

PHẦN I: ĐẶT VẤN ĐỀ

Đạo hàm và ứng dụng của đạo hàm chiếm vai trò quan trọng trong chương trình Toán THPT. Nội dung về đạo hàm và ứng dụng đạo hàm được trình bày trong toàn bộ chương trình giải tích 11 và giải tích 12, trong đó đạo hàm được trình bày trong học kỳ II lớp 11, ứng dụng đạo hàm được trình bày trong học kỳ I lớp 12. Qua nhiều lần thay sách với nhiều thay đổi song đạo hàm và ứng dụng đạo hàm là nội dung bắt buộc trong các đề thi Tốt nghiệp THPT, ĐH-CD và hiện nay là thi THPT Quốc gia. Chúng ta có thể kể đến một số ứng dụng của đạo hàm: Xét tính đơn điệu của hàm số; tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số; cực trị hàm số...

Phần ứng dụng đạo hàm để giải quyết các bài toán liên quan đến cực trị của hàm số bậc ba là một phần không quá khó với học sinh nếu không muốn nói là phần “lấy điểm” của học sinh. Tuy nhiên, việc giải quyết các bài toán cực trị hàm số bậc ba nhanh và hiệu quả là điều mà ít học sinh làm được nhất là trong bối cảnh kỳ thi THPT Quốc gia năm 2017 đổi từ hình thức thi tự luận sang trắc nghiệm. Ngoài ra, việc trình bày các kiến thức ở SGK, SBT cũng như các sách tham khảo, hệ thống các bài tập còn dàn trải và học sinh thường mất thời gian khi giải bài tập phần này. Từ kinh nghiệm bản thân trong các năm giảng dạy cũng như sự tìm tòi, tham khảo và tổng hợp ở các tài liệu Toán và trên internet, tôi lựa chọn đề tài: ***“Hình thành tư duy - kỹ năng giải nhanh toán trắc nghiệm phần cực trị của hàm số bậc ba cho học sinh trường THPT Như Thanh II luyện thi THPT Quốc Gia”*** với mong muốn trang bị cho học sinh nền tảng kiến thức cơ bản và nâng cao từ đó rút ra một số công thức giải nhanh phần cực trị của hàm số bậc ba giúp các em học sinh nắm bắt được cách nhận dạng cũng như cách giải dạng toán này nhằm góp phần nâng cao chất lượng dạy và học, tạo sự tự tin cho học sinh trong các kỳ thi.

PHẦN II: GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ

I. Cơ sở của đề tài.

1. Cơ sở lí luận.

1.1 Khái niệm cực trị hàm số

1.1.1 Khái niệm cực trị của hàm số ^[3]

Cho $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ và $x_0 \in D$.

a) x_0 được gọi là một điểm cực đại của f nếu tồn tại khoảng $(a; b)$ sao cho

$$\begin{cases} x_0 \in (a; b) \subset D \\ f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in (a; b) \setminus \{x_0\} \end{cases}.$$

b) x_0 được gọi là một điểm cực tiểu của f nếu tồn tại khoảng $(a; b)$ sao cho

$$\begin{cases} x_0 \in (a; b) \subset D \\ f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (a; b) \setminus \{x_0\} \end{cases}.$$

c) Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị.

Bảng sau đây tóm tắt các khái niệm được sử dụng trong phần này:

x_0	$f(x_0)$	$(x_0; f(x_0))$
Điểm cực đại của $f(x)$	Giá trị cực đại (cực đại) của $f(x)$	Điểm cực đại của đồ thị hàm số $f(x)$
Điểm cực tiểu của $f(x)$	Giá trị cực tiểu (cực tiểu) của $f(x)$	Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $f(x)$
Điểm cực trị của $f(x)$	Cực trị của $f(x)$	Điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x)$

1.1.2. Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị ^[6]

Giả sử hàm $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 . Khi đó: nếu $f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

1.1.3. Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị ^[6]

a) Quy tắc 1

- Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x đi qua x_0 thì $f(x)$ đạt cực đại tại x_0 ;
- Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua x_0 thì $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 .

b) Quy tắc 2:

- $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) \text{ đạt cực đại tại } x_0;$

- $\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)>0 \end{cases} \Rightarrow f \text{ đạt cực tiểu tại } x_0.$

1.2 Cực trị của hàm số bậc ba ^[5]

Xét hàm $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$).

Đạo hàm: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

1.2.1 Điều kiện tồn tại cực trị: Hàm số có cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt hay $\Delta' = b^2 - 3ac > 0$.

1.2.2 Kỹ năng tính nhanh cực trị:

Giả sử $\Delta' = b^2 - 3ac > 0$, khi đó $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$ và hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 .

Thực hiện phép chia y cho y' ta có:

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{b}{9a} \right) f'(x) + \frac{2}{3} \left(c - \frac{b^2}{3a} \right) x + \left(d - \frac{bc}{9a} \right)$$

Tức là $f(x) = q(x) \cdot f'(x) + r(x)$

$$\text{Do } \begin{cases} f'(x_1) = 0 \\ f'(x_2) = 0 \end{cases} \text{ nên } \begin{cases} y_1 = f(x_1) = \frac{2}{3} \left(c - \frac{b^2}{3a} \right) x_1 + \left(d - \frac{bc}{9a} \right) \\ y_2 = f(x_2) = \frac{2}{3} \left(c - \frac{b^2}{3a} \right) x_2 + \left(d - \frac{bc}{9a} \right) \end{cases}$$

Từ đó ta có **phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của hàm số là:**

$$\begin{aligned} y &= \frac{2}{3} \left(c - \frac{b^2}{3a} \right) x + \left(d - \frac{bc}{9a} \right) = \frac{2}{9a} (3ac - b^2)x + \left(d - \frac{bc}{9a} \right) \\ &= \frac{-2\Delta'}{9a} x + \left(d - \frac{bc}{9a} \right) \end{aligned}$$

Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là các điểm cực trị của hàm số. Khi đó khoảng cách giữa hai điểm cực trị là:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + \left(\left[\frac{-2\Delta'}{9a} x_2 + \left(d - \frac{bc}{9a} \right) \right] - \left[\frac{-2\Delta'}{9a} x_1 + \left(d - \frac{bc}{9a} \right) \right] \right)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + \left(\frac{-2\Delta'}{9a}(x_2 - x_1) \right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{-2\sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} \right)^2 + \left(\frac{-2\Delta'}{9a} \cdot \frac{-2\sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} \right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{4\Delta'}{(3a)^2} + \frac{16}{9(3a)^4}(\Delta')^3}
\end{aligned}$$

Đặt $k = 3a$ ta được $AB = \sqrt{\frac{4\Delta'}{k^2} + \frac{16}{9k^4}(\Delta')^3}$

Vậy khoảng cách giữa hai điểm cực trị là $AB = \sqrt{\frac{4\Delta'}{k^2} + \frac{16}{9k^4}(\Delta')^3}$ với

$k = 3a$ là hệ số của x^2 trong phương trình $y' = 0$.

