hoạt động dạy học.
- Cung cấp cho học sinh những kiến thức bền vững, chính xác trong dạng ngắn gọn, rèn luyện những kỹ năng, kỹ xảo cần thiết cho lao động sản xuất và đời sống

Có thể nói rằng: *Giảng dạy trực quan có nghĩa là giảng dạy dựa trên các hình tượng hiểu biết của học sinh.*

Vận dụng đúng đắn nguyên tắc trực quan trong quá trình giảng dạy là đảm bảo sự chuyển từ “*Trực quan sinh động sang tư duy trừu tượng*”. Do đặc thù của môn toán đòi hỏi phải đạt tới một trình độ trừu tượng, khái quát cao hơn so với các môn học khác. Vì thế, nếu sử dụng hợp lý các phương tiện trực quan sẽ góp phần vào việc phát triển tư duy trừu tượng, nâng cao hiệu quả của quá trình dạy và học.

II. ĐẶC ĐIỂM, YÊU CẦU VÀ THỰC TIỄN DẠY HỌC PHẦN HÀM SỐ MŨ, HÀM SỐ LOGARÍT Ở TRƯỜNG PHỔ THÔNG

Xuất phát từ mục tiêu đào tạo của trường Trung học phổ thông chúng tôi phân tích đặc điểm, yêu cầu dạy học phần hàm số mũ, hàm số logarit nhằm xác định các nhiệm vụ và yêu cầu sư phạm của phương tiện trực quan trong quá trình dạy và học.

1. Đặc điểm, yêu cầu dạy học phần hàm số mũ, hàm số logarit

Mục đích, nội dung, phương pháp, phương tiện và hình thức dạy học vốn gắn bó chặt chẽ với nhau, trong đó mục đích dạy học giữ vai trò chi phối, quyết định sự liên hệ giữa các thành phần được thể hiện ở các đặc điểm sau.

a) Về phương diện mục đích dạy học:

Dự thảo chương trình cải cách môn toán đã chỉ rõ: *Cung cấp cho học sinh một hệ thống vững chắc những tri thức, kỹ năng phương pháp toán phổ thông, cơ bản, hiện đại, tương đối hoàn chỉnh, thiết thực, sát thực tế Việt Nam, theo tinh thần giáo dục kỹ thuật tổng hợp* Khi dạy học phân hàm số mũ, hàm số logarit có thể, thể hiện tinh thần giáo dục kỹ thuật tổng hợp ở những điểm sau:

Làm cho học sinh nắm vững chắc những khái niệm về hàm số mũ, hàm số logarit, các tính chất, định lý, các dạng đồ thị, các phương trình, bất phương trình mũ, logarit.

Giúp học sinh thấy được mối liên hệ giữa hàm số mũ với hàm số logarit, chỉ ra các ứng dụng thực tế của hàm số mũ và hàm số logarit (trong các ngành kỹ thuật, trong hóa học, trong âm nhạc) và giải các bài toán thích hợp.

Rèn luyện những kỹ năng, kỹ xảo cần thiết cho lao động sản xuất và đời sống. Thông qua việc giảng dạy phân hàm số mũ, hàm số logarit theo tinh thần giáo dục kỹ thuật tổng hợp sẽ làm cho khả năng tư duy, nhận thức của học sinh phát triển cao hơn. Đồng thời góp phần hướng nghiệp cho các em, bởi vì một trong những nguyên tắc hướng nghiệp là “*Bảo đảm tính chất giáo dục kỹ thuật tổng hợp trong hướng nghiệp*”.

Việc dạy học phân hàm số mũ, hàm số logarit có mục đích chủ yếu là cung cấp cho học sinh các khái niệm về hàm số mũ, hàm số logarit, các phương pháp suy đồ thị, giải các phương trình, bất phương trình, hệ phương trình theo tinh thần giáo dục tổng hợp. Các phương tiện dạy học trực quan phải thể hiện được đặc điểm này của việc dạy học phân hàm số mũ, hàm số logarit.

b) Về phương diện nội dung dạy học:

Nội dung chương trình phân hàm số mũ, hàm số logarit được xây dựng bằng phương pháp tổng hợp, nhằm cung cấp cho học sinh các kiến thức cơ bản về hàm số mũ, hàm số ngược, hàm số logarit với những nội dung chính sau:

- Mở rộng khái niệm về số mũ của các lũy thừa.
- Hàm số mũ, các tính chất hàm số mũ, khảo sát và vẽ đồ thị hàm số mũ, so sánh các dạng lũy thừa, tìm giới hạn của hàm số mũ, các phép suy đồ thị, phương trình, bất phương trình, hệ phương trình và hệ bất phương trình mũ.

Trong quá trình giảng dạy phân hàm số mũ, hàm số logarit về mặt phương diện nội dung dạy học, cần đạt mức độ và yêu cầu sau:

** Về mặt lý thuyết:*

Xây dựng khái niệm hàm số mũ $y = a^x$ ($a > 0$) với tập xác định là toàn bộ $\mathbb{R}$, đó là một hàm số liên tục, đồng biến khi $a > 1$ và nghịch biến khi $0 < a < 1$ và luôn luôn có giá trị dương...

Việc học hàm số mũ có tác dụng quan trọng là chuẩn bị cho việc học hàm số logarit, để dẫn tới logarit là một vấn đề có ý nghĩa về mặt thực tiễn.

Bằng việc sử dụng các phương tiện trực quan hợp lý khi giảng dạy giáo viên phải làm cho học sinh thấy được ý nghĩa lý thuyết và thực tế, tác dụng giáo dục của toàn chương, nắm vững khái niệm, tính chất, các định lý về logarit và ý nghĩa của định lý đó. Trên cơ sở đó học sinh mới có ý thức trong việc rèn luyện kỹ năng sử dụng logarit vào việc giải các bài toán và thực tiễn.

** Về phương diện bài tập:*

Hệ thống hóa bài tập trong sách giáo khoa phần hàm số mũ, hàm số logarit được lựa chọn nhằm mục đích: củng cố kiến thức cơ bản, rèn luyện tư duy lôgic, khả năng trừu tượng hóa và bổ sung một số kiến thức không đề cập trong sách giáo khoa.

