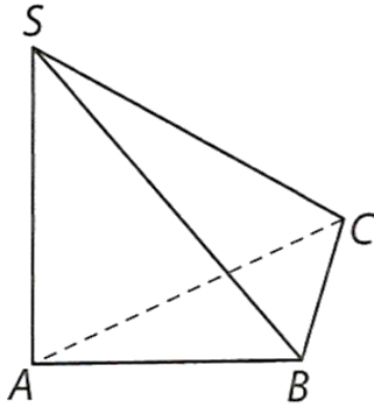


Dạng 6. Thể tích

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$; $AB = a$; $AC = a\sqrt{2}$ và $\angle SBA = 60^\circ$, $\angle BAC = 45^\circ$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$.

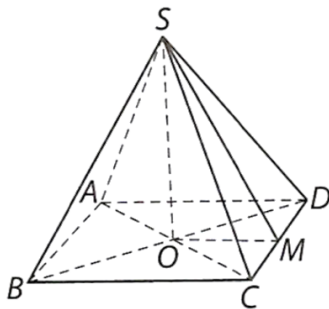
Lời giải



Ta có: $SA = AB \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$;
 $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC = \frac{a^2}{2} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SA = \frac{a^3 \sqrt{3}}{6}$.

Câu 41. Cho khối chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải



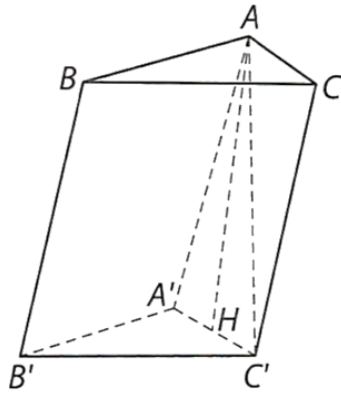
Gọi O là giao điểm của AC và BD , ta có SO vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Kẻ OM vuông góc với CD tại M thì SM cũng vuông góc với CD nên góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng góc giữa hai đường thẳng SM và OM , mà $(SM, OM) = \angle SMO = 60^\circ$.

Ta có: $OM = \frac{a}{2}$; $SO = OM \cdot \tan \angle SMO = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$.

Câu 42. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $A'B'C'$ và $AA'C'$ là hai tam giác đều cạnh a . Biết $(ACC'A') \perp (A'B'C')$. Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Lời giải

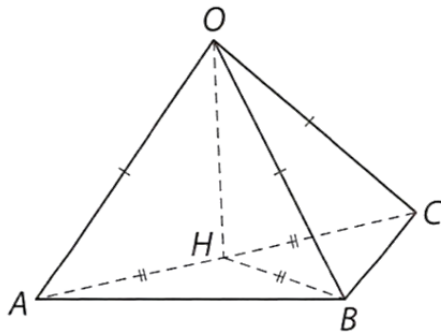


Kẻ $AH \perp A'C'$ tại H thì $AH \perp (A'B'C')$.

Ta có: $S_{A'B'C'} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, suy ra $V_{ABC.A'B'C'} = S_{A'B'C'} \cdot AH = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^3}{8}$.

Câu 43. Cho tứ diện $OABC$ có $OA = OB = OC = a$ và $\angle AOB = 90^\circ$; $\angle BOC = 60^\circ$; $\angle COA = 120^\circ$. Tính theo a thể tích khối tứ diện $OABC$.

Lời giải



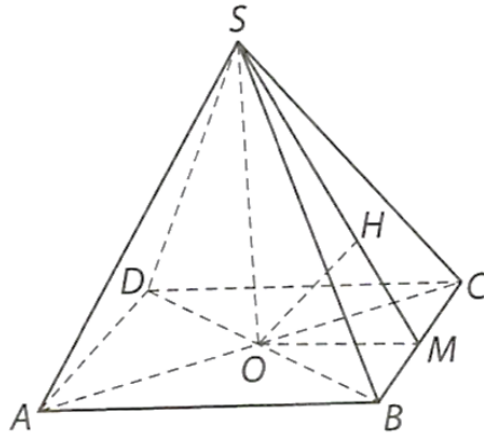
Ta có: $AB = a\sqrt{2}$, $BC = a$, $CA = a\sqrt{3}$, tam giác ABC vuông tại B . Kẻ OH vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại H . Vì $OA = OB = OC$ nên $HA = HB = HC$, hay H là trung điểm của AC .

