

ĐỀ SỐ 1: ĐỀ TỰ LUYỆN HSG CẤP HUYỆN
MÔN TOÁN 8

NĂM HỌC: 2023-2024

Thời gian làm bài 120 phút

I. Phần trắc nghiệm (8,0 điểm) Chọn một phương án đúng

Câu 1. Sau khi rút gọn biểu thức $P = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8}$ với $x \neq 1$ là:

A. $P = \frac{8}{1-x^{16}}$ B. $P = \frac{16}{1-x^8}$ C. $P = \frac{16}{1-x^{16}}$ D. $P = \frac{16}{1+x^{16}}$

Câu 2. Đồ thị của hai hàm số $y = 5x + 2022$ và $y = 5x + 2023$ là hai đường thẳng có vị trí như thế nào?

A. Song song B. Cắt nhau C. Không song song D. Trùng nhau

Câu 3. Cho $P = \frac{x^2 + 5}{x^3 - 3x - 2}$ & $Q = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x^2 + 2x + 1}$. Giá trị nào của a, b thì $P=Q$ với mọi giá trị của x trong tập xác định của chúng là:

A. $a=-1; b=-2$ B. $a=1; b=2$ C. $a=1; b=5$ D. $a=1; b=-2$

Câu 4. Một hộp có 10 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 5 đến 14. Bạn Hoa lấy ra ngẫu nhiên 1 thẻ từ hộp. Xác suất thực nghiệm của biến cố “Chọn ra thẻ ghi số chia hết cho 5” là bao nhiêu % ?

A. 20% B. 30% C. 40% D. 50%

Câu 5. Tổng các nghiệm của phương trình $|x-2| + |x-3| = 4$ là:

A. 3 B. 4 C. 5 D. 9

Câu 6. Dư trong phép chia $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ cho $(2x - 1)$ là:

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{8}$

Câu 7. Đa thức bậc 3 biết $f(0) = 1; f(1) = 0; f(2) = 5; f(3) = 22$ là:

A. $x^3 - x^2 + 2x + 1$ B. $x^3 - 2x + 1$ C. $x^3 + 2x + 1$ D. $x^3 - x^2 - 2x + 1$

Câu 8. Cho đa thức $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Biết $P(1) = 1; P(2) = 4; P(3) = 9; P(4) = 16; P(5) = 25$. Khi đó giá trị $P(6)$ là :

A. 36 B. 56 C. 156 D. 256

Câu 9: Cho hai hàm số $y = x + 4$ và $y = -x + 4$ có đồ thị là hai đường thẳng d_1 và d_2 . Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2 là:

A. (0;4) B. (0;-4) C. (4;0) D. (-4;0)

Câu 10. Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BD; I và J thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng DH và BC. Số đo của góc AIJ là:

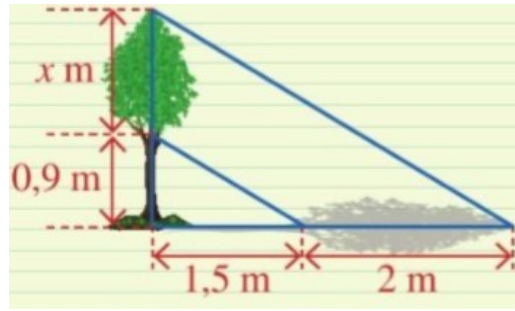
A. 45°

B. 60°

C. 90°

D. Một kết quả khác

Câu 11: Người ta đo bóng của một cây và được các số đo như hình vẽ. Giả sử rằng các tia nắng song song với nhau.



Khi đó, độ cao x là:

A. $1,2\text{ m}$

B. $3,3\text{ m}$.

C. $0,7\text{ m}$

D. 2 m

Câu 12. Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AA' , BB' , CC' , H là trực tâm. Tính

tổng $\frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'}$ là:

A. 1

B. 2

C. 3

D. $\frac{1}{3}$

Câu 13: Cho tam giác ABC có cạnh $BC = 12\text{ cm}$. Trên cạnh AB lấy điểm D và E sao cho $AD = DE = EB$. Từ D, E kẻ các đường thẳng song song với BC cắt AC theo thứ tự tại M, N . Khi đó, độ dài đoạn thẳng DM và EN là:

A. $DM = 4\text{ cm}; EN = 8\text{ cm}$

B. $DM = 8\text{ cm}; EN = 4\text{ cm}$

C. $DM = 6\text{ cm}; EN = 9\text{ cm}$

D. $DM = 3\text{ cm}; EN = 6\text{ cm}$

Câu 14: Một chiếc tivi màn hình phẳng có chiều rộng và chiều dài đo được lần lượt là 72 cm và 120 cm . Độ dài đường chéo của màn hình chiếc tivi đó theo đơn vị inch bằng (biết $1\text{ inch} \approx 2,54\text{ cm}$):



A. 55 inch

B. 50 inch

C. 65 inch

D. 72 inch

Câu 15. Cho hình thoi $ABCD$ có góc B là góc tù. Kẻ BM và BN thứ tự vuông góc với các cạnh AD và CD tại M và N . Biết rằng $\frac{MN}{BD} = \frac{1}{2}$. Ta có:

A. $\angle A = \angle C = 60^\circ$

B. $\angle D = \angle B = 150^\circ$

C. $\angle B = \angle D = 120^\circ$

D. $\angle A = \angle C = 30^\circ$

Câu 16. Tí có một số bi không quá 80 viên, trong đó số bi đỏ gấp 5 lần số bi xanh. Nếu Tí có thêm 3 viên bi xanh nữa thì số bi đỏ gấp 4 lần số bi xanh. Hỏi lúc đầu Tí có mấy viên bi đỏ, mấy viên bi xanh:

- A. 10bi xanh; 50 bi đỏ B. 11bi xanh; 55 bi đỏ C. 12bi xanh; 60 bi đỏ D. 9bi xanh; 45 bi đỏ

II. Phần tự luận (12,0 điểm)

Câu 1(3,5 điểm): a.Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^2 + 5y^2 + 2xy + 4y = 12$

b.Chứng minh Cho $(n+1)$ và $(2n+1)$ (với $n \in \mathbb{N}$) đều là số chính phương.

Chứng minh rằng n chia hết cho 24

Câu 2 (3,0 điểm):

1.a)Cho hai số thực x, y thoả mãn $x^3 - 3xy^2 = 10$ và $y^3 - 3x^2y = 30$.

Tính giá trị biểu thức $P = x^2 + y^2$.

b) Chứng minh rằng :

$$\text{Nếu } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2 \text{ và } a + b + c = abc \text{ thì } \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 2$$

2. Giả sử đa thức $f(x)$ chia $x-2$ dư 11, chia $x^2 - x + 1$ dư $3x + 2$. Tìm phần dư khi chia $f(x)$ cho $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$

Câu 3 (4,5 điểm): Cho hình vuông $ABCD$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm M , trên tia đối của tia DC lấy điểm N sao cho $BM = DN$. Vẽ hình bình hành $AFMN$. Chứng minh rằng

a. $\triangle ABM = \triangle ADN$

b. Tứ giác $AMFN$ là hình vuông

c. Kẻ $FH \perp BM, FK \perp CN$, chứng minh rằng : $\angle ACF = 90^\circ$

d. B, D, O thẳng hàng (O là trung điểm của AF).

Câu 4 (1,0 điểm): Chứng minh $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}$ với mọi số a, b, c khác 0.