Bằng các hình ảnh minh họa trực quan cần rèn luyện cho học sinh đạt được những kỹ năng sau đây: Giúp học sinh biết lập luận có căn cứ, trình bày lời giải một cách mạch lạc, biết vận dụng công thức một cách sáng tạo khi giải các bài toán về phương trình, bất phương trình, hệ phương trình mũ và logarit.

Biết khai thác các ứng dụng của hàm mũ và hàm số logarit vào thực tiễn, đồng thời rèn luyện các phẩm chất tư duy linh hoạt, độc lập, sáng tạo, tự kiểm tra đánh giá...

c) Về phương diện phương pháp dạy học:

Tất cả các tính chất của hàm số mũ, hàm số logarit không chứng minh vì phép chứng minh phần lớn vượt ra ngoài chương trình toán bậc phổ thông; vì thế các em không khỏi băn khoăn ngờ vực, thậm chí thiếu niềm tin vào tính đúng đắn của nội dung các tính chất.

Điều đó sẽ cản trở học sinh lĩnh hội chúng một cách tự giác, học sinh sẽ thiếu cơ sở để tiến hành lập luận có căn cứ.

Nếu thừa nhận rằng dạy toán là dạy “*hoạt động toán học*” theo cách nói của A.A. Xtoliar, thì theo ông giai đoạn đầu tiên, giai đoạn tích lũy các sự kiện nhờ quan sát, quy nạp, tương tự, khái quát hóa là cơ sở cho giai đoạn tiếp theo.

Việc giảng dạy phần hàm số mũ, hàm số logarit cần coi trọng đặc biệt giai đoạn đầu. Có thể giải quyết vấn đề này bằng việc sử dụng hợp lý các phương tiện trực quan, đồng thời làm chỗ dựa vững chắc cho việc hình thành các khái niệm và tính chất, lập luận có căn cứ.

Tóm lại, bằng phương pháp trực quan, các phương tiện trực quan khi dạy học phần hàm số mũ, hàm số logarit có thể tạo điều kiện thuận lợi cho hoạt động dạy học, kích thích quá trình học tập, cung cấp cho học sinh những kiến thức bền vững, chính xác.

Sự phân tích các đặc điểm nêu trên cho phép kết luận rằng:

Yêu cầu sư phạm của việc xây dựng và sử dụng phương tiện trực quan dùng cho việc dạy học phần hàm số mũ, hàm số logarit phải góp phần:

- Tạo ra các hình ảnh ban đầu, các biểu tượng về đối tượng nghiên cứu
- Tái tạo lại nội dung các vấn đề nghiên cứu trong dạng ngắn gọn, nhằm giúp học sinh củng cố ghi nhớ, áp dụng kiến thức.

- Các tính chất cơ bản của logarit được sử dụng khá nhiều về sau, để nhớ các tính chất này chúng ta nên dựa vào mô hình trực quan tượng trưng là đồ thị

hàm logarit, hầu hết các tính chất của hàm logarit đều được suy ra từ tính chất của hàm mũ. Trong phần này chúng tôi xây dựng thêm một số dạng bài toán được thể hiện trực quan, nhằm củng cố thêm các tính chất của logarit.

Đề học sinh hình dung được đồ thị của hai hàm số ngược nhau thì đối xứng qua đường phân giác thứ nhất:

Giáo viên yêu cầu học sinh: Lập bảng giá trị của hai hàm số $y = 2^x$ và $y = \log_2 x$. Qua bảng giá trị của hai hàm số cụ thể này học sinh sẽ thấy được một cách trực quan: Từ bảng giá trị của hàm số $y = a^x$ ta suy ra được bảng giá trị của hàm số $y = \log_a x$.

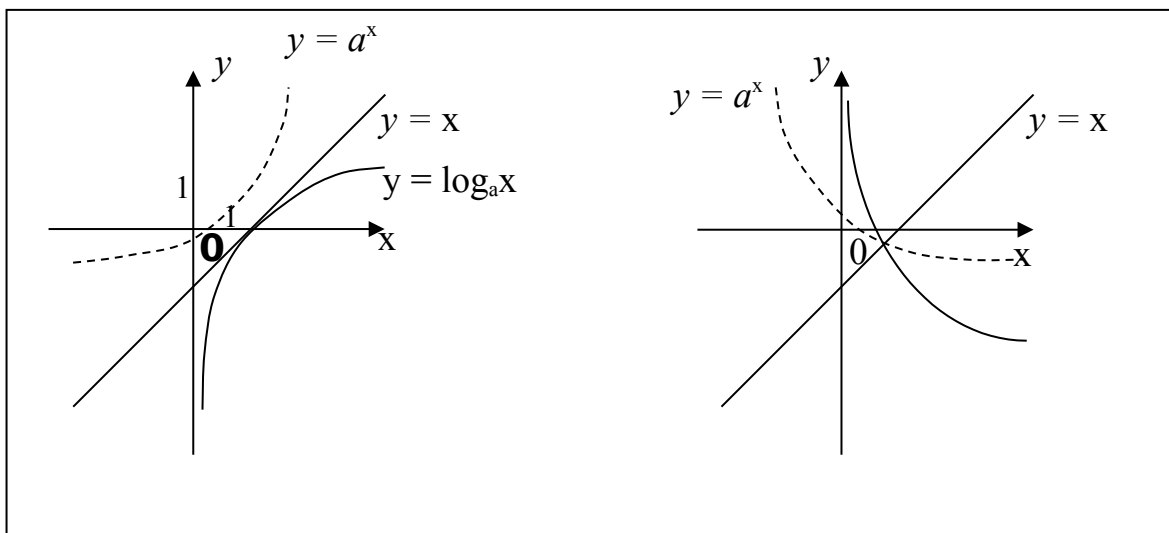
Đồ thị $y = \log_a x$ trong hệ trục tọa độ đề các vuông góc Oxy là đối xứng với đồ thị hàm số $y = a^x$ (qua đường phân giác thứ nhất).

$$a > 1$$

$$0 < a < 1$$

x	0	1	a	$+\infty$
y = $\log_a x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

x	0	a	1	$+\infty$
y = $\log_a x$	$+\infty$	0	1	$-\infty$



* Từ các mô hình trực quan là đồ thị hàm số $y = \log_a x$, giáo viên có thể nêu một số câu hỏi, chẳng hạn:

- Hãy nêu nhận xét về đồ thị của hàm $y = \log_a x$, có điểm gì chung và đặc biệt trong hai trường hợp $a > 0$ và $0 < a < 1$?

- Từ các tính chất đã biết của hàm số mũ có thể liên hệ được với những tính chất nào của hàm số logarit ?

Với câu hỏi thứ nhất học sinh sẽ phát hiện ra rằng đồ thị $y = \log_a x$ luôn luôn nằm phía phải trục Oy có nghĩa là:

1) Hàm số $y = \log_a x$ có tập xác định là $\mathbb{R}_+^*$ do đó ta cần nhớ rằng số âm không có logarit.

Sau khi học sinh đã phát hiện ra tính chất 1, để củng cố cho vững chắc tính chất này giáo viên có thể nêu ra các bài tập sau:

1. Vẽ đồ thị của hàm số $y = a^{\log_a x}$.
(Đa số học sinh đều vẽ đường thẳng $y = x$ và ít em nêu được điều kiện $x > 0$ để loại điểm gốc tọa độ và chỉ vẽ trong góc vuông thứ nhất)

2. Tìm giá trị thích hợp của x trong các trường hợp sau:

$$y = \log_{-3} x; y = \log_{0,5} x^2; y = \log_a(\log_a x); y = \log_a \sqrt{x} \quad (0 < a \neq 1)$$

Giáo viên tiếp tục gợi ý để học sinh phát hiện ra rằng đồ thị $y = \log_a x$ bao giờ cũng đi qua điểm $A(1;0)$ và $B(a;1)$.

$$2) \log_a 1 = 0; \log_a a = 1 \quad (0 < a \neq 1)$$

Để giúp học sinh nắm vững tính chất này giáo viên hướng dẫn học sinh hệ thống các bài tập sau:

1. Với giá trị nào của x thì biểu thức $\frac{1}{\log_a x}$ ($0 < a \neq 1$) có nghĩa.

(học sinh thường chỉ nêu ra được điều kiện $x > 0$ mà quên mất tính chất 2 là x còn phải khác 1 nữa)

2. Tính logarit sau: $\log_{100} 1$; $\log_1 1$; $\log_{0,5} 1$

3. Vẽ đồ thị $y = \log_x x$ ($0 < x \neq 1$)

Học sinh dễ dàng nhận ra: Đồ thị hàm số $y = \log_a x$ đi từ trái sang phải hướng đi lên với $a > 1$ và hướng đi xuống với $0 < a < 1$ ta có tính chất 3

$a > 1$ hàm số $y = \log_a x$ đồng biến ($x > 0$)

$0 < a < 1$ hàm số $y = \log_a x$ nghịch biến.

giáo có thể nêu ra hệ thống câu hỏi sau:

1. Các hàm số sau hàm số nào là đồng biến, hàm số nào nghịch biến ?
 $y = \log_2 x^2$; $y = \log_{0,5} 5$; $y = \log_{100}(x - 1)$
($x > 1$)

Đồ thị hàm số $y = a^x$ là một đường liên tục khi đối xứng qua đường phân giác thứ nhất thì vẫn là một đường liên tục, như vậy, hàm số $y = \log_a x$ liên tục trên tập xác định.

* Từ các mô hình trực quan sẽ giúp học sinh nhận ra rằng:

Trường hợp $a > 1$ khi $x > 1$ thì đồ thị $y = \log_a x$ nằm phía trên ox

$0 < x < 1$ thì đồ thị $y = \log_a x$ nằm phía dưới ox

Trường hợp $0 < a < 1$ thì ngược lại do đó ta có tính chất 4:

Nếu $a > 1$ thì $\log_a x > 0$ khi $x > 1$, $\log_a x < 0$ khi $0 < x < 1$

Nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a x > 0$ khi $0 < x < 1$, $\log_a x < 0$ khi $x > 1$

Để tính chất 4 rõ ràng trực quan hơn ta có sơ đồ tóm tắt sau:



Chú ý: Tính chất tròn được vận dụng nhiều trong các bài toán phương trình, bất phương trình dạng đặc biệt, để học sinh nắm được tính chất 4 và vận dụng trong các bài toán, giáo viên dẫn dắt học sinh làm ví dụ sau:

Giải phương trình: $\log_x(x+1) = \lg 1,5$

Gợi động cơ: với giá trị nào của x thì phương trình trên xác định:
(điều kiện $0 < x \neq 1$)

Từ tính chất tròn và với điều kiện trên giáo viên gợi ý để học sinh xét các trường hợp:

$$0 < x < 1: \log_x(x+1) < \log_x 1 = 0$$

Mặt khác: $\lg 1,5 > 0$ (theo tính chất 4) $\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

$$x > 1: \log_x(x+1) > \log_x x = 1 > \lg 1,5 \Rightarrow \text{phương trình vô nghiệm}$$

Vậy phương trình ban đầu vô nghiệm.

Có thể dẫn dắt bởi các câu hỏi sau để học sinh hiểu sâu bản chất của tính chất.

1. Số A phải như thế nào nếu $\log_2 A = -0,15$; $\log_{0,3} A = \frac{5}{6}$; $\log_{0,2} A = -2\frac{1}{2}$

2. Cơ số a phải có điều kiện như thế nào nếu:

$$\log_a 7 = 0,2; \log_a 5 = -\frac{1}{3} \quad ?$$

* Ngoài những tính chất đã nêu theo chương trình SGK .chúng tôi trình bày thêm một số tính chất để sau này học sinh dụng vào các bài toán bất phương trình và hệ phương trình logarít.

