Bài 1 đề 1. Giải phương trình

$$\sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2}$$

Lời giải. Điều kiện để phương trình có nghĩa là $|x| \le 1$. Đặt $x = \cos t$, $t \in [0, \pi]$ thì phương trình trở thành

$$\sqrt{2}.\sin\left(\frac{t}{2}\right) = \cos(2t) + \sin(2t) \Leftrightarrow \sqrt{2}.\sin\left(\frac{t}{2}\right) = \sqrt{2}.\sin(2t + \frac{\pi}{4})$$

$t/2 = 2t + \pi/4 + 2k\pi \wedge t/2 = \pi - 2t - \pi/4 + 2k\pi$

$t = -\pi/6 - 4k\pi/3 \wedge t = 3\pi/10 + 4k\pi/5$

Do t thuộc $[0, \pi]$ nên có 1 giá trị t thoả mãn là $t = 3\pi/10$. Vậy nghiệm của phương trình là $x = \cos(3\pi/10)$.

Bài 2 đề 1. Cho dãy $\{x_n\}$ xác định bởi $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+x_n} = e$. Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Đáp số: 1/2. **Hướng dẫn**: Chứng minh bất đẳng thức $x - x^2/2 < \ln(1+x) < x - x^2/2 + x^3/3$ rồi dùng giới hạn kẹp. Có thể chuyển sang hàm số rồi dùng quy tắc L'Hopitale.

Bài 4 đề 1. Tìm tất cả các đa thức f(x) với hệ số nguyên sao cho với mọi n nguyên dương ta có f(n) là ước của $2^n - 1$.

Hướng dẫn. Nếu f(x) là đa thức không hằng thì tồn tại n sao cho $|f(n)| > 1$. Gọi p là ước số nguyên tố của f(n). Ta có $p \mid f(n) \mid 2^n-1$. Mặt khác $p \mid f(n+p) \mid 2^{n+p}-1$. Suy ra $p \mid 2^{n+p}-2^n = 2^n(2^p-1)$. Do $(2^n-1, 2^n) = 1$ nên từ đây suy ra $p \mid 2^p-1$. Nhưng theo định lý Fermat thì $p \mid 2^p - 2$. Như vậy từ đây suy ra $p \mid 1$. Mâu thuẫn. Vậy f(x) phải là đa thức hằng. Đáp số $f(x) \equiv 1$, $f(x) \equiv -1$.

Bài 5 đề 1. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a, b) sao cho $2^a + 3^b$ là bình phương của một số nguyên.

Lời giải. Giả sử $2^m + 3^n = a^2$ thì a là số lẻ và $a^2 = 2^m + 3^n \equiv (-1)^m (\bmod 3)$, do $a^2 \equiv 0,1 (\bmod 3)$ nên suy ra m phải là số chẵn. Tiếp theo, do $(-1)^n \equiv 2^m + 3^n = a^2 \equiv 1 (\bmod 4)$, nên n cũng phải là số lẻ, đặt $n = 2k, k \ge 1$ thì $2^m = (a+3^k)(a-3^k)$, do vậy

$$a + 3^k = 2^r,\ a - 3^k = 2^s\ (r > s \ge 0, r+s = m)$$

Thì $2.3^k = 2^r - 2^s \Rightarrow s = 1$, do vậy $2^{r-1} + 1 = 3^k$. Vì $r + 1 = m$ suy ra r lẻ. Nên:

$\left(2^{\frac{r-1}{2}}-1\right)\left(2^{\frac{r-1}{2}}+1\right)=3^k$. Do hiệu của hai nhân tử bằng 2 và cả hai số đều không chia hết cho 3 nên $2^{\frac{r-1}{2}}-1=1 \Rightarrow r=3$ nên $k=1$. Vậy cặp $(m,n)=(4,2)$ là nghiệm của phương trình.
Dễ thấy rằng các số này thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 7 đề 1. Tại một hội nghị có 100 đại biểu. Trong số đó có 15 người Pháp, mỗi người quen với ít nhất 70 đại biểu và 85 người Đức, mỗi người quen với không quá 10 đại biểu. Họ được phân vào 21 phòng. Chứng minh rằng có một phòng nào đó không chứa một cặp nào quen nhau.

Lời giải. Mỗi một người Pháp phải quen với ít nhất 70 – 14 = 56 người Đức. Suy ra số cặp (Pháp, Đức) quen nhau ít nhất là 15 x 56 = 840.

Gọi n là số người Đức quen ≤ 9 đại biểu người Pháp (gọi là $Đ_1$) thì ta có: 840 ≤ (85-n).10 + n.9. Suy ra n ≤ 10. Những người Đức còn lại ($Đ_2$) đều quen 10 đại biểu người Pháp, do đó không thể quen với người Đức nữa.

Vì có 21 phòng và chỉ có 15 người Pháp nên có ít nhất 6 phòng chỉ có toàn người Đức. Vì chỉ có nhiều nhất 10 người Đức có thể quen nhau nên theo nguyên lý Dirichlet, trong 6 phòng này sẽ có ít nhất một phòng chỉ có nhiều nhất 1 người Đức thuộc $Đ_1$. Phòng này chính là phòng cần tìm.

