

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Tìm cực trị của hàm số dựa vào bảng biến thiên, đồ thị của hàm số y, y'

- Định lý cực trị

□ **Điều kiện cần (định lý 1):** Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ và đạt cực đại (hoặc cực tiểu) tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

□ **Điều kiện đủ (định lý 2):**

Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua điểm x_0 (theo chiều tăng) thì hàm số $y = f(x)$

đạt **cực tiểu** tại điểm x_0 .

Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x đi qua điểm x_0 (theo chiều tăng) thì hàm số $y = f(x)$

đạt **cực đại** tại điểm x_0 .

□ **Định lý 3:** Giả sử $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trong khoảng $(x_0 - h; x_0 + h)$, với $h > 0$. Khi đó:

Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu.

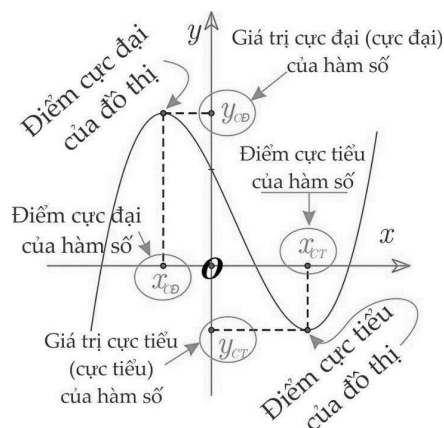
Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại.

- Các THUẬT NGỮ cần nhớ

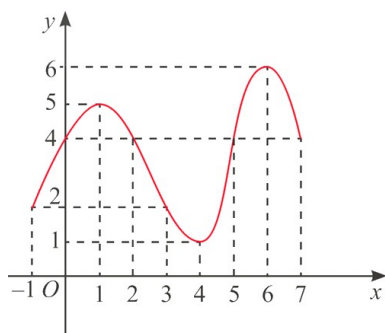
□ Điểm cực đại (cực tiểu) của hàm số là x_0 , giá trị cực đại (cực tiểu) của hàm số là $f(x_0)$ (hay y_{CD} hoặc y_{CT}). Điểm cực đại của đồ thị hàm số là $M(x_0; f(x_0))$.

□ Nếu $M(x_0; y_0)$ là điểm cực trị của đồ thị hàm số

$$y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ M(x_0; y_0) \in y = f(x) \end{cases}$$



Câu 1. Tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị được cho ở Hình.



Lời giải

Hàm số $y = f(x)$ có:

- $x = 1$ là điểm cực đại vì $f(x) < f(1)$ với mọi $x \in (0; 2) \setminus \{1\}$, $y_{CD} = f(1) = 5$;
- $x = 6$ là điểm cực đại vì $f(x) < f(6)$ với mọi $x \in (5; 7) \setminus \{6\}$, $y_{CD} = f(6) = 6$;
- $x = 4$ là điểm cực tiểu vì $f(x) > f(4)$ với mọi $x \in (3; 5) \setminus \{4\}$, $y_{CT} = f(4) = 1$.

Câu 2. Xét hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(-1; 4)$, ta có bảng biến thiên như sau:

x	-1	1	2	3	4
$f'(x)$	-	-	0	+	+
$f(x)$		-1	-5	-1	

$x_0 = 2$ là điểm cực tiểu hay điểm cực đại của hàm số đã cho? Tìm giá trị cực trị tương ứng.

Lời giải

Theo định nghĩa, ta có thể chọn $h = 1$, ta có $x_0 - h = 1, x_0 + h = 3$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $f(x) > f(2), \forall x \in (1; 3) \setminus \{2\}$, suy ra $x_0 = 2$ là điểm cực tiểu của hàm số, giá trị cực tiểu của hàm số là $f(2) = -5$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		-	+
$f(x)$	$-\infty$	2	-3	$+\infty$

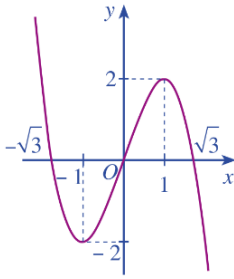
Xác định các cực trị của hàm số $f(x)$.

Lời giải

Ta có $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (-\infty; 0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (0; 1)$ nên hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $f_{CB} = f(0) = 2$.

Ta có $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (0; 1)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (1; +\infty)$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và $f_{CT} = f(1) = -3$.

Câu 4. Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x) = -x^3 + 3x$ ở Hình, hãy chỉ ra các điểm cực trị của hàm số đó.



Lời giải

- Xét khoảng $(-\sqrt{3}; 0)$ chứa điểm $x = -1$. Quan sát đồ thị của hàm số $y = f(x) = -x^3 + 3x$ ở Hình, ta thấy: $f(x) > f(-1)$ với mọi $x \in (-\sqrt{3}; 0)$ và $x \neq -1$.

Vậy $x = -1$ là điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$.

- Xét khoảng $(0; \sqrt{3})$ chứa điểm $x = 1$. Quan sát đồ thị của hàm số $y = f(x) = -x^3 + 3x$ ở Hình, ta thấy: $f(x) < f(1)$ với mọi $x \in (0; \sqrt{3})$ và $x \neq 1$.

Vậy $x = 1$ là điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$.

Dạng 2. Tìm cực trị của hàm số khi biết y, y'

★ **Bài toán:** Tìm các điểm cực đại, cực tiểu (nếu có) của hàm số $y = f(x)$.

🔧 **Phương pháp:** Sử dụng 2 qui tắc tìm cực trị sau:

Quy tắc I: sử dụng nội dung định lý 1

- **Bước 1.** Tìm tập xác định D của hàm số.
- **Bước 2.** Tính đạo hàm $y' = f'(x)$. Tìm các điểm $x_i, (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
- **Bước 3.** Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.
- **Bước 4.** Từ bảng biến thiên, suy ra các điểm cực trị (dựa vào nội dung định lý 1).

Quy tắc II: sử dụng nội dung định lý 2

- **Bước 1.** Tìm tập xác định D của hàm số.
- **Bước 2.** Tính đạo hàm $y' = f'(x)$. Giải phương trình $f'(x) = 0$ và kí hiệu $x_i, (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ là các nghiệm của nó.
- **Bước 3.** Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$.
- **Bước 4.** Dựa vào dấu của $f''(x_i)$ suy ra tính chất cực trị của điểm x_i :
 + Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_i .
 + Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_i .

Câu 5. Tìm cực trị của hàm số $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 1$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 6x^2 - 18x - 24$;

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 4$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	4	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	14	-111	$+\infty$	

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = -1, y_{CD} = f(-1) = 14$; hàm số đạt cực tiểu tại $x = 4, y_{CT} = f(4) = -111$.

Câu 6. Tìm cực trị của hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$;

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$

Vậy hàm số không có cực trị.

Câu 7. Tìm cực trị của hàm số $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{1}{3}$.

Lời giải

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Ta có $y' = x^2 - 2x - 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	$-\frac{26}{3}$	$+\infty$	

Từ bảng biến thiên, suy ra $x = -1$ là điểm cực đại của hàm số, $f_{CD} = 2$; $x = 3$ là điểm cực tiểu của hàm số, $f_{CT} = -\frac{26}{3}$.

Câu 8. Tìm điểm cực trị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$.

Lời giải

- Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R}$.

- Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - 9$; $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 3$.

Bảng biến thiên của hàm số như sau:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	16	-16	$+\infty$	

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ và đạt cực tiểu tại $x = 3$.

Câu 9. Tìm điểm cực trị của hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$.

Lời giải

- Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

- Ta có: $y' = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$ với $x \neq -1$;

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = -2$ hoặc $x = 0$.

Bảng biến thiên của hàm số như sau:

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-3	$+\infty$	1	$+\infty$	

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = -2$ và đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x+2)^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Xác định số điểm cực trị của hàm số đã cho

Lời giải

Phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+2)^3 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Do $f'(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt và $f'(x)$ đổi dấu qua ba nghiệm này nên hàm số có ba điểm cực trị.

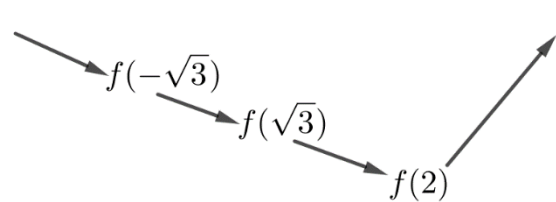
Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-2)(x^2-3)(x^4-9)$. Xác định số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$

Lời giải

$$f'(x) = (x-2)(x^2-3)^2(x^2+3) = (x-2)(x-\sqrt{3})^2(x+\sqrt{3})^2(x^2+3)$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+\sqrt{3})^2(x-\sqrt{3})^2(x^2+3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ x=\sqrt{3} \\ x=2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	2	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$						

Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$, ta thấy hàm số $y=f(x)$ có đúng 1 điểm cực trị.

Dạng 3. Tìm m để hàm số đạt cực trị tại $x=x_0$

Bước 1. Tính $y'(x_0), y''(x_0)$

Bước 2. Giải phương trình $y'(x_0)=0 \Rightarrow m?$

Bước 3. Thế m vào $y''(x_0)$ nếu giá trị $\begin{cases} y'' > 0 \rightarrow x_0 = CT \\ y'' < 0 \rightarrow x_0 = CD \end{cases}$

Câu 12. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+mx+1$ đạt cực tiểu tại $x=2$.

Lời giải

$$y'=3x^2-6x+m; y''=6x-6$$

$$x=2 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(2)=0 \\ y''(2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ 6>0 \end{cases} \Leftrightarrow m=0$$

Hàm số đạt cực tiểu tại

Câu 13. (THPT Đoàn Thượng - Hải Dương 2019) Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số

$$y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-4)x+3$$

đạt cực đại tại $x=3$.

Lời giải

Tập xác định $\mathbb{R}$.

$$Ta\ có\ y'=x^2-2mx+m^2-4,\ y''=2x-2m.$$

Để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-4)x+3$ đạt cực đại tại $x=3$ thì

$$\begin{cases} y'(3)=0 \\ y''(3)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 5 = 0 \\ 6 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=5 \\ m=1 \Leftrightarrow m=5. \\ 3 < m \end{cases}$$

Câu 14. (THPT Thăng Long - Hà Nội - Lần 2 - 2019) Tìm tập hợp tất cả các giá trị của m để hàm số $y = x^3 + (3m - 1)x^2 + m^2x - 3$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 + 2(3m - 1)x + m^2 \Rightarrow y'' = 6x + 6m - 2$.

$$x = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(-1) = 0 \\ f''(-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 5 = 0 \\ 6m - 8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 5 \\ m > \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = 5$$

Hàm số đạt cực tiểu tại

Dạng 4. Tìm m để hàm số có n cực trị

⌚ Hàm số có n cực trị $\hat{y} = 0$ có n nghiệm phân biệt.

⌚ Xét hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$:

+ Hàm số có hai điểm cực trị khi $\begin{cases} a \neq 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$

+ Hàm số không có cực trị khi $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép.

⌚ Xét hàm số bậc bốn trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$.

+ Hàm số có ba cực trị khi $ab < 0$. + Hàm số có 1 cực trị khi $ab \geq 0$.

Câu 15. (Chuyên Sơn La - Lần 2 - 2019) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = -x^4 - (m - 3)x^2 + m + 1$ có điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu

Lời giải

$$y' = -4x^3 - 2(m - 3)x = -2x(2x^2 + m - 3)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{3 - m}{2} \end{cases}$$

Vì hàm số đã cho là hàm trùng phương với $a = -1 < 0$ nên hàm số có điểm cực đại mà không có

điểm cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có đúng 1 nghiệm bằng 0 $\Leftrightarrow \frac{3 - m}{2} \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 3$.

Câu 16. (Quang Trung - Bình Phước - Lần 5 - 2019) Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số có 3 cực trị

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases} (*)$$

Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt $x \neq 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Câu 17. (THPT Ba Đình 2019) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2mx + m$ có cực đại và cực tiểu?

Lời giải

+ TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$+ y' = 3x^2 - 6x + 2m$$

+ Hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \Delta = 36 - 24m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{3}{2}.$$

Câu 18. (THPT Yên Định Thanh Hóa 2019) Cho hàm số $y = mx^4 + (2m+1)x^2 + 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có đúng một điểm cực tiểu.

Lời giải

Với $m = 0$, ta có $y = x^2 + 1 \Rightarrow y' = 2x$. Khi đó hàm số có 1 cực trị và cực trị đó là cực tiểu. Suy ra $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. (1)

Với $m \neq 0$, ta có $y' = 4mx^3 + 2(2m+1)x = 2x(2mx^2 + 2m + 1)$

Hàm số có một cực trị là cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 2mx^2 + 2m + 1 = 0 \text{ vô nghiệm} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \frac{-2m-1}{2m} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < \frac{-1}{2} \Leftrightarrow m > 0 \\ m > 0 \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra hàm số có một cực trị là cực tiểu khi $m \geq 0$.

Dạng 5. Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị

Phương trình hai đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của hàm số bậc ba là phần dư của phép chia của y cho y'

$$y = y' \cdot q(x) + h(x) \Rightarrow \begin{cases} y_1 = h(x_1) \\ y_2 = h(x_2) \end{cases}$$

◦ Phân tích (bằng cách chia đa thức y cho y'):

◦ Đường thẳng qua 2 điểm cực trị là $y = h(x)$.

Câu 19. (THPT Xuân Hòa-Vĩnh Phúc- 2018) Biết đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có hai điểm cực trị A , B . Viết phương trình đường thẳng AB

Lời giải

Thực hiện phép chia y cho y' ta được: $y = y' \cdot \left(\frac{1}{3}x\right) + (-2x+1)$.

Giả sử hai điểm cực trị của đồ thị hàm số lần lượt là: $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$.

$$\begin{cases} y_1 = y(x_1) = y'(x_1) \cdot \left(\frac{1}{3}x_1\right) + (-2x_1+1) = -2x_1+1 \\ y_2 = y(x_2) = y'(x_2) \cdot \left(\frac{1}{3}x_2\right) + (-2x_2+1) = -2x_2+1 \end{cases}$$

Ta có:

Ta thấy, tọa độ hai điểm cực trị A và B thỏa mãn phương trình $y = -2x + 1$.

Vậy phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị là: $y = -2x + 1$.

- Câu 20. (Mã 104 - 2017)** Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (2m-1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$. Từ đó ta có tọa độ hai điểm cực trị $A(0; 1)$, $B(2; -3)$. Đường thẳng qua hai điểm cực trị có phương trình $y = -2x + 1$. Đường thẳng này vuông góc với đường thẳng $y = (2m-1)x + 3 + m$ khi và chỉ khi $(2m-1)(-2) = -1 \Leftrightarrow m = \frac{3}{4}$.

- Câu 21. (Lương Văn Chánh - Phú Yên – 2018)** Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (3m+1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

Lời giải

Xét hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$

Có: $y' = 3x^2 - 6x$ $y = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)y' - 2x - 1$

Do đó, đường thẳng Δ qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số này có phương trình là $y = -2x - 1$.

Để d vuông góc với Δ thì $(3m+1)(-2) = -1 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{6}$.

Vậy giá trị cần tìm của m là $m = -\frac{1}{6}$.

Dạng 6. Tìm m để hàm số bậc 3 có cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước

★ **Bài toán tổng quát:** Cho hàm số $y = f(x; m) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tìm tham số m để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện K cho trước?

👉 **Phương pháp:**

— **Bước 1.** Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Tính đạo hàm: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

— **Bước 2.** Để hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt
 $\Leftrightarrow \begin{cases} a_{y'} = 3a \neq 0 \\ \Delta_{y'} = (2b)^2 - 4 \cdot 3a \cdot c > 0 \end{cases}$ và giải hệ này sẽ tìm được $m \in D_1$.

— **Bước 3.** Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $y' = 0$. Theo Viét, ta có:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

— **Bước 4.** Biến đổi điều kiện K về dạng tổng S và tích P . Từ đó giải ra tìm được $m \in D_2$.

— **Bước 5.** Kết luận các giá trị m thỏa mãn: $m = D_1 \cap D_2$.

Lưu ý:

— Hàm số bậc 3 không có cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ không có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta_{y'} \leq 0$.

— Trong trường hợp điều kiện K liên quan đến hình học phẳng, tức là cần xác định tọa độ 2 điểm cực trị $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ với x_1, x_2 là 2 nghiệm của $y' = 0$. Khi đó có 2 tình huống thường gặp sau:

- Nếu giải được nghiệm của phương trình $y' = 0$, tức tìm được x_1, x_2 cụ thể, khi đó ta sẽ thế vào hàm số đầu đề $y = f(x; m)$ để tìm tung độ y_1, y_2 tương ứng của A và B .

- Nếu tìm không được nghiệm $y' = 0$, khi đó gọi 2 nghiệm là x_1, x_2 và tìm tung độ y_1, y_2 bằng cách thế vào phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị.

Để viết phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị, ta thường dùng phương pháp tách đạo hàm (phần dư bậc nhất trong phép chia y cho y'), nghĩa là:

$$y = y' \cdot q(x) + h(x) \Rightarrow \begin{cases} y_1 = h(x_1) \\ y_2 = h(x_2) \end{cases}$$

◦ Phân tích (bằng cách chia đa thức y cho y'):

◦ Đường thẳng qua 2 điểm cực trị là $y = h(x)$.

Dạng toán: Tìm tham số m để các hàm số sau có cực trị thỏa điều kiện cho trước (**cùng phía, khác phía**):

Vị trí tương đối giữa 2 điểm với đường thẳng:

Cho 2 điểm $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ và đường thẳng $d: ax + by + c = 0$. Khi đó:

- Nếu $(ax_A + by_A + c) \cdot (ax_B + by_B + c) < 0$ thì A, B nằm về 2 phía so với đường thẳng d .
- Nếu $(ax_A + by_A + c) \cdot (ax_B + by_B + c) > 0$ thì A, B nằm cùng phía so với đường d .

Trường hợp đặc biệt:

- Để hàm số bậc ba $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị nằm cùng phía so với trục tung $Oy \Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm trái dấu và ngược lại.
- Để hàm số bậc ba $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị nằm cùng phía so với trục hoành $Ox \Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình

hoành độ giao điểm $f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt (áp dụng khi nhẩm được nghiệm).

Dạng toán: Tìm m để các hàm số sau có cực trị thỏa điều kiện cho trước (**đối xứng và cách đều**):

★ **Bài toán 1.** Tìm m để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị A, B đối xứng nhau qua đường d :

— **Bước 1.** Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu $\Rightarrow m \in D_1$.

— **Bước 2.** Tìm tọa độ 2 điểm cực trị A, B . Có 2 tình huống thường gặp:

+ Một là $y'=0$ có nghiệm đẹp x_1, x_2 , tức có $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.

+ Hai là $y'=0$ không giải ra tìm được nghiệm. Khi đó ta cần viết phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị là Δ và lấy $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2) \in \Delta$.

— **Bước 3.** Gọi $I\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Do A, B đối xứng qua d nên thỏa hệ
$$\begin{cases} \Delta \perp d \\ I \in d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB \perp d \\ I \in d \end{cases} \Rightarrow m \in D_2.$$

— **Bước 4.** Kết luận $m = D_1 \cap D_2$.

★ **Bài toán 2.** Tìm m để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị A, B cách đều đường thẳng d :

— **Bước 1.** Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu $\Rightarrow m \in D_1$.

— **Bước 2.** Tìm tọa độ 2 điểm cực trị A, B . Có 2 tình huống thường gặp:

+ Một là $y'=0$ có nghiệm đẹp x_1, x_2 , tức có $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.

+ Hai là $y'=0$ không giải ra tìm được nghiệm. Khi đó ta cần viết phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị là Δ và lấy $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2) \in \Delta$.

— **Bước 3.** Do A, B cách đều đường thẳng d nên $d(A; d) = d(B; d) \Rightarrow m \in D_2$.

— **Bước 4.** Kết luận $m = D_1 \cap D_2$.

□ **Lưu ý:** Để 2 điểm A, B đối xứng nhau qua điểm $I \Leftrightarrow I$ là trung điểm AB .

Câu 22. Với giá trị nào của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ có hai điểm cực trị A, B thỏa mãn $OA = OB$ (O là gốc tọa độ)?

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 6x, \quad y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Do đó đồ thị hàm số đã cho luôn có hai điểm cực trị lần lượt có tọa độ là $A(0; m)$ và $B(2; -4 + m)$

$$\text{Ta có } OA = OB \Leftrightarrow \sqrt{0^2 + m^2} = \sqrt{2^2 + (4 - m)^2} \Leftrightarrow m^2 = 4 + (4 - m)^2 \Leftrightarrow 20 - 8m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{5}{2}$$

Câu 23. (Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020) Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3}$ có hai điểm cực trị có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = 2x^2 - 2mx - 2(3m^2 - 1) = 2(x^2 - mx - 3m^2 + 1)$$

$$g(x) = x^2 - mx - 3m^2 + 1; \quad \Delta = 13m^2 - 4$$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi y' có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow g(x) \text{ có hai nghiệm phân biệt}$$

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{2\sqrt{13}}{13} \\ m < -\frac{2\sqrt{13}}{13} \end{cases} \quad (*)$$

$$x_1, x_2 \text{ là các nghiệm của } g(x) \text{ nên theo định lý Vi-ét, ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = -3m^2 + 1 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1 \Leftrightarrow -3m^2 + 2m + 1 = 1 \Leftrightarrow -3m^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện (*), ta thấy chỉ $m = \frac{2}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 24. (Chuyên Hạ Long 2019) Cho hàm số $y = x^3 - (2m + 1)x^2 + (m + 1)x + m - 1$. Có bao nhiêu giá trị của số tự nhiên $m < 20$ để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành?

Lời giải

$$+ \text{ Ta có: } y = (x - 1)(x^2 - 2mx + 1 - m)$$

+ Hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành khi và chỉ khi đồ thị y cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt. $\Leftrightarrow y = (x - 1)(x^2 - 2mx + 1 - m) = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow x^2 - 2mx + 1 - m = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt khác } 1.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 1 > 0 \\ 2 - 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \\ m > \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ m \neq \frac{2}{3} \end{cases}$$

+ Do $m \in \mathbb{N}, m < 20$ nên $1 \leq m < 20$. Vậy có 19 số tự nhiên thỏa mãn bài toán.

Câu 25. (Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2018) Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3$, với m là tham số; gọi (C) là đồ thị của hàm số đã cho. Biết rằng khi m thay đổi, điểm cực đại của đồ thị (C) luôn nằm trên một đường thẳng d cố định. Xác định hệ số góc k của đường thẳng d .

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1)$ và $y'' = 6x - 6m$.

Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1) = 0$

$\Delta' = 9m^2 - 9(m^2 - 1) = 9$ nên hàm số luôn có hai điểm cực trị $x = \frac{3m+3}{3} = m+1$ và $x = \frac{3m-3}{3} = m-1$

$y''(m-1) = 6(m-1) - 6m = -6 < 0 \Rightarrow x = m-1$ là điểm cực đại của hàm số

$\Rightarrow A(m-1; -3m+2)$ là điểm cực đại của đồ thị (C) .

$$\begin{cases} x_A = m-1 \\ y_A = -3m+2 \Rightarrow y_A = -3x_A - 1 \end{cases}$$

Ta có

$\Rightarrow A$ luôn thuộc đường thẳng d có phương trình $y = -3x - 1$.

Do đó hệ số góc k của đường thẳng d là -3 .

Câu 26. (THPT Nam Trực - Nam Định - 2018) Cho hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + 2$. Hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 1$ khi $m = a$ và $m = b$. Hãy tính tổng $a + b$.

Lời giải

Có $y' = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2)$

Hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 1$ suy ra $x_2 = \frac{2-m}{m}$.

Do $x_2 = \frac{2-m}{m}$ là nghiệm của phương trình $mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2) = 0$ nên

$$m\left(\frac{2-m}{m}\right)^2 - 2(m-1)\left(\frac{2-m}{m}\right) + 3(m-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Thử lại thấy $\begin{cases} m=2 \\ m=\frac{2}{3} \end{cases}$ đều thỏa mãn yêu cầu bài toán.
 $a+b=\frac{8}{3}$.
 Vậy

Dạng 7. Tìm m để hàm số trùng phương có cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước

Một số công thức tính nhanh “thường gặp”

liên quan cực trị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$

1 cực trị: $ab \geq 0$		3 cực trị: $ab < 0$	
$a > 0$: 1 cực tiểu	$a < 0$: 1 cực đại	$a > 0$: 1 cực đại, 2 cực tiểu	$a < 0$: 2 cực đại, 1 cực tiểu

$$A(0; c), B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right), C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}}, BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$$

với $\Delta = b^2 - 4ac$

Phương trình qua điểm cực trị: $BC: y = -\frac{\Delta}{4a}$ và $AB, AC: y = \pm \left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}\right)^3 x + c$

Gọi $\angle BAC = \alpha$, luôn có: $8a(1 + \cos\alpha) + b^3(1 - \cos\alpha) = 0 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a}$ và $S^2 = -\frac{b^5}{32a^3}$

Phương trình đường tròn đi qua $A, B, C: x^2 + y^2 - (c+n)x + c.n = 0$, với $n = \frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a}$ và bán kính

$$R = \left| \frac{b^3 - 8a}{8ab} \right|$$

đường tròn ngoại tiếp tam giác là

Câu 27. (THPT Minh Châu Hưng Yên 2019) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + m + 4$ có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác đều?

Lời giải

Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó, 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0; m+4)$, $B(|m|; -m^4 + m + 4)$, $C(-|m|; -m^4 + m + 4)$.

Tam giác ABC có $AB = AC$ nên tam giác ABC cân tại A , suy ra tam giác ABC đều

$$\Leftrightarrow AB = BC \Leftrightarrow \sqrt{m^2 + m^8} = 2|m| \Leftrightarrow m^8 + m^2 = 4m^2 \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=\pm\sqrt[6]{3} \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện ta được $m \in \left[-\sqrt[6]{3}; \sqrt[6]{3}\right]$.

Câu 28. (THPT Quang Trung Đồng Đa Hà Nội 2019) Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ có 3 điểm cực trị lập thành một tam giác vuông cân.

Lời giải

$$y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$$

+ Cách 1:

Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow ab < 0 \Leftrightarrow -2m^2 < 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

$$y' = 4x^3 - 4m^2x$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4m^2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x(x^2 - m^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = m \\ x_3 = -m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = -m^4 + 1 \\ y_3 = -m^4 + 1 \end{cases}$$

Giả sử $A(0;1)$, $B(m; -m^4 + 1)$, $C(-m; -m^4 + 1)$ là 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số.

$$\overline{AB} = (m; -m^4) \Rightarrow AB = \sqrt{m^2 + m^8}$$

$$\overline{AC} = (-m; -m^4) \Rightarrow AC = \sqrt{m^2 + m^8}$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại A

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{AB} = \overline{AC} \\ \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{R} \\ -m^2 + m^8 = 0 \Leftrightarrow -m^2(1 - m^6) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \quad (l) \\ m = 1 \quad (n) \\ m = -1 \quad (n) \end{cases}$$

Vậy $m \in \{-1; 1\}$.

+ Cách 2: (Áp dụng công thức tính nhanh cực trị hàm trùng phương)

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} ab < 0 \\ \frac{-8a}{b^3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m^2 < 0 \\ \frac{-8}{(-2m^2)^3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^6 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m = 1 \quad (n) \\ m = -1 \quad (n) \end{cases}$$

Vậy $m \in \{-1; 1\}$.

Câu 29. (Toán Học Tuổi Trẻ Số 5) Tìm tất cả các giá trị m sao cho đồ thị hàm số $y = x^4 + (m+1)x^2 - 2m - 1$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác có một góc bằng 120° .

Lời giải

Ta có $y' = 4x^3 + 2(m+1)x = 2x(2x^2 + m+1)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 = -m-1 \end{cases}$$

Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow m+1 < 0 \Leftrightarrow m < -1.$$

Khi đó

$A(0; -2m-1)$, $B\left(-\sqrt{\frac{-m-1}{2}}; -\frac{(m+1)^2}{4} - 2m-1\right)$, $C\left(\sqrt{\frac{-m-1}{2}}; -\frac{(m+1)^2}{4} - 2m-1\right)$, là các điểm cực trị của đồ thị.

Ta thấy $AB = AC = \sqrt{-\frac{m+1}{2} + \frac{(m+1)^4}{16}}$ nên tam giác ABC cân tại A .

Từ giả thiết suy ra $A = 120^\circ$.

Gọi H là trung điểm BC , ta có $H\left(0; -\frac{(m+1)^2}{4} - 2m-1\right)$

$$BH = AH \tan 60^\circ \Leftrightarrow \frac{(m+1)^2}{4} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{-\frac{m+1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(m+1)^4}{16} = -\frac{m+1}{2} \Leftrightarrow 3(m+1)^3 = -8 \Leftrightarrow m = -1 - \frac{2}{\sqrt[3]{3}}$$

Câu 30. (CHUYÊN ĐHS PHN - 2018) Gọi A, B, C là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$. Tìm bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC

Lời giải

$$\begin{aligned} y' &= 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow A(0; 4) \\ x = -1 \Rightarrow B(-1; 3) \\ x = 1 \Rightarrow C(1; 3) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\overline{AB} = (-1; -1) \Rightarrow AB = \sqrt{2}, \quad \overline{AC} = (1; -1) \Rightarrow AC = \sqrt{2}, \quad \overline{BC} = (2; 0) \Rightarrow BC = 2$$

$$\text{Ta có } \triangle ABC \text{ vuông cân tại } A \text{ có } S = \frac{1}{2}(\sqrt{2})^2 = 1, \quad p = \frac{AB + AC + BC}{2} = \sqrt{2} + 1$$

$$\text{Vậy } r = \frac{S}{p} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$$

Câu 31. (Liên Trường - Nghệ An -2018) Tìm giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$.

Lời giải

Ta có: $y = x^4 + 2mx^2 - 1 \Rightarrow y' = 4x^3 + 4mx$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -m \end{cases} \quad (1).$$

Để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 - 1$ có ba điểm cực trị thì $y' = 0$ phải có ba nghiệm phân biệt tức là $m < 0$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{-m} \end{cases}$ nên ta gọi $A(0; -1)$, $B(-\sqrt{-m}; -m^2 - 1)$, $C(\sqrt{-m}; -m^2 - 1)$

Tam giác ABC cân tại A nên $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC$ với H là trung điểm của BC nên $H(0; -m^2 - 1)$.
Nên: $AH = \sqrt{(-m^2)^2} = m^2$ và $BC = \sqrt{(2\sqrt{-m})^2} = 2\sqrt{-m}$

Ta có: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} m^2 \cdot 2\sqrt{-m}$ theo giả thiết $S_{\triangle ABC} = 4\sqrt{2}$ nên $m^2 \sqrt{-m} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow m = -2$.

Câu 32. (THPT Triệu Thị Trinh - 2018) Cho hàm số: $y = x^4 + 2mx^2 + m^2 + m$. Tìm m để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị lập thành tam giác có một góc bằng 120° .

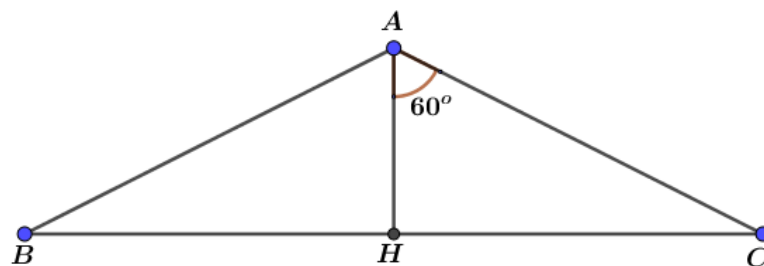
Lời giải

$$y' = 4x^3 + 4mx = 4x(x^2 + m)$$

Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m < 0$.

$$\text{Khi đó } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{-m} \end{cases}$$

Ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0; m^2 + m)$, $B(\sqrt{-m}; m)$, $C(-\sqrt{-m}; m)$.



Do $\triangle ABC$ cân tại A nên gọi $H(0; m)$ là trung điểm của BC thì $\triangle AHC$ vuông tại H .

$\triangle ABC$ có một góc bằng 120° khi và chỉ khi $\angle HAB = \angle HAC = 60^\circ \Leftrightarrow HB = AH \cdot \tan \angle HAB$
 $\Leftrightarrow \sqrt{-m} = m^2 \sqrt{3} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Bỏ cặp ngoặc.

Câu 33. Hãy tìm tất cả của tham số e để hàm số $y = 3x^4 + 2x^3 + ex$ có đúng ba điểm cực trị
Lời giải

Ta có: $y' = 12x^3 + 6x^2 + e$ Xét phương trình $12x^3 + 6x^2 = -e$. (1)

Để hàm số có ba điểm cực trị thì phương trình (1) phải có 3 nghiệm phân biệt.

Xét hàm số $g(x) = 12x^3 + 6x^2$

Bảng biến thiên của $g(x)$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$\nearrow \frac{2}{9}$	$\searrow 0$	$\nearrow +\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy, phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt khi
 $0 < -e < \frac{2}{9} \Leftrightarrow -\frac{2}{9} < e < 0$

Dạng 8. Tìm m để hàm số bậc 2 trên bậc 1 có cực trị thỏa mãn yêu cầu bài toán

Câu 34. (ĐHQG Hà Nội - 2020) Tìm tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 - mx}{1 - x}$ có cực đại và cực tiểu
Lời giải

Điều kiện $x \neq 1$.

Ta có $y = \frac{x^2 - mx}{1 - x} \Rightarrow y' = \frac{-x^2 + 2x - m}{(1 - x)^2}$

Hàm số $y = \frac{x^2 - mx}{1 - x}$ có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và đổi dấu khi đi qua hai điểm đó $\Leftrightarrow -x^2 + 2x - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ -1 + 2 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m > 0 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < 1$

Vậy $m < 1$ thì hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu.

Câu 35. (THPT Nam Trực - Nam Định - 2018) Tìm tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 - 2mx + m + 2}{2x - 2m}$ có cực đại và cực tiểu

Lời giải

Điều kiện: $x \neq m$.

$$y' = \frac{x^2 - 2mx + 2m^2 - m - 2}{2(x - m)^2}$$

Đạo hàm

Để hàm số có cực đại và cực tiểu, thì $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 2m^2 - m - 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác m .

Ta có:
$$\begin{cases} \Delta' = -m^2 + m + 2 > 0 \\ m^2 - 2m \cdot m + 2m^2 - m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 2 \\ m^2 - m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow -1 < m < 2 \end{cases}$$

Dạng 9. Bài toán cực trị hàm số chứa dấu trị tuyệt đối

Bài toán: Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị

$$y = f(x) = \sqrt{f^2(x)} \Rightarrow y' = \frac{2f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$$

(Áp dụng định nghĩa).

$$y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 0(1) \\ f'(x) = 0(2) \end{cases}$$

Số nghiệm của ⁽¹⁾ chính là số giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ và trục hoành $y = 0$. Còn số nghiệm của ⁽²⁾ là số cực trị của hàm số $y = f(x)$, dựa vào đồ thị suy ra ⁽²⁾. Vậy tổng số nghiệm bội lẻ của ⁽¹⁾ và ⁽²⁾ chính là số cực trị cần tìm.

Câu 36. (Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019) Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = |x^4 - 2mx^2 + 2m^2 + m - 12|$ có bảy điểm cực trị

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = |x^4 - 2mx^2 + 2m^2 + m - 12|$ có bảy điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m^2 + m - 12$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt

$x^4 - 2mx^2 + 2m^2 + m - 12 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m^2 - (2m^2 + m - 12) > 0 \\ 2m > 0 \\ 2m^2 + m - 12 > 0 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} -4 < m < 3 \\ m > 0 \\ m < \frac{-1 - \sqrt{97}}{4} \cup m > \frac{-1 + \sqrt{97}}{4} \cup \frac{-1 + \sqrt{97}}{4} < m < 3 \end{cases}$$

Vậy không có giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = |x^4 - 2mx^2 + 2m^2 + m - 12|$ có bảy điểm cực trị.

Câu 37. (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019) Cho hàm số $y = |x^4 - 2mx^2 + 2m - 1|$ với m là tham số thực. Tìm số giá trị nguyên trong khoảng $[-2; 2]$ của m để hàm số đã cho có 3 điểm cực trị

Lời giải

Đặt $f(x) = x^4 - 2mx^2 + 2m - 1$, $f'(x) = 4x^3 - 4mx$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$

+ **Trường hợp 1:** hàm số có một cực trị $\Rightarrow m \in [-2; 0]$.

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực trị là $A(0; 2m - 1)$.

Do $m \in [-2; 0] \Rightarrow y_A = 2m - 1 < 0$ nên đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt nên hàm số $y = |f(x)|$ có 3 cực trị $\Rightarrow$ có 3 giá trị nguyên của m thỏa ycbt.

+ **Trường hợp 2:** hàm số có ba cực trị $\Rightarrow m \in (0; 2]$.

Khi đó đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị là $A(0; 2m - 1)$, $B(\sqrt{m}; -m^2 + 2m - 1)$, $C(-\sqrt{m}; -m^2 + 2m - 1)$.

Do $a = 1 > 0$ nên hàm số $y = |f(x)|$ có 3 điểm cực trị khi hàm số $y = f(x)$ có $y_B = y_C \geq 0$
 $\Leftrightarrow -m^2 + 2m - 1 \geq 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Nếu $y_B = y_C < 0$ (trong bài toán này không xảy ra) thì hàm số có ít nhất 5 điểm cực trị.

Vậy có 4 giá trị của m thỏa ycbt.

Câu 38. (Mã 103 - 2022) Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số a để hàm số $y = |x^4 + ax^2 - 8x|$ có đúng 3 điểm cực trị?

Lời giải

$$g(x) = x^4 + ax^2 - 8x$$

Xét

$$g'(x) = 4x^3 + 2ax - 8$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 2ax - 8 = 0 \Leftrightarrow -a = \frac{2x^3 - 4}{x} = 2x^2 - \frac{4}{x} = h(x)$$

Xét

nghiệm)

(do $x = 0$ không là

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 + ax - 8 = 0 \Leftrightarrow -a = \frac{x^3 - 8}{x} = x^2 - \frac{8}{x} = k(x) \end{cases}$$

$$h'(x) = 4x + \frac{4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

$$k'(x) = 2x + \frac{8}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-4}$$

x	$-\infty$	$\sqrt[3]{-4}$	-1	0	$+\infty$
$h(x)$	$+\infty$	$h(\sqrt[3]{-4})$	6	$+\infty$	$+\infty$
$k(x)$	$+\infty$	$k(\sqrt[3]{-4})$	9	$+\infty$	$+\infty$

Đề hàm số $y = |g(x)|$ có đúng 3 cực trị $\Leftrightarrow -a \leq 6 \Leftrightarrow a \geq -6$.

Mà a là số nguyên âm nên $a \in \{-6; -5; -4; -3; -2; -1\}$.

Câu 39. (Chuyên Phan Bội Châu – Nghệ An 2022) Có bao nhiêu số nguyên a thuộc đoạn $[-20; 20]$ sao cho hàm số $y = -2x + 2 + a\sqrt{x^2 - 4x + 5}$ có cực đại?

Lời giải

$$y' = -2 + \frac{a(x-2)}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}, \forall x; y'' = \frac{a}{(\sqrt{x^2 - 4x + 5})^3}, \forall x$$

Ta có

- Xét $a = 0$: $y = -2x + 2$. Suy ra hàm số không có cực trị.

- Xét $a \neq 0$:

Hàm số có cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} y' = 0 \\ y'' < 0 \end{cases}$ có nghiệm $\Leftrightarrow a < 0$ và phương trình $y' = 0$ có nghiệm.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{a(x-2)}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}} = 2 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}} = \frac{2}{a}.$$

$$f'(x) = \frac{1}{(\sqrt{x^2 - 4x + 5})^3} > 0, \forall x; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

Ta có:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	-1	1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ -1 < \frac{2}{a} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow a < -2$$

Vậy hàm số có cực đại

Dạng 10. Số điểm cực trị của hàm hợp không chứa dấu GTTĐ

Bài toán: Cho hàm số $y = f(x)$ (Đề có thể cho bằng hàm, đồ thị, bảng biến thiên của $f(x), f'(x)$). Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(u)$ trong đó u là một hàm số đối với x

Ta thực hiện phương pháp tương tự xét số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$

Bước 1. Tính đạo hàm $y' = u' \cdot f'(u)$

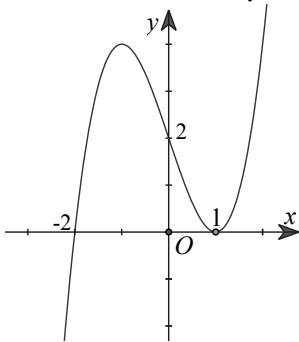
$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u' = 0 \\ f'(u) = 0 \end{cases}$$

Bước 2. Giải phương trình

Bước 3. Tìm số nghiệm đơn và bội lẻ hoặc các điểm mà y' không xác định.

Kết luận

Câu 40. (THPT Lê Văn Thịnh Bắc Ninh 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f(x^2 - 3)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 3)$.



Lời giải

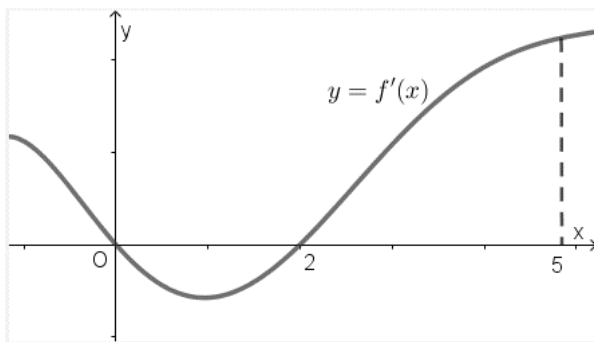
Quan sát đồ thị ta có $y = f(x)$ đổi dấu từ âm sang dương qua $x = -2$ nên hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực trị là $x = -2$.

Ta có $y' = \frac{d}{dx} f(x^2 - 3) = 2x \cdot f'(x^2 - 3)$

$$= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3 = -2 \\ x^2 - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

Mà $x = \pm 2$ là nghiệm kép, còn các nghiệm còn lại là nghiệm đơn nên hàm số $y = f(x^2 - 3)$ có ba cực trị.

Câu 41. (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Tính số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2)$ trên khoảng $(-\sqrt{5}; \sqrt{5})$.