---Hết---

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM

I. Phần trắc nghiệm (8,0 điểm) Mỗi câu đúng 0,5 điểm

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	C	A	D	A	C	D	B	C	A	C
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	A	A	A	A	D	C				

B. HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu 1: Cho biểu thức $P = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8}$ với $x \neq 1$

Rút gọn biểu thức :

Giải:

Do đặc điểm của bài toán không quy đồng mẫu thức mà ta cộng lần lượt từng phân thức

$$A = \frac{2}{1-x^2} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} = \frac{4}{1-x^4} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} = \dots = \frac{16}{1-x^{16}}$$

Câu 2. Cho biểu thức $P = \frac{(1^4+4)(5^4+4)(9^4+4)\dots(21^4+4)}{(3^4+4)(7^4+4)(11^4+4)\dots(23^4+4)}$ thì:

Giải

Cách 1. Tính bằng máy tính $\prod_{x=0}^5 \frac{(4X+1)^4+4}{(4X+3)^4+4}$

Cách 2. $n^4+4 = (n^2+2)^2-4n^2 = (n^2+2+2n)(n^2+2-2n) = [n(n+2)+2][n(n-2)+2]$ Do đó $P = \dots = \frac{1}{577}$

Câu 3. Cho $P = \frac{x^2+5}{x^3-3x-2}$ & $Q = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x^2+2x+1}$. Với những giá trị nào của a, b thì $P=Q$

với mọi giá trị của x trong tập xác định của chúng.

Giải:

Điều kiện: $x \neq 2, -1$.

$$\text{Ta có: } P=Q (\forall x \neq 2, -1) \Leftrightarrow \frac{x^2+5}{x^3-3x-2} = \frac{ax^2+(2a+b)x+a-2b}{x^3-3x-2} \forall x \neq 2, -1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ 2a+b=0 \\ a-2b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$$

Câu 4: Giải các bất phương trình sau .

$$-4x - 2 > -5x + 6$$

Với bài tập này học sinh có thể giải rẽ ràng bằng cách sử dụng các phép biến đổi tương đương .

Giải

$$-4x - 2 > -5x + 6 \Leftrightarrow -4x + 5x > 6 + 2 \Leftrightarrow x > 8$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm là : $S = \{x / x > 8\}$

Câu 5: : Giải phương trình $|x - 2| + |x - 3| = 4$ (1).

Giải:

Ta lập bảng xét dấu $f(x) = |x - 2| + |x - 3|$

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$ x - 2 $	$2 - x$	0	$x - 2$	$x - 2$
$ x - 3 $	$3 - x$	$3 - x$	0	$x - 3$
f(x)	$5 - 2x$	1	$2x - 5$	

Theo bảng trên ta có:

- Nếu $x < 2$ phương trình (1) $\Leftrightarrow 5 - 2x = x \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ thỏa mãn $x < 2$.

- Nếu $2 \leq x \leq 3$ do $1 \neq 4$ nên phương trình vô nghiệm.

- Nếu $x > 3$ phương trình (1) $\Leftrightarrow 2x = 9 \Leftrightarrow x = \frac{9}{2}$ (thỏa mãn $x > 3$)

Tóm lại: Phương trình (1) có nghiệm là $x = \frac{1}{2}$ hoặc $x = \frac{9}{2}$.

Câu 6: Dư trong phép chia $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ cho $(2x - 1)$ là:

Giải:

- Thực hiện phép chia $P(x)$ cho $\left(x - \frac{1}{2}\right)$, ta được:

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{7}{4}\right) + \frac{1}{8}$$

Từ đó ta phân tích:

$$\begin{aligned} P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1 &= 2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{7}{4}\right) + \frac{1}{8} \\ &= (2x - 1) \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{4}x - \frac{7}{8}\right) + \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Câu 7. Xác định đa thức bậc 3 biết $f(0) = 1; f(1) = 0; f(2) = 5; f(3) = 22$

Giải

Gọi đa thức cần tìm là:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Theo bài ra ta có:

$$f(0) = 1 \Rightarrow d = 1$$

$$f(1) = 0 \Rightarrow a + b + c = -1 \quad (1)$$

$$f(2) = 5 \Rightarrow 4a + 2b + c = 2 \quad (2)$$

$$f(3) = 22 \Rightarrow 9a + 3b + c = 7 \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 2 \\ 9a + 3b + c = 7 \end{cases}$$

Giải ra ta được: $a = 1$; $b = 0$; $c = -2$

Vậy đa thức cần tìm là: $f(x) = x^3 - 2x + 1$

Câu 8. / Cho đa thức $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Biết $P(1) = 1$; $P(2) = 4$; $P(3) = 9$; $P(4) = 16$; $P(5) = 25$

Hãy tính $P(6)$; $P(7)$; $P(8)$; $P(9)$; $P(10)$.

