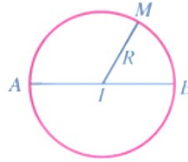


PHẦN A. LÝ THUYẾT VÀ VÍ DỤ

I. ĐỊNH NGHĨA MẶT CẦU



Cho trước điểm I và số dương R . Mặt cầu tâm I bán kính R là tập hợp tất cả các điểm trong không gian cách điểm I một khoảng bằng R .

Nhận xét

- Điểm M thuộc mặt cầu tâm I bán kính R khi và chỉ khi $IM = R$.
- Điểm M nằm trong mặt cầu tâm I bán kính R khi và chỉ khi $IM < R$.
- Điểm M nằm ngoài mặt cầu tâm I bán kính R khi và chỉ khi $IM > R$.

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu tâm $I(-2; 1; 5)$ bán kính 3. Các điểm $A(10; 1; 2)$, $B(0; 1; 4)$ và $C(0; 3; 4)$ nằm trong, nằm trên hay nằm ngoài mặt cầu đó?

Giải

Do $IA = \sqrt{(10 - (-2))^2 + (1 - 1)^2 + (2 - 5)^2} = \sqrt{153} > 3$ nên điểm $A(10; 1; 2)$ nằm ngoài mặt cầu đó.

Vì $IB = \sqrt{(0 - (-2))^2 + (1 - 1)^2 + (4 - 5)^2} = \sqrt{5} < 3$ nên điểm $B(0; 1; 4)$ nằm trong mặt cầu đó.

Do $IC = \sqrt{(0 - (-2))^2 + (3 - 1)^2 + (4 - 5)^2} = \sqrt{9} = 3$ nên điểm $C(0; 3; 4)$ nằm trên mặt cầu đó.

Trong bài học này, nếu không có chú ý gì thêm thì ta hiểu các bài toán được xét trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$.

II. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Phương trình của mặt cầu tâm $I(a; b; c)$ bán kính R là:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

Ví dụ 2: Viết phương trình của mặt cầu, biết:

- Tâm $I(1; 2; 3)$ bán kính $R = 10$;
- Tâm $I(3; -1; -5)$ và đi qua điểm $B(0; 2; 1)$.

Giải

a) Phương trình của mặt cầu tâm $I(1; 2; 3)$ bán kính $R = 10$ là:
 $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 100$.

b) Bán kính mặt cầu là: $R = IB = \sqrt{(0 - 3)^2 + (2 + 1)^2 + (1 + 5)^2} = \sqrt{54}$.

Phương trình của mặt cầu tâm $I(3; -1; -5)$ bán kính $R = \sqrt{54}$ là:
 $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z + 5)^2 = 54$.

Nhận xét

- Cho mặt cầu tâm $I(a; b; c)$ bán kính R có phương trình là:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

Ta có thể viết phương trình đó về dạng:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \text{ với } d = a^2 + b^2 + c^2 - R^2.$$

Vậy mỗi mặt cầu đều có phương trình dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$.

- Ngược lại, xét phương trình có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$.

Ta có: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 + z^2 - 2cz + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d$$

$$\Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d.$$

Do đó, phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ xác định một mặt cầu khi và chỉ khi $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$. Ngoài ra, nếu $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ thì phương trình đó xác định mặt cầu tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

Ví dụ 3: Mỗi phương trình sau có là phương trình mặt cầu hay không? Vì sao?

a) $2x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z + 1 = 0$;

b) $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 8z - 3 = 0$.

Giải

a) Phương trình $2x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z + 1 = 0$ không phải là phương trình của một mặt cầu vì các hệ số của x^2 và y^2 khác nhau.

b) Phương trình $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 8z - 3 = 0$ không phải là phương trình của một mặt cầu vì không có biểu thức z^2 .

Ví dụ 4: Phương trình nào sau đây là phương trình của một mặt cầu? Tìm tâm và bán kính của mặt cầu (nếu có).

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 10y - 2z + 14 = 0$;

b) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z + 20 = 0$.

Giải

a) Ta có: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 10y - 2z + 14 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2 \cdot 5 \cdot y - 2 \cdot 1 \cdot z + 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 5)^2 + (z - 1)^2 = 16.$$

Vậy phương trình đã cho là phương trình mặt cầu tâm $I(2; -5; 1)$ bán kính $R = \sqrt{16} = 4$.

b) Ta có: $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z + 20 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2 \cdot 1 \cdot x + 2 \cdot 2 \cdot y - 2 \cdot 3 \cdot z + 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = -6 < 0.$$

Vậy phương trình đã cho không là phương trình mặt cầu.

III. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU TRONG THỰC TIỄN

Phương trình mặt cầu có nhiều ứng dụng trong thực tiễn như trong thiết kế xây dựng, tính toán các yếu tố kỹ thuật,... Ta sẽ tìm hiểu qua một số ví dụ dưới đây.

Ví dụ 5: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), một trạm thu phát sóng điện thoại di động được đặt ở vị trí $I(-3; 2; 7)$.



a) Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng trong không gian, biết rằng trạm thu phát sóng đó được thiết kế với bán kính phủ sóng là 3 km .

b) Điểm $A(-2; 1; 8)$ nằm trong hay nằm ngoài mặt cầu đó? Nếu người dùng điện thoại ở điểm $A(-2; 1; 8)$ thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm này hay không?

c) Điểm $B(2; 3; 4)$ nằm trong hay nằm ngoài mặt cầu đó? Nếu người dùng điện thoại ở điểm $B(2; 3; 4)$ thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm này hay không?

Giải

a) Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng trong không gian là:

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z-7)^2 = 9. \text{ b) Ta có: } IA = \sqrt{[-2 - (-3)]^2 + (1-2)^2 + (8-7)^2} = \sqrt{3} < 3.$$

Vì $IA < R$ nên điểm A nằm trong mặt cầu. Vậy người dùng điện thoại ở điểm $A(-2; 1; 8)$ có thể sử dụng dịch vụ của trạm này.

$$\text{c) Ta có: } IB = \sqrt{[2 - (-3)]^2 + (3-2)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{35} > 3.$$

Vì $IB > R$ nên điểm B nằm ngoài mặt cầu. Vậy người dùng điện thoại ở điểm $B(2; 3; 4)$ không thể sử dụng dịch vụ của trạm này.

Ví dụ 6: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí $I(21; 35; 50)$.



a) Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới của vùng phủ sáng trên biển của hải đăng, biết rằng ngọn hải đăng đó được thiết kế với bán kính phủ sáng là 4 km .

b) Nếu người đi biển ở vị trí $C(42;37;0)$ thì có thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng hay không?

c) Nếu người đi biển ở vị trí $D(5121;658;0)$ thì có thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng hay không?

Giải

a) Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sáng trên biển của hải đăng là:

$$(x - 21)^2 + (y - 35)^2 + (z - 50)^2 = 4000^2.$$

b) Ta có: $IC = \sqrt{(42 - 21)^2 + (37 - 35)^2 + (0 - 50)^2} = \sqrt{2945} < 4000.$

Vì $IC < R$ nên điểm C nằm trong mặt cầu. Vậy người đi biển ở điểm $C(42;37;0)$ thì có thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng.

c) Ta có: $ID = \sqrt{(5121 - 21)^2 + (658 - 35)^2 + (0 - 50)^2} = \sqrt{26400629} > 4000.$

Vì $ID > R$ nên điểm D nằm ngoài mặt cầu. Vậy người đi biển ở điểm $D(5121;658;0)$ không thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng.