**ĐỀ 84**

**ĐỀ HSG TOÁN 9 HUẾ 2023-2024**

**Câu 1.** (3,0 điểm)

Cho biểu thức: P = $\left(\frac{\sqrt{x}+2022}{x+2\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}-2022}{x-1}\right)\left(1+\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

1. Rút gọn biểu thức P.
2. Tính giá trị của P khi *x* = $\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}$

**Câu 2.** (4,0 điểm)

1. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn a $\ne $ 0 và $2a+3b+6c=0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^{2}+bx+c=0$ có hai nghiệm phân biệt $x\_{1}$; $x\_{2}$ và tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\left|x\_{1}-x\_{2}\right|.$
2. Tìm các cặp nghiệm nguyên dương (x;y) thỏa mãn phương trình:

$$x^{2}+y^{2}+2(1+y)x=14y-1$$

**Câu 3.** (2,0 điểm) Giải phương trình: $\sqrt{2x-3}-4=3\left(x-\sqrt{4x+1}\right)$

**Câu 4.** (3,0 điểm) Giải hệ phương trình: $\left\{\begin{array}{c}x^{3}+y^{3}-xy^{2}=1\\4x^{4}+y^{4}=4x+y\end{array}\right.$

**Câu 5.** (6,0 điểm)

Cho nửa đường tròn đường kính BC = 2R là điểm di động trên nửa đường tròn đó. Gọi D là hình chiếu vuông góc của A lên BC và M, N lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABD, ACD.

1. Chứng minh: CN vuông góc với AM.
2. Chứng minh: $△$DMN và $△$DBA là hai tam giác đồng dạng.
3. Gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với MN. Chứng minh rằng: d luôn đi qua một điểm cố định.
4. Tìm vị trí của điểm A để đoạn MN có độ dài lớn nhất và tính độ dài lớn nhất đó theo R.

**Câu 5.** (2,0 điểm)

Cho x là số thực tùy ý. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

Q = $\frac{x+1}{\sqrt{x^{2}+3}}$ $+\frac{x+1}{\sqrt{1+3x^{2}}}$

**----- HẾT ------**

**HƯỚNG DẪN GIẢI**

**Câu 1.** (3,0 điểm)

Cho biểu thức: P = $\left(\frac{\sqrt{x}+2022}{x+2\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}-2022}{x-1}\right)\left(1+\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

1. Rút gọn biểu thức P.

ĐKXĐ: $x\ne 0$; $x\ne 1$

P = $\left(\frac{\sqrt{x}+2022}{x+2\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}-2022}{x-1}\right)\left(1+\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

= $\left(\frac{(\sqrt{x}+2022)(\sqrt{x}-1)}{\left(\sqrt{x}+1\right)^{2}(\sqrt{x}-1)}-\frac{(\sqrt{x}-2022)(\sqrt{x}+1)}{\left(\sqrt{x}+1\right)^{2}(\sqrt{x}-1)}\right)\left(\frac{2\sqrt{x}+\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}\right)$

= $\frac{2021}{\sqrt{x}-1}$

1. Tính giá trị của P khi *x* = $\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}$

*x* = $\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}$

= $\sqrt[3]{8+18-12\sqrt{3}-3\sqrt{3}}+\sqrt[3]{8+18+12\sqrt{3}+3\sqrt{3}}$

= $\sqrt[3]{2^{3}+3.2^{2}\sqrt{3}+3.2.\left(\sqrt{3}\right)^{2}+\left(\sqrt{3}\right)^{2}}$

= $\sqrt[3]{\left(2-\sqrt{3}\right)^{3}}+\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{3}\right)^{3}}$

= $2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}=4$

Thay x = 4 (t/m ĐXXĐ) vào P, ta được:

P = $\frac{2021}{\sqrt{4}-1}$ = 2021

**Câu 2.** (4,0 điểm)

1. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn a $\ne $ 0 và $2a+3b+6c=0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^{2}+bx+c=0$ có hai nghiệm phân biệt $x\_{1}$; $x\_{2}$ và tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\left|x\_{1}-x\_{2}\right|.$

$∆=b^{2}-4ac$ = $\left(\frac{2a+6c}{3}\right)^{2}-4ac$ = $\frac{4a^{2}+12}{9}$ = $\frac{3a^{2}+\left(a+6c\right)^{2}}{9}$ > 0

do đó phương trình luôn có hai nghiệm thực phân biệt $x\_{1}; x\_{2}$.