Như vậy khi k là hằng số thì khoảng cách giữa hai điểm cực trị ngắn nhất khi Δ' nhỏ nhất.

2. Thực trạng của vấn đề.

Trong các kỳ thi tốt nghiệp, ĐH- CĐ và hiện nay là thi THPT Quốc gia chuyển từ hình thức tự luận sang trắc nghiệm các bài toán cực trị thường hay xuất hiện, với mục đích của nhà giáo dục dành cho những học sinh có học lực trung bình. Đối với trường THPT Như Thanh II là một trường miền núi, chất lượng đầu vào của học sinh còn rất thấp nên gần như học sinh mất nhiều thời gian trong việc định hướng cách làm hoặc trong quá trình làm thường mắc sai sót. Đặc biệt hiện nay thi trắc nghiệm có các phương án nhiễu học sinh càng dễ mắc sai lầm.

II. Các dạng toán về cực trị của hàm số bậc ba thường gặp

1. Tìm m để hàm số đạt cực đại hoặc cực tiểu tại $x = x_0$

Cách làm:

1. Tính đạo hàm $y' \Rightarrow y' = 0$.
2. Điều kiện cần: Thay x_0 vào phương trình $y' = 0 \Rightarrow$ giá trị của m (nếu có)
3. Điều kiện đủ: Kết hợp xét dấu của y'' :
 - Nếu $y''(x_0) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại x_0
 - Nếu $y''(x_0) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại x_0

(hoặc dùng bảng biến thiên) để suy ra giá trị m thỏa mãn yêu cầu.

Ví dụ mẫu 1: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (m - 1)x + 2$. Tìm m để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$. ^[3]

Giải

Ta có : $y' = 3x^2 - 6mx + m - 1$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx + m - 1 = 0 \quad (*)$$

Điều kiện cần: thay $x = 2$ vào $(*) \Rightarrow m = 1$

Điều kiện đủ: $y'' = 6x - 6m$

Với $m = 1 \Rightarrow y''(2) = 6 > 0$ (thỏa mãn)

Vậy $m = 1$ hàm số có cực tiểu tại $x = 2$.

Ví dụ mẫu 2: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$. Tìm m để hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ ^[3]

Giải

Ta có: $y' = x^2 - 2mx + m^2 - m + 1$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 = 0 \quad (*)$$

Điều kiện cần: thay $x = 1$ vào $(*) \Rightarrow m^2 - 3m + 2 = 0$ ($m = 1$ hoặc $m = 2$)

Điều kiện đủ: $y'' = 2x - 2m$

➤ Với $m = 2 \Rightarrow y'' = 2x - 4 \Rightarrow y''(1) = -2 < 0$ (thỏa mãn)

➤ Với $m = 1 \Rightarrow y'' = 2x - 2 \Rightarrow$ (không xét được dấu)

Nhưng khi đó: $y' = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0$ ($\forall x$) $\Rightarrow$ hàm số luôn đồng biến nên không có cực trị. Hay $m = 1$ không thỏa mãn.

Vậy $m = 2$ hàm số có cực đại tại $x = 1$.

2. Biện luận theo m số cực trị của hàm số

Số cực trị của hàm số phụ thuộc vào số nghiệm của phương trình $y' = 0$

Ví dụ mẫu 1: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (m - 1)x + 2$. Tìm m để hàm số không đạt cực trị. ^[3]

Giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx + m - 1$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx + m - 1 = 0 \quad (*)$$

Hàm số không đạt cực trị khi: $\Delta' = 9m^2 - 3m + 3 \leq 0 \Leftrightarrow 3m^2 - m + 1 \leq 0$ (vô lý)

Vậy không có giá trị nào của m để hàm số không đạt cực trị.

Ví dụ mẫu 2: Cho hàm số $y = mx^3 + (m - 1)x + 2$. Tìm m để hàm số không đạt cực trị. ^[3]

Giải

+ Nếu $m = 0$ hàm số trở thành $y = -x + 2$ là PT đường thẳng nên không có cực trị hay $m = 0$ thỏa mãn.

+ Nếu $m \neq 0$. Ta có: $y' = 3mx^2 + m - 1$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3mx^2 + m - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1-m}{3m}$$

$$\text{Hàm số không đạt cực trị khi: } \frac{1-m}{3m} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m < 0 \end{cases}$$

$$\text{Vậy để hàm số không đạt cực trị thì: } \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq 0 \end{cases}$$

3. Tìm m để hàm số có 2 cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước

Các bước làm:

1) Tính: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

$$y' = 0 \Leftrightarrow g(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 0$$

$$\text{Để hàm số có 2 cực trị thì } g(x) = 0 \text{ có 2 nghiệm } x_1 \text{ và } x_2 \text{ hay } \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$$

2) Gọi rõ ràng tọa độ 2 điểm cực trị: A, B (nếu các nghiệm x_1 và x_2 gọn – đẹp)

Hoặc biểu thị tọa độ A, B theo x_1, x_2 nếu nghiệm quá xấu không nên tính ra.

3) Sử dụng các tính chất quen thuộc xử lý yêu cầu đề bài.

4) Kết luận giá trị m thỏa mãn.

Chú ý: Nếu biểu thị tọa độ A, B theo x_1 và x_2 do nghiệm xấu sau là phải dùng hệ thức Vi-ét.

Ví dụ mẫu 1: THPT Quốc Gia 2016

Tìm m để hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị. Gọi x_1 và x_2 là hoành độ hai điểm cực trị tìm m để $x_1^2 + x_2^2 = 3$.