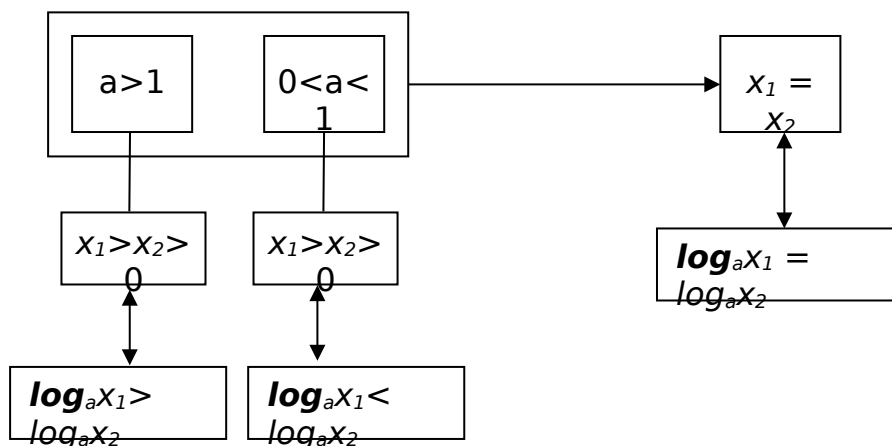
Các tính chất sau đây cũng có thể suy ra từ các tính chất của hàm số mũ.

$$\text{Nếu } a > 1: x_1 > x_2 > 0 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$$

$$\text{Nếu } 0 < a < 1: x_1 > x_2 > 0 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$$

$$\text{Đặc biệt } 0 < a \neq 1: x_1 = x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 = \log_a x_2$$

Bằng sơ đồ sau giúp học sinh hình dung rõ ràng hơn về tính chất.



*Việc học sinh nắm được tính chất và biết vận dụng vào những trường hợp cụ thể là việc làm rất cần thiết, để củng cố thêm điều này giáo viên nêu ra một số câu hỏi dưới dạng phiếu bài tập sau.

1. Số A và B phải như thế nào nếu:
 $\log_2 A < \log_2 B$; $\log_{0,5} A > \log_{0,5} B$; $\log_{0,3} A < \log_{0,3} B$
2. Cơ số a phải như thế nào nếu: $\log_a 4 < \log_a 2$ $\log_a 0,3 > \log_a 0,2$

KẾT LUẬN CHƯƠNG I

Từ sự phân tích cơ sở lý luận và thực tiễn dạy học toán ở trường phổ thông đối chiếu với những quan điểm đổi mới phương pháp dạy toán trong giai đoạn hiện nay, chúng tôi cho rằng:

Để giáo dục toán cho học sinh ở trường Trung học phổ thông qua dạy học toán cần quan tâm tới, việc tổ chức kỹ thuật dạy học tạo tính hướng gợi vấn đề trong dạy, sẽ phát huy được tính tự học, tự sáng tạo, tự giác tìm tòi kiến thức mới. Chương 2: Sử dụng phương tiện trực quan trong kỹ thuật dạy học tạo tính hướng gợi vấn đề nhằm mục đích phát hiện và tìm lời giải cho các bài toán phân hàm số mũ, logarit.

Chương 2:

SỬ DỤNG PHƯƠNG TIỆN TRỰC QUAN TRONG KỸ THUẬT DẠY HỌC TẠO TÍNH HƯỚNG GỢI VẤN ĐỀ NHẪM MỤC ĐÍCH PHÁT HIỆN VÀ TÌM LỜI GIẢI CHO CÁC BÀI TOÁN.

2.1. Sử dụng hợp lý các phương tiện trực quan nhằm trong kỹ thuật dạy học tạo tính hướng gợi vấn đề nhằm mục đích phát hiện và tìm lời giải cho các bài toán. Đồng thời rèn luyện cho học sinh ý thức và khả năng vận dụng các phương tiện trực quan trong quá trình giải toán phân hàm số mũ, hàm số logarit.

Khai thác các kết quả, khái niệm, định nghĩa, định lý trong việc giải các bài toán đặc biệt cần lưu ý tới các ký hiệu, tập hợp và logic có thể giúp hình dung rõ ràng về các định nghĩa, các khái niệm, các quy tắc, các định lý. Cùng với yêu cầu học sinh trình bày lời giải các bài tập một cách đầy đủ, cần cho học sinh làm quen với cách trình bày cô đọng và trực quan bằng cách sử dụng các ký hiệu hiện logic

Thực hiện mạch logic trên khi dạy học toán nói chung và dạy học phân hàm số mũ hàm số logarit nói riêng là bao hàm việc dạy sâu khái niệm, định nghĩa, định lý đồng thời thực hiện việc phát triển nhận thức toán học cho học sinh.

Theo quan điểm “*đặt bài toán cần giải quyết trong mối quan hệ tương quan với các khái niệm, định nghĩa, định lý đã biết*” Chính việc thực hiện quan điểm trên là phát triển được năng lực định hướng, năng lực huy động kiến thức cho học sinh, thông qua việc vận dụng các phương tiện trực quan, cụ thể ta xét các bài toán sau:

Bài toán : Cho các bất phương trình

$$\log_{\frac{1}{2}}^2 x + \log_{\frac{1}{4}} x^2 < 0 \quad (1)$$

$$x^2 + mx + m^2 + 6m < 0 \quad (2)$$

a. Giải bất phương trình (1)

b. Xác định m để mọi nghiệm của (1) là nghiệm của (2).

Giải: Việc nắm vững các tính chất, định lý và vận dụng chúng là rất cần thiết đối với việc giải bất phương trình (1).

Giáo viên yêu cầu học sinh: xác định tập xác định của bất phương trình ($x > 0$) rồi sử dụng các tính chất logarit đưa bất phương trình về dạng

$$\log_{\frac{1}{2}}^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x < 0 \quad \text{đặt} \quad \log_{\frac{1}{2}} x = t$$

$$\Leftrightarrow t^2 + t < 0 \Leftrightarrow -1 < t < 0. \quad \text{Do đó} \quad -1 < \log_{\frac{1}{2}} x < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2$$

Giáo viên cần nhấn mạnh cho học sinh hiểu rằng $\log_{\frac{1}{2}} x$ là hàm số có cơ số là nhỏ hơn 1 nên hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ nghịch biến.

Xác định m để mọi nghiệm của (1) là nghiệm của (2), giáo viên có thể nêu những câu hỏi sau:

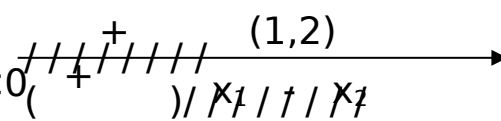
- Với $1 < x < 2$ đều làm cho $f(x) = x^2 + mx + m^2 + 6m < 0$ tức là $\forall x \in (1,2)$ đều thuộc vào tập nghiệm của bất phương trình $f(x) < 0$ có mối quan hệ như thế nào giữa $(1,2)$ với tập nghiệm đó ?

- Hãy biểu diễn $(1,2)$ cùng với các tập nghiệm của bất phương trình (2) lên trục số ?