Lời giải

Xét hàm số $g(x) = f(x^2) \Rightarrow g'(x) = 2xf'(x^2)$

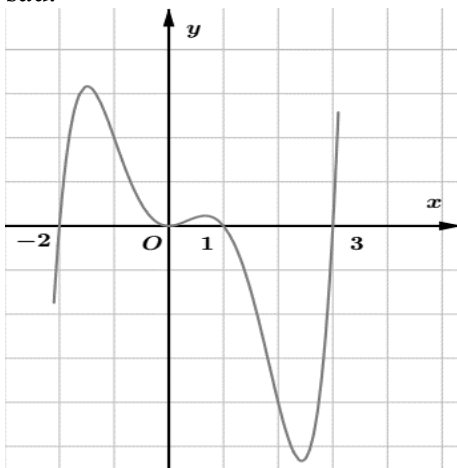
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 0 \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\sqrt{5}$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$		
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ đó suy ra hàm số $y = f(x^2)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 42. (Chuyên Thoại Ngọc Hầu 2018) Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau.



Hàm số $g(x) = f(x^2)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

Có $g'(x) = [f(x^2)]' = 2xf'(x^2)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$2x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x^2)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu của $g'(x)$ suy ra hàm số có 5 điểm cực trị.

Câu 43. (Mã 103 - 2020 Lần 1) Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$				3			$+\infty$

Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^4[f(x-1)]^2$

Lời giải

Ta có: $f(x) = 4x^4 - 8x^2 + 3 \Rightarrow f'(x) = 16x(x^2 - 1)$

Ta có $g'(x) = 2x^3 \cdot f(x-1)[2f(x-1) + x \cdot f'(x-1)]$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 0 & (1) \\ f(x-1) = 0 & (2) \\ 2f(x-1) + x \cdot f'(x-1) = 0 & (3) \end{cases}$$

Phương trình (1) có $x = 0$ (nghiệm bội ba).

Phương trình (2) có cùng số nghiệm với phương trình $f(x) = 0$ nên (2) có 4 nghiệm đơn.

Phương trình (3) có cùng số nghiệm với phương trình:

$$2f(x) + (x+1) \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(4x^4 - 8x^2 + 3) + 16x(x+1)(x^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 24x^4 + 16x^3 - 32x^2 - 16x + 6 = 0 \text{ có 4 nghiệm phân biệt.}$$

Dễ thấy 9 nghiệm trên phân biệt nên hàm số $g(x) = 0$ có tất cả 9 điểm cực trị.

Câu 44. (Sở Hà Tĩnh 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn và có bảng biến thiên như hình bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = 2^{-\frac{1}{x^4}} [f(2x+1)]^3$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-2	3	-2	$+\infty$	

Lời giải

Ta có:

$$g'(x) = \frac{4}{x^5} \cdot 2^{\frac{1}{x^4}} \cdot \ln 2 \cdot [f(2x+1)]^3 + 2^{\frac{1}{x^4}} \cdot 6 \cdot [f(2x+1)]^2 \cdot f'(2x+1)$$

$$= 2 \cdot 2^{\frac{1}{x^4}} \cdot [f(2x+1)]^2 \left[\frac{2 \ln 2}{x^5} f(2x+1) + 3 f'(2x+1) \right]$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} [f(2x+1)]^2 = 0 & (1) \\ \frac{2 \ln 2}{x^5} f(2x+1) + 3 f'(2x+1) = 0 & (2) \end{cases}$$

Xét phương trình $[f(2x+1)]^2 = 0$ có các nghiệm đều là nghiệm bội chẵn do đó $g'(x)$ không đổi dấu khi qua các nghiệm đó.

Xét phương trình $\frac{2 \ln 2}{x^5} f(2x+1) + 3 f'(2x+1) = 0$. Đặt $2x+1=t$; phương trình tương đương

$$\frac{64 \ln 2}{(t-1)^5} f(t) + 3 f'(t) = 0 \quad (*)$$

Do $f(t)$ và $f'(t)$ không đồng thời bằng 0 nên $\frac{64 \ln 2}{(t-1)^5} + 3 \frac{f'(t)}{f(t)} = 0 \quad (*)$

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $f(t) = a(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)(t-t_4)$

Tính $f'(t)$ thay vào $(*)$ ta được phương trình: $\frac{64 \ln 2}{(t-1)^5} + \frac{3}{t-t_1} + \frac{3}{t-t_2} + \frac{3}{t-t_3} + \frac{3}{t-t_4} = 0$

Xét hàm số

$$h(t) = \frac{64 \ln 2}{(t-1)^5} + \frac{3}{t-t_1} + \frac{3}{t-t_2} + \frac{3}{t-t_3} + \frac{3}{t-t_4}$$

$$h'(t) = -\frac{320 \ln 2}{(t-1)^6} - \frac{3}{(t-t_1)^2} - \frac{3}{(t-t_2)^2} - \frac{3}{(t-t_3)^2} - \frac{3}{(t-t_4)^2} < 0; \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Ta có bảng biến thiên của $h(t)$:

x	$-\infty$	t_1	t_2	t_3	1	t_4	$+\infty$
$h'(t)$	-	-	-	-	-	-	-
$h(t)$	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0
	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	

Phương trình có 4 nghiệm nên hàm số có 4 điểm cực trị.

Dạng 11. Số điểm cực trị của hàm hợp chứa dấu GTĐ

Bài toán tìm cực trị của hàm số $g(x) = |f[u(x)] + h(x)|$

Bước 1. Tìm cực trị của hàm số $v(x) = f[u(x)] + h(x)$

Bước 2. Sử dụng phương pháp biến đổi đồ thị hàm số trị tuyệt đối để tìm số cực trị của hàm số $g(x)$

Câu 45. Cho $f(x)$ là hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(0) = -\frac{1}{\ln 2}$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-4	-1	$-\infty$

Hàm số $g(x) = \left| f(-x^2) - x^2 + \frac{2^{x^2}}{\ln 2} \right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

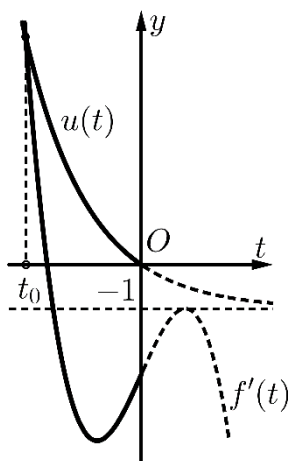
Từ bảng biến thiên, ta tìm được $f'(x) = -\frac{3}{4}x^3 + \frac{9}{4}x - \frac{5}{2}$.

Đặt $h(x) = f(-x^2) - x^2 + \frac{2^{x^2}}{\ln 2}$. Ta có $h(0) = f(0) + \frac{1}{\ln 2} = 0$.

$$h'(x) = -2x \cdot f'(-x^2) - 2x + 2x \cdot 2^{x^2} = -2x \left[f'(-x^2) + 1 - 2^{x^2} \right],$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(-x^2) = 2^{x^2} - 1 \end{cases} \quad (*)$$

Đặt $t = -x^2, t \leq 0$. Phương trình (*) trở thành: $f'(t) = u(t)$, với $u(t) = 2^{-t} - 1$



Từ đồ thị ta thấy phương trình $f'(t) = u(t) \Leftrightarrow t = t_0$, với $t_0 < -1$.

Từ đó, phương trình (*) $\Leftrightarrow -x^2 = t_0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-t_0}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{-t_0}$	0	$\sqrt{-t_0}$	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$h(x)$					

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $g(x) = |h(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 46. (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2021) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	-1	-3	-1	$+\infty$

Tìm số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(|x^3|) - 3|x|$.

Lời giải

Ta thấy $g(x) = f(|x^3|) - 3|x|$ là hàm chẵn.

Ta chỉ xét $x > 0$ khi đó hàm số $g(x) = f(x^3) - 3x \Rightarrow g'(x) = 3x^2 f'(x^3) - 3$

Ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 f'(x^3) - 3 = 0 \Leftrightarrow f'(x^3) = \frac{1}{x^2}$.

Đặt $t = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{t}$ khi đó ta được:

$$f'(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}$$

Xét hàm số $h(t) = f'(t) - \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}$ Vì $h'(t) = f''(t) + \frac{2}{3\sqrt[3]{t^5}} > 0 \quad \forall t > 0$ nên $h(t)$ là hàm đồng biến

Bảng biến thiên của $h(t)$ là

t	0	$+\infty$
$h'(t)$	+	
$h(t)$		

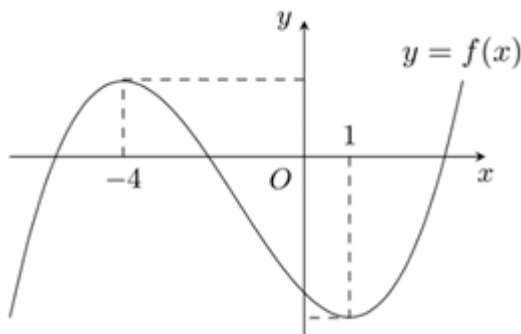
Vậy phương trình $h(t)=0$ chỉ có một nghiệm $t=a>0$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ khi $x>0$ là

x	0	$\sqrt[3]{a}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$f(0)$	$f(a)-3\sqrt[3]{a}$	$+\infty$

Vậy hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại.

Câu 47. (Cụm Ninh Bình – 2021) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(x^2-4|x|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



Lời giải

$$g(x)=f(x^2-4|x|)\Rightarrow g'(x)=(x^2-4|x|)'f'(x^2-4|x|)=2x\left(1-\frac{2}{|x|}\right)f'(x^2-4|x|)$$

Ta có

Hàm số $g'(x)$ không xác định tại $x=0$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}|x|=2\\f'(x^2-4|x|)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x|=2\\x^2-4|x|=-4\\x^2-4|x|=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm 2\\x=\pm(2+\sqrt{5})\end{cases}$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-2 - \sqrt{5}$	-2	0	2	$2 + \sqrt{5}$	$+\infty$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Vậy hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 48. (Sở Quảng Bình - 2021) Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 1$, ($a \neq 0$) với các số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c > 2019$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = |g(x - 2019)|$ với $g(x) = f(x) - 2020$

Lời giải

Ta có:

Số điểm cực trị của hàm số $y = |g(x - 2019)|$ bằng với số điểm cực trị của hàm số $y = |g(x)|$

Mà $g(x) = f(x) - 2020 = ax^3 + bx^2 + cx - 2019$

Có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow a < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \Rightarrow$ tồn tại số $\alpha > 1$ thỏa mãn $g(\alpha) < 0$

Có $a < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty \Rightarrow$ tồn tại số $\beta < 0$ thỏa mãn $g(\beta) > 0$

$g(1) = a + b + c - 2019 > 0$

$g(0) = -2019 < 0$

Vậy $g(1).g(\alpha) < 0$ và $g(1).g(0) < 0, g(0).g(\beta) < 0$, mà $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ suy ra phương trình $g(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Từ đó đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 2 điểm cực trị và cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt. Vậy hàm số $y = |g(x)|$ có 5 điểm cực trị. Tức là số điểm cực trị của hàm số $y = |g(x - 2019)|$ là 5.

