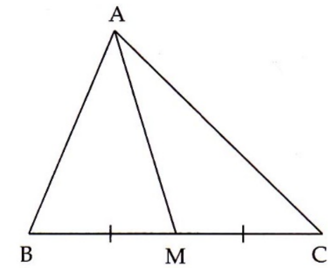
CHỦ ĐỀ 4. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN\ CỦA TAM GIÁC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1- Đường trung tuyến của tam giác

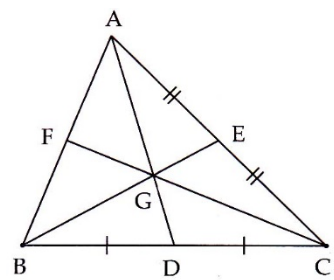


• Đoạn thẳng AM nối đỉnh A của tam giác ABC với trung điểm M của cạnh. BC gọi là đường trung tuyến của tam giác ABC.

• Mỗi tam giác có ba đường trung tuyến.

2. Tính chất ba đường trang tuyến của tam giác

Ba đường trung tuyến của một tam giác cùng đi qua một điểm.



Điểm đó gọi là trọng tâm của tam giác đó, điểm đó cách mỗi đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy.

Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\frac{AG}{AD}=\frac{BG}{BE}=\frac{CG}{CF}=\frac{2}{3}$

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Sử dụng tính chất trọng tâm của tam giác

Phương pháp giải: Sử dụng linh hoạt các tỉ số liên quan tới trọng tâm của tam giác.

Ví dụ. Nếu ΔABC có trung tuyến AM và trọng tâm G thì ta có

AG = $\frac{2}{3}$ = AM , AG = 2GM; GM = $\frac{1}{3}$AM; ...

1A. Cho ΔABC có hai đường trung tuyến BD, CE

a) Tính các tỉ số $\frac{BG}{BD}, \frac{CG}{CE}$

b) Chứng minh BD + CE > $\frac{3}{2}$ BC

1B. Cho ΔABC có BC = 8 cm, các đường trung tuyến BD, CE cắt nhau tại G. Chứng minh BD + CE > 12 cm.

2A. Cho tam giác ABC có hai đường trung tuyến BP, CQ cắt nhau tại G. Trên tia đối của tia PB lấy điểm E sao cho PE = PG. Trên tia đối của tia QG lấy điểm F sao cho QF = QG. Chứng minh:

a) GB = GE, GC = GE; b) EF = BC và EF//BC.

2B. Cho tam giác ABC có hai đường trung tuyến AD, BE cắt nhau tại G. Trên tia đối của tia DG lấy điểm M sao cho D là trung điểm của đoạn thẳng MG. Trên tia đối của tia EG lấy điểm N sao cho E là trung điểm GN. Chứng minh:

a) GN = GB, GM = GA; b) AN = MB và AN // MB.

Dạng 2. Chứng minh một điểm là trọng tâm của tam giác

Phương pháp giải: Để chứng minh một điểm là trọng tâm của một tam giác, ta có thể dùng một trong hai cách sau:

- Chứng minh điểm đó là giao điểm của hai đường trung tuyến trong tam giác.

- Chứng minh điểm đó thuộc một đường trung tuyến của tam giác và thỏa mãn một trong các tỉ lệ về tính chất trọng tâm của tam giác.

3A. Cho ΔABC. Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho AD = AB. Lấy G thuộc cạnh AC sao cho AG = $\frac{1}{3}$ AC. Tia DG cắt BC tại E. Qua E vẽ đường thẳng song song với BD, qua D vẽ đường thẳng song song với BC, hai đường thẳng này cắt nhau tại F. Gọi M là giao điểm của EF và CD.

Chứng minh:

a) G là trọng tâm ΔBCD;

b) ΔBED = ΔFDE, từ đó suy ra EC = DF;

c) ΔDMF = ΔCME;

d) B, G, M thẳng hàng.

3B. Cho ΔABC. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho BM = 2CM. Vẽ điểm D sao cho C là trung điểm của AD. Gọi N là trung điểm của BD, Chứng minh:

a) M là trọng tâm tam giác ABD;

b) Ba điểm A, M, N thẳng hàng;

c) Đường thẳng DM đi qua trung điểm của AB.