Bài 1 đề 2. Cho $0 < x_0, x_1, \ldots, x_{669} < 1$ là các số thực đôi một khác nhau. Chứng minh rằng tồn tại một cặp (x_i, x_j) sao cho

$$0 < x_i x_j (x_j - x_i) < \frac{1}{2007}$$

Hướng dẫn. Sắp xếp các số thực theo thứ tự tăng dần, sau đó áp dụng bất đẳng thức $3ab(b-a) < b^3 - a^3$ với $b > a$.

Bài 2 đề 2. Cho dãy số $\{a_n\}$ xác định bởi $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ và $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$ với mọi $n \geq 1$. Chứng minh rằng với mọi m, $a_m a_{m+1}$ cũng là một số hạng của dãy số.

Lời giải. Ta có

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$$

Thay n bằng n-1, ta được

$$a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + 2$$

Trừ hai đẳng thức vế theo vế, ta được

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 3a_n - a_{n-1} = 0$$

Phương trình đặc trưng $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$ có nghiệm bội 3 $x_{1,2,3} = 1$ nên ta có nghiệm tổng quát a_n có dạng $a_n = an^2 + bn + c$. Thay n = 1, 2, 3 ta được

$$a + b + c = 1$$

$4a + 2b + c = 2$

$9a + 3b + c = 5$

Từ đó giải ra được a = 1, b = -2, c = 2. Vậy $a_n = n^2 - 2n + 2 = (n-1)^2+1$. Do đó $a_m a_{m+1} = ((m-1)^2+1)(m^2+1) = (m^2 - m + 1)^2 + 1 = a\_\{m^2-m+2\}$.

Bài 4 đề 2. Tìm tất cả các hoán vị $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ của $(1, 2, \ldots, n)$ sao cho $2(a_1+\ldots+a_k)$ chia hết cho k+1 với mọi k=1, 2, …, n.

Hướng dẫn. Chứng minh bằng quy nạp rằng chỉ có 2 hoán vị thoả mãn điều kiện là (1, 2, 3…, n) và (2, 1, 3, …, n).

Bài 5. Chứng minh rằng đa thức $P(x) = x^n + 29x^{n-1} + 2009$ với n là số nguyên dương lớn hơn hay bằng 2 không thể phân tích thành tích của 2 đa thức với hệ số nguyên có bậc lớn hơn hay bằng 1.

Hướng dẫn. Sử dụng tiêu chuẩn Eisenstein mở rộng như sau

Cho đa thức $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 \in Z[x]$. Giả sử tồn tại số nguyên tố p và số nguyên dương k thoả mãn đồng thời các điều kiện sau

1) a_n không chia hết cho p
2) a_0 chia hết cho p nhưng không chia hết cho p^2
3) $a_1, a_2, \ldots, a_{n-k}$ chia hết cho p

Khi đó, nếu P(x) = Q(x).S(x) với Q(x), S(x) là các đa thức với hệ số nguyên thì một trong hai đa thức Q(x), S(x) có bậc nhỏ hơn k.

Bài 6 đề 2. Cho tam giác *ABC* với *O*, *I* theo thứ tự là tâm của đường tròn ngoại, nội tiếp tam giác. Chứng minh rằng $\widehat{AIO} \le 90^0$ khi và chỉ khi $AB + AC \ge 2BC$

Kéo dài AI cắt đường tròn (O) tại D.

Ta có $DB = DC$, ngoài ra:

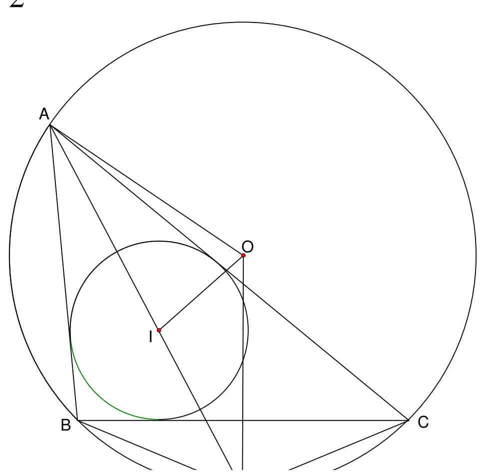
$\widehat{DBI} = \widehat{DBC} + \dfrac{B}{2} = \widehat{BAD} + \dfrac{B}{2} = \widehat{DIB}$ nên tam giác DBI cân tại D, nên $DB = DI$.

Áp dụng định lý Ptoleme cho tứ giác $ABDC$ ta được:

$$AD.BC = AB.DC + BD.AC \Leftrightarrow AD.BC = BD(AB + AC)$$

$$\Leftrightarrow AD.BC = DI(AB + AC)$$

Vậy $\widehat{AIO} \le 90^0 \Leftrightarrow DI \le \dfrac{AD}{2}$ tương đương với $AB + AC \ge 2BC$.