GIẢI : Tương tự như trên ta có $P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5) + x^2$

Từ đó tính được $P(6) = 156$; $P(7) = 769$; $P(8) = 2584$;

$P(9) = 6801$; $P(10) = 15220$

Câu 9. Tính diện tích hình thang ABCD ($AB \parallel CD$), biết $AB = 42\text{cm}$, $A = 45^\circ$; $B = 60^\circ$ và chiều cao của hình thang bằng 18cm

Qua A và B kẻ AA' và BB' vuông góc với CD.

Tứ giác $ABB'A'$ là hcn và $A'A = BB' = 18\text{m}$

$A'AB = 90^\circ$, $DAB = 45^\circ \Rightarrow A'AD = 45^\circ$

Do đó $\triangle A'AD$ vuông cân

$\Rightarrow A'D = A'A = 18\text{m}$

$B'BA = 90^\circ$, $CBA = 60^\circ \Rightarrow B'BC = 30^\circ$

vì thế trong tam giác vuông $B'BC$

ta có $B'C = \frac{BB'}{2}$. Theo định lí Pi ta go, ta có:

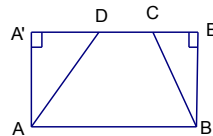
$$\begin{aligned} B'C^2 &= BC^2 - B'B^2 \\ \Rightarrow B'C^2 &= 4B'C^2 - B'B^2 \\ \Rightarrow 3B'C^2 &= B'B^2 \\ \Rightarrow B'C &= \frac{B'B}{\sqrt{3}} = \frac{18}{\sqrt{3}} \text{ (cm)} \end{aligned}$$

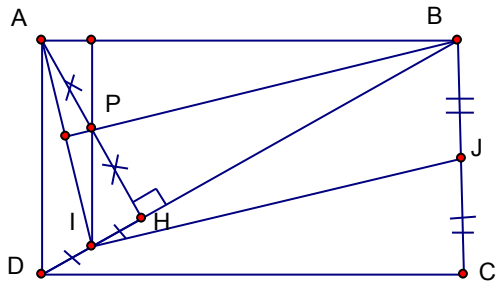
Suy ra :

$$CD = A'B' - A'D - B'C = 42 - 18 - \frac{18}{\sqrt{3}} = 24 - \frac{18}{\sqrt{3}} \text{ (cm)}$$

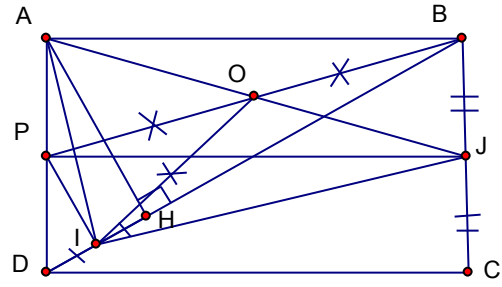
Vậy $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot A'A = \frac{1}{2} \left(42 + 24 - \frac{18}{\sqrt{3}} \right) 18 \approx 498,6 \text{ (cm}^2\text{)}$

Câu 10. Cho hình chữ nhật ABCD . Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BD ; I và J thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng DH và BC . Tính số đo của góc AIJ .





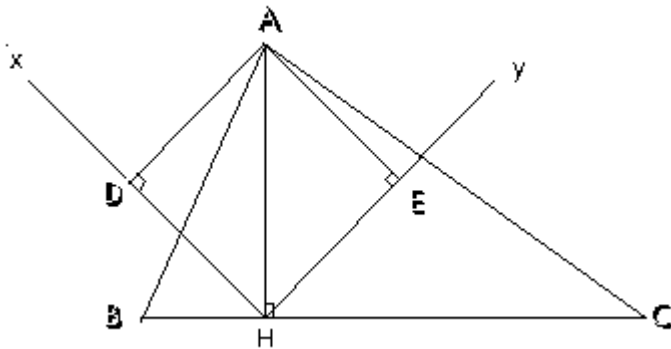
Hình 1



Hình 2

(Hình 1) Gọi P là trung điểm của AH \Rightarrow PI là đường trung bình của tam giác AHD \Rightarrow PI//AD mà AD \perp AB thì IP \perp AB và P là trực tâm của $\triangle ABI$. Từ đó tứ giác BPIJ là h.b.h \Rightarrow BP // IJ mà BP \perp AI nên JI \perp AI.

Câu 11. Cho tam giác ABC, đường cao AH, vẽ phân giác Hx của góc AHB và phân giác Hy của góc AHC. Kẻ AD vuông góc với Hx, AE vuông góc với Hy. Chứng minh rằng tứ giác ADHE là hình vuông



Tứ giác ADHE là hình vuông

Hx là phân giác của góc AHB; Hy phân giác của góc AHC mà AHB và AHC là hai góc kề bù nên Hx và Hy vuông góc

Hay $\angle DHE = 90^\circ$ mặt khác $\angle ADH = \angle AEH = 90^\circ$

Nên tứ giác ADHE là hình chữ nhật (1)

$$\angle AHD = \frac{\angle AHB}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

$$\text{Do } \angle AHE = \frac{\angle AHC}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \angle AHD = \angle AHE$$

Hay HA là phân giác $\angle DHE$ (2)

Từ (1) và (2) ta có tứ giác ADHE là hình vuông

Câu 12. Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AA', BB', CC', H là trực tâm. Tính tổng

$$\frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'}$$

Ta có
$$\frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot HA' \cdot BC}{\frac{1}{2} \cdot AA' \cdot BC} = \frac{HA'}{AA'}$$
;

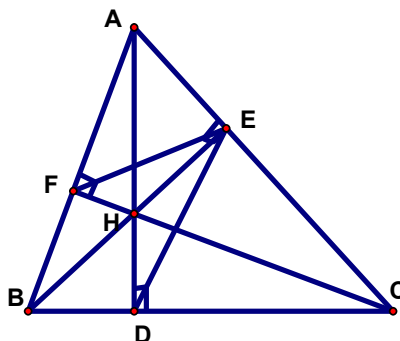
Tương tự:
$$\frac{S_{HAB}}{S_{ABC}} = \frac{HC'}{CC'}; \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} = \frac{HB'}{BB'}$$

$$\frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'} = \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} = 1$$

Câu 13. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn. Các đường cao AD, BE và CF cắt nhau tại H. Chứng minh rằng :

a) $\angle AEF = \angle ABC$

b) EB là phân giác của góc DEF.



$$\triangle AEB \sim \triangle AFC (g - g) \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$$

$\triangle AEF$ và $\triangle ABC$ có: *Achung*, $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$ (cmt)

Suy ra: $\triangle AEF \sim \triangle ABC (g - c - g)$

$$\Rightarrow \angle AEF = \angle ABC$$

Chứng minh tương tự trên, ta có: $\angle CED = \angle CBA$

$\Rightarrow \angle AEF = \angle CED$ (cùng bằng góc ABC)

Mà: $\angle AEF + \angle FEB = 90^\circ$; $\angle CED + \angle DEB = 90^\circ$

$\Leftrightarrow \angle FEB = \angle DEB$ hay EB là phân giác của góc DEF.

Câu 14: Tứ giác ABCD có I là giao điểm của hai đường chéo. Biết AB = 6 cm; IA = 8 cm; IB = 4 cm; ID = 6 cm; Ta có AD bằng: $\sqrt{170}$ cm

A) 10 cm

B) $\sqrt{125}$ cm

C) $\sqrt{166}$ cm

D) $\sqrt{170}$ cm

Câu 15. Cho hình thoi ABCD có góc B là góc tù. Kẻ BM và BN thứ tự vuông góc với các cạnh AD và CD tại M và N. Biết rằng $\frac{MN}{BD} = \frac{1}{2}$. Tính số đo các góc của hình thoi ABCD.

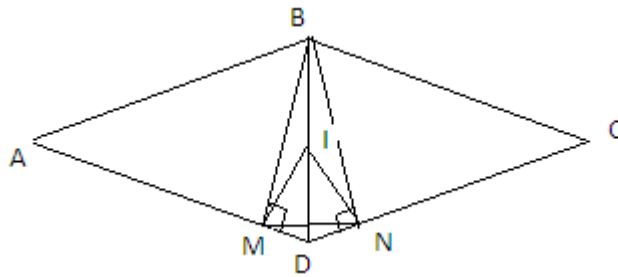
Gọi I là trung điểm

của BD.

Tacó

$$MI = NI = \frac{1}{2}BD = MN$$

$\Rightarrow \triangle MIN$ đều



$\Rightarrow \angle MIN = 60^\circ$

$$\triangle BMD = \triangle BND(ch + gn) \Rightarrow MD = ND$$

Mặt khác $IM = IN$

$\Rightarrow ID$ là trung trực của $MN \Rightarrow ID$ là phân giác của góc MIN

$$\Rightarrow \angle MID = \frac{1}{2} \angle MIN = 30^\circ$$

Lại có $\angle MID = \angle BMI + \angle MBI = 2 \cdot \angle MBI \Rightarrow \angle MBI = 15^\circ$

Khi đó có $\angle BDM = 75^\circ \Rightarrow \angle ADC = 150^\circ = \angle ABC$

$$\angle A = \angle C = 30^\circ$$

Vậy

Câu 16: Tí có một số bi không quá 80 viên, trong đó số bi đỏ gấp 5 lần số bi xanh. Nếu Tí có thêm 3 viên bi xanh nữa thì số bi đỏ gấp 4 lần số bi xanh. Hỏi lúc đầu Tí có mấy viên bi đỏ, mấy viên bi xanh ?

Bài giải: Bài này có nhiều cách giải khác nhau, xin nêu một cách giải như sau

Ta thấy: Số bi xanh lúc đầu bằng $\frac{1}{5}$ số bi đỏ.

Sau khi Tí có thêm 3 viên bi xanh nữa thì số bi xanh lúc đó bằng $\frac{1}{4}$ số bi đỏ.

Do đó 3 viên bi ứng với số phần của số bi đỏ là:

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20} \text{ (số bi đỏ)}$$

Vậy số bi đỏ của Tí lúc đầu là:

$$3 : \frac{1}{20} = 60 \text{ (viên)}$$

Số bi xanh của Tí lúc đầu là : $60 : 5 = 12$ (viên)

Vậy lúc đầu Tí có 60 viên bi đỏ và 12 viên bi xanh.

Vì $60 + 12 = 72$ nên kết quả này thỏa mãn giả thiết về số bi của Tí không có quá 80 viên.

II. Phần tự luận (12,0 điểm)

Câu 1(3,5 điểm): a. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^2 + 5y^2 + 2xy + 4y = 12$

b. Chứng minh Cho $(n+1)$ và $(2n+1)$ (với $n \in \mathbb{N}$) đều là số chính phương.
Chứng minh rằng n chia hết cho 24