4A. Cho ΔABC với đường trung tuyến AD. Trên tia AD lấy điểm E sao cho AD = DE, trên tia BC lấy điểm M sao cho BC = CM. Chứng minh C là trọng tâm của ΔAEM.

4B. Cho ΔABC. Trên đường trung tuyến AM của tam giác đó, lấy hai điểm D, E sao cho AD = DE = EM. Chứng minh E là trọng tâm của ΔABC.

5A. Cho ΔABC. Vẽ trung tuyến BM. Trên tia BM lấy hai điểm G, K sao cho BG = $\frac{2}{3}$BM và G là trung điểm của BK. Gọi E là trung điểm CK; GE cắt AC tại I Chứng minh:

a) I là trọng tâm của ΔKGC; b) CI = $\frac{1}{3}$ AC.

5B. Cho ΔABC, M là trung điểm AC. Trên đoạn BM lấy điểm K sao cho KM = $\frac{1}{2}$ KB. Điểm H thuộc tia đối của tia MK sao cho BH = 2BK. Gọi I là điểm thuộc cạnh AC và IC = $\frac{1}{3}$ CA. Đường KI cắt HC ở E.

a) Chứng minh I là trọng tâm của ΔHKC và E là trung điểm của HC ở E

b) Tính các tỉ số $\frac{IE}{IK}, \frac{IC}{MC}$. Chứng minh ba điểm H, I, F thẳng hàng (I là trung điểm KC)

6A. Cho hai đoạn thẳng AC và BD cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đoạn. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD. Đoạn thẳng AM, AN cắt BD lần lượt tại I và K. Chứng minh:

a) I là trọng tâm của ΔABC và K là trọng tâm của ΔADC;

b) BI = IK = KD.

6B. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến BD. Trên tia đối của tia DB lấy điểm E sao cho DE = BD. Gọi P, Q lần lượt là điểm trên BE sao cho BP = PQ = QE. Chứng minh:

a) CP, CQ cắt AB, AE tại trung điểm của AB,AE.

b) CP//AQ và CQ//AP.

Dạng 2. Vấn đề đường trung tuyến trong tam giác vuông, tam giác cân, tam giác đều...

Phương pháp giải: Chú ý những tính chất của tam giác vuông, tam giác cân, tam giác đều.

7A. Cho ΔABC vuông tại A, trung tuyến AM. Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho MD = MA.

a) Tính $\widehat{ABD}$

b) Chứng minh ΔABD = ΔBAC.

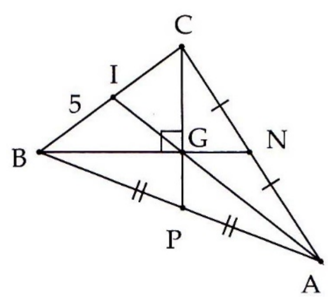
c) Chứng minh AM = $\frac{1}{2}$BC

7B. Cho ΔABC vuông tại A, AB = 6 cm, AC = 8 cm. Tính khoảng cách từ trọng tâm G của ΔABC tới các đỉnh, của tam giác.

8A. Cho ΔABC , trung tuyến AM = $\frac{1}{2}$ BC.

a) Chứng minh $\widehat{BMA} = 2\widehat{MAC}$ và $\widehat{CMA} = 2\widehat{MAB}$.

b) Tính $\widehat{BAC}$



8B. Cho hình vẽ, biết ΔABC có hai đường trung tuyến BN,CP vuông góc với nhau tại G. Tia AG cắt BC tại I. BC = 5 cm.

Tính độ dài GI,AG.

9A. Cho ΔABC cân tại A có đường trung tuyến AM.

a) Chứng minh AM $\perp$BC.

b) Biết AB = 10 cm, BC = 12 cm. Tính độ dài đoạn vuông góc kẻ từ B xuống AC.

9B. Cho ΔABC có AB = BC = 13 cm, AC = 10 cm, Đường trung tuyến BM, trọng tâm. G. Tính độ dài GM.