Câu 49. (Sở Nam Định - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(-3) = 0$ đồng thời có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $g(x) = |2(x+1)^6 - 6(x+1)^2 - 3f(-x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 2)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

Đặt $h(x) = 2(x+1)^6 - 6(x+1)^2 - 3f(-x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 2)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow h'(x) &= 12(x+1)^5 - 12(x+1) - 3(-4x^3 - 12x^2 - 8x).f'(-x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 2) \\ &= 12(x+1)(x^2 + 2x)(x^2 + 2x + 2) + 12(x+1)(x^2 + 2x).f'(-x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 2) \\ &= 12(x+1)(x^2 + 2x) \left[x^2 + 2x + 2 + f'(-x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 2) \right] \end{aligned}$$

Mà $-x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 2 = -[x(x+2)]^2 - 2 \leq -2, \forall x \in \mathbb{R}$ nên dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$ ta suy ra $f'(-x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 2) \geq 0$.

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 2 + f'(-x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 2) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

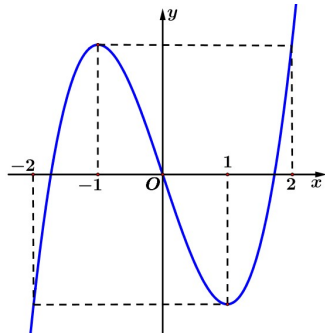
Do đó dấu của $h'(x)$ cùng dấu với $u(x) = 12(x+1)(x^2 + 2x)$, tức là đổi dấu khi đi qua các điểm $x = -2; x = -1; x = 0$.

Vậy hàm số $h(x)$ có 3 điểm cực trị.

Ta có $h(-1) = -3f(-3) = 0$ nên đồ thị hàm số $y = h(x)$ tiếp xúc Ox tại $x = -1$ và cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt.

Vậy $y = g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 50. (THPT Hương Sơn - Hà Tĩnh - 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = \sqrt{4 - f^2(x)}$ có bao nhiêu điểm cực trị?



Lời giải

$$y = \sqrt{4 - f^2(x)} \Rightarrow y' = \frac{[4 - f^2(x)]'}{2\sqrt{4 - f^2(x)}} = \frac{-2f(x).f'(x)}{2\sqrt{4 - f^2(x)}} = \frac{-f(x).f'(x)}{\sqrt{4 - f^2(x)}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow f(x).f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases}$$

Xét

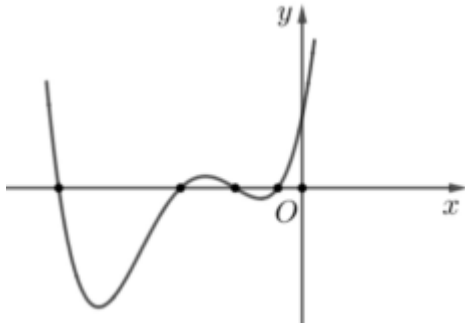
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \in (-2; -1) \\ x = b \in (1; 2) \\ x = 0 \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị hàm số ta có:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Vậy $y' = 0$ có 5 nghiệm phân biệt. Nên hàm số $y = \sqrt{4 - f^2(x)}$ có 5 điểm cực trị.

Câu 51. (Sở Bắc Giang 2022) Biết rằng $f(0) = 0$. Hỏi hàm số $g(x) = |f(x^6) - x^3|$ có bao nhiêu điểm cực đại?



Lời giải

$$h(x) = f(x^6) - x^3 \Rightarrow h'(x) = 6x^5 f'(x^6) - 3x^2 = 3x^2 (2x^3 f'(x^6) - 1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ 2x^3 f'(x^6) - 1 = 0 \end{cases}$$

Đặt: $u(x) = 2x^3 f'(x^6) - 1 \Rightarrow u'(x) = 6x^2 f'(x^6) + 12x^8 f''(x^6) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

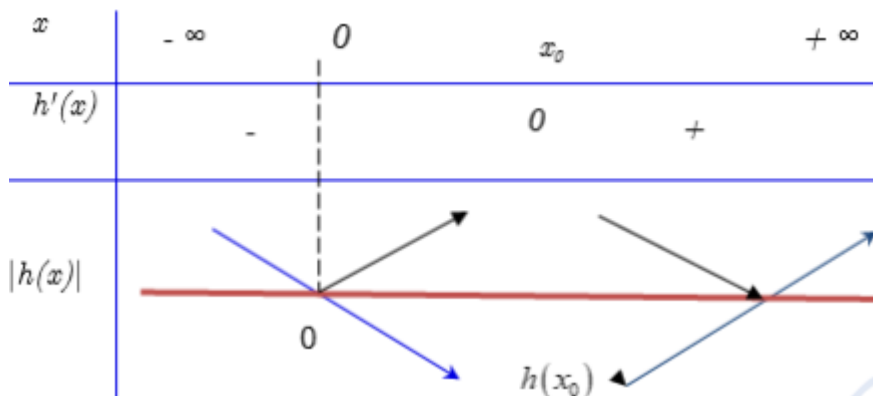
(Từ đồ thị ta có $x^6 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} f'(x^6) > 0 \\ f''(x^6) > 0 \end{cases}$ do đó $\begin{cases} 6x^2 f'(x^6) \geq 0 \\ 12x^8 f''(x^6) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}$)

Nên $u(x) = 2x^3 f'(x^6) - 1$ đồng biến và liên tục trên $\mathbb{R}$

(do $f(x)$ là hàm đa thức $\Rightarrow u(x)$ là hàm đa thức) và $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty \end{cases}$

suy ra phương trình $u(x) = 2x^3 f'(x^6) - 1 = 0$ có nghiệm duy nhất.

Giả sử $2x^3 f'(x^6) - 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 f'(x^6) = \frac{1}{2}$ có nghiệm là x_0 (do $f'(x_0^6) > 0 \Rightarrow x_0^3 > 0 \Rightarrow x_0 > 0$).



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $g(x) = |h(x)|$ có 1 điểm cực đại.

Câu 52. (Sở Vĩnh Phúc 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	1	4	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 + 2|x| - 4)$

Lời giải

Dựa vào bảng xét dấu $f'(x)$ ta có hàm số $f(x)$ có 2 cực trị tại $x = -1$ và $x = 4$.

$$g(x) = f(x^3 + 2|x| - 4) = \begin{cases} f(x^3 + 2x - 4) & \text{khi } x \geq 0 \\ f(x^3 - 2x - 4) & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

Xét

$$g'(x) = \begin{cases} (3x^2 + 2) \cdot f'(x^3 + 2x - 4) & \text{khi } x \geq 0 \\ (3x^2 - 2) \cdot f'(x^3 - 2x - 4) & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

Xét $g'(x) = 0$

TH1: $x \geq 0$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (3x^2 + 2) \cdot f'(x^3 + 2x - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 2x - 4 = -1 \\ x^3 + 2x - 4 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 2x - 3 = 0 \\ x^3 + 2x - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 > 0 \\ x \simeq 1,67 > 0 \end{cases}$$

Với $x \geq 0$ có 2 cực trị.

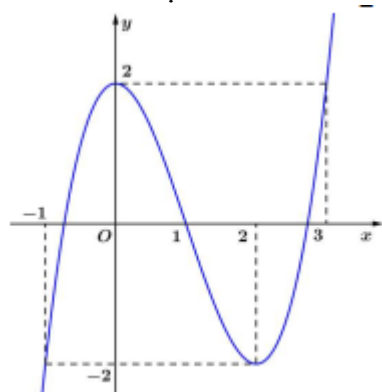
TH2: $x < 0$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (3x^2 - 2) \cdot f'(x^3 - 2x - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 2 = 0 \\ x^3 - 2x - 4 = -1 \\ x^3 - 2x - 4 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{2}{3} \\ x^3 - 2x - 3 = 0 \\ x^3 - 2x - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ x = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ (loại)} \\ x \simeq 1,89 \text{ (loại)} \\ x \simeq 2,33 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Với $x < 0$ có 1 cực trị.

Vậy hàm số $g(x) = f(x^3 + 2|x| - 4)$ có 3 cực trị.

Câu 53. (Sở Thái Nguyên 2022) Cho hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ thỏa mãn $f(0) = \frac{1}{2}$, hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = \left| 18f\left(1 - \frac{x}{3}\right) - x^2 \right|$

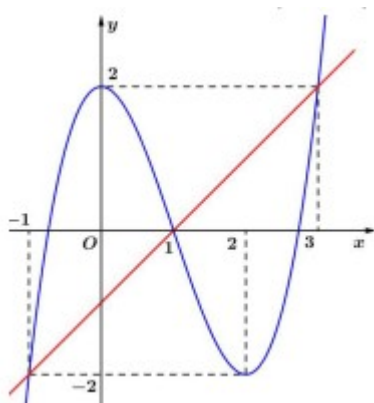
Lời giải

Ta xét: $h(x) = 18f\left(1 - \frac{x}{3}\right) - x^2; g(x) = |h(x)|$ có

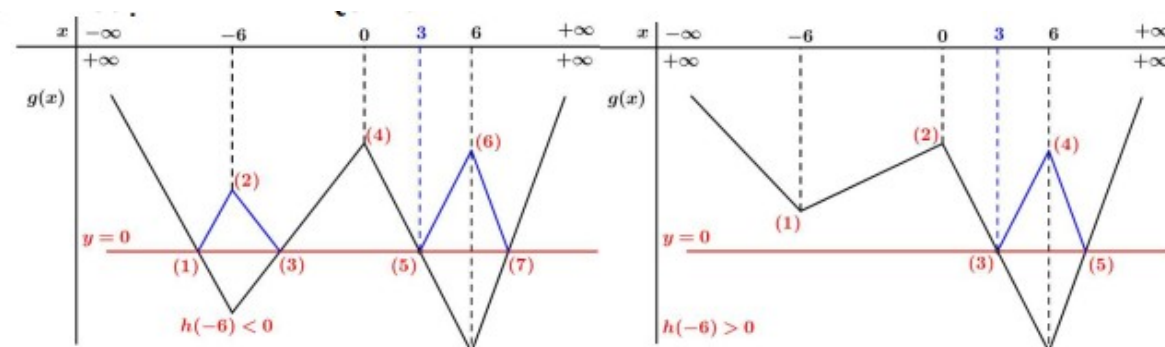
$$h'(x) = -6f'\left(1 - \frac{x}{3}\right) - 2x = 0 \Leftrightarrow f'\left(1 - \frac{x}{3}\right) = \left(1 - \frac{x}{3}\right) - 1 \quad (1)$$

Đặt $t = 1 - \frac{x}{3}$ thì khi đó (1) trở thành: $f'(t) = t - 1$. Nghiệm của phương trình này chính là số giao điểm của hàm số $f'(t)$ và đường thẳng $y = t - 1$.

Nhìn vào đồ thị trên ta suy ra phương trình có nghiệm: $t = \{-1; 1; 3\} \Rightarrow x = \{-6; 0; 6\}$.



Ta lại có: $h(3) = 18f(0) - 9 = 0$ nên ta suy ra $h(0) > 0, h(6) < 0$ Nên ta có hai trường hợp như sau:



Như vậy hàm số $g(x)$ chỉ có 2 trường hợp là có 5 điểm cực trị hoặc 7 điểm cực trị.

Dạng 12. Tìm m để hàm số $f(u)$ không chứa dấu GTTĐ thỏa mãn điều kiện cho trước

Câu 54. (THPT Hàm Rồng - Thanh Hóa - 2018) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x - a)(13x - 15)^3$. Tìm tập hợp các giá trị của a để hàm số $y = f\left(\frac{5x}{x^2 + 4}\right)$ có 6 điểm cực trị

Lời giải

$$y' = f'\left(\frac{5x}{x^2 + 4}\right) = \left(\frac{5x}{x^2 + 4}\right)' \cdot \left(\frac{5x}{x^2 + 4}\right)^2 \left(\frac{5x}{x^2 + 4} - a\right) \left(13\frac{5x}{x^2 + 4} - 15\right)^3$$

$$= \frac{20 - 5x^2}{(x^2 + 4)^2} \cdot \frac{25x^2}{(x^2 + 4)^2} \left(\frac{-ax^2 + 5x - 4a}{x^2 + 4}\right) \left(\frac{-15x^2 + 65x - 60}{x^2 + 4}\right)^3$$

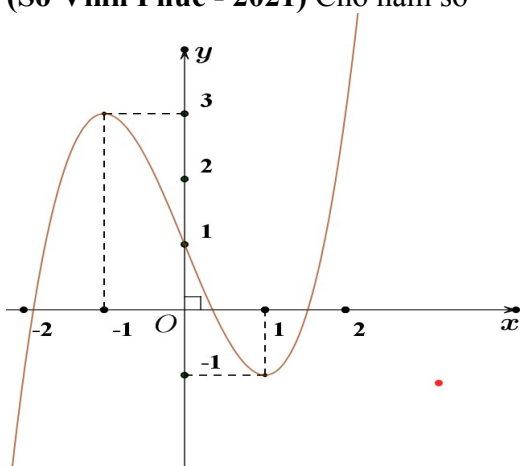
$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ x = 0 \\ x = 3 \\ x = \frac{4}{3} \end{cases} \quad -ax^2 + 5x - 4a = 0 \quad (1) \quad (x=0 \text{ là nghiệm kép}).$$

đặt $g(x) = -ax^2 + 5x - 4a$

Ycbt thỏa mãn khi phương trình $y' = 0$ có 6 nghiệm bội lẻ $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác $\pm 2; 0; 1; 4$. (Nếu $g(0) = 0$ thì $y' = 0$ chỉ có 5 nghiệm bội lẻ).

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 5^2 - 4a \cdot 4a > 0 \\ g(2) \neq 0 \\ g(-2) \neq 0 \\ g(0) \neq 0 \\ g(3) \neq 0 \\ g\left(\frac{4}{3}\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ -\frac{5}{4} < a < \frac{5}{4} \\ a \neq \pm \frac{5}{4} \\ a \neq 0 \\ a \neq \frac{15}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{4} < a < \frac{5}{4} \\ a \neq 0 \\ a \neq \frac{15}{13} \end{cases}$$

Câu 55. (Sở Vĩnh Phúc - 2021) Cho hàm số $f(x)$. Biết $f'(x)$ là hàm bậc 3. Có đồ thị như hình vẽ sau

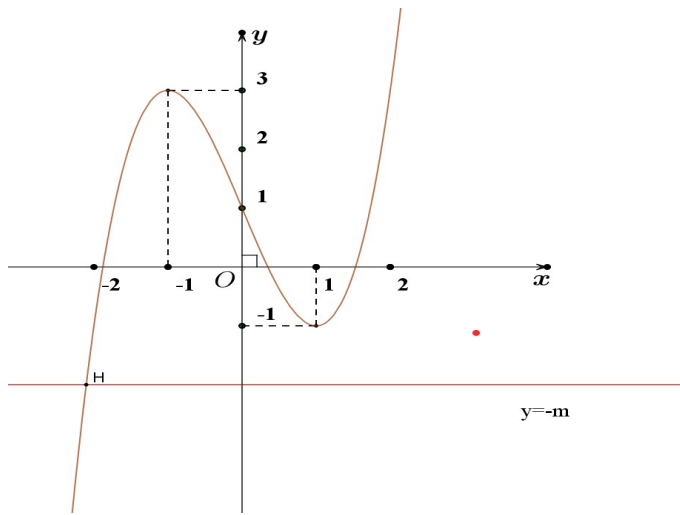


Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in [-10, 10]$ để hàm số $g(x) = f(x) + mx + 2021$ có đúng 1 cực trị?

Lời giải

Ta có $g'(x) = f'(x) + m \Leftrightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow g'(x) = -m \quad (1)$

Số nghiệm của (1) là số giao điểm của 2 đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường $d: y = -m$



Dựa vào đồ thị trên. Để $g(x)$ có đúng 1 cực trị thì điều kiện là

$$\begin{cases} m \in [-10, 10] \\ m < -1 \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2\}$$

Số giá trị của m là 16.

Câu 56. (Sở Hưng Yên 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+3)^2(x^2 - x)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = f(x^2 - 6x + m)$ có 5 điểm cực trị?

Lời giải

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \text{ (nghiem boi chan)} \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Xét

$$\text{Đặt } g(x) = f(x^2 - 6x + m) \Rightarrow g'(x) = (2x - 6) \cdot f'(x^2 - 6x + m)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x^2 - 6x + m = -3 \text{ (nghiem boi chan)} \\ x^2 - 6x + m = 0 \text{ (1)} \\ x^2 - 6x + m = 1 \text{ (2)} \end{cases}$$

Hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị

$\Leftrightarrow$ mỗi phương trình (1) và (2) có hai nghiệm phân biệt khác 3

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9 - m > 0 \\ 10 - m > 0 \\ -9 + m \neq 0 \\ -10 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 9 \\ m < 10 \\ m \neq 9 \\ m \neq 10 \end{cases} \Leftrightarrow m < 9$$

Mà $m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; \dots; 8\}$. Vậy có 8 giá trị m thỏa mãn bài toán.

Câu 57. (THPT Đồng Lộc - Hà Tĩnh 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, và có bảng xét đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$g(x) = f\left(\sqrt{x^2} \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right) - m\right)$$
 Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số có ít nhất 4 điểm cực trị.

Lời giải

$$g(x) = f\left(\sqrt{x^2} \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right) - m\right) = f\left(\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 + 1} - m\right)$$
 Xét hàm số

$$g'(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) f'(\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 + 1} - m)$$
 Ta có với $\forall x \neq 0$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 + 1} - m) = 0$$
 Suy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 + 1} - m = -1 \\ \sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 + 1} - m = 0 \\ \sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 + 1} - m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 + 1} = m - 1 & (1) \\ \sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 + 1} = m & (2) \\ \sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 + 1} = m + 1 & (3) \end{cases}$$

$$h(x) = \sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow h'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$
 Đặt với $\forall x \neq 0$.

Ta có bảng biến thiên của hàm với $h(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	$ $	$+$
$h(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

$$g(x) = f\left(\sqrt{x^2} \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right) - m\right)$$
 Để hàm số có ít nhất 4 điểm cực trị thì hai trong ba phương trình (1), (2), (3) phải có ít nhất một nghiệm và một phương trình phải có ít nhất hai nghiệm.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy yêu cầu bài toán được thỏa mãn khi $m > 1$.

Câu 58. (THPT Phan Châu Trinh - Đà Nẵng 2022) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - x, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để hàm số $y = f(x^3 - mx^2 + (m-2)x + 1)$ có đúng 8 cực trị?

Lời giải

Ta có:
$$f'(x) = x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Xét hàm số $y = f(x^3 - mx^2 + (m-2)x + 1)$

Ta có: $y' = (3x^2 - 2mx + m - 2)f'(x^3 - mx^2 + (m-2)x + 1)$

Ta có:
$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - mx^2 + (m-2)x + 1 = 0(1) \\ x^3 - mx^2 + (m-2)x + 1 = 1(2) \\ g(x) = 3x^2 - 2mx + m - 2 = 0(3) \end{cases}$$

Xét phương trình (1):

$$x^3 - mx^2 + (m-2)x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1) \cdot [x^2 + (1-m)x - 1] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ h(x) = x^2 + (1-m)x - 1 = 0 \end{cases}$$

Xét phương trình (2):

$$x^3 - mx^2 + (m-2)x + 1 = 1 \Leftrightarrow x(x^2 - mx + m - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ k(x) = x^2 - mx + m - 2 = 0 \end{cases}$$

Xét phương trình (3):

Ta có $g(x) = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt do $\Delta'_{g(x)} = m^2 - 3m + 6 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Yêu cầu bài toán

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(1) \cdot g(0) \cdot h(1) \cdot h(0) \cdot k(1) \cdot k(0) \neq 0 \\ \Delta_h > 0 \\ \Delta_k > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 2 \\ m^2 - 2m + 5 > 0, \forall m \in \mathbb{R} \\ m^2 - 4m + 8 > 0, \forall m \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 2 \end{cases}$$

Do tham số m thuộc đoạn $[-10; 10]$ và $m \neq 1, m \neq 2$ nên có 19 giá trị của m thỏa mãn đề bài.

Câu 59. (Sở Nam Định 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2 - 2x), \forall x \in \mathbb{R}$. Tìm giá trị tham số m để hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x^2 + m)$ có 8 điểm cực trị

Lời giải

Ta có: $g'(x) = (3x^2 - 6x)f'(x^3 - 3x^2 + m) = 3x(x-2)f'(x^3 - 3x^2 + m)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \\ f'(x^3 - 3x^2 + m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \\ x^3 - 3x^2 + m = 0 \\ x^3 - 3x^2 + m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \\ x^3 - 3x^2 = -m \\ x^3 - 3x^2 = -m + 2 \end{cases}$$

Xét $h(x) = x^3 - 3x^2 \Rightarrow h'(x) = 3x^2 - 6x$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$

Để hàm số $g(x)$ có 8 điểm cực trị thì phương trình (1),(2) phải có tổng 6 nghiệm phân biệt khác 0 và 2. Từ bảng biến thiên $h(x)$ ta có:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	0	-4	$+\infty$	

$$\begin{cases} -4 < -m < 0 \\ -4 < -m + 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < 4 \\ 2 < m < 6 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m < 4$$

Dạng 13. Tìm m để hàm số $f(u)$ chứa dấu GTTĐ thỏa mãn điều kiện cho trước

Câu 60. (Mã 102 - 2021 Lần 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-8)(x^2-9)$, "x" i
 Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x^3 + 6x| + m)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

Lời giải

$$\begin{aligned} g(x) &= f(|x^3 + 6x| + m) \Rightarrow g'(x) = (|x^3 + 6x| + m)' \cdot f'(|x^3 + 6x| + m) \\ &= \frac{(x^3 + 6x) \cdot (3x^2 + 6)}{|x^3 + 6x|} \cdot f'(|x^3 + 6x| + m) \end{aligned}$$

Ta thấy $x=0$ là một điểm tới hạn của hàm số $g(x)$.

$$f'(|x^3 + 6x| + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x^3 + 6x| + m = 8 \\ |x^3 + 6x| + m = 3 \\ |x^3 + 6x| + m = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x^3 + 6x| = 8 - m \\ |x^3 + 6x| = 3 - m \\ |x^3 + 6x| = -3 - m \end{cases}$$

Mặt khác

Xét hàm số $h(x) = x^3 + 6x$, vì $h'(x) = 3x^2 + 6 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $h(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Ta có bảng biến thiên của hàm số $k(x) = |h(x)| = |x^3 + 6x|$ như sau:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$k'(x)$		$- \quad \quad +$	
$k(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

Hàm số $g(x) = f(|x^3 + 6x| + m)$ có ít nhất 3 điểm cực trị khi phương trình $f'(|x^3 + 6x| + m) = 0$ có ít nhất hai nghiệm khác 0. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $8 - m > 0$ hay $m < 8$.

Kết hợp điều kiện m nguyên dương ta được $m \in \{1; 2; 3; \dots; 7\}$. Vậy có 7 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 61. (Chuyên Bắc Giang - Lần 4 - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-2)^2(x-1)(x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

Lời giải

Dựa vào cách vẽ đồ thị hàm số $g(x) = f(|x|)$, số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x) = f(|x|)$ bằng số điểm cực trị dương của đồ thị hàm số $y = f(x)$ cộng thêm 1.

Để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 2 cực trị dương.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Ta có

Có $x = 2$ là nghiệm bội 2, $x = 1$ là nghiệm đơn.

Vậy $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt, có một nghiệm dương $x \neq 1$, có một nghiệm $x \leq 0$

Trường hợp 1: Có nghiệm $x = 0$ khi đó $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$

Với $m = 1$, có $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$ (TM)

Với $m = -1$, có $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Loại)

Trường hợp 2: $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt, có một nghiệm dương $x \neq 1$, có một nghiệm âm

$$\text{Điều kiện tương đương } \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ 1^2 - 2(m+1) \cdot 1 + m^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-1; 1) \\ m \neq 1 \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 0$

Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 62. (Chuyên Long An - 2021) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên dưới đây

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-2	3	-4	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |f(|6x - 5|) + 2021 + m|$ có 3 điểm cực đại?

Lời giải

♦ Xét hàm số $y = f(|6x - 5|) + 2021 + m$

$$u = |6x - 5| = \sqrt{(6x - 5)^2} \Rightarrow u' = \frac{6(6x - 5)}{\sqrt{(6x - 5)^2}} = \frac{6(6x - 5)}{|6x - 5|}$$

Đặt

$$u' = 0 \Leftrightarrow \frac{6(6x - 5)}{|6x - 5|} = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{6}$$

Khi đó

$$x = \frac{5}{6} \Rightarrow u = 2 \Rightarrow f(2) = -4$$

Với

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$\frac{5}{6}$	$+\infty$		
u		0	2		
$f(u)$	$+\infty$	-4	3	-4	$+\infty$
$f(u)+2021+m$	$+\infty$	$m+2017$	$m+2014$	$m+2017$	$+\infty$

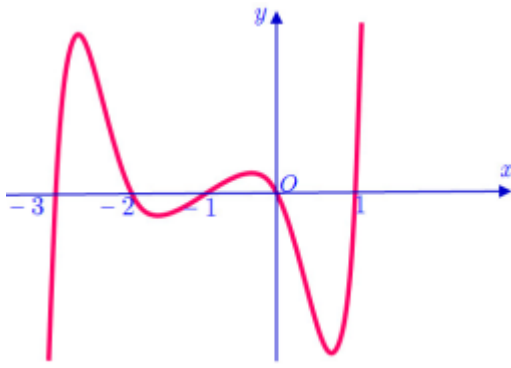
Suy ra hàm số $y = |f(u) + 2021 + m|$ có ba điểm cực đại

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m + 2017 < 0 \\ m + 2014 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2024 < m < -2017$$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2023; -2022; -2021; -2020; -2019; -2018\}$

Vậy có 6 giá trị nguyên của m để hàm số đã cho có 3 cực đại.

Câu 63. (Đại học Hồng Đức 2022) Cho hàm đa thức $y = [f(x^2 + 2x)]'$ có đồ thị cắt trục Ox tại 5 điểm phân biệt như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu giá trị của tham số m với $2022m \in \mathbb{Z}$ để hàm số $g(x) = f(x^2 - 2|x - 1| - 2x + m)$ có 9 điểm cực trị?



Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} \left[f(x^2 + 2x) \right]' &= (2x + 2)f'(x^2 + 2x) = a(x + 3)(x + 2)(x + 1)(x)(x - 1) \quad (a > 0) \\ \Rightarrow f'(x^2 + 2x) &= \frac{a}{2}(x + 3)(x + 2)x(x - 1) = \frac{a}{2}(x^2 + 2x - 3)(x^2 + 2x). \end{aligned}$$

Đặt $t = x^2 + 2x \Rightarrow f'(t) = \frac{a}{2}(t - 3)t$

Ta có $g(x) = f(x^2 - 2|x - 1| - 2x + m) = f(|x - 1|^2 - 2|x - 1| + m - 1)$

Ta thấy $g(2 - x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$ nên đồ thị hàm số $y = g(x)$ nhận đường thẳng $x = 1$ làm trục đối xứng. Do đó số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ bằng $2a + 1$ với a là số điểm cực trị lớn hơn 1 của hàm số $g(x)$. Theo bài ra ta có $2a + 1 = 9 \Leftrightarrow a = 4$. Vì vậy ta cần tìm m để hàm số $g(x)$ có đúng 4 điểm cực trị lớn hơn 1.

Khi $x > 1$ thì $g(x) = f(x^2 - 4x + m + 2)$

$$g'(x) = (2x - 4)f'(x^2 - 4x + m + 2), g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 - 4x + m + 2 = 0 \quad (1) \\ x^2 - 4x + m + 2 = 3 \quad (2) \end{cases}$$

Đặt $u(x) = x^2 - 4x + m + 2$, ta có bảng biến thiên

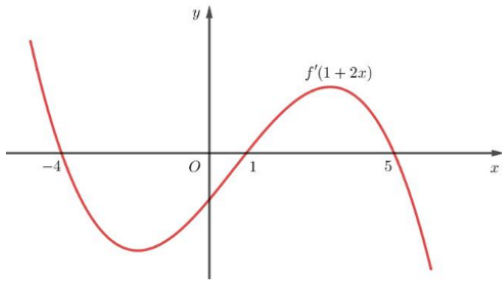
x	1	2	$+\infty$
$u(x)$	$m - 1$	$m - 2$	$+\infty$

Yêu cầu bài toán trở thành tìm m để 2 phương trình (1), (2) có đúng 3 nghiệm phân biệt khác 2, điều này xảy ra khi và chỉ khi $m - 2 < 0 < m - 1 \Leftrightarrow 1 < m < 2$,

suy ra $2022 < 2022m < 4044 \Rightarrow 2022m \in \{2023; 2024; \dots; 4043\}$,

do đó có 2021 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Câu 64. (Sở Nam Định 2023) Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e (a \neq 0)$, hàm số $y = f'(1 + 2x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x^3 + 5x| + m)$ có ít nhất 5 điểm cực trị?

Lời giải

Từ đồ thị ta có: $f'(1+2x) = k(x+4)(x-1)(x-5)$ với $k < 0$.

Đặt $t = 1 + 2x \Rightarrow x = \frac{t-1}{2}$. Suy ra:

$$f'(t) = k \left(\frac{t-1}{2} + 4 \right) \left(\frac{t-1}{2} - 1 \right) \left(\frac{t-1}{2} - 5 \right) = \frac{k}{8} (t+7)(t-3)(t-11) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -7 \\ t = 3 \\ t = 11 \end{cases}$$

Ta có: $g(x) = f(|x^3 + 5x| + m) = f(|(x^2 + 5)x| + m) = f(|x|(x^2 + 5) + m)$ có tập xác định là

$$D = \mathbb{R} \text{ nên ta có: } \begin{cases} \forall x_0 \in D \Rightarrow -x_0 \in D \\ g(-x) = f(|-x|((-x)^2 + 5) + m) = f(|x|(x^2 + 5) + m) = g(x) \end{cases}$$

Do đó hàm $g(x)$ là hàm chẵn nên đồ thị đối xứng nhau qua trục tung, suy ra số điểm cực trị hàm $g(x)$ có dạng $(2m+1)$ trong đó m là số điểm cực trị có hoành độ dương của đồ thị hàm số $y = f(x^3 + 5x + m)$

Theo giả thiết ta có: $2m+1 \geq 5 \Rightarrow m \geq 2$. Vậy yêu cầu bài toán tương đương với: "Tìm m để hàm số $y = f(x^3 + 5x + m)$ có ít nhất hai điểm cực trị có hoành độ dương".

Xét hàm $y = f(x^3 + 5x + m)$ với $x \in (0; +\infty)$.

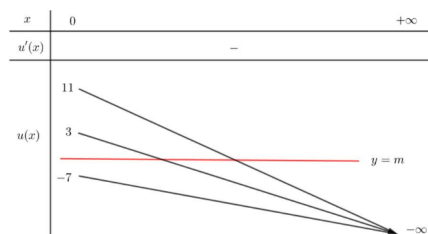
Ta có:

$$y' = (3x^2 + 5)f'(x^3 + 5x + m) = 0 \Leftrightarrow f'(x^3 + 5x + m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 5x + m = -7 \\ x^3 + 5x + m = 3 \\ x^3 + 5x + m = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -x^3 - 5x - 7 \\ m = -x^3 - 5x + 3 \\ m = -x^3 - 5x + 11 \end{cases}$$

có ít nhất hai nghiệm dương.

Ta lập bảng biến thiên cả ba hàm trên cùng một bảng ta có:



Để có ít nhất hai nghiệm dương thì $m < 3$. Mà $m \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow m = \{1; 2\}$.

Vậy có hai giá trị nguyên dương của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.