Những câu hỏi này có tác dụng dẫn dắt học sinh đi đến cách giải: mọi nghiệm của (1) là nghiệm của (2) có nghĩa là cần tìm m để tập nghiệm của (2) chứa hết

khoảng $1 < x < 2$. Bằng sự biểu diễn trên trục số học sinh sẽ phát hiện dễ dàng hơn.

Bài toán tương đương với điều kiện

$$\begin{cases} 1+m+m^2+6 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+7m+1 < 0 \\ m^2+8m+4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-7-\sqrt{45}}{2} < m < -4+2\sqrt{3}$$


Bài toán : Giải bất phương trình:

$$\frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2x^2-3x+1}} > \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} (x+1)} \quad (1)$$

Đa số học sinh khi gặp bài toán này đều thấy khó khăn và phải phân chia rất nhiều trường hợp. Nếu các em để ý biểu diễn trên trục số thì bài toán sẽ đơn giản hơn rất nhiều. Bằng phương tiện trục quan là trục số

Giáo viên có thể khai thác các tính chất, định lý về logarit nhằm giúp học sinh phân chia các trường hợp cho chính xác. Cụ thể như sau:

Điều kiện của bất phương trình: $\begin{cases} -1 < x < \\ x > 1 (x \neq 0,) \end{cases}$

Đặt $A = \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2x^2-3x+1} > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{3}{2}$

$B = \log_{\frac{1}{3}} (x+1) > 0 \Leftrightarrow x+1 < 1 \Leftrightarrow x < 0$

Giáo viên gợi ý để học sinh biểu diễn miền nghiệm của A và B lên trục số

x	$-\infty$	-1	0	1/2	1	3/2	$+\infty$
A		-	+		+	-	
B		+	-		-	-	

Giáo viên yêu cầu học sinh: Từ bảng xét dấu trên hãy xét các trường hợp có thể xảy ra đối với bất phương trình trên.

- Trong khoảng $(-1,0)$ VT < 0, VP > 0 nên bất phương trình (1) không xảy ra.

- Trong khoảng $(0, \frac{1}{2})$ VT > 0, VP < 0, bất phương trình (1) đúng.

- Trong khoảng $(1, \frac{3}{2})$ VT > 0, VP < 0 bất phương trình (1) đúng trong miền xác định.

- Trong khoảng $(\frac{3}{2}, +\infty)$ VT < 0 , VP < 0 bất phương trình (1) tương đương với:

$$\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2x^2 - 3x + 1} < \log_{\frac{1}{3}} (x+1) \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 3x + 1} > x+1 > 0$$

$$\begin{cases} x > -1 \\ x^2 - 5x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \\ x > 5 \end{cases} \Leftrightarrow x > 5 \quad \text{vì điều kiện } x > \frac{3}{2}$$

Tóm lại nghiệm của bất phương trình $x \in (0, \frac{1}{2}) \cup (1, \frac{3}{2}) \cup (5, +\infty)$

Nhận xét:

Con đường giải toán theo định hướng trên đòi hỏi người giáo viên cần phải cung cấp cho học sinh những tri thức về phương pháp để học sinh tự tìm tòi, tự phát hiện vấn đề, tìm ra được hướng giải của một bài toán

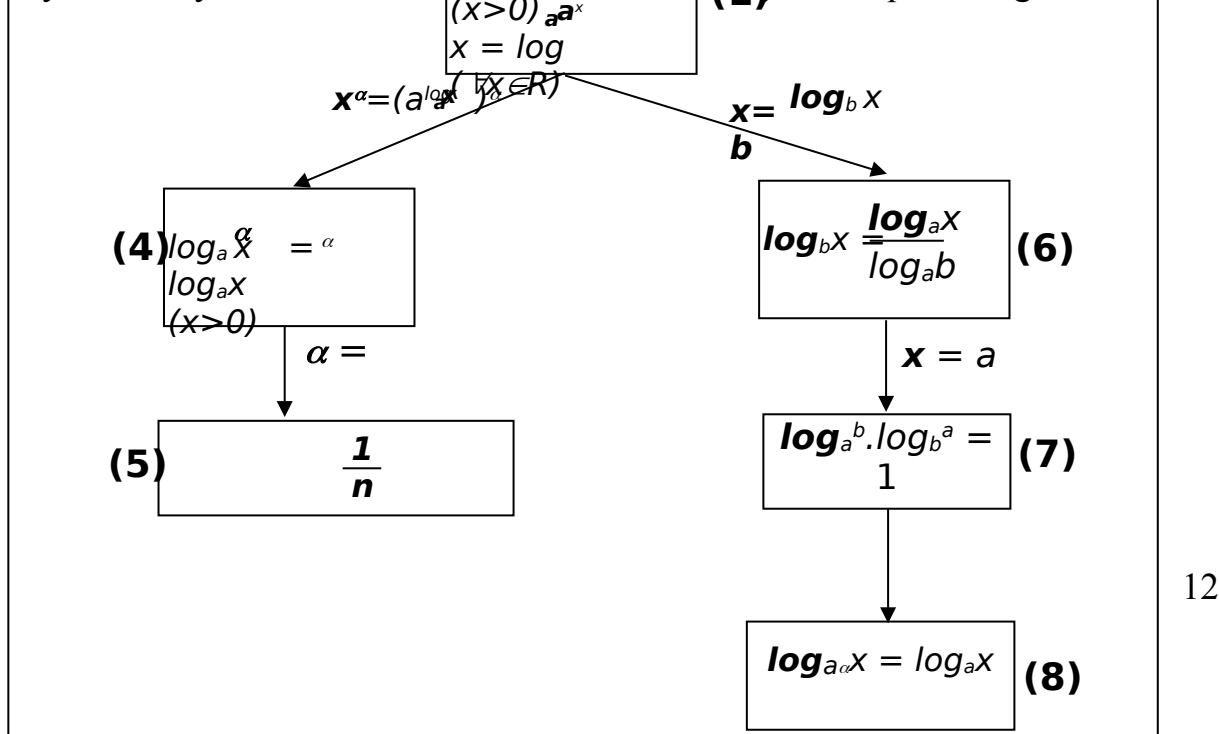
Hoàn toàn tương tự các bài toán trên giáo viên yêu cầu học sinh giải các bài toán sau:

2.2. Việc sử dụng các phương tiện trực quan có thể khai thác tiềm năng logic bên trong của vấn đề được trình bày trong SGK, nhờ đó học sinh nắm vững bản chất vấn đề, tạo điều kiện giải quyết vấn đề đó rõ ràng hơn, mạch lạc hơn.