10A. Cho ΔABC có hai đường trung tuyến BM, CN.

a) Chứng minh nếu ΔABC cân tại A thì BM = CN.

b) Ngược lại nếu BM = CN, chứng minh:

i) GB = GC, GN = GM;

ii) BN = CM;

iii) ΔABC cân tại A

10B. Cho ΔABC có hai đường trung tuyến BM và CN cắt nhau tại G. Biết BM = CN. Chứng minh AG $\perp$ BC.

11A. Cho ΔABC có ba đường trung tuyến AM, BN, CP cắt nhau tại G.

Biết AM = BN = CP. Chứng mình ΔABC đều.

11B. Cho ΔABC có ba đường trung tuyến AM, BN, CP cắt nhau tại G. Biết AG = BG = CG. Chứng minh ΔABC đều.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

12. Cho tam giác ABC. Trên tia đối của tia AB lấy điểm E sao cho

AE = 2AB. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D sao cho BD = BC. Chứng minh:

a) A là trọng tâm của ΔCDE;

b) Đường thẳng CA đi qua trung điểm của DE.

13. Cho bốn điểm A, B,C, D không thẳng hàng như hình vẽ. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Trung điểm của BD và AC lần lượt là M, N. Chứng minh AC + DB > 2MN.

14. Cho ΔABC vuông tại A, AB = 6 cm, AC = 8 cm.

a) Tính BC.

b) Đường thẳng đi qua trung điểm I của BC và vuông góc với BC cắt AC tại D. Chứng minh $\widehat{CBD} = \widehat{DCB}$.

c) Trên tia đối của tia DB lấy điểm E sao cho DE = DC. Chứng minh ΔBCE vuông.

15. Cho ΔABC vuông tại A, trung tuyến AM. Biết AB = 6cm,

AC = 8cm.

a) Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho MD = MA. Chứng minh ΔAMB = ΔDMC.

b) Chứng minh ΔBAC = ΔDCA.

c) Tính AM.

D0 Chứng minh AM < $\frac{AB+AC}{2}$

16. Cho ΔABC có hai đường trung tuyến AM, BN vuông góc với nhau, trọng tâm G. Biết AM = 4,5 cm, BN cm. Tính độ dài các cạnh của ΔABC

HƯỚNG DẪN

1A. Gọi giao điểm của hai đường trung tuyến BD,CE là G. ΔGBC có: GB + GC > BC (bất đẳng thức tam giác).

Mà GB = $\frac{2}{3}$BD, GC = $\frac{2}{3}$CE nên: $\frac{2}{3}$BD + $\frac{2}{3}$CE > BC.

Do đó BD + CE > $\frac{3}{2}$ BC.

1B. Tương tự **1A**.

BD + CE > $\frac{3}{2}$. 8 = 12 cm.

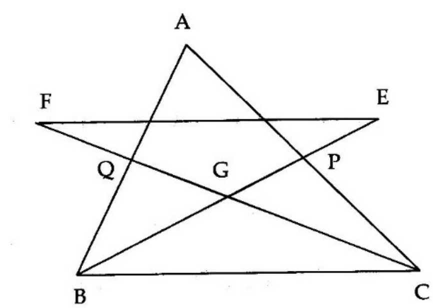
2A. a) Vì G là trọng tâm ΔABC

nên BG = 2GP, CG = 2GQ.

Lại có PE = PG, QF = QG

nên GE = 2GP, GF = 2GQ.

Do đó BG = GE,CG = GF.



b) Suy ra ΔGBC = ΔGEF (c.g.c)

Từ đó ta có EF = BC và $\widehat{GEF} = \widehat{GBC}$

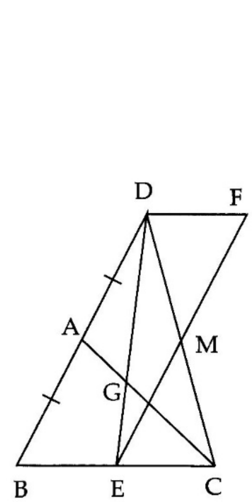
=> EF // BC.