Theo Viet ta có $\left\{\begin{array}{c}x\_{1}+x\_{2}=-\frac{b}{a}\\x\_{1}.x\_{2}= \frac{c}{a}\end{array}\right.$, khi đo

$\left(x\_{1}-x\_{2}\right)^{2}$ = $\left(x\_{1}+x\_{2}\right)^{2}-4x\_{1}.x\_{2}$ = $\frac{b^{2}-4ac}{a^{2}}$ = $\frac{1}{9}.\frac{4a^{2}-12ac+36c^{2}}{a^{2}}$

= $\frac{1}{9}.$ $\left[\left(6t-1\right)^{2}+3\right]$ $\geq $ $\frac{1}{3}$, ở đây $t=\frac{c}{a}$

Vậy $\left|x\_{1}-x\_{2}\right|$min = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ khi 6c = a, tức $\left\{\begin{array}{c}b=-a\\c= \frac{a}{6}\end{array}\right.$

1. Tìm các cặp nghiệm nguyên dương (x;y) thỏa mãn phương trình:

$$x^{2}+y^{2}+2(1+y)x=14y-1$$

Để phương trình có ngiệm nguyên thì $∆'=\left(x-7\right)^{2}-\left(x^{2}+2x+1\right)$

$=-16x+48=16(-x+3)$

là số chính phương $⇒$ $\left[\begin{array}{c}x=3\\x=2\end{array}\right.$

$x=3$ thế vào ta được $y^{2}-8y+16=0⇔y=4$

$x=2$ thế vào ta được $y^{2}-10y+9=0⇔\left[\begin{array}{c}y=1\\y=9\end{array}\right.$

**Câu 3.** (2,0 điểm) Giải phương trình: $\sqrt{2x-3}-4=3\left(x-\sqrt{4x+1}\right)$

ĐKXĐ: x $\geq $ $\frac{3}{2}$

$\sqrt{2x-3}-4=3(x-\sqrt{4x+1}$)

$⇔$ 2$\sqrt{2x-3}-8=6x-6\sqrt{4x+1}$ (nhân hai vế cho 2 rồi chuyển vế ta được)

$⇔$ 2$\sqrt{2x-3}-8-6x+6\sqrt{4x+1}=0$

$⇔$ $\left(\sqrt{4x+1}-3\right)^{2}+\left(\sqrt{2x-3}-1\right)^{2}=0$

$⇔$ $\left\{\begin{array}{c}\sqrt{4x+1}=3\\\sqrt{2x-3}=1\end{array}\right.⇔x$ = 2 (t/m ĐKXĐ)

Vậy nghiệm của phương trình là $x$ = 2

**Câu 4.** (3,0 điểm) Giải hệ phương trình: $\left\{\begin{array}{c}x^{3}+y^{3}-xy^{2}=1\\4x^{4}+y^{4}=4x+y\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{c}y^{3}-1=xy^{2}-x^{3}\\4x^{4}-4x +y^{4}-y=0\end{array}\right.$ $⇔$ $\left\{\begin{array}{c}y^{3}-1=xy^{2}-x^{3} (1)\\4x^{4}-4x+y\left(xy^{2}-x^{3}\right)=0 (2)\end{array}\right.$

Giải pt (2)

$4x^{4}-4x+y\left(xy^{2}-x^{3}\right)=0$

$⇔$ $4x\left(x^{3}-1\right)+yx\left(y^{2}-x^{2}\right)=0$

$⇔$ $xy\left(x-y\right)\left(x-3y\right)=0$

$⇔$ $\left[\begin{array}{c}x=0\\y=0\\x=y\\x=3y\end{array}\right.$

+) $x=0$ thế vào suy ra $y$ = 1

+) $y=0$ thế vào suy ra $x$ = 1

+) $x=y$ thế vào suy ra $x^{3}=1$ suy ra $x=y$ = 1

+) $x=3y$ thế vào suy ra $\left\{\begin{array}{c}x=3\sqrt[3]{\frac{1}{25}}\\y=\sqrt[3]{\frac{1}{25}}\end{array}\right.$

**Câu 5.** (6,0 điểm)

Cho nửa đường tròn đường kính BC = 2R là điểm di động trên nửa đường tròn đó. Gọi D là hình chiếu vuông góc của A lên BC và M, N lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABD, ACD.