Hầu hết các định lý về logarit đều được chứng minh dựa trên cơ sở định nghĩa của logarit. Vì vậy trong dạy học định lý, giáo viên cần giúp học sinh củng cố kiến thức, cần làm cho học sinh hiểu và nắm vững được một hệ thống kiến thức. Sau mỗi phần, mỗi chương cần tiến hành hệ thống hóa các định lý, chú ý

mối liên hệ giữa các định lý có thể là mối liên hệ chung, riêng: Một định lý có thể là một trường hợp mở rộng hay đặc biệt của một định lý nào đó đã biết. Mỗi liên hệ giữa những định lý suy ra định lý kia... Để hệ thống hóa kiến thức về logarit

Mỗi liên hệ giữa các định lý có thể là mối liên hệ chung, riêng: Một định lý có thể là một trường hợp mở rộng hay đặc biệt của một định lý nào đó đã biết. Mỗi liên hệ giữa những định lý suy ra định lý kia... Để hệ thống hóa kiến thức về logarit



Xuất phát từ định nghĩa (1) có thể yêu cầu học sinh thay $x_1 = a^{\log_a x_1}$; $x_2 = a^{\log_a x_2}$ rồi tự suy ra định lý (2) và (3). Cũng từ định nghĩa (1) nếu đặt $x^\alpha = (a^{\log_a x})^\alpha$ ta có định lý (4), từ định lý (4) ta thay $\alpha = \frac{1}{n}$ ta có định lý (5). Cũng từ định nghĩa giáo viên có thể gợi ý để học sinh đặc biệt hóa $x = b^{\log_b x}$ có định lý (6), từ định lý (6) thay $x = a$ có định lý (7) và (8) chính là hệ quả của định lý (7).

Trong chương trình môn toán ở trường phổ thông các định lý toán học đóng một vai trò đặc biệt quan trọng trong việc học tập của học sinh, như chúng ta đã biết việc nhận thức của học sinh về bất kì một kiến thức nào cũng gắn liền với việc hình thành một hoạt động nào đó của các em. Trong dạy học các định lý và củng cố định lý, hệ thống các bài tập được đưa ra cho học sinh có một vị trí rất quan trọng, vì vậy người giáo viên phải thường xuyên đặt ra cho học sinh những hệ thống câu hỏi, hệ thống bài tập;

nhận dạng những định lý đã học.

Chẳng hạn khi dạy học củng cố các định lý về logarit:

$$+) \log_a x_1 x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2 \quad (x_1, x_2 > 0; 0 < a \neq 1)$$

$$+) \log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$$

$$+) \log_a x^\alpha = \alpha \log_a x \quad (x > 0)$$

Do ba định lý trên có mối liên hệ mật thiết với nhau, hỗ trợ lẫn nhau. Để giúp học sinh nắm vững các định lý và biết cách vận dụng nó vào các bài toán cụ thể, giáo viên có thể dẫn dắt học sinh bằng hệ thống các câu hỏi dưới dạng phiếu bài tập sau:

1. Hiệu $\log_a A - \log_a B$ sẽ thay đổi như thế nào nếu thay A, B bằng A^2, B^2 (tăng 2 lần) nếu thay A, B bằng 2A, 2B (không đổi)
2. Với điều kiện nào thì $\log_a x^2 = 2\log_a x$; $\log_a x^4 = 2\log_a x^2$
3. Từ phương trình $\log_a x^2 = \log_a 9$ ta biến đổi thành $2\log_a x = 2\log_a 3$ ($0 < a \neq 1$), từ đó ta có $x = 3$ tại sao lại mất nghiệm số $x = -3$.
4. Muốn cho $\log_a^2 x$ có nghĩa thì giá trị x phải như thế nào?

Nhận xét: Hệ thống các bài tập sẽ giúp học sinh nhìn nhận các định lý,

giả thiết định lý một cách rất trực quan, đồng thời hệ thống các bài tập đó sẽ củng cố cho học sinh những tri thức, kĩ năng, kĩ xảo ở các giai đoạn khác nhau của quá trình học tập.

THỰC NGHIỆM SƯ PHẠM

1. MỤC ĐÍCH THỰC NGHIỆM

Mục đích thực nghiệm là kiểm tra tính khả thi và tính hiệu quả của việc dạy

Sử dụng phương tiện trực quan trong kỹ thuật dạy học tạo tởnh hướng gợi vấn đề nhằm mục đích phát hiện các tính chất, định lý, mệnh đề và tìm lời giải cho các bài toán phân hàm số mũ, logarit.

2. Kết quả kiểm tra

Trong đợt thực nghiệm, chúng tôi tiến hành kiểm tra hai bài.

BÀI KIỂM TRA SỐ 1 (thời gian làm bài 45 phút)

Đề bài:

Câu1: Giải phương trình $3^x = \frac{1}{3}x^2$

Câu2: Cho phương trình: $9^{x^2-2x} - 3^{(x-1)^2} = m$.

a. Giải phương trình với $m = 0$

b. Tìm m để phương trình có nghiệm

Câu3: Tìm a để phương trình $\frac{\log_5(ax)}{\log_5(x+1)} = 2$ có nghiệm duy nhất.

Thang điểm:

Câu1: (2 điểm) vẽ được 2 đồ thị của $y = 3^x$ và $y = \frac{1}{3}x^2$ trên cùng một hệ trục (1,5 điểm).

Dựa vào đồ thị để lấy nghiệm của phương trình (0,5 điểm)

Câu2: (5 điểm).

a. Giải được phương trình với $m = 0$ (2 điểm)

b. Đặt $3^{x^2-2x+1} = t$ với tìm được điều kiện $t \geq 1$ (0,5 điểm)

Đưa phương trình về dạng: $t^2 - 9t = 9m$ (0,5 điểm)

Dựng đồ thị $y = t^2 - 9t$ và $y = 9m$ trên miền $(1, +\infty)$ (1,5 điểm)

Dựa vào đồ thị để suy ra kết luận bài toán (0,5 điểm)

Câu3: (3 điểm) Đưa phương trình đưa về dạng
$$\begin{cases} x > -1 \\ x^2 + (2-a)x + 1 = 0 \end{cases}$$

Có nghiệm duy nhất (0,5 điểm).