Bài 7 đề 2. Hình vuông được chia thành 16 hình vuông con bằng nhau, thu được tập hợp gồm 25 đỉnh. Hỏi cần phải bỏ đi ít nhất bao nhiêu đỉnh của tập hợp này để không có 4 đỉnh nào của tập hợp còn lại là đỉnh của một hình vuông với các cạnh song song với cạnh của hình vuông ban đầu?

Hướng dẫn. Chứng minh bằng phản chứng.

Bài 1 đề 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(y+z)=x^2+2 \\ y(z+x)=y^2+3 \\ z(x+y)=z^2+4 \end{cases}$

Ta có: $\begin{cases} x(y+z-x)=2 \\ y(z+x-y)=3 \\ z(x+y-z)=4 \end{cases}$, đặt

$$a=-x+y+z;b=x-y+z;c=x+y-z\Rightarrow z=\frac{a+b}{2},y=\frac{a+c}{2},x=\frac{b+c}{2}$$

Thay vào nhận được: $\begin{cases} a(b+c)=4 \\ b(c+a)=6 \\ (a+b)c=8 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} ab=1 \\ ac=3 \\ bc=5 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=\frac{\sqrt{15}}{5} \\ b=\frac{\sqrt{15}}{3} \\ c=\sqrt{15} \end{cases}\vee\begin{cases} a=-\frac{\sqrt{15}}{5} \\ b=-\frac{\sqrt{15}}{3} \\ c=-\sqrt{15} \end{cases}$

Từ đây ta có tập nghiệm là:

$$(x,y,z)=\left(\frac{2\sqrt{15}}{3},\frac{3\sqrt{15}}{5},\frac{4\sqrt{15}}{15}\right)=\left(-\frac{2\sqrt{15}}{3},-\frac{3\sqrt{15}}{5},-\frac{4\sqrt{15}}{15}\right)$$

Bài 2 đề 3. Hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện $f(\cot x)=\sin 2x+\cos 2x$ với mọi *x* thuộc (0, π). Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x).f(1-x)$.

Ta có $f(\cot x)=\frac{\cot^2 x+2\cot x-1}{\cot^2 x+1}$ với mọi $x\in(0;\pi)$, đặt $t=\cot x$ thì ta được

$$f(t)=\frac{t^2+2t-1}{t^2+1},\forall t\in\mathbb{R}$$

Khi đó $g(x) = f(x).f(1-x) = \dfrac{x^2(1-x)^2 + 8x(1-x) - 2}{x^2(1-x)^2 - 2x(1-x) + 2}$. Xét trên $[-1,1]$, đặt $t = x(1-x) \Rightarrow t \in \left[-2, \dfrac{1}{4}\right]$, khi đó hàm số $g(x)$ thành $h(t) = \dfrac{t^2 + 8t - 2}{t^2 - 2t + 2}$. Khảo sát hàm số này trên $t \in \left[-2, \dfrac{1}{4}\right]$, ta được:

$$\max_{\left[-2,\frac{1}{4}\right]} h(t) = 4 - \sqrt{34} \text{ và } \min_{\left[-2,\frac{1}{4}\right]} h(t) = \frac{1}{25}$$

Vậy $\max\limits_{[-1,1]} g(x) = 4 - \sqrt{34}$ và $\min\limits_{[-1,1]} g(x) = \dfrac{1}{25}$

Bài 5 đề 3. Tìm tất cả các đa thức P(x) thoả mãn điều kiện $P^2(x) - P(x^2) = 2x^4$.

Lời giải vắn tắt. Đặt $P(x) = a_nx^n + R(x)$ với $R(x)$ là đa thức bậc $r < n$. Khi đó $P^2(x) - P(x^2) = (a_n^2 - a_n)x^{2n} + 2a_nx^nR(x) + R^2(x) - R(x^2)$. Từ đây suy ra $P^2(x) - P(x^2)$ có bậc là 2n nếu $a_n \neq 1$ và có bậc n+r nếu $a_n = 1$. Từ đó suy ra $2 \le n \le 4$. Hơn nữa, nếu

$n = 4$ thì $a_n = 1$ và $r = 0$

$n = 3$ thì $a_n = 1$ và $r = 1$

Từ đây, dùng phương pháp hệ số bất định, dễ dàng tìm được các nghiệm là: x^4+1, x^3+x, $2x^2$ và $-x^2$.

Ghi chú: Hãy mở rộng bài toán!

Bài 6 đề 3. Cho tam giác cân ABC với AB = AC. P là một điểm bất kỳ nằm trong hay nằm trên các cạnh của tam giác ABC. Chứng minh rằng $PA^2 + PB.PC \le AB^2$.

Hướng dẫn. Vẽ đường tròn (C) tâm A bán kính AB. Nối BP cắt (C) tại C'. Khi đó $BP.PC' = AB^2 - PA^2$ do đó ta chỉ cần chứng minh $PC \le PC'$ là xong.