Xét tam giác OAH vuông tại H , theo định lý Pythagore ta tính được: $OH = \frac{a}{2}$.

Do đó $V_{OABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot OH = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , biết $SO \perp (ABCD)$, $AC = 2a\sqrt{3}$, $BD = 2a$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải



Kẻ OM vuông góc với BC tại M , OH vuông góc với SM tại H , ta chứng minh được $OH \perp (SBC)$. Vì O là trung điểm của AC nên

$$d(A, (SBC)) = 2 \cdot d(O, (SBC)) = 2 \cdot OH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \text{ suy ra } OH = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

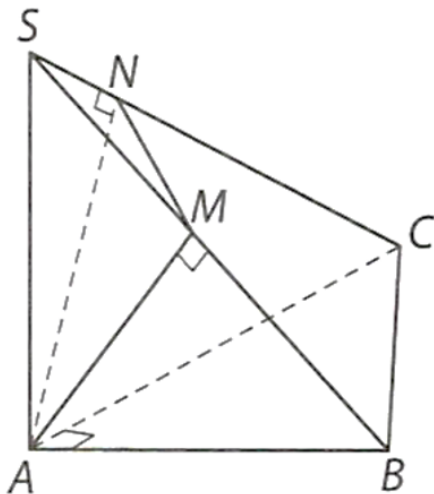
Tam giác OBC vuông tại O , có $OB = a, OC = a\sqrt{3}$ và đường cao OM nên $OM = \frac{OB \cdot OC}{BC} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác SOM vuông tại O , đường cao OH nên $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{OS^2}$, suy ra $SO = \frac{a}{2}$.

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a\sqrt{3} \cdot 2a \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC), SA = a$ và đáy ABC là tam giác vuông tại $A, AB = a, AC = a\sqrt{3}$. Kẻ AM vuông góc với SB tại M, AN vuông góc với SC tại N . Tính theo a thể tích khối chóp $S.AMN$.

Lời giải

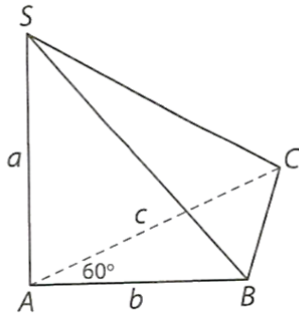


Ta có: $V_{S.ABC} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{6}$, tam giác SAB vuông cân tại A nên $\frac{SM}{SB} = \frac{1}{2}$; tam giác SAC vuông tại A , đường cao AN nên $\frac{SN}{SC} = \frac{SN \cdot SC}{SC^2} = \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{1}{4}$.

Do đó $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{1}{8}$, suy ra $V_{S.AMN} = \frac{1}{8} \cdot V_{S.ABC} = \frac{1}{8} \cdot \frac{a^3 \sqrt{3}}{6} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{48}$

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $\angle BAC = 60^\circ$, biết diện tích các tam giác ABC, SAB và SAC lần lượt là $3\sqrt{3}; 9; 12$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$

Lời giải

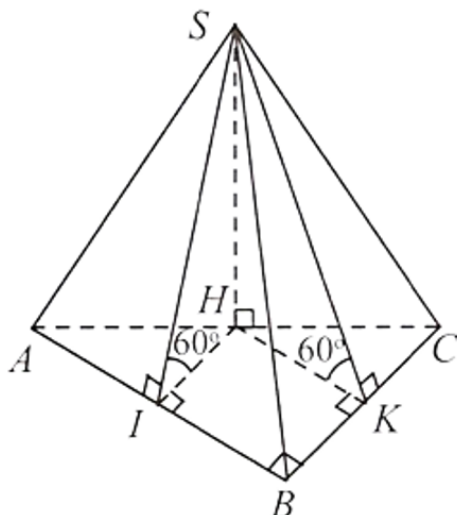


Đặt $SA = a, AB = b, AC = c$. Khi đó $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot bc \cdot \sin 60^\circ \cdot a = \frac{abc\sqrt{3}}{12}$.

Theo đề bài, ta có: $S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \cdot \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}$, suy ra $bc = 12$. $S_{SAB} = \frac{ab}{2} = 9$, suy ra $ab = 18$; $S_{SAC} = \frac{ac}{2} = 12$, suy ra $ac = 24$. Do đó $(abc)^2 = 12 \cdot 18 \cdot 24 = 72^2$, hay $abc = 72$. Vậy $V_{S.ABC} = 6\sqrt{3}$.

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông cân tại $B, AC = a\sqrt{2}$, mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt đáy (ABC) . Các mặt bên $(SAB), (SBC)$ tạo với mặt đáy các góc bằng nhau và bằng 60° . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

Lời giải



Ta có: $(SAC) \perp (ABC)$ và $(SAC) \cap (ABC) = AC$.

Trong mặt phẳng (SAC) , vẽ $SH \perp AC (H \in AC)$ thì $SH \perp (ABC)$.

Gọi I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của H lên cạnh AB và BC thì $((SAB), (ABC)) = \widehat{SIH}$, $((SBC), (ABC)) = \widehat{SKH}$.

Mà $\widehat{SIH} = \widehat{SKH} = 60^\circ$ nên $HI = HK$.

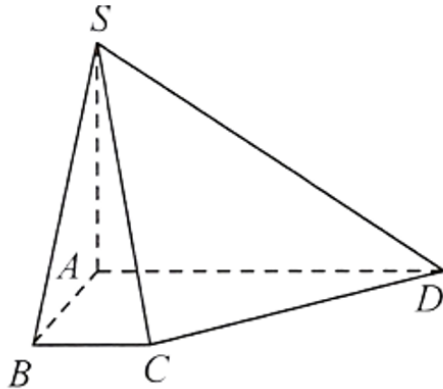
Suy ra tứ giác $BIHK$ là hình vuông nên H là trung điểm cạnh AC .

Khi đó tứ giác $BIHK$ là hình vuông cạnh $\frac{a}{2}$ và $SH = HI \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

Câu 48. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B có $AB = a, AD = 3a, BC = a$. Tính thể tích khối chóp $S.BCD$ theo a .

Lời giải



$$\text{Ta có: } S_{ABCD} = \frac{1}{2} AB \cdot (AD + BC) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (3a + a) = 2a^2.$$

$$\text{Lại có } S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 3a = \frac{3a^2}{2}.$$

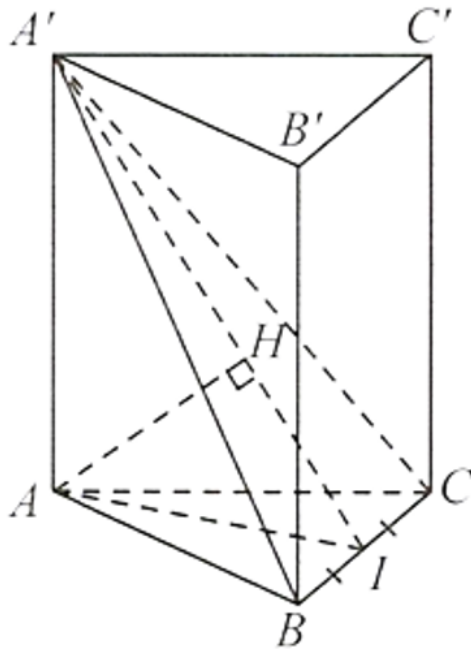
$$\text{Suy ra } S_{\Delta BCD} = S_{ABCD} - S_{\Delta ABD} = \frac{a^2}{2}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.BCD} = \frac{1}{3} S_{\Delta BCD} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$$

Câu 49. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a .

$$\text{Biết } d(A, (A'BC)) = \frac{a\sqrt{57}}{12}. \text{ Tính } V_{ABC.A'B'C'}.$$

Lời giải



Gọi I là trung điểm của BC và H là hình chiếu của A trên $A'I$.