Phần	Nội dung	Điểm
a	<p>Ta có:</p> $x^2 + 5y^2 + 2xy + 4y = 12$ $x^2 + 5y^2 + 2xy + 4y = 12 \Leftrightarrow (x + y)^2 + (2y + 1)^2 = 13 = (\pm 2)^2 + (\pm 3)^2$ <p>Để ý rằng $2y + 1$ có dạng lẻ nên ta có các trường hợp và kết luận được các nghiệm nguyên x, y thỏa mãn bài toán là: $(x; y) \in \{(1; 1), (0; -2), (4; -2), (-3; 1)\}$</p>	2,0đ
b	<p>Ta có $2n+1$ là số lẻ mà $2n+1$ là số chính phương (gt) $\Rightarrow 2n+1$ chia 4 dư 1 $\Rightarrow 2n:4 \Rightarrow n:2 \Rightarrow n+1$ là số lẻ mà $n+1$ là số chính phương $\Rightarrow n+1$ chia 8 dư 1 $n:8$ (1) Mặt khác $(n+1)+(2n+1)=3n+2$ chia cho 3 dư 2 Mà $(n+1)$ và $(2n+1)$ đều là số chính phương nên chúng chia cho 3 đều dư 1. Vì $n+1$ chia cho 3 dư 1 nên $n:3$ (2) Vì $(3,8)=1$ và $3.8=24$ nên từ (1) và (2) suy ra $n:24$.</p>	1,5

Câu 2 (3,0 điểm):

1. a) Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^3 - 3xy^2 = 10$ và $y^3 - 3x^2y = 30$. Tính giá trị biểu thức $P = x^2 + y^2$.

b) Chứng minh rằng: Nếu $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$ và $a + b + c = abc$ thì $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 2$

a) Ta có: $x^3 - 3xy^2 = 10 \Rightarrow (x^3 - 3xy^2)^2 = 100 \Rightarrow x^6 - 6x^4y^2 + 9x^2y^4 = 100$

và $y^3 - 3x^2y = 30 \Rightarrow (y^3 - 3x^2y)^2 = 900 \Rightarrow y^6 - 6x^2y^4 + 9x^4y^2 = 900$

Suy ra: $x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6 = 1000 \Rightarrow (x^2 + y^2)^3 = 1000 \Rightarrow x^2 + y^2 = 10$

b) Ta có: $(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})^2 = 4$

$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 4 - 2 \cdot (\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca})$ ' $\Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 4 - 2 \cdot \frac{a+b+c}{abc}$

Vì $a+b+c = abc$ nên ta có: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 2$

2. Giả sử đa thức $f(x)$ chia $x-2$ dư 11, chia x^2-x+1 dư $3x+2$. Tìm phần dư khi chia $f(x)$ cho $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ (1,5 điểm)

Lời giải:

Ta có $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = (x-2)(x^2 - x + 1)$

Thực hiện phép chia $f(x)$ cho $g(x)$ ta được $f(x) = (x-2)(x^2 - x + 1) + ax^2 + bx + c$