Bằng các phương tiện trực quan chỉ ra bài toán có 3 trường hợp và kết luận (2,5 điểm).

Những ý định sử dụng về kiểm tra:

Câu1: Kiểm tra kỹ năng vận dụng các phương tiện trực quan khi bài toán không giải được bằng đại số.

Câu 2: Kiểm tra khả năng vận dụng các tính chất, định lý của hàm số mũ đồng thời kiểm tra tính khả thi kỹ năng vận dụng các phương tiện trực quan.

Câu 3: Nhằm kiểm tra tính khả thi kỹ năng vận dụng các phương tiện trực quan khi bài toán.

BÀI KIỂM TRA THỨ 2 (Thời gian làm bài 45 phút)

Đề bài:

Câu1: Giải phương trình $\log_{\frac{1}{2}} x = x + \frac{1}{2}$

Câu2: Cho bất phương trình: $4^{|\cos x|} + 2(2a+1)2^{|\cos x|} + 4a^2 - 3 < 0$

a. Giải bất phương trình khi $a = 1$

b. Tìm a để bất phương trình đúng $\forall x$.

Câu3: Xác định m để hệ $\begin{cases} 2^{2x} + 3^{2y} = 1 \\ 2^x + 2^y = m \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Thang điểm:

Câu1: (2 điểm) Vẽ được đồ thị $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ và $y = x + \frac{1}{2}$ (trên miền xác định) trên cùng một hệ trục (1,5 điểm).

Từ đồ thị kết luận nghiệm của phương trình (0,5 điểm)

Câu 2: (5 điểm)

a. Giải được bất phương trình khi $a = -1$ qua phép đặt ẩn phụ

$2^{|\cos x|} = t$ (2,0 điểm)

b. Đặt $2^{|\cos x|} = t$ Điều kiện $1 \leq t \leq 2$ (0,5 điểm)

Xét hai trường hợp xảy ra dựa vào trục số và kết luận bài toán (2,5 điểm)

Câu3: (3 điểm) Đặt $\begin{cases} 2^x = u \\ 2^y = v \end{cases}$ ($u, v > 0$) đưa hệ về dạng $\begin{cases} u^2 + v^2 = 1 \\ u + v = m \end{cases}$ (I)

(1 điểm).

- Biểu diễn miền nghiệm của (I) trên hệ trục ($v > 0$) (1 điểm).

- Dựa vào mô hình trục quan kết luận bài toán (1 điểm).

Những dụng ý sử dụng về kiểm tra:

Câu 1: Kiểm tra khả năng vận dụng hợp lý phương pháp trục quan khi giải các phương trình logarit.

Câu 2: Kiểm tra khả năng linh hoạt trong khi sử dụng các tính chất, định lý về hàm số mũ, hàm số logarit, đồng thời việc vận dụng các phương tiện trực quan hơn là kỹ thuật tính toán, phân nhiều trường hợp.
tính khả thi khi sử dụng phương tiện trực quan

Câu 3: Nhằm kiểm tra tính khả thi việc vận dụng các phương tiện trực quan hơn là kỹ thuật tính toán, phân nhiều trường hợp.

Nhận xét: Tất cả các câu trong 2 đề kiểm tra không phức tạp về mặt tính toán. Nói cách khác nếu học sinh xác định đúng hướng và vận dụng hợp lý các phương tiện trực quan thì chắc chắn sẽ đi đến kết quả mà không bị mắc bởi những tính toán rắc rối. Điều đó cho thấy các đề kiểm tra thiên về việc vận dụng các phương tiện trực quan hơn là kỹ thuật tính toán, phân nhiều trường hợp.

1. Đánh giá kết quả việc vận dụng các phương tiện trực quan hơn là kỹ thuật tính toán, phân nhiều trường hợp.

2. Đánh giá định tính.

Khi quá trình thực nghiệm mới được bắt đầu, quan sát chất lượng câu trả lời cũng như việc giải các bài tập, chúng tôi thấy, nhìn chung học sinh lớp đối chứng và ngay cả lớp thực nghiệm các em còn gặp những khó khăn và sai lầm. Đúng trước một bài toán có chứa tham số, học sinh chưa định hướng được sẽ giải quyết như thế nào? chưa phân biệt được các trường hợp xảy ra theo yêu cầu của bài toán.

- Khi giải các bài toán đặt ẩn phụ thì học sinh lại không lưu ý đến quy luật tương ứng của hai biến, chẳng hạn: Đối với câu hai bài kiểm tra số 1 và bài kiểm tra số 2: Nhiều học sinh cho rằng: Đặt $3^{x^2-2x+1} = t$ Điều kiện $t > 0$ hoặc $2^{|\cos x|} = t$ điều kiện $t > 0$ là được...

- Năng lực liên tưởng vận dụng các định lý, tính chất cũng còn hạn chế, khi gặp phải bài toán phải biến đổi nhiều công thức, qua nhiều giai đoạn thì học sinh không biết phải bắt đầu từ đâu...

- Hầu hết học sinh chưa có ý thức và khả năng sử dụng các phương tiện trực quan, đặc biệt là công cụ đồ thị, hỗ trợ cho quá trình giải quyết vấn đề.

- Khi gặp phải những bài toán phương trình mũ, phương trình logarit không giải được bằng đại số thì đa số học sinh thường dừng lại chứ các em ít nghĩ đến việc vận dụng các phương tiện trực quan tượng trưng, đặc biệt là đồ thị để hỗ trợ cho quá trình tư duy trong giải toán. Sau khi nghiên cứu việc vận dụng các phương tiện trực quan vào dạy học các khái niệm, định lý, tính chất và vận dụng các biện pháp sư phạm được xây dựng ở chương 2 vào quá trình dạy học phần hàm số mũ, hàm số logarit, giáo viên dạy thực nghiệm cho rằng, không gặp nhiều khó khăn khi vận dụng các biện pháp này, đồng thời khi áp dụng các biện pháp này, học sinh tích cực hoạt động nhận thức, độc lập tìm tòi, lĩnh hội được những tri thức phương pháp trong quá trình giải quyết vấn đề, hứng thú và tự tin hơn trong học toán, giải toán liên quan đến phần hàm số mũ, hàm số logarit.

Những khó khăn và sai lầm của học sinh đã giảm đi rất nhiều, học sinh bắt đầu ham thích việc vận dụng các phương tiện trực quan vào quá trình giải toán.

3. Đánh giá định lượng.

Kết quả bài kiểm tra số 1 như sau:

Điểm Lớp	3	4	5	6	7	8	9	10	Tổng số
Thực nghiệm	1	3	10	12	7	13	5	1	52
Đối chứng	0	6	9	15	7	9	4	0	50

Lớp thực nghiệm có 92% điểm từ trung bình trở lên, trong đó có 50% điểm khá giỏi (điểm từ 7 trở lên) có 1 học sinh đạt điểm tuyệt đối, 5 học sinh đạt điểm 9.

Lớp đối chứng có 88% điểm trung bình trở lên, trong đó có 40% điểm khá giỏi (điểm từ 7 trở lên) không có học sinh đạt điểm tuyệt đối, có 4 học sinh đạt điểm 9.

Kết quả bài kiểm tra số 2 như sau:

Điểm Lớp	3	4	5	6	7	8	9	10	Tổng số
Thực nghiệm	1	4	8	9	9	13	6	2	52
Đối chứng	2	7	9	13	7	8	3	1	50

Lớp thực nghiệm có 90% điểm từ trung bình trở lên có 57,6% điểm khá giỏi (điểm từ 7 trở lên) có 2 học sinh đạt điểm tuyệt đối, 6 học sinh đạt điểm 9.

Lớp đối chứng có 82% điểm từ trung bình trở lên trong đó có 38% điểm khá giỏi (điểm từ 7 trở lên) có 1 học sinh đạt điểm tuyệt đối, 3 học sinh đạt điểm 9.

KẾT LUẬN

Cả hai bài kiểm tra đều cho thấy kết quả đạt được của lớp thực nghiệm cao hơn lớp đối chứng, đặc biệt là loại bài đạt khá giỏi cao hơn hẳn. Nguyên nhân là do lớp thực nghiệm học sinh thường xuyên được luyện tập khả năng sử dụng hợp lý các phương tiện trực quan vào các bài toán, đồng thời rèn luyện được các kỹ năng, tổng hợp, tích cực sáng tạo... Bên cạnh đó, các phương tiện trực quan còn giúp học sinh giải các bài toán một cách gọn gàng và đơn giản hơn rất nhiều các phương pháp khác.

Kết quả thu được qua đợt thực nghiệm sư phạm bước đầu cho phép kết luận rằng: Nếu có phương pháp sử dụng hợp lý các phương tiện dạy học trực quan thì có thể gây hứng thú học tập cho học sinh, lôi cuốn học sinh vào các hoạt động toán học một cách tự giác và tích cực, kích thích tính tò mò, ham

mê tìm tòi tự nghiên cứu; giúp học sinh hiểu sâu sắc hơn kiến thức cơ bản để từ đó tạo cho học sinh thói quen độc lập suy nghĩ để giải quyết các tình huống có vấn đề và tự làm sáng tỏ cho mình và cho bạn. Điều đó cho thấy tính hiệu quả của việc vận dụng hợp lý các phương tiện dạy học trực quan vào quá trình dạy học cho học sinh trên một chủ đề toán cụ thể ở trường THPT.

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ Trịnh Bá Phòng	<i>Thanh Hóa, ngày 17 tháng 5 năm 2016</i> Tôi xin cam đoan đây là SKKN của mình viết, không sao chép nội dung của người khác. Bùi Hùng Tráng
--	---

Tài liệu tham khảo

1. Phan Đức Chính, Vũ Dương Thụy, Đào Tam, Lê Thống Nhất (2001), *Các*
3. Hoàng Chúng (1978), *Phương pháp dạy học toán*, Nxb Giáo dục, Hà Nội.
4. Lê Hồng Đức, Lê Hữu Trí (2003), *Phương pháp giải toán mũ, logarit*, Nxb Hà Nội, Hà Nội.
5. Phạm Gia Đức, Nguyễn Mạnh Căng, Bùi Huy Ngọc, Vũ Dương Thụy (2001), *Phương pháp dạy học môn toán*, Nxb Giáo dục, Hà Nội.
6. Nguyễn Đức Đồng, Nguyễn Văn Vĩnh (2001), *Logic toán*, Nxb Thanh Hóa, Thanh Hóa.
7. Goocki D.P (1974), *Logic học*, Nxb Giáo dục, Hà Nội.
8. Nguyễn Viết Hải (1984), Bản tóm tắt luận án tiến sỹ, *Các bộ thiết bị dạy học như là phương tiện dạy học hình học*.
9. Hàn Liên Hải, Phan Huy Khải, Đào Ngọc Nam, Nguyễn Đạo Phương, Lê Tất Tồn, Đặng Quan Viễn (2000), *Toán bồi dưỡng học sinh THPT, Đại số 10, 11, 12*, Nxb Hà Nội, Hà Nội.
10. Phạm Văn Hoàn, Nguyễn Gia Cốc, Trần Thúc Trình (1981), *Giáo dục học môn toán*, Nxb Giáo dục, Hà Nội.
11. Lê Văn Hồng, Lê Ngọc Lan, Nguyễn Văn Thắng (1997), *Tâm lý học lứa tuổi và tâm lý học sư phạm*, Nxb Giáo dục, Hà Nội.
12. Phan Huy Khải (1998), *Toán nâng cao 11*, Nxb Giáo dục, Hà Nội.
13. Krutecxki A.V (1982), *Tâm lý học lứa tuổi và sư phạm*, Nxb Giáo dục, Hà Nội.
14. Nguyễn Bá Kim (1999), *Học tập trong hoạt động và bằng hoạt động*, Nxb Giáo dục, Hà Nội.
15. Nguyễn Bá Kim, Vũ Dương Thụy (1992), *Phương pháp dạy học môn toán*. Nxb Giáo dục, Hà Nội.
16. Polia G (1997), *Giải bài toán như thế nào?* Nxb Giáo dục, Hà Nội.
17. Petrovski A.V (1982), *Tâm lý học lứa tuổi sư phạm*, Nxb Giáo dục, Hà Nội.