1. Chứng minh: CN vuông góc với AM.

Kéo dài AM, AN cắt BC tại F, G. Ta có $\hat{AFC}$ = $\hat{ABC}$ + $\hat{BAF}$

= $\hat{DAC}$ + $\hat{DAF}$ = $\hat{FAC}$ $⇒$ $△$AFC cân tại C $⇒$ CN là trung trực của AF,

tức CM $⊥$ AM

1. Chứng minh: $△$DMN và $△$DBA là hai tam giác đồng dạng.

Ta có $\left\{\begin{array}{c}\hat{NAD} = \frac{1}{2}\hat{DAC}=\frac{1}{2}\hat{DBA}= \hat{DBM}\\\hat{ADN}=45°=\hat{MDB}\end{array}\right.$ $⇒$ $△$AND # $△$BDM

$⇒$ $\left\{\begin{array}{c}\frac{DN}{DM}=\frac{DA}{DB}\\\frac{DDM}{ADB}\end{array}\right.$ $⇒$ $△$NDA ~ $△$ADB.

1. Gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với MN. Chứng minh rằng: d luôn đi qua một điểm cố định.

Gọi I là giao điểm của BM và CN suy ra I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Mặt khác theo câu trên ta có $IN⊥ $AM, tương tự $IM⊥ $AN, tức I là trực tâm tam giác AMN , do đó đường thẳng đi qua A vuông góc với MN chính là đường thẳng AI.

Gọi E là giao điểm của AI với đường tròn đường kính BC khi đó E là chính giữa cung BC khác phía

với điểm A , tức E cố định.

Vậy d luôn đi qua điểm E cố định.

1. Tìm vị trí của điểm A để đoạn MN có độ dài lớn nhất và tính độ dài lớn nhất đó theo R.

Ta có CI là trung trực AF $⇒$ $\hat{IFG}$ = $\hat{IAC}$ = 45⁰, tương tự $\hat{IGF}$ = 45⁰ tức FIG vuông cân tại I hay F, M, I, N, G thuộc đường tròn đường kính FG.

Gọi P là trung điểm của FG khi đó $\hat{MPN}$ = 2$\hat{MFN}$ = 90⁰, tức $△$MPN vuông tại P $⇒$MN = $\sqrt{2}PM$ = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ FG

Mặt khác FG = BG + CF $- $BC = BA + CA $- $BC $\leq $ $\sqrt{2\left(BA^{2}+CA^{2}\right)}-BC$

= 2R($\sqrt{2}-1)$

Do đó MN $\leq $ R$\sqrt{2}$($\sqrt{2}-1)$, tức $MN\_{max}$ = R($2-\sqrt{2})$ khi AB = AC, tức A là điểm chính giữa chung BC.

**Câu 5.** (2,0 điểm)

Cho x là số thực tùy ý. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

Q = $\frac{x+1}{\sqrt{x^{2}+3}}$ $+\frac{x+1}{\sqrt{1+3x^{2}}}$

Dự đoán đạt $Q\_{max}=2$ tại x = 1. Chú ý $Q\_{max}$ khi x $\geq $ 0. Ta có

Q = $\frac{x+1}{\sqrt{x^{2}+3} +\frac{x+1}{\sqrt{1+3x^{2}}}}$ = $\frac{(x+1)\left(\sqrt{x^{2}+3}+\sqrt{1+3x^{2}}\right)}{\sqrt{x^{2}+3}.\sqrt{1+3x^{2}}}$ $\leq $ $\frac{(x+1)\left(2\sqrt{2}\sqrt{x^{2}+1}\right)}{\sqrt{x^{2}+3}.\sqrt{1+3x^{2}}}$

Ta sẽ chứng minh $\frac{(x+1)\sqrt{x^{2}+1}}{\sqrt{x^{2}+3}.\sqrt{1+3x^{2}}}$ $\leq $ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$⇔$ $2\left(x+1\right)^{2}\left(x^{2}+1\right)\leq \left(x^{2}+3\right)\left(1+3x^{2}\right)$

$⇔$ 0 $\leq $ $\left(x-1\right)^{4}$

Vậy $Q\_{max}$ = 2 khi x = 1

**----- HẾT ------**