2B. Tương tự **2A.**

3A. a) Vì AD = AB nên A là trung điểm BD

=> CA là đường trung tuyến của ΔBCD

Mà AG = $\frac{1}{3}$AC => G là trọng tâm ΔBCD



b) Ta có : BD || EF => $\widehat{BDE} = \widehat{DEF}$

và DE || BC => $\widehat{BED} = \widehat{EDF}$

=> ΔBED = ΔFDE (g.c. g) => BE = DF

(hai cạnh tương ứng) (1). Mặt khác do G là trọng tâm ΔBCD nên E là trung điểm BC

=> BE = EC (2).

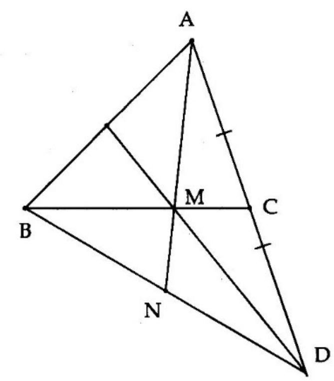
Từ (1) và (2) suy ra EC = DF.

c) ΔDMF = ΔCME (g.c.g).

d) Do ΔDMF = ΔCME => MD = MC => M là trung điểm DC => BM là trung tuyến của ΔBCD.

=> G $\in$BM => B, G, M thẳng hàng.

3B. Tương tự **3A.**



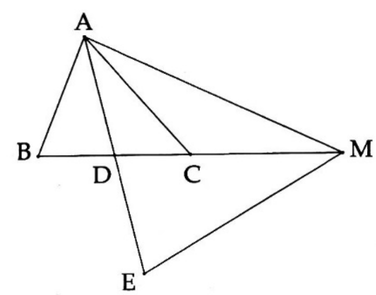
a) M thuộc đường trung tuyến BC của ΔABD mà BM = 2CM nên M là trọng tâm ΔABD.

Do đó M thuộc trung tuyến AN.

=> Ba điểm A, M, N thẳng hàng.

b) DM là trung tuyến thứ ba của ΔABD nên DM đi qua trung điểm của AB.

4A. Theo đề bài ta có AD = DE nên C thuộc MD là đường trung tuyến của tam giác AEM (1)



Mặt khác ta có BC = 2CD và BC = CM nên CM = 2CD (2)

Từ (1) và (2) suy ra C là trọng tâm của ΔAEM.

4B. Từ giả thiết AD = DE = EM ta có AE = $\frac{2}{3}$AM.

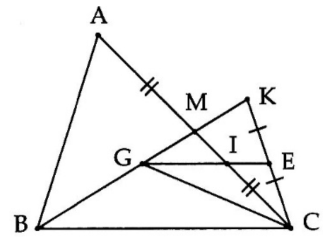
Mà E thuộc trung tuyến AM nên E là trọng tâm của ΔABC.

5A. a) Theo đề bài BG = $\frac{2}{3}$BM.

Suy ra BG = 2GM => GK = 2GM

=>M là trung điểm GK.

Do đó I là giao điểm ba đường trung tuyến trong ΔKGC.



b) I là trọng tâm ΔKGC nên

CI = $\frac{2}{3}$CM= $\frac{2}{3}$. $\frac{1}{2}$AC = $\frac{1}{3}$AC.

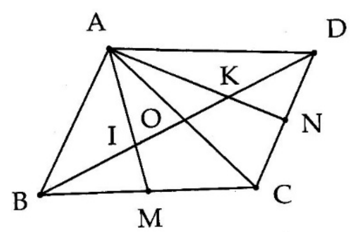
5B. Tương tự **5A**.

a) M là trung điểm KH. Suy ra I là trọng tâm của ΔHKC. Suy ra KI là trung tuyến ΔKHC.

b) $\frac{IE}{IK}=\frac{1}{2},\frac{IC}{MC}=\frac{2}{3}$. Suy ra HI cũng là trung tuyến ΔKHC.