Bài 7 đề 3. Cho A là một tập hợp gồm 8 phần tử. Tìm số lớn nhất các tập con gồm 3 phần tử của A sao cho giao của 2 tập bất kì trong các tập con này không phải là một tập hợp gồm 2 phần tử.

Lời giải. Giả sử ta tìm được n tập hợp con thoả mãn yêu cầu đề bài. Ta chứng minh rằng một phần tử a bất kỳ thuộc A thuộc không quá 3 tập hợp trong số n tập hợp con nói trên. Thật vậy, giả sử có 4 tập hợp chứa a là $\{a, a_1, a_2\}$, $\{a, a_3, a_4\}$, $\{a, a_5, a_6\}$, $\{a, a_7, a_8\}$ thì do a_i đều khác a nên phải tồn tại $i \neq j$ sao cho $a_i = a_j$. Không mất tính tổng quát có thể giả sử $i = 1$. Nếu $j = 2$ thì $\{a, a_1, a_2\}$ chỉ có 2 phần tử. Mâu thuẫn. Nếu $j > 2$, chẳng hạn $j = 3$ thì $\{a, a_1, a_2\} \cap \{a, a_3, a_4\} = \{a, a_1\}$, mâu thuẫn!

Như vậy mỗi một phần tử thuộc không quá 3 tập hợp. Suy ra số lần xuất hiện của tất cả các phần tử của A trong các tập con được chọn không quá 3 x 8 = 24 lần. Vì mỗi một tập con có 3 phần tử nên số tập con không quá 24/3 = 8. Suy ra n ≤ 8.

Ta chứng minh 8 là số lớn nhất bằng cách chỉ ra 8 tập con như vậy. Điều này có thể làm được khá dễ dàng thông qua bảng sau

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	X	X	X					
2	X			X	X			
3	X					X		X
4		X		X			X	
5		X			X			X
6			X	X				X
7			X			X	X	
8					X	X	X	

Bài 1 đề 4. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện :

$$\begin{cases} x \geq y \geq z \geq 1 \\ 2y + 3z \geq 6 \\ 11x + 27z \geq 54 \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{1}{x^2} + \frac{2008}{y^2} + \frac{2009}{z^2}$.

Hướng dẫn. Dùng công thức khai triển Abel.

Bài 2 đề 4. Cho dãy số thực $\{x_n\}$ xác định bởi $x_0 = 1, x_{n+1} = 2 + \sqrt{x_n} - 2\sqrt{1 + \sqrt{x_n}}$ với mọi n ∈ N. Ta xác định dãy $\{y_n\}$ bởi công thức $y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i 2^i, \quad \forall n \in N^*$. Tìm công thức tổng quát của dãy $\{y_n\}$.

Lời giải. Ta có

$$x_{n+1} = 2 + \sqrt{x_n} - 2\sqrt{1 + \sqrt{x_n}} = (\sqrt{1 + \sqrt{x_n}} - 1)^2$$

Từ đó tính được

$$x_1 = \left(\sqrt{2} - 1\right)^2, x_2 = \left(\sqrt{\sqrt{2}} - 1\right)^2, ..., x_n = \left(2^{1/2^n} - 1\right)^2$$

Ta viết

$$x_1 = 1 + 2 - 2\sqrt{2},$$
$$x_2 = 1 + \sqrt{2} - 2.2^{1/4}$$
$$x_3 = 1 + 2^{1/4} - 2.2.^{1/8}$$
$$...$$
$$x_n = 1 + 2^{1/2^{n-1}} - 2.2^{1/2^n}$$

Nhân đẳng thức đầu với 2, đẳng thức thứ hai với 2^2, đẳng thức thứ ba với 2^3 … đẳng thức thứ n với 2^n rồi cộng vế theo vế, chú ý đến những sự giản ước, ta được.

$$y_n = 2 + 4 + ... + 2^n + 4 - 2^{n+1}.2^{1/2^n} = 2^{n+1}(1 - 2^{1/2^n}) + 2.$$

Bài 4 đề 4. Tìm tất cả các số nguyên dương lẻ n sao cho tồn tại các số nguyên lẻ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thoả mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = n^4$.

Lời giải tóm tắt. Nếu x là số nguyên lẻ thì $x^2 \equiv 1 \mod 8$. Từ đó, nếu n là số nguyên dương thoả mãn yêu cầu thì xét hai vế theo mô-đun 8, ta suy ra n đồng dư 1 mô-đun 8, tức là n = 8k + 1. Với n = 8k+1, ta chọn $x_1 = n^2 - 2$, $x_2 = 2n - 1$, còn trong 8k-1 số còn lại có 3k số bằng 3 và 5k-1 số bằng 1 thì tổng bình phương các x_i sẽ bằng

$$(n^2-2)^2 + (2n-1)^2 + 27k + 5k-1 = n^4.$$

Bài 5 đề 4. Tìm tất cả các hàm số f: R   R thoả mãn điều kiện

$$f(f(x) + y)) = f(f(x) - y) + 4f(x)y$$

với mọi x, y thuộc R.