Ta có: $BC \perp AI$ và $BC \perp AA' \Rightarrow BC \perp (A'AI) \Rightarrow (A'BC) \perp (A'AI)$.

Mặt khác: $(A'AI) \cap (A'BC) = A'I$ và $AH \perp A'I$.

$$\text{Nên } d(A, (A'BC)) = AH = \frac{a\sqrt{57}}{12}.$$

$$\Delta ABC \text{ đều cạnh } a \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ và } S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

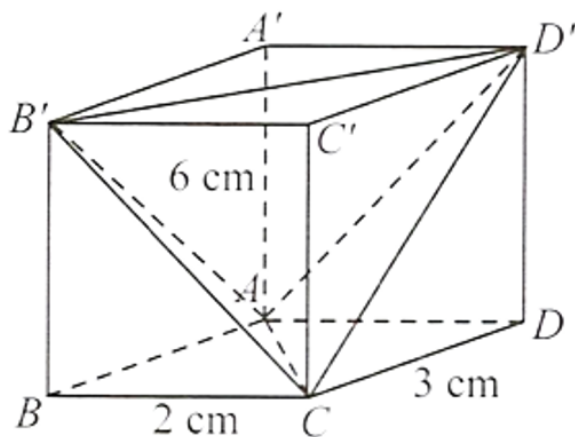
Xét tam giác $A'AI$ vuông tại A , ta có:

$$\frac{1}{AA'^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AI^2} = \frac{144}{57a^2} - \frac{4}{3a^2} = \frac{68}{57a^2} \Rightarrow AA' = \frac{a\sqrt{57}}{2\sqrt{17}}.$$

$$\text{Vậy } V_{ABC-A'B'C'} = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{57}}{2\sqrt{17}} = \frac{a^3\sqrt{171}}{8\sqrt{17}}.$$

Câu 50. Một hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có ba kích thước là $2\text{cm}, 3\text{cm}$ và 6cm . Tính thể tích của khối tứ diện $ACB'D'$.

Lời giải



Ta có: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = V_{BAB'C} + V_{DADC'} + V_{A'BAD'} + V_{C'B'CD'} + V_{ACB'D'}$

$$= 4V_{BAB'C} + V_{ACB'D'}$$

$$\Rightarrow V_{ACB'D'} = V_{ABCD.A'B'C'D'} - 4V_{BAB'C}$$

$$= V_{ABCD.A'B'C'D'} - 4 \cdot \frac{1}{6} V_{ABCD.A'B'C'D'}$$

$$= \frac{1}{3} V_{ABCD.A'B'C'D'}$$

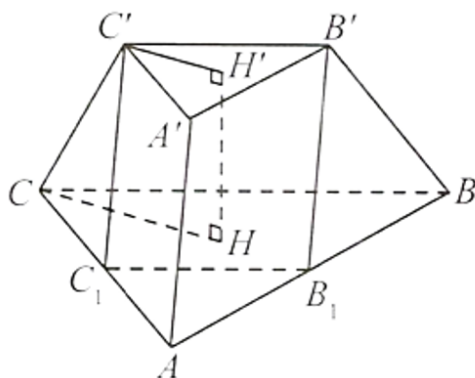
$$= \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 = 12 (cm^3).$$

Câu 51. Cho hình chóp cắt tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có đường cao $HH' = 2a$. Cho biết $AB = 2a, A'B' = a$. Gọi B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của AB, AC . Tính thể tích của:

a) Khối chóp cắt đều $ABC.A'B'C'$;

b) Khối lăng trụ $AB_1C_1.A'B'C'$.