6A. a)ΔABC có hai đường trung BO, AM cắt nhau tại I nên I là trọng tâm của ΔABC .

Tương tự ta có K là trọng tâm của ΔADC.



b) Từ ý a) suy ra ta có:

BI = $\frac{2}{3}$ BO, DK = $\frac{2}{3}$DO

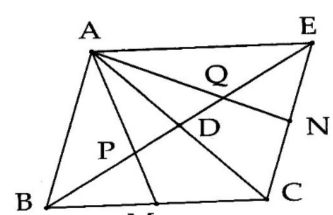
Mặt khác BO = DO

=> BI = DK = $\frac{2}{3}$BO = $\frac{1}{3}$BD => IK = $\frac{1}{3}$BC. Suy ra ĐPCM.

Do đó BI = IK = KD.

6B. Tương tự **6A**.

a) Chứng minh được P,Q lần lượt là trọng tâm ΔABC, ΔAEC.Suy ra ĐPCM.



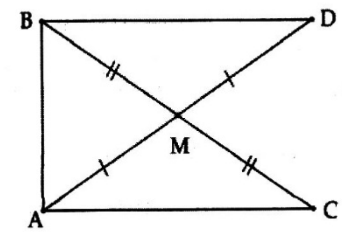
b) Chú ý ΔADP = ΔCQD và

ΔADQ = ΔCDP.

7A. a) ΔAMC = ΔDMB (c.g.c)

=> $\widehat{ADB} = \widehat{BAC}$ => BD //AC Mà AB $\perp$AC nên AB $\perp$BD

=> $\widehat{ABD}$ = 90°.

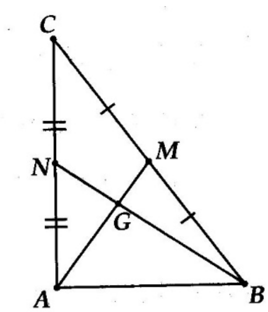


b) ΔABD = ΔBAC (c.g.c).

c) ΔABD = ΔBAC (c.g.c) => AD = BC.

Mà AM = $\frac{1}{2}$AD => AM = $\frac{1}{2}$BC.

7B. Áp dụng đinh lý Pytago trong tam giác vuông ABC tínhđược BC = 10cm



Gọi M là trung điểm của BC.

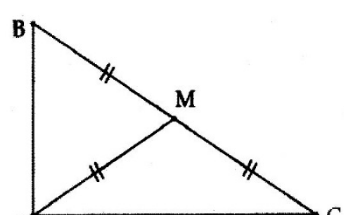
Do đó AM = 5cm

=> AG = $\frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}.5 = \frac{10}{3}cm$

Tương tự tính được

$BG = \frac{2}{3}BN = \frac{2}{3}\sqrt{AB^2 + AN^2} = \frac{2}{3}\sqrt{52}$ cm

và $CG = \frac{2}{3}\sqrt{73}$ cm.



8A. a) Ta có: MA = MB = MC = $\frac{1}{2}$ BC

=> ΔMAB, ΔMAC là tam giác cân tại M.

Do đó

$\widehat{BMA} = \widehat{MAC} + \widehat{MCA} = 2\widehat{MAC}, \widehat{CMA} = \widehat{MAB} + \widehat{MBA} = 2\widehat{MAB}$

b) Theo ý (a) ta có 2.$(\widehat{MAB} + \widehat{MAC}) = \widehat{MBA} + \widehat{CMA}$ = 180°

=> $\widehat{BAC}$ = 90°.

8B. Vì GI là đường trung tuyến kẻ từ G đến BC

=> GI = $\frac{1}{2}$ BC = $\frac{1}{2}$. 5 = 2,5 cm.

Lại có AI là đường trung tuyến của ΔABC, G là trọng tâm => AG = 2GI = 2.2,5 = 5cm.

9A. a) ΔABM = ΔACM (c.c.c) $\widehat{AMB} = \widehat{AMC}$ = 90° => AM $\perp$ BC.