Lời giải. Thay y = f(x) ta được $f(2f(x)) = f(0) + 4f^2(x)$. Thay y bởi 2f(y) – f(x) ta được

$f(2f(x) - 2f(y)) = f(2f(y)) - 4f(x)(2f(y)-f(x)) = f(0) + 4f^2(y) + 4f(x)(2f(y)-f(x)) = f(0) + (2f(x)-2f(y))^2$.

Nếu tồn tại x_0 với $f(x_0) \neq 0$ thì với mọi x thuộc R ta có

$$x = 2f(f(x_0) + x/8f(x_0)) - 2f(f(x_0)-x/8f(x_0)),$$

nên $f(x) = x^2 + f(0)$.

Bài 6 đề 4. Cho tam giác ABC có BC > AB > AC và cosA + cosB + cosC = 11/8. Xét các điểm X thuộc BC và Y thuộc AC kéo dài về phía C sao cho BX = AY = AB.

a) Chứng minh rằng XY = AB/2.

b) Gọi Z là điểm nằm trên cung AB của đường tròn ngoại tiếp tam giác không chứa C sao cho ZC = ZA + ZB. Hãy tính tỷ số ZC/(XC+YC).

Hướng dẫn. Dùng định lý Ptolemy.

Bài 7 đề 4. Cho n là số nguyên dương lớn hơn hay bằng 2. Kí hiệu A = {1, 2, …, n}. Tập con B của tập A được gọi là 1 tập "tốt" nếu B khác rỗng và trung bình cộng của các phần tử của B là 1 số nguyên. Gọi T_n là số các tập tốt của tập A. Chứng minh rằng $T_n – n$ là 1 số chẵn.

Hướng dẫn. Có n tập tốt có 1 phần tử. Với các tập tốt còn lại, ta bắt cặp chúng như sau. Các tập tốt 2 phần tử {a, b} được cho tương ứng với các tập tốt 3 phần tử {a, (a+b)/2, b)}. Sẽ có các tập tốt 3 phần tử không được "sinh ra" bằng cách nêu trên, tức là không có dạng {a, b, c} với b = (a+c)/2. Các tập này lại được cho tương ứng với các tập tốt 4 phần tử {a, b, c, (a+b+c)/3} …

Bài 1 đề 5. Giải hệ phương trình

$$x^2+y^2+z^2 = yz+\frac{8}{x} = 2xz-\frac{2}{y} = 3xy+\frac{18}{z}$$

Bài 2 đề 5. Cho số thực a và dãy số thực $\{x_n\}$ xác định bởi:

$$x_1 = a \text{ và } x_{n+1} = \ln(3+\cos x_n + \sin x_n) – 2008 \text{ với mọi } n = 1, 2, 3, \dots$$

Chứng minh rằng dãy số $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn khi n tiến đến dương vô cùng.

Lời giải. Đặt f(x) = ln(3+sinx+cosx) – 2008 thì

$$f'(x) = \frac{\cos x-\sin x}{3+\sin x+\cos x}$$

Từ đó, sử dụng đánh giá $|\cos x-\sin x| \le \sqrt{2}$, $|\sin x+\cos x| \le \sqrt{2}$ ta suy ra

$$|f'(x)| \le \frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = q < 1.$$

Áp dụng định lý Lagrange cho x, y thuộc R, ta có

$$f(x) – f(y) = f'(z)(x-y)$$

Từ đó suy ra $|f(x) – f(y)| \le q|x – y|$ với mọi x, y thuộc R.

Áp dụng tính chất này với $m > n \ge N$, ta có

$$|x_m – x_n| = |f(x_{m-1}) – f(x_{n-1})| \le q|x_{m-1}-x_{n-1}| \le \dots \le q^{n-1}|x_{m-n+1} – x_1| \le q^{N-1}|x_{m-n+1} – x_1|.$$

Do dãy $\{x_n\}$ bị chặn và $q < 1$ nên với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại N đủ lớn để $q^{N-1}|x_{m-n+1} – x_1| < \varepsilon$. Như vậy dãy $\{x_n\}$ thoả mãn điều kiện Cauchy do đó hội tụ.

Bài 4 đề 5. Vì $\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}=\frac{a^2+b^2+a+b}{ab}$ là số nguyên, suy ra (a^2+b^2+a+b) chia hết cho ab (1).

Đặt $d=(a,b)$, khi đó $ab \vdots d^2$ (2) và $a^2+b^2 \vdots d^2$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $a^2+b^2+a+b \vdots d^2$ (3).
Từ (2) và (3) suy ra $a+b \vdots d^2$ nên $d^2 \le a+b \Rightarrow d \le \sqrt{a+b}$ (đpcm).

Bài 5 đề 5. Cho a, b, c > 0, a + b + c = 3. Chứng minh rằng $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \ge a^2+b^2+c^2$.

Do $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \ge \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$ nên ta chỉ cần chứng minh:

$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca} \ge a^2+b^2+c^2 \Leftrightarrow abc(a^2+b^2+c^2) \le 3$

Đặt $x = ab+bc+ca$ thì từ $(ab+bc+ca)^2 \ge 3abc(a+b+c)$ suy ra $abc \le \frac{x^2}{9}$. Mặt khác:

$$a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = 9-2x$$

Do đó $abc(a^2+b^2+c^2)-3 \le \frac{x^2}{9}(9-2x)-3 = \frac{-(x-3)^2(2x+3)}{9} \le 0$

Bài 7 đề 5. Trên bàn cờ vua kích thước 8x8 được chia thành 64 ô vuông đơn vị, người ta bỏ đi một ô vuông đơn vị nào đó ở vị trí hàng thứ m và cột thứ n. Gọi S(m;n) là số hình chữ nhật được tạo bởi một hay nhiều ô vuông đơn vị của bàn cờ sao cho không có ô nào trùng với vị trí của ô bị xóa bỏ ban đầu. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của S(m;n).

Lời giải vắn tắt. Đánh số các đường dọc từ trái sang phải từ 1-9, đánh số các đường ngang từ trên xuống dưới từ 1 đến 9. Một hình chữ nhật sẽ được xác định một cách duy nhất bởi hai cặp số (s, t), (u, v), trong đó s < t là số của các đường dọc tương ứng với biên trái và biên phải, u < v là số của các đường ngang tương ứng với biên trên và biên dưới. Từ đó số các hình chữ nhật là được tạo bởi các ô vuông đơn vị là $C_9^2.C_9^2$.

Bây giờ giả sử ta bỏ đi ô (m, n). Ta sẽ đếm số hình chữ nhật trong số các hình chữ nhật nói trên chứa ô này. Rõ ràng lúc này u sẽ có n cách chọn và v sẽ có 9-n cách chọn. Tương tự, s có m cách chọn và t có 9-m cách chọn. Suy ra số hình chữ nhật chứa ô (m, n) là n(9-n)m(9-m).

Từ đây suy ra $S(m,n) = C_9^2.C_9^2 - m(9-m)n(9-n)$.
Đáp số: $S(m,n)_{min}$ = S(4, 4) = S(4, 5) = S(5, 4) = S(5, 5). $S(m,n)_{max}$ = S(1,1) = S(1, 8) = S(8, 1) = S(8,8).

Bài 2 đề 6. Cho dãy số $\{a_n\}$ xác định bởi công thức truy hồi $a_1 = 1/2$, $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1}$.
Chứng minh rằng $a_1 + a_2 + \ldots + a_n < 1$ với mọi số nguyên dương n.

Hướng dẫn. Đặt $b_n = 1/a_n$ thì ta được $b_{n+1} = b_n(b_n-1) + 1$. Từ đó

$$\frac{1}{b_{n+1}-1} = \frac{1}{b_n(b_n-1)} = \frac{1}{b_n-1} - \frac{1}{b_n} \Rightarrow \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b_n-1} - \frac{1}{b_{n+1}-1}$$

Suy ra

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{b_i-1} - \frac{1}{b_{i+1}-1}\right) = 1 - \frac{1}{b_{n+1}-1} < 1$$

Bài 4 đề 6. (a) Cho trước số nguyên dương n. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên dương phân biệt x, y sao cho x + k chia hết cho y + k với mọi k = 1, 2, …, n.

(b) Chứng minh rằng nếu với các số nguyên dương x và y ta có x + k chia hết cho y + k với mọi số nguyên dương k thì x = y.

Bài 5 đề 6. Tìm tất cả các đa thức P(x) với hệ số thực thoả mãn điều kiện $P^2(x) = P(x^2) – 2P(x)$.

Hướng dẫn. Đặt Q(x) = P(x) + 1 thì $Q^2(x) = Q(x^2)$. Chứng minh $Q(x) = x^n$ là đa thức bậc n duy nhất thoả mãn phương trình này. Từ đó suy ra nghiệm của bài toán là x^n-1 cùng các đa thức đồng nhất hằng số $P(x) \equiv 0$ và $P(x) \equiv - 1$.

Bài 6 đề 6. Lục giác lồi ABCDEF có ABF là tam giác vuông cân tại A, BCEF là hình bình hành. AD = 3, BC = 1, CD + DE = $2\sqrt{2}$. Tính diện tích lục giác.

Hướng dẫn. Xét phép tịnh tiến biến B thành C, F thành E và A thành A'. Sau đó áp dụng bất đẳng thức Ptolemy cho tứ giác A'CDE.

Bài 7 đề 6. Cho X = {1, 2, …, n}. Tìm số tất cả các cặp sắp thứ tự (A, B) với A, B là các tập con của X sao cho A không phải là tập con của B và B cũng không phải là tập con của A.

Lời giải. Có 2^n tập con của E. Từ đó số các tập sắp thứ tự (A, B) các tập con của E là 2^n x $2^n = 4^n$. Ta đếm số các bộ (A, B) mà $A \subseteq B$ hoặc $B \subseteq A$. Ta có

$|\{(A, B)|\ A \subseteq B$ hoặc $B \subseteq A\ \}|$

$= |\{(A, B)|\ A \subseteq B\}| + |\ (A, B)|\ B \subseteq A\ \} - |\{(A, B)|\ A \subseteq B$ và $B \subseteq A\}|$.

Rõ ràng

$|\{(A, B)|\ A \subseteq B$ và $B \subseteq A\}| = |\{(A, B)|\ A = B\}| = 2^n$.

Để tính $|\{(A, B)|\ A \subseteq B\}|$ ta lý luận như sau: Nếu |B| = k (k=0, 1, …, n) thì có C_n^k cách chọn B. Sau khi B được chọn, sẽ có 2^k cách chọn A. Từ đó

$$|\{(A,B)\ |\ A \subseteq B\}| = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k = 3^n.$$

Từ đó đáp số của bài toán là $4^n – 2.3^n + 2^n$.

Bài 1 đề 7. Cho 3 số thực dương a,b,c thỏa mãn điều kiện: $a+b+c \ge \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

Chứng minh rằng $a+b+c \ge \frac{3}{a+b+c}+\frac{2}{abc}$.

Ta có $a+b+c \ge \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge \frac{9}{a+b+c} \Rightarrow a+b+c \ge 3$. Ta viết lại bất đẳng thức như sau:

$$(a+b+c)^2 \ge 3+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz:

$$2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right) \le \frac{2}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 \le \frac{2}{3}(a+b+c)^2.$$

Do đó ta chỉ còn cần phải chứng minh:

$$(a+b+c)^2 \ge 3+\frac{2}{3}(a+b+c)^2 \Leftrightarrow (a+b+c)^2 \ge 9 \Leftrightarrow a+b+c \ge 3$$

Bài 2 đề 7. Tìm tất cả các hàm số f: R R thỏa mãn điều kiện:

$$f(x-f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1; \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (1).$$

Lời giải:

Từ (1) thay $x = f(y)$ ta được: $f(0) = f(f(y)) + f(y).f(y) + f(f(y)) - 1, \ \forall y \in \mathbb{R}$ nên:

$$f(f(x)) = -\frac{1}{2}(f(x))^2 + \frac{a+1}{2}, \ \forall x \in \mathbb{R} \quad (*)$$

Từ (1) thay $x = f(x)$ ta được: $f(f(x)-f(y)) = f(f(y)) + f(x)f(y) + f(f(x)) - 1$

$$\Rightarrow f(f(x)-f(y)) = -\frac{(f(y))^2}{2} + \frac{a+1}{2} + f(x)f(y) - \frac{(f(x))^2}{2} + \frac{a+1}{2} - 1$$

$\Rightarrow f(f(x)-f(y)) = -\frac{((f(x)-f(y))^2}{2} + a$. Nhận xét $f(x) \equiv 0$ không thỏa (1) nên $\exists y_0 : f(y_0) \ne 0$. Từ (1), ta có $f(x-f(y_0)) - f(x) = f(f(y_0)) + xf(y_0) - 1$. Vế trái là một hàm bậc nhất theo x nên có tập giá trị là $\mathbb{R}$. Suy ra vế phải cũng có tập giá trị là $\mathbb{R}$.

$$\forall x, \exists u, v : x = f(u) - f(v) \Rightarrow f(x) = f(f(u)-f(v)) = -\frac{1}{2}(f(u)-f(v))^2 + a, \forall x$$

Hay

$$f(f(x)) = -\frac{1}{2}(f(x))^2 + a, \forall x. (**).$$

Từ (*) và (**), ta có $a = \frac{a+1}{2} \Rightarrow a = 1$ vậy $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1; \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa điều kiện.

Vậy hàm thỏa mãn điều kiện là $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1; \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài 3. Các đường chéo của hình thang ABCD cắt nhau tại điểm P. Điểm Q nằm giữa hai đáy BC và AD được chọn sao cho $\angle AQD = \angle CQB$. Điểm P và Q nằm khác phía nhau đối với cạnh CD. Chứng minh rằng $\angle BQP = \angle DAQ$.

Hướng dẫn. Xét phép vị tự tâm P biến A thành C, D thành B, Q thành Q'. Khi đó $\angle BQ'C = \angle AQD = \angle CQB$ suy ra tứ giác BCQQ' nội tiếp. Suy ra $\angle Q'QB = \angle Q'CB = \angle QAD$.

Bài 4. Tìm tất cả các số nguyên dương n có thể biểu diễn được dưới dạng

$$n = [a, b] + [b, c] + [c, a]$$

trong đó a, b, c là các số nguyên dương. ([a, b] ký hiệu bội số chung nhỏ nhất của các số nguyên dương a, b).

Lời giải. Gọi X là tập hợp các số n biểu diễn được dưới dạng trên. Với a = b = 1, c = k, ta được n = 2k + 1. Suy ra mọi số lẻ lớn hơn 1 thuộc x. Vì [2a, 2b] = 2[a, b] nên nếu n thuộc X thì 2n thuộc X. Suy ra tất cả các số có dạng $2^u.(2k+1)$ đều thuộc X. Chỉ còn lại các số có dạng 2^k. Ta chứng minh các số dạng này không thuộc X.

Thật vậy, giả sử $n = 2^k$ là số nhỏ nhất biểu diễn được dưới dạng n = [a, b] + [b, c] + [c, a]. Khi đó a, b, c không thể đồng thời chẵn (khi đó n/2 cũng biểu diễn được) và không thể đồng thời lẻ (khi đó n lẻ). Trường hợp số hai lẻ, 1 số chẵn cũng không thể xảy ra vì khi đó n lẻ. Cuối cùng, trường hợp a lẻ, b, c chẵn, ta có

$$n = [a, b] + [b, c] + [c, a] = [2a, b] + [b, c] + [c, 2a]$$

suy ra $n/2 = [a, b/2] + [b/2, c/2] + [c/2, a]$.

Bài 5. Tìm tất cả các đa thức hai biến P(x, y) sao cho P(a,b).P(c,d) = P(ac+bd,ad+bc) với mọi a, b, c, d thuộc R.

Bài 6. Hãy xác định dạng của tứ giác ABCD diện tích S, biết rằng trong S tồn tại một điểm O sao cho $2S = OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2$.

Bài 7. Với số nguyên dương n > 1 xét S = {1, 2, 3, …, n}. Tô các số của S bằng 2 màu, u số màu đỏ và v số màu xanh. Hãy tìm số các bộ (x, y, z) thuộc S^3 sao cho

a) x, y, z được tô cùng màu;

b) x + y + z chia hết cho n.

Cách 1. Gọi R là tập các số được tô màu đỏ và B là tập các số được tô màu xanh. Nếu x, y, đã được chọn thì có duy nhất một cách chọn $z = z_{x,y}$ sao cho x + y + z chia hết cho n. Suy ra có n^2 bộ (x, y, z) với x + y + z chia hết cho n. Ta đi đếm các bộ (x, y, z) với x + y + z chia hết cho n nhưng trong 3 số x, y, z xuất hiện cả hai màu. Nếu (x, y, z) là một bộ hai màu thì sẽ có hoặc hai số màu đỏ, một số màu xanh hoặc ngược lại. Trong cả hai trường hợp, sẽ có đúng một trong các cặp (x, y), (y, z) và (z, x) thuộc tập hợp R x B. Ta cho tương ứng cặp này với bộ (x, y, z).

Ngược lại, với bộ (x, y) bất kỳ thuộc R x B và ký hiệu $z = z_{x,y}$. Vì $x \neq y$ nên các bộ (x, y, z), (y, z, x) và (z, x, y) khác nhau và đều tương ứng với (x, y). Mặt khác, nếu (x, y) được cho tương ứng với 1 bộ ba nào đó thì bộ ba này chính là một trong các bộ ba nói trên. Như vậy mỗi một cặp thuộc R x B được cho tương ứng đúng 3 lần. Từ đó suy ra số bộ hai màu bằng 3.u.v và đáp số của bài toán là $n2 - 3uv = (u+v)^2 - 3uv = u^2 - uv + v^2$.

Cách 2. Giả sử $R = \{a_1, a_2, \dots, a_u\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_v\}$ tương ứng là tập hợp các số được tô màu đỏ và màu xanh thì $R \cup B = S$.

Đặt $P(x) = \sum_{a \in R} x^a$, $Q(x) = \sum_{b \in B} x^b$ và xét đa thức $H(x) = P^3(x) + Q^3(x)$. Để ý rằng

$$P^3(x) = \sum_{(a,b,x) \in R^3} x^{a+b+c}, Q^3(x) = \sum_{(a,b,x) \in B^3} x^{a+b+c},$$

Nên số các bộ (x, y, z) thuộc S^3 sao cho x, y, z cùng màu và x + y + z chia hết cho n chính là tổng các hệ số của x^n, x^{2n}, x^{3n} trong H(x).

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác, } H(x) = P^3(x) + Q^3(x) &= (P^2(x) - P(x)Q(x) + Q^2(x))(P(x) + Q(x)) \\ &= (P^2(x) - P(x)Q(x) + Q^2(x))(x + x^2 + \dots + x^n) \end{aligned}$$

Giả sử

$$G(x) = P^2(x) - P(x)Q(x) + Q^2(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$$

Chú ý rằng với mọi số tự nhiên k, tồn tại suy nhất i thuộc (1, 2, …, n) sao cho k+i chia hết cho n. Do đó tổng các hệ số của x^n, x^{2n}, x^{3n} trong H(x) đúng bằng tổng các hệ số của G(x) và như vậy bằng $G(1) = u^2 - uv + v^2$.

Vậy đáp số của bài toán là $u^2 - uv + v^2$.