Lời giải



a) Áp dụng công thức $V = \frac{1}{3}h(S + \sqrt{SS'} + S')$,

với $S = a^2\sqrt{3}, S' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, h = 2a$,

ta có: $V = \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot \left(a^2\sqrt{3} + \sqrt{a^2\sqrt{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \right)$

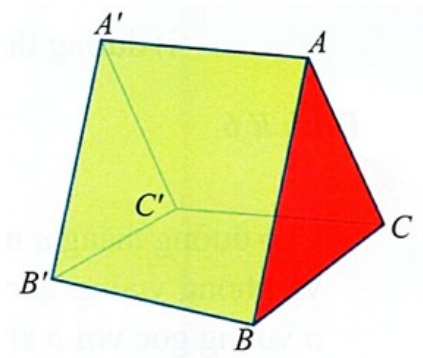
$$= \frac{7a^3\sqrt{3}}{6}$$

b) Áp dụng công thức $V' = S' \cdot h'$ với $S' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, h' = 2a$,

$$\text{Ta có } V' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 2a = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$$

Dạng 7. Bài toán thực tế

Câu 52. Một cái lều có dạng hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có cạnh bên AA' vuông góc với đáy. Cho biết $AB = AC = 2,4m; BC = 2m; AA' = 3m$.



a) Tính góc giữa hai đường thẳng AA' và BC ; $A'B'$ và AC .

b) Tính diện tích hình chiếu vuông góc của tam giác ABB' trên mặt phẳng $(BB'C'C)$.

Lời giải

a) Vì $AA' \parallel BB'$ nên góc giữa AA' và BC là góc giữa BB' và BC .

Vì cạnh bên vuông góc với đáy nên $BB' \perp BC$. Do đó, $\angle B'BC = 90^\circ$.

Vì $A'B' \parallel AB$ nên góc giữa $A'B'$ và AC là góc giữa AB và AC .

$$\text{Ta có: } \cos \angle BAC = \frac{2,4^2 + 2,4^2 - 2^2}{2 \cdot 2,4 \cdot 2,4} = \frac{47}{72}$$

$$\text{Nên } \angle BAC = 49,2^\circ$$

b) Kẻ $AH \perp BC$. Vì cạnh bên vuông góc với đáy nên $BB' \perp AH$.

Ta có $AH \perp BB', AH \perp BC$ nên $AH \perp (BCC'B')$.

Hình chiếu vuông góc của ABB' lên $(BB'C'C)$ là HBB' .

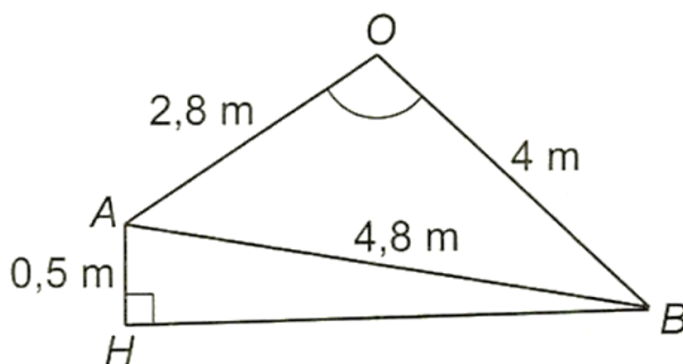
$$\text{Ta có: } S_{HBB'} = \frac{1}{2} \cdot HB \cdot BB' = \frac{1}{2} \cdot \frac{BC}{2} \cdot BB' = \frac{3}{2}$$

Câu 53. Hai mái nhà trong Hình là hai hình chữ nhật. Giả sử $AB = 4,8m; OA = 2,8m; OB = 4m$.



- a) Tính (gần đúng) số đo của góc nhị diện tạo bởi hai nửa mặt phẳng tương ứng chứa hai mái nhà.
- b) Chứng minh rằng mặt phẳng (OAB) vuông góc với mặt đất phẳng. Lưu ý: Đường giao giữa hai mái (đường nóc) song song với mặt đất.
- c) Điểm A ở độ cao (so với mặt đất) hơn điểm B là $0,5m$. Tính (gần đúng) góc giữa mái nhà (chứa OB) so với mặt đất.

