**ĐỀ 84**

**ĐỀ HSG TOÁN 9 HUẾ 2023-2024**

**Câu 1.** (3,0 điểm)

Cho biểu thức: P =

1. Rút gọn biểu thức P.
2. Tính giá trị của P khi *x* =

**Câu 2.** (4,0 điểm)

1. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn a 0 và . Chứng minh rằng phương trình có hai nghiệm phân biệt ; và tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
2. Tìm các cặp nghiệm nguyên dương (x;y) thỏa mãn phương trình:

**Câu 3.** (2,0 điểm) Giải phương trình:

**Câu 4.** (3,0 điểm) Giải hệ phương trình:

**Câu 5.** (6,0 điểm)

Cho nửa đường tròn đường kính BC = 2R là điểm di động trên nửa đường tròn đó. Gọi D là hình chiếu vuông góc của A lên BC và M, N lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABD, ACD.

1. Chứng minh: CN vuông góc với AM.
2. Chứng minh: DMN và DBA là hai tam giác đồng dạng.
3. Gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với MN. Chứng minh rằng: d luôn đi qua một điểm cố định.
4. Tìm vị trí của điểm A để đoạn MN có độ dài lớn nhất và tính độ dài lớn nhất đó theo R.

**Câu 5.** (2,0 điểm)

Cho x là số thực tùy ý. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

Q =

**----- HẾT ------**

**HƯỚNG DẪN GIẢI**

**Câu 1.** (3,0 điểm)

Cho biểu thức: P =

1. Rút gọn biểu thức P.

ĐKXĐ: ;

P =

=

=

1. Tính giá trị của P khi *x* =

*x* =

=

=

=

=

Thay x = 4 (t/m ĐXXĐ) vào P, ta được:

P = = 2021

**Câu 2.** (4,0 điểm)

1. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn a 0 và . Chứng minh rằng phương trình có hai nghiệm phân biệt ; và tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

= = = > 0

do đó phương trình luôn có hai nghiệm thực phân biệt .

Theo Viet ta có , khi đo

= = =

= , ở đây

Vậy min = khi 6c = a, tức

1. Tìm các cặp nghiệm nguyên dương (x;y) thỏa mãn phương trình:

Để phương trình có ngiệm nguyên thì

là số chính phương

thế vào ta được

thế vào ta được

**Câu 3.** (2,0 điểm) Giải phương trình:

ĐKXĐ: x

)

2 (nhân hai vế cho 2 rồi chuyển vế ta được)

2

= 2 (t/m ĐKXĐ)

Vậy nghiệm của phương trình là = 2

**Câu 4.** (3,0 điểm) Giải hệ phương trình:

Giải pt (2)

+) thế vào suy ra = 1

+) thế vào suy ra = 1

+) thế vào suy ra suy ra = 1

+) thế vào suy ra

**Câu 5.** (6,0 điểm)

Cho nửa đường tròn đường kính BC = 2R là điểm di động trên nửa đường tròn đó. Gọi D là hình chiếu vuông góc của A lên BC và M, N lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABD, ACD.



1. Chứng minh: CN vuông góc với AM.

Kéo dài AM, AN cắt BC tại F, G. Ta có = +

= + = AFC cân tại C CN là trung trực của AF,

tức CM AM

1. Chứng minh: DMN và DBA là hai tam giác đồng dạng.

Ta có AND # BDM

NDA ~ ADB.

1. Gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với MN. Chứng minh rằng: d luôn đi qua một điểm cố định.

Gọi I là giao điểm của BM và CN suy ra I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Mặt khác theo câu trên ta có AM, tương tự AN, tức I là trực tâm tam giác AMN , do đó đường thẳng đi qua A vuông góc với MN chính là đường thẳng AI.

Gọi E là giao điểm của AI với đường tròn đường kính BC khi đó E là chính giữa cung BC khác phía

với điểm A , tức E cố định.

Vậy d luôn đi qua điểm E cố định.

1. Tìm vị trí của điểm A để đoạn MN có độ dài lớn nhất và tính độ dài lớn nhất đó theo R.

Ta có CI là trung trực AF = = 45⁰, tương tự = 45⁰ tức FIG vuông cân tại I hay F, M, I, N, G thuộc đường tròn đường kính FG.

Gọi P là trung điểm của FG khi đó = 2 = 90⁰, tức MPN vuông tại P MN = = FG

Mặt khác FG = BG + CF BC = BA + CA BC

= 2R(

Do đó MN R(, tức = R( khi AB = AC, tức A là điểm chính giữa chung BC.

**Câu 5.** (2,0 điểm)

Cho x là số thực tùy ý. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

Q =

Dự đoán đạt tại x = 1. Chú ý khi x 0. Ta có

Q = =

Ta sẽ chứng minh

0

Vậy = 2 khi x = 1

**----- HẾT ------**