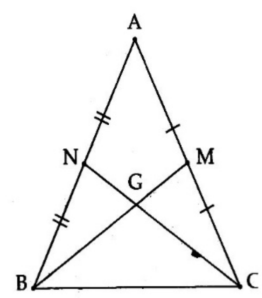
b) BC = 12cm => BM = 6cm. Áp dụng Định lí Pytago cho tam giác vuông AMB, ta tính được: AM = 8cm.

Vẽ BC. Chứng minh được dt ΔABC = $\frac{1}{2}$ BC. AM = $\frac{1}{2}$ AC. BN.

Từ đó tính được BN = 9,6cm.

9B. Tương tự **9A.** BM = 12cm

=> GM = $\frac{1}{3}$ BG = $\frac{1}{3}$. 12 = 4cm.



10A. a) ΔBMC = ΔCNB (c.g.c) => BM = CN.

b) i) Do G là trọng tâm ΔABC nên:

GB = $\frac{2}{3}$ BM,GM = $\frac{1}{3}$ BM,

GC = $\frac{2}{3}$ CN, GN = $\frac{1}{3}$ CN

Mà BM = CN nên GB = GC,GN = GM.

ii) Từ ý i) suy ra ΔGBN = ΔGCM (c.g.c) => BN = CM.

iii) Vì BN = CM nên BN = CM => AB = AC .

Do đó ΔABC cân tại A.

10B. Tương tự **10A**.

Chứng minh được tam giác ABC cân tại A.

Kéo dài AG cắt BC tại M. Ta có ΔAMB = ΔAMC (c.c.c).

Suy ra ĐPCM.

11A. Ta có BN = CP nên GB = GC,GP = GN.

Tương tự **10A**, ta có AB = AC.

Tương tự, ta có AB = BC.

Vậy AB = BC = CA.

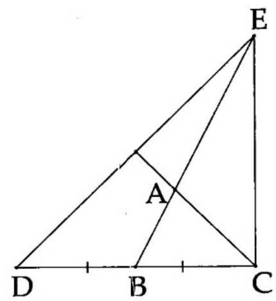
Suy ra ΔABC đều.

11B. Ta có AG = BG = CG và AG = $\frac{2}{3}$AM,

BG = $\frac{2}{3}$BN, CG = $\frac{2}{3}$CP

=> AM = BN = CP. Tương tự **11A** suy ra ĐPCM.

12. Tương tự **3B.** a) Ta có BD = BC,



do đó EB là đường trung tuyến của ΔCDE .

Mặt khác AE = 2AB nên A là trọng tâm của ΔCDE.

b) Vì A là trọng tâm của ΔCDE nên CA là đường trung tuyến, suy ra ĐPCM

13. Ta có

OD + OA > AD

OA + OB > BC

OB + OC > BC

OC + OD > DC

2 (OA + OB + OC + OD) > AB + BC + CD + DA

Hay 2(AC + BD) > AB + BC + CD + DA.

Sử dụng kết quả của 12 trang 93, ta có:

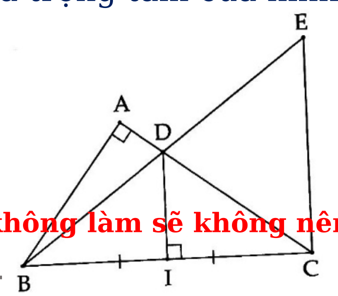
AB + BC + CD + DA > 4MN.

Suy ra ĐPCM.

Chú ý: Trung điểm G của MN được gọi là trọng tâm của hình ABCD.

14. a) BC = 10 cm.

b) ΔBDI = ΔCDI (hai cạnh góc vuông)



=> $\widehat{CBD} = \widehat{DCB}$

c) Ta có

ΔBCD cân tại D => DC = DB.

ΔCDE cân tại D => DE = DC

AB $\perp$ AC nên AC $\perp$ DC. Từ đó suy ra

ΔBAC = ΔDCA (hai cạnh góc vuông).

c) AM = 5 cm.

d) Xét ΔABC có BC < AB + AC,

ΔABG vuông tại G nên :

$AB^2 = AG^2 + BG^2 = 3^2 + 4^2 = 25$.

Suy ra AB = 5 cm

....
....