Lời giải



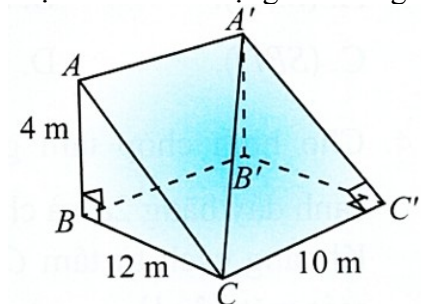
a)
$$\cos \angle AOB = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2 \cdot OA \cdot OB} = \frac{1}{28} \Rightarrow \angle AOB \approx 88^\circ$$

- b) Mặt phẳng (OAB) vuông góc với đường nóc nhà, đường nóc nhà song song với mặt phẳng đất nên mặt phẳng (OAB) vuông góc với mặt phẳng đất.

c)
$$\sin \angle ABH = \frac{0,5}{4,8} \Rightarrow \angle ABH \approx 6^\circ; \cos \angle OBA = \frac{13}{16} \Rightarrow \angle OBA \approx 36^\circ$$

Do đó $\angle OBH = \angle ABH + \angle OBA \approx 42^\circ$

Câu 54. Một con dốc có dạng hình lăng trụ đứng tam giác với kích thước như trong Hình.



- a) Tính số đo góc giữa đường thẳng CA' và $(CC'B'B)$.
- b) Tính số đo góc nhị diện cạnh CC' .

Lời giải

a) Góc giữa CA' và $(CC'B'B)$ là $\angle A'CB'$

Ta có: $CB' = \sqrt{10^2 + 12^2} = 2\sqrt{61}$, $\tan \angle A'CB' = \frac{A'B'}{CB'} = 0,256$. Nên $\angle A'CB' = 14,36^\circ$

b) Góc nhị diện cạnh CC' là $\angle ACB$

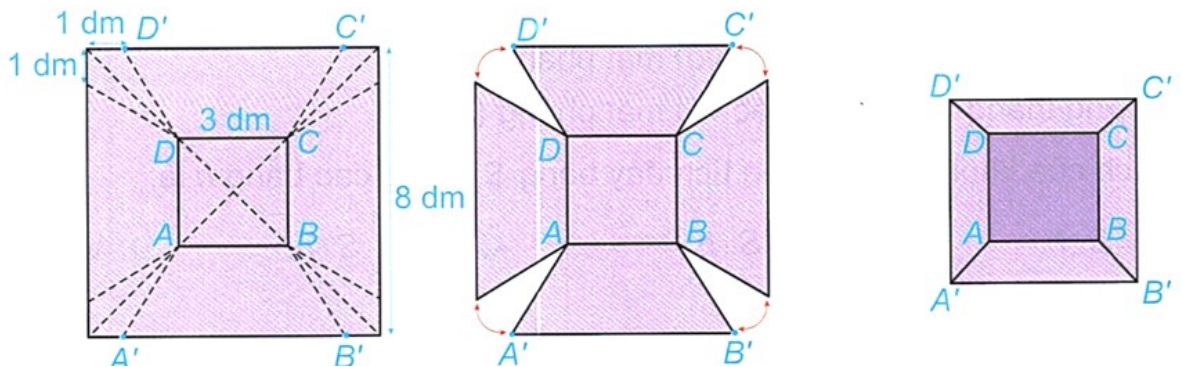
Ta có: $\tan \angle ACB = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{3}$. Nên $\angle ACB = 18,4^\circ$.

Câu 55. Từ một tấm tôn hình vuông có cạnh $8dm$, bác Hùng cắt bỏ bốn phần như nhau ở bốn góc, sau đó bác hàn các mép lại để được một chiếc thùng (không có nắp) như Hình.

a) Giải thích vì sao chiếc thùng có dạng hình chóp cụt.

b) Tính cạnh bên của thùng.

c) Hỏi thùng có thể chứa được nhiều nhất bao nhiêu lít nước?



Lời giải

a) Vì $AB \parallel A'B' \Rightarrow AB \parallel (A'B'C'D)$, $AD \parallel A'D' \Rightarrow AD \parallel (A'B'C'D)$. Do đó $(ABCD) \parallel (A'B'C'D)$.

b) Cạnh bên của hình chóp cụt bằng $\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{34}}{2} (dm)$.

c) Xét mặt chứa đường chéo của hình vuông, nó là hình thang cân có chiều cao bằng chiều cao của

hình chóp cụt và tính ra được $h = \sqrt{\frac{34}{4} - \frac{18}{4}} = 2(dm)$.

Thể tích cần tìm là $V = 42$ lít.

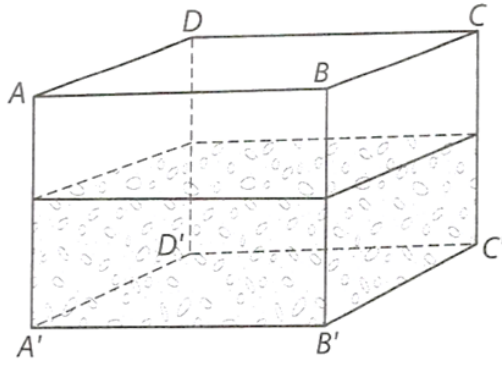
Câu 56. Một thùng nước có dạng hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$, $AB = 5m$, $AA' = 3m$, $AD = 4m$.

Đáy bể là hình chữ nhật $A'B'C'D'$ được đặt trên một mặt phẳng nằm ngang.

a) Giải thích vì sao khi nước trong bể phẳng lặng, thì phần nước đó ứng với một khối hộp chữ nhật.

b) Tính mức nước trong bể (khoảng cách từ mặt nước đến đáy bể) khi thể tích phần nước trong bể là $40m^3$.

Giải.



a) Vì mặt phẳng chứa bề mặt nước song song với mặt đáy nên phần nước trong bể là khối hình lăng trụ đứng, có đáy $A'B'C'D'$ là hình chữ nhật nên phần nước trong bể là khối hộp chữ nhật.

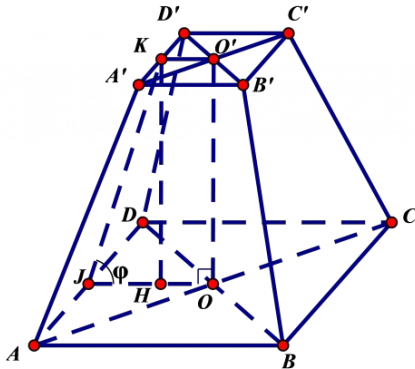
b) Mực nước trong bể là $h = \frac{40}{4 \cdot 5} = 2(m)$.

Câu 57. Một chân cột bằng gang có dạng hình chóp cụt tứ giác đều có cạnh đáy lớn bằng $2a$, cạnh đáy nhỏ bằng a , chiều cao $h = 2a$ và bán kính đáy phân trụ rỗng bên trong bằng $\frac{a}{2}$.

a) Tìm góc phẳng nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy.

b) Tính thể tích chân cột nói trên theo a .

Lời giải



a) Kẻ $OJ \perp AD, O'K \perp A'D', KH \perp OJ$

Ta có: $O'K = OH = \frac{a}{2}$

$OJ = \frac{2a}{2} = a, JH = OJ - OH = \frac{a}{2}, KH = OO' = 2a$

Góc tạo bởi mặt bên và mặt đáy là $\widehat{KIH}$

$\tan \widehat{KIH} = \frac{KH}{JH} = 4$. Vậy $\widehat{KIH} = 76^\circ$

b) Thể tích chân cột là: $\frac{1}{3} \cdot 2a \left(a^2 + \sqrt{a^2 \cdot (2a)^2} + (2a)^2 \right) - 2a \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{2} \right)^2 = \left(\frac{14}{3} - \frac{\pi}{2} \right) a^3$