Giải

Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 6x + m$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + m = 0 \quad (*)$$

Để hàm số có 2 điểm cực trị thì phương trình (*) có 2 nghiệm x_1 và x_2 phân biệt

$$\text{ĐK: } \Delta' > 0 \Leftrightarrow 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3 \quad (**)$$

$$\text{Theo định lý Vi-ét: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m}{3} \end{cases}$$

$$\text{Theo bài ra ta có: } x_1^2 + x_2^2 = 3 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 3 \Leftrightarrow 4 - \frac{2m}{3} = 3 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$$

Kết hợp điều kiện (**) $\Rightarrow m = \frac{3}{2}$ thỏa mãn đề bài ra.

Ví dụ mẫu 2:

Tìm m để hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị. Gọi x_1 và x_2 là hoành độ hai điểm cực trị tìm m để x_1 và x_2 là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có cạnh huyền bằng $\sqrt{3}$.^[2]

Giải

Ta có : $f'(x) = 3x^2 - 6x + m$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + m = 0 \quad (*)$$

Để hàm số có 2 điểm cực trị thì phương trình (*) có 2 nghiệm x_1 và x_2 phân biệt :

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3 \quad (**)$$

$$\text{Theo định lý Vi-ét: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m}{3} \end{cases}$$

➤ Để x_1 và x_2 là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác thì:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0 \quad (***)$$

➤ Để tam giác vuông có cạnh huyền bằng $\sqrt{3}$ thì:

$$x_1^2 + x_2^2 = 3 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 3 \Leftrightarrow 4 - \frac{2m}{3} = 3 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$$

Kết hợp điều kiện (**) và (***) $\Rightarrow m = \frac{3}{2}$ thỏa mãn đề bài ra.

Ví dụ mẫu 3: KD – 2012

Cho hàm số : $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3}$. Tìm m để hàm số có hai điểm cực trị x_1 và x_2 sao cho: $x_1 \cdot x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$.

Giải

Ta có $y' = 2x^2 - 2mx - 2(3m^2 - 1)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2mx - 2(3m^2 - 1) = 0 \quad (*)$$

Để hàm số có 2 điểm cực trị thì phương trình (*) có 2 nghiệm x_1 và x_2 phân biệt :

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 + 4(3m^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow 13m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{2}{\sqrt{13}} \\ m < -\frac{2}{\sqrt{13}} \end{cases} \quad (**)$$

Theo định lý Vi-ét:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = m \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 1 - 3m^2 \end{cases}$$

Theo bài ra ta có : $x_1 \cdot x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1 \Leftrightarrow 1 - 3m^2 + 2m = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{2}{3} \end{cases}$

Đối chiếu với (**) ta được $m = \frac{2}{3}$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

Ví dụ mẫu 4:

Cho hàm số : $y = x^3 - (2m - 1)x^2 + (2 - m)x + 2$. Tìm m để hàm số có hai điểm cực trị x_1 và x_2 và hoành độ các điểm cực trị dương. ^[2]

Giải

Ta có : $y' = 3x^2 - 2(2m - 1)x + 2 - m$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2(2m - 1)x + 2 - m = 0 \quad (*)$$

Để hàm số có 2 điểm cực trị thì phương trình (*) có 2 nghiệm x_1 và x_2 phân biệt

$$\Delta : \Delta > 0 \Leftrightarrow (2m - 1)^2 - 3(2 - m) > 0 \Leftrightarrow 4m^2 - m - 5 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > \frac{5}{4} \end{cases} \quad (**)$$

Theo định lý Vi-ét:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{2(2m - 1)}{3} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2 - m}{3} \end{cases}$$

Để hàm số có hai điểm cực trị có hoành độ dương :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2(2m - 1)}{3} > 0 \\ \frac{2 - m}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{2} \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < m < 2$$

Kết hợp điều kiện (**) ta được $\frac{5}{4} < m < 2$.

Ví dụ mẫu 5:

Cho hàm số : $y = (m + 2)x^3 + 3x^2 + mx - 5$. Tìm m để hàm số có hai điểm cực trị x_1 và x_2 và hoành độ các điểm cực trị dương.

Giải

Ta có : $y' = 3(m + 2)x^2 + 6x + m$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3(m+2)x^2 + 6x + m = 0 \quad (*)$$

Để hàm số có 2 điểm cực trị thì phương trình (*) có 2 nghiệm x_1 và x_2 phân biệt :

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 \neq 0 \\ 9 - 3m(m+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ -3m^2 - 6m + 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ -3 < m < 1 \end{cases} (**)$$

Theo định lý vi-ét:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{-2}{m+2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m}{3(m+2)} \end{cases}$$

Để hàm số có hai điểm cực trị có hoành độ dương :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 > 0 = -\frac{b}{a} = \frac{-2}{m+2} \\ x_1 \cdot x_2 > 0 = \frac{c}{a} = \frac{m}{3(m+2)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-2}{m+2} > 0 \\ \frac{m}{3(m+2)} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 < 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -2$$

Kết hợp điều kiện (**) ta được $-3 < m < -2$

Ví dụ mẫu 6:

Cho hàm số : $y = x^3 - 2(m+1)x^2 + (m^2 - 3m + 2)x + 4$. Tìm m để hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục tung.

Giải

Ta có : $y' = 3x^2 - 4(m+1)x + m^2 - 3m + 2$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4(m+1)x + m^2 - 3m + 2 = 0 \quad (*)$$

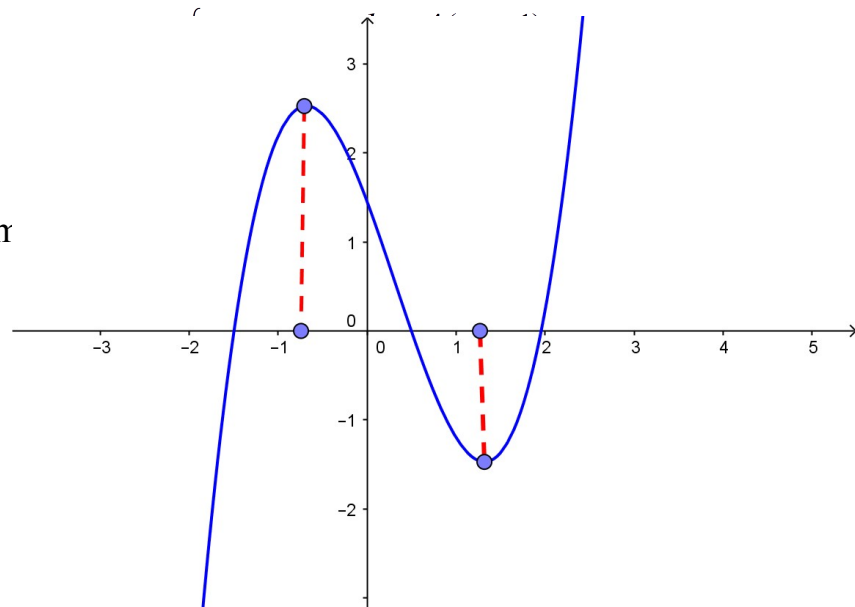
Để hàm số có 2 điểm cực trị thì phương trình (*) có 2 nghiệm x_1 và x_2 phân biệt :

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow 4(m+1)^2 - 3(m^2 - 3m + 2) > 0 \Leftrightarrow m^2 + 17m - 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{-17 - 3\sqrt{33}}{2} \\ m > \frac{-17 + 3\sqrt{33}}{2} \end{cases}$$

(**)

Theo định lý vi-ét:

Để cực trị nằm
sau :



⇒ Để cực trị nằm về hai phía trục tung thì chỉ cần :

$$x_1 x_2 < 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 2$$

Kết hợp điều kiện (**) $1 < m < 2$

Ví dụ mẫu 7:

Cho hàm số : $y = x^3 - 2(m+1)x^2 + (m^2 - 3m + 2)x + 4$. Tìm m để hàm số có hai điểm cực trị nằm cùng phía so với trục tung. ^[6]

Giải

Ta có : $y' = 3x^2 - 4(m+1)x + m^2 - 3m + 2$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4(m+1)x + m^2 - 3m + 2 = 0 \quad (*)$$

Để hàm số có 2 điểm cực trị thì phương trình (*) có 2 nghiệm x_1 và x_2 phân biệt :

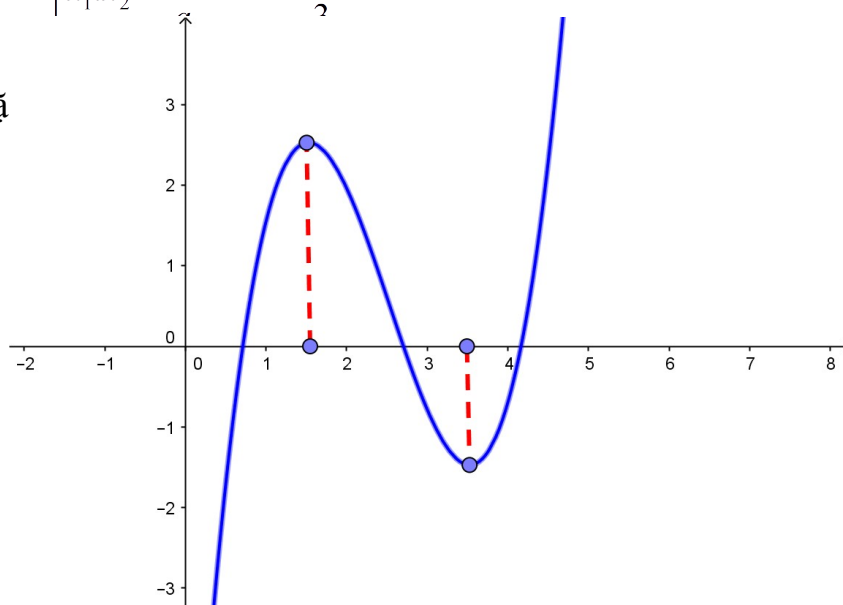
$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow 4(m+1)^2 - 3(m^2 - 3m + 2) > 0 \Leftrightarrow m^2 + 17m - 2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{-17 - 3\sqrt{33}}{2} \\ m > \frac{-17 + 3\sqrt{33}}{2} \end{cases} \quad (**)$$

Theo định lý vi-ét:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{4(m+1)}{3} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m^2 - 3m + 2}{3} \end{cases}$$

Để 2 cực trị nằm
thì bậc 3 sau (hoặ

của đồ



$\Rightarrow$ Để 2 cực trị nằm cùng phía so với trục tung thì
 $x_1 x_2 > 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < 1 \end{cases}$

Kết hợp điều kiện (**) ta được $\begin{cases} m < \frac{-17 - 3\sqrt{33}}{2} \\ m > 2 \end{cases}$

Ví dụ mẫu 8:

Cho hàm số : $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$. Tìm m để hàm số có hai điểm cực trị nằm khác phía đường thẳng (d): $x = 1$.

Giải

Ta có : $y' = 3x^2 - 6x + m$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + m = 0 (*)$$

Để hàm số có 2 điểm cực trị thì phương trình (*) có 2 nghiệm x_1 và x_2 phân biệt :

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3 (**)$$

Theo định lý vi-ét:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m}{3} \end{cases}$$

Ta có : (d): $x = 1 \Rightarrow x - 1 = 0$. Để hàm số có hai điểm cực trị nằm khác phía đường thẳng (d) thì

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) < 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{m}{3} - 2 + 1 < 0 \Leftrightarrow m < 3$$

Kết hợp điều kiện (**) ta được $m < 3$.

Ví dụ mẫu 9: KB - 2014

Cho hàm số : $y = x^3 - 3mx + 1$ và $A(2; 3)$. Tìm m để hàm số có hai điểm cực trị B và C để tam giác ABC cân tại A.

Giải

Ta có : $y' = 3x^2 - 3m$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3m = 0 \quad (*)$$

Để hàm số có 2 điểm cực trị B và C thì phương trình $(*)$ có 2 nghiệm x_1 và x_2 phân biệt hay $m > 0 \quad (**)$

Gọi tọa độ : $B(-\sqrt{m}; 2m\sqrt{m} + 1)$

$$C(\sqrt{m}; 2m\sqrt{m} + 1)$$

$$\begin{array}{c} \text{Suy ra: } \overrightarrow{AB}(-\sqrt{m}; 2m\sqrt{m} + 1) \\ \overrightarrow{AC}(\sqrt{m}; 2m\sqrt{m} + 1) \end{array}$$

Để tam giác ABC cân tại A nên $AB = AC$ hay:

$$\sqrt{(-\sqrt{m} - 2)^2 + (2m\sqrt{m} - 2)^2} = \sqrt{(\sqrt{m} - 2)^2 + (-2m\sqrt{m} - 2)^2}$$

$$\Leftrightarrow 16m\sqrt{m} - 8\sqrt{m} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện $(**)$ ta được $m = \frac{1}{2}$.

4. Áp dụng một số công thức giải nhanh

4.1 Công thức phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị

4.1.1 Công thức của TS Nguyễn Thái Sơn ^[4]

Gọi phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là: $y = Ax + B$ thì A ,

B được xác định như sau: $Ax + B = y - \frac{y' \cdot y''}{18a}$

Ví dụ mẫu 1: viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của hàm số:
 $y = x^3 - x^2 + 3x + 1$

Giải

Áp dụng công thức học nhanh:

$$Ax + B = (x^3 - x^2 + 3x + 1) - \frac{(3x^2 - 2x + 3)(6x - 2)}{18}$$

- Thay $x = 0$ vào đẳng thức ta được: $B = \frac{4}{3}$

- Thay $x = 1$ vào lại đẳng thức trên ta lại được:

$$A + B = \frac{28}{9} \Rightarrow A = \frac{28}{9} - B = \frac{16}{9}$$

Vậy phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị sẽ là: $y = \frac{16}{9}x + \frac{4}{3}$

Ví dụ mẫu 2: viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của hàm số:
 $y = 2x^3 + 3x + 5$

Giải

Áp dụng công thức học nhanh:

$$Ax + B = (2x^3 + 3x + 5) - \frac{(6x^2 + 3) \cdot 12x}{36}$$

- Thay $x = 0$ vào đẳng thức ta được: $B = 5$
 - Thay $x = 1$ vào lại đẳng thức trên ta lại được: $A + B = 7 \Rightarrow A = 7 - B = 2$
- Vậy phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị sẽ là: $y = 2x + 5$

4.1.2 Công thức có được bằng cách chia y cho y'

$$y = \frac{-2\Delta'}{9a}x + \left(d - \frac{bc}{9a}\right)$$

Ví dụ mẫu 1: Cho hàm số : $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$. Tìm m để hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho đường thẳng đi qua hai điểm cực trị song song với đường thẳng $d: y = -4x + 5$.^[1]

Giải:

Ta có $y' = 3x^2 - 6x - m$ (*)

Để hàm số có 2 điểm cực trị thì phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt
ĐK: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 9 + 3m > 0 \Leftrightarrow m > -3$

Ta có hệ số góc của đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là
 $k = \frac{-2\Delta'}{9a} = \frac{-2}{9}(9 + 3m)$

Do đường thẳng đi qua hai điểm cực trị song song với đường thẳng d :
 $y = -4x + 5$ nên $\frac{-2}{9}(9 + 3m) = -4 \Leftrightarrow m = 3$ (tm)

Vậy $m = 3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ mẫu 2: Cho hàm số : $y = x^3 + mx^2 + 7x + 3$. Tìm m để hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho đường thẳng đi qua hai điểm cực trị vuông góc với đường thẳng $d: y = \frac{3}{2}x + 2017$.^[1]

Giải:

Ta có: $y' = 3x^2 + 2mx + 7$ (*)

Để hàm số có 2 điểm cực trị thì phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt

$$\text{ĐK: } \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 21 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > \sqrt{21} \\ m < -\sqrt{21} \end{cases}$$

Ta có hệ số góc của đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là
 $k = \frac{-2\Delta'}{9a} = \frac{-2}{9}(m^2 - 21)$

Do cho đường thẳng đi qua hai điểm cực trị vuông góc với đường thẳng d:
 $y = \frac{3}{2}x + 2017$ nên $\frac{-2}{9}(m^2 - 21) = \frac{-2}{3} \Leftrightarrow m^2 = 24 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{24}$ (tm)
 Vậy $m = \pm\sqrt{24}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

4.1.3 Công thức tính độ dài hai điểm cực trị

Khoảng cách giữa hai điểm cực trị là $AB = \sqrt{\frac{4\Delta'}{k^2} + \frac{16}{9k^4}(\Delta')^3}$ với $k = 3a$
 là hệ số của x^2 trong phương trình $y' = 0$

Khi k là hằng số thì khoảng cách giữa hai điểm cực trị ngắn nhất khi Δ' nhỏ nhất.

Ví dụ mẫu 1: Cho hàm số : $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + 1$. Tìm m để hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho độ dài AB ngắn nhất. ^[2]

Giải

Ta có: $y' = x^2 - 2mx - 1$; $\Delta' = m^2 + 1$

Hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho độ dài AB ngắn nhất khi Δ' nhỏ nhất. $\Delta'_{\min} = 1$ khi $m = 0$

Vậy với $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ mẫu 2: Cho hàm số : $y = x^3 + 3(m+1)x^2 + 3m(m+2)x + m^3 + m^2$. Biết hàm số luôn có hai điểm cực trị A, B với mọi m . Tính khoảng cách giữa hai điểm cực trị.

Giải

Ta có: $y' = 3x^2 + 6(m+1)x + 3m(m+2)$

$$\Delta' = 9(m+1)^2 - 9m(m+2) = 9$$

$$\text{Áp dụng công thức: } AB = \sqrt{\frac{4\Delta'}{k^2} + \frac{16}{9k^4}(\Delta')^3} = 2\sqrt{5}$$

Vậy khoảng cách giữa hai điểm cực trị bằng $2\sqrt{5}$.

Ví dụ mẫu 3: Cho hàm số : $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + 1$. Tìm m để hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho độ dài $AB = 2\sqrt{15}$.

Giải:

Ta có: $y' = x^2 - 2mx - 1$; $\Delta' = m^2 + 1$

Theo bài ra: hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho độ dài $AB = 2\sqrt{15}$.

$$\text{Áp dụng công thức: } AB = \sqrt{\frac{4\Delta'}{k^2} + \frac{16}{9k^4}(\Delta')^3} \text{ ta được}$$

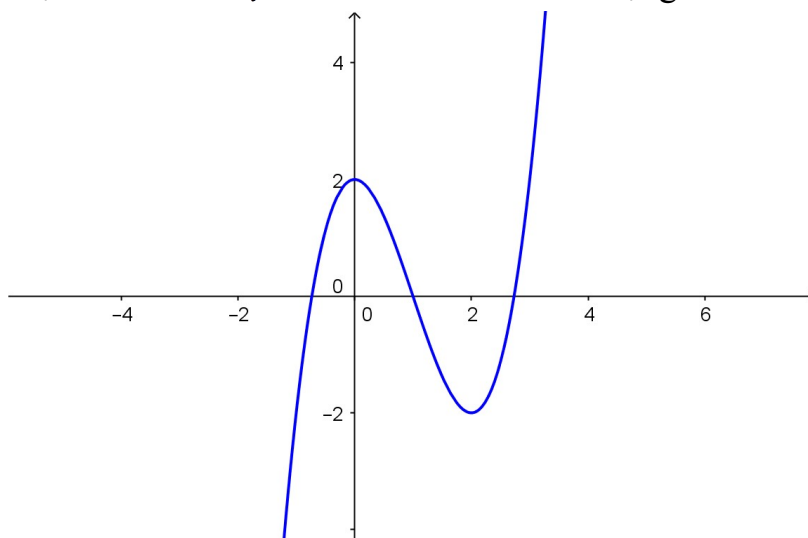
$$AB = \sqrt{\frac{4\Delta'}{k^2} + \frac{16}{9k^4}(\Delta')^3} = 2\sqrt{15} \Leftrightarrow \frac{16}{9}(\Delta')^3 + 4\Delta' - 60 = 0$$

$$\Leftrightarrow \Delta' = 3 \Leftrightarrow m^2 + 1 = 3 \Leftrightarrow m^2 = 2 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$$

Vậy với $m = \pm\sqrt{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

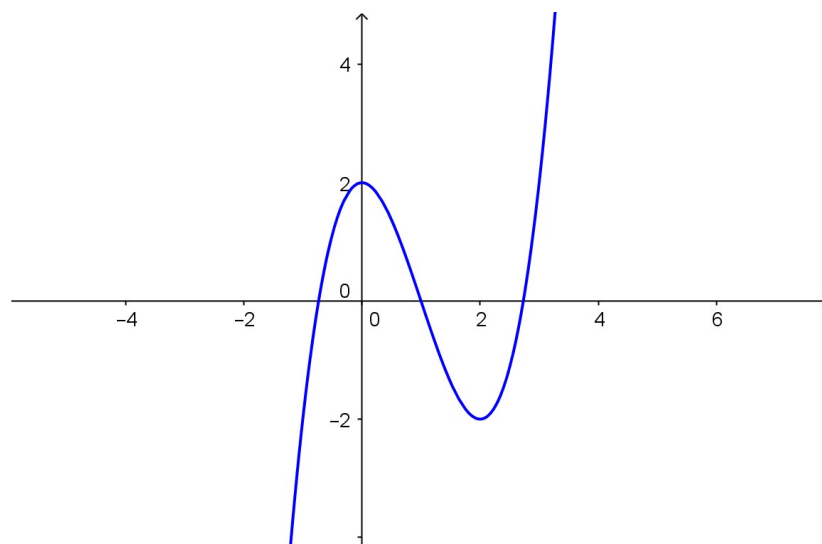
5. Một số bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Đồ thị của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ dạng như trong hình vẽ có hệ số.



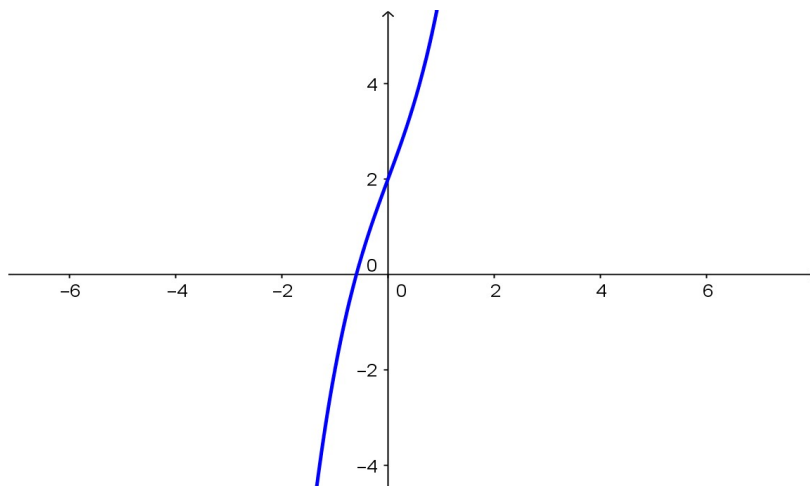
- A. $a > 0$ B. $a < 0$ C. $a \geq 0$ D. $a \leq 0$

Câu 2: Đồ thị của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ dạng như trong hình vẽ có hệ số.



- A. $d = 0$ B. $d = 1$ C. $d = 3$ D. $d = 2$

Câu 3: Đồ thị của hàm số dạng như trong hình vẽ là một trong bốn đồ thị hàm số được liệt kê ở 4 phương án A, B, C, D. Đó là đồ thị của hàm số nào.



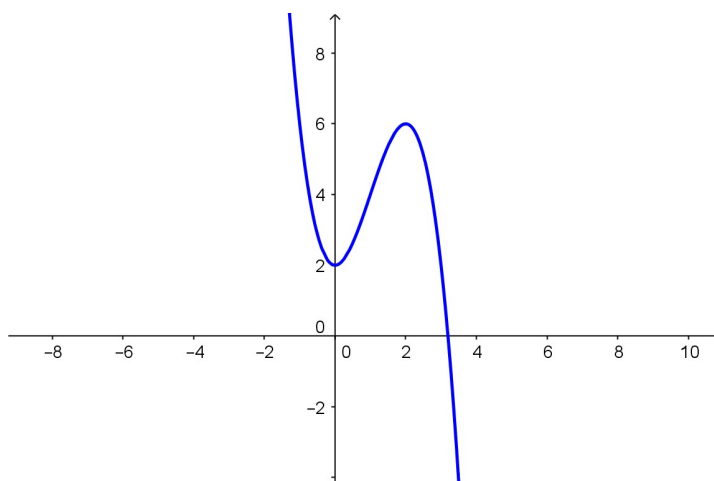
A. $y = x^3 - 3x^2 + 2$

B. $y = x^3$

C. $y = -x^3 + 3x + 2$

D. $y = x^3 + 3x + 2$

Câu 4: Đồ thị của hàm số dạng như trong hình vẽ. Hỏi phương trình $y = 4$ có bao nhiêu nghiệm.



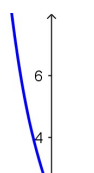
A. 1

B. 2

C. 3

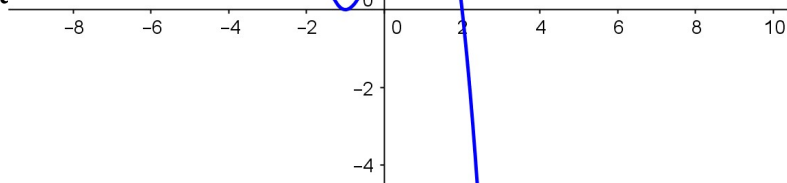
D. 4

Câu 5: Đồ thị của hàm số có dạng như trong hình vẽ dưới đây. Khi đó.



A. $ac > 0$

Câu 6: Đồ thị của



$ad < 0$
số được

liệt kê ở 4 phương án A, B, C, D. Đó là đồ thị của hàm số nào.

A. $y = x^3 - 3x^2 + 2$

B. $y = x^3 - 3x + 2$

C. $y = -x^3 + 3x + 2$

D. $y = x^3 + 3x + 2$

Câu 7: Biết đồ thị của hàm số có điểm cực đại, cực tiểu lần lượt là : $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng.

A. $(x_1; x_2)$

B. $(x_2; x_1)$

C. $(-x_1; -x_2)$

D. $(-x_2; -x_1)$

Câu 8: Biết đồ thị của hàm số có hai điểm cực trị và có tích hai giá trị cực trị nhỏ hơn 0. Khi đó đồ thị hàm số cắt trục hoành tại.

A. 1 điểm

B. 2 điểm

C. 3 điểm

D. 4 điểm

Câu 9: Biết đồ thị của hàm số có hai điểm cực trị và có tích hai giá trị cực trị lớn hơn 0. Khi đó đồ thị hàm số cắt trục hoành tại.

A. 1 điểm

B. 2 điểm

C. 3 điểm

D. 4 điểm

Câu 10: Biết đồ thị của hàm số có hai điểm cực trị và có tích hai giá trị cực trị bằng 0. Khi đó phương trình $y = 0$ có.

A. 1 nghiệm

B. 2 nghiệm

C. 3 nghiệm

D. 4 nghiệm

Câu 11: Cho hàm số: $y = x^3 - 3x^2 + 2$ (C). Đồ thị (C) đạt cực đại tại x bằng.

A. $x = 0$

B. $x = 1$

C. $x = 2$

D. $x = -1$

Câu 12: Cho hàm số: (C). Đồ thị (C) đạt giá trị cực tiểu bằng.

A. $y = 2$

B. $y = 1$

C. $y = -2$

D. $y = -1$

Câu 13: Cho hàm số: $y = x^3 - 3x^2 + 20x - 1$ (C). Đồ thị (C) có mấy điểm cực trị.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 0

Câu 14: Cho hàm số: (C). Đường thẳng đi qua hai điểm cực tiểu của đồ thị (C) là.

- A. $y = -2x - 1$ B. $y = -2x$ C. $y = x - 1$ D. $y = -2x + 1$

Câu 15: Cho hàm số: (C). Đồ thị (C) có 2 điểm cực trị là A, B. Độ dài AB bằng.

- A. $\sqrt{5}$ B. $2\sqrt{5}$ C. $3\sqrt{5}$ D. $4\sqrt{5}$

Câu 16: Cho hàm số: $y = -x^3 - 3x^2 + 2x - 5$ (C). Đồ thị (C) có hoành độ 2 điểm cực trị.

- A. $x_{CD} > x_{CT}$ B. $x_{CD} < x_{CT}$ C. $x_{CD} \cdot x_{CT} = 1$ D. $x_{CD} + x_{CT} = 2$

Câu 17: Cho hàm số: $y = x^3 - 3mx^2 + 2x - 2$ (Cm). Đồ thị (Cm) có hai điểm cực trị khi.

- A. $|m| > \frac{1}{3}$ B. $|m| > \frac{2}{3}$ C. $|m| > \sqrt{\frac{1}{3}}$ D. $|m| > \sqrt{\frac{2}{3}}$

Câu 18: Cho hàm số: $y = x^3 - 3x^2 + mx - 2$ (Cm). Đồ thị (Cm) có hai điểm cực trị khi.

- A. $m < 3$ B. $m < 1$ C. $m > 1$ D. $m > 3$

Câu 19: Cho hàm số: $y = x^3 - 3x^2 + m^2 + 3$ (Cm). Đồ thị (Cm) có giá trị cực đại đạt nhỏ nhất khi.

- A. $m = 0$ B. $m = 1$ C. $m = 2$ D. $m = -1$

Câu 20: Cho hàm số: $y = -x^3 - 3x^2 + m - 2$ (C). Đồ thị (C) có giá trị điểm cực đại bằng hai lần hoành độ điểm cực tiểu khi.

- A. $m = 1$ B. $m = 2$ C. $m = -1$ D. $m = -2$

Câu 21: Cho hàm số: $y = x^3 - 3x^2 - 3m(m+2)x - 1$ (Cm). Đồ thị (Cm) có hoành độ hai điểm cực trị cùng dấu khi.

- A. $\begin{cases} -2 < m < -1 \\ -1 < m < 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} -2 < m < -1 \\ -1 < m < 1 \end{cases}$ C. $\begin{cases} -3 < m < -1 \\ -1 < m < 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} -2 < m < -1 \\ -1 < m < 2 \end{cases}$

Câu 22: Cho hàm số: $y = x^3 - 3mx^2 + (m-1)x + 2$ (Cm). Đồ thị (Cm) có hai điểm cực trị đều có hoành độ dương khi.

- A. $m < 2$ B. $m > 1$ C. $m < 1$ D. $1 < m < 2$

Câu 23: Cho hàm số: $y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m + 2$ (Cm). Tìm m để đồ

thị (Cm) có hai điểm cực trị A, B sao cho $x_A \cdot x_B = 0$.

- A. $m = 0$ B. $m = 1$ C. $m = 2$ D. $m = 3$

Câu 24: Cho hàm số: $y = \frac{1}{3}x^3 + (m - 1)x^2 + 3(m - 2)x + \frac{1}{3}$ (Cm). Tìm m để đồ thị (Cm) có hai điểm cực trị có tổng hoành độ bằng 2.

- A. $m = 0$ B. $m = 1$ C. $m = 2$ D. $m = 3$

Câu 25: Cho hàm số: $y = -x^3 + (2m + 1)x^2 - (m^2 - 3m + 2)x - 4$ (Cm). Tìm m để đồ thị (Cm) có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục tung.

- A. $1 < m < 3$ B. $1 < m < 2$ C. $0 < m < 1$ D. $0 < m < 2$

Câu 26: Cho hàm số: $y = -x^3 + 3mx + 1$ (Cm). Tìm m để đồ thị (Cm) có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O .

- A. $m = 0$ B. $m = 1$ C. $m = \frac{1}{2}$ D. $m = -\frac{1}{2}$

Câu 27: Cho hàm số: $y = x^3 + 3x^2 + m$ (Cm). Tìm m để đồ thị (Cm) có hai điểm cực trị A, B sao cho góc AOB bằng 120° .

- A. $m = \frac{-12 + 2\sqrt{3}}{2}$ B. $m = \frac{-12 \pm 2\sqrt{3}}{3}$
C. $m = \frac{-12 - 2\sqrt{3}}{2}$ D. $m = \frac{-12 - 2\sqrt{3}}{3}$

Câu 28: Cho hàm số: $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + m$ (Cm). Tìm m để đồ thị (Cm) có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác OAB cân tại O .

- A. $m = 1$ B. $m = 0$ C. $m = 3$ D. $m = 2$

Câu 29: Cho hàm số: $y = 2x^3 + 3(m - 3)x^2 + 11 - 3m$ (Cm) và $C(0; -1)$. Tìm m để đồ thị (Cm) có hai điểm cực trị A, B sao cho A, B, C thẳng hàng.

- A. $m = 1$ B. $m = 2$ C. $m = 3$ D. $m = 4$

Câu 30: Cho hàm số: $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ (Cm). Tìm m để đồ thị (Cm) có hai điểm cực trị A, B sao cho đường thẳng đi qua A, B song song với đường thẳng: $y = -4x + 2017$.

- A. $m = \frac{1}{3}$ B. $m = \frac{1}{4}$ C. $m = 4$ D. $m = 3$

Câu 31: Cho hàm số: (Cm). Tìm m để đồ thị (Cm) có hai điểm cực trị A, B sao cho đường thẳng đi qua A, B vuông góc với đường thẳng: $x - y + 2017 = 0$.

A. $m = -\frac{1}{2}$

B. $m = -\frac{3}{2}$

C. $m = -1$

D. $m = -2$

ĐÁP ÁN:

1A	2D	3D	4C	5A	6C	7A	8C	9A
10B	11A	12C	13D	14A	15B	16B	17D	18A
19A	20D	21A	22C	23C	24C	25B	26C	27B
28B	29D	30D	31B					

PHẦN III : KẾT LUẬN.

Sau một thời gian giảng dạy thực tế nhiều năm, thông qua các tài liệu tham khảo cũng như học hỏi ở các đồng nghiệp; tôi đã hệ thống lại được một số dạng của bài toán cực trị hàm số bậc ba và đưa ra một số công thức tính nhanh, cụ thể:

- Tìm m để hàm số đạt cực đại hoặc cực tiểu tại $x = x_0$
- Biện luận theo m số cực trị của hàm số
- Tìm m để hàm số có 2 cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước
- Công thức phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị
- Công thức tính độ dài hai điểm cực trị

Từ những dạng toán thường gặp như trên và từ việc vận dụng các công thức tính nhanh tôi đã đưa ra một hệ thống các bài trắc nghiệm nhằm củng cố đồng thời giúp học sinh tiếp cận với các bài toán trắc nghiệm.

Thông qua sáng kiến kinh nghiệm này tôi mong muốn được đóng góp một phần công sức nhỏ bé của mình trong việc hướng dẫn học sinh ứng dụng và khai thác tốt các bài toán cực trị của hàm số bậc ba. Đồng thời hình thành khả năng tư duy, sáng tạo, kỹ năng giải nhanh toán trắc nghiệm, từ đó tạo hứng thú cho các em khi học toán. Tuy nhiên do kinh nghiệm giảng dạy chưa nhiều, trình độ bản thân còn hạn chế nên tôi rất mong được sự đóng góp bổ sung của Hội đồng khoa học các cấp và của các bạn đồng nghiệp.

Tôi xin chân thành cảm ơn !

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ *Thanh Hóa, ngày 12 tháng 5 năm 2017*
Tôi xin cam đoan đây là SKKN của
mình, không sao chép nội dung của
người khác.

Mạc Lương Thao

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Đoàn Quỳnh, *Hướng dẫn ôn tập kỳ thi THPT Quốc Gia năm học 2015-2016*, Nxb Giáo dục Việt Nam
- [2]. Lê Hoàn Phò, *10 trọng điểm bồi dưỡng HSG*, Nxb ĐHQG Hà Nội
- [3]. Nguyễn Duy Hiếu, *Giải toán giải tích 12*, Nxb ĐH sư phạm.
- [4]. Nguyễn Thái Sơn, *Giải toán THPT với máy tính cầm tay Fx-570VN-Plus*, Nxb ĐHSP TP Hồ Chí Minh.
- [5]. Trần Phương, *Hàm số*, Nxb ĐHQG Hà Nội
- [6]. Trần Thành Minh, Phan Lưu Biên, Trần Quang Nghĩa, *Giải toán và câu hỏi giải tích 12*, Nxb Giáo dục.