$$f(x) = (x-2).h(x) + 11$$

Cho $x = 2 \Rightarrow f(2) = 4a + 2b + c = 11(1)$

Mặt khác: $f(x) = (x-2)(x^2 - x + 1) + a(x^2 - x + 1) + (a+b)x + c - a$

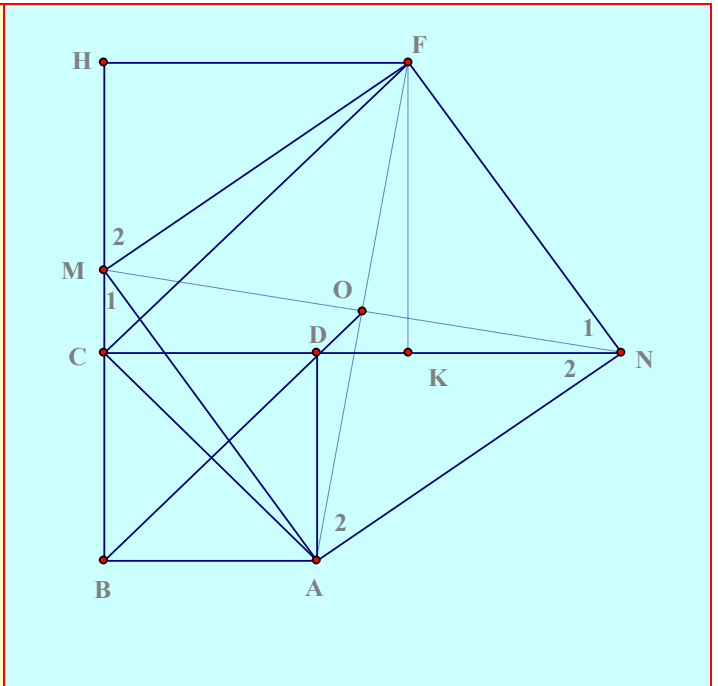
$$= (x-2+a)(x^2 - x + 1) + \underbrace{(a+b)x + c - a}_{du=3x+2} \Rightarrow \begin{cases} c-a = 2(2) \\ a+b = 3(3) \end{cases} . Tu(1)(2)(3) \Rightarrow (a;b;c) = (1;2;3)$$

$$\Rightarrow du : x^2 + 2x + 3$$

Câu 3 (4,5 điểm):

Cho hình vuông $ABCD$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm M , trên tia đối của tia DC lấy điểm N sao cho $BM = DN$. Vẽ hình bình hành $AFMN$. Chứng minh rằng

- $\triangle ABM = \triangle ADN$
- Tứ giác $AMFN$ là hình vuông
- Kẻ $FH \perp BM, FK \perp CN$, chứng minh rằng $\angle ACF = 90^\circ$
- B, D, O thẳng hàng (O là trung điểm của AF).



Lời giải

a. $\triangle ABM = \triangle ADN(cgc) \Rightarrow AM = AN \Rightarrow \angle DAN = \angle BAM$ (1,0 điểm)

b. Hình bình hành $AMFN$, có $AM = AN \Rightarrow \diamond AMFN$ là hình thoi.

Lại có $\angle MAN = \angle MAD + \angle DAN = \angle MAD + \angle MAB = 90^\circ \Rightarrow \diamond AMFN$ là hình vuông (1,0 điểm)

c. $\angle ACF = \angle ACD + \angle DCF = 45^\circ + \angle DCF$

Ta đi chứng minh $\angle DCF = 45^\circ \Rightarrow \diamond CHFK$ là hình vuông

Có:

$$\angle M_1 + \angle M_2 = 90^\circ \Rightarrow \angle N_2 + \angle M_2 = 90^\circ, \angle N_1 + \angle N_2 = 90^\circ \Rightarrow \angle M_2 = \angle N_1 \Rightarrow \triangle MHF = \triangle NKF(ch - gn) \Rightarrow FH = FK$$

$$\Rightarrow \diamond CHFK \text{ là hình vuông } \angle DCF = 45^\circ \Rightarrow \angle ACF = 90^\circ \text{ (đpcm)} \quad (1,5 \text{ điểm})$$

d. Ta đi chứng minh 3 điểm B, D, O nằm trên đường trung trực của AC

Ta có $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow B, D$ nằm trên đường trung trực của AC

O là trung điểm của $AF \Rightarrow O$ là trung điểm của $MN \Rightarrow OA = OM$

Lại có $OC = OM = \frac{1}{2}AC \Rightarrow OM = OC \Rightarrow OA = OC \Rightarrow O$ nằm trên đường trung trực của AC

$\Rightarrow B, D, O$ thẳng hàng. (1,0 điểm)

Câu 4 (1,0 điểm): Chứng minh $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}$ với mọi số a, b, c khác 0.

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương, ta có:

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b^2}{c^2}} = 2\left|\frac{a}{c}\right| \geq \frac{2a}{c}$$

Tương tự: $\frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{2b}{a}$ và $\frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} \geq \frac{2c}{b}$

Cộng theo vế tương ứng của các BĐT trên ta có đpcm

Hết