SỞ GD&ĐT HÀ NỘI
CÁC TRƯỜNG THPT CỤM
SÓC SƠN - MÊ LINH

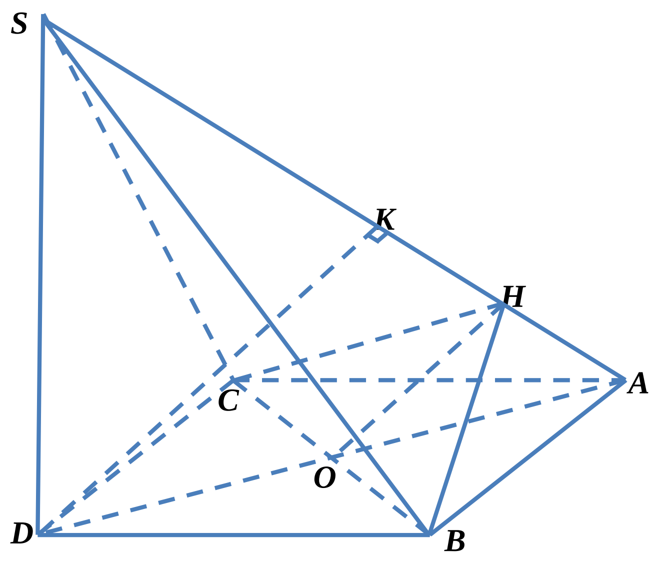
KỲ THI OLYMPIC LỚP 11
NĂM HỌC 2019-2020

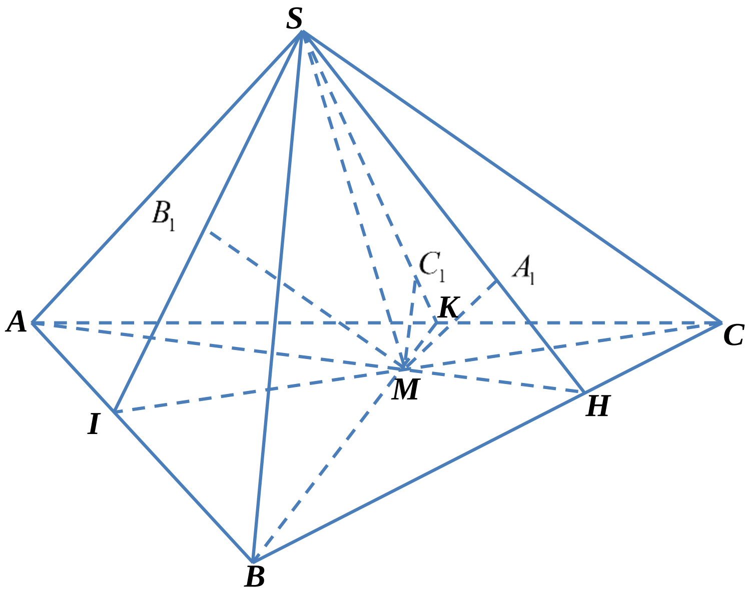
Môn thi: TOÁN

HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1 (2,0 điểm)	**Giải phương trình sau:** $2\sin^2 x - \sin x = 0$.	
	Phương trình tương đương: $2\sin^2 x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$	1,0đ
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \quad , k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$	1,0đ
Câu 2 (4,0 điểm)	**a. Từ các số tự nhiên 1,2,3,4,5,6 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau.** **b. Tính tổng** $S = 2C_{2020}^1 + 3.2^3.C_{2020}^3 + 5.2^5.C_{2020}^5 + ... + 2019.2^{2019}.C_{2020}^{2019}$ **.**	
	***a.* Từ các số tự nhiên 1,2,3,4,5,6 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau từng đôi một.**	
	Mỗi số tự nhiên tạo thành là một chỉnh hợp chập 4 của 6 phần tử.	1,0đ
	Số các số tự nhiên thỏa mãn bài toán là $A_6^4 = 360$ số.	1,0đ
	b. Tính tổng $S = 2C_{2020}^1 + 3.2^3.C_{2020}^3 + 5.2^5.C_{2020}^5 + ... + 2019.2^{2019}.C_{2020}^{2019}$ **.**	
	Xét khai triển: $(1+x)^{2020} = C_{2020}^0 + C_{2020}^1 x + C_{2020}^2 x^2 + C_{2020}^3 x^3 + ... + C_{2020}^{2019} x^{2019} + C_{2020}^{2020} x^{2020}$	0,5đ
	Lấy đạo hàm 2 vế: $2020(1+x)^{2019} = C_{2020}^1 + 2C_{2020}^2 x + 3C_{2020}^3 x^2 + ... + 2019C_{2020}^{2019} x^{2018} + 2020C_{2020}^{2020} x^{2019}$	0,5đ
	Chọn $x = 2$ ta có: $2020.3^{2019} = C_{2020}^1 + 2.2C_{2020}^2 + 3.2^2 C_{2020}^3 + ... + 2019.2^{2018} C_{2020}^{2019} + 2020.2^{2019} C_{2020}^{2020} \ (1)$ Chọn $x = -2$ ta có $-2020 = C_{2020}^1 - 2.2C_{2020}^2 + 3.2^2 C_{2020}^3 - ... + 2019.2^{2018} C_{2020}^{2019} - 2020.2^{2019} C_{2020}^{2020} \ (2)$	0,5đ
	Lấy $(1)+(2)$ ta được $S = 2C_{2020}^1 + 3.2^3.C_{2020}^3 + 5.2^5.C_{2020}^5 + ... + 2019.2^{2019}.C_{2020}^{2019} = 2020(3^{2019} - 1)$	0,5đ
Câu 3 (2,0 điểm)	**Cho hàm số** $y = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, x > 1 \\ x^2 + ax - 2, \ x \le 1 \end{cases}$ **. Tìm a để hàm số liên tục tại** $x_0 = 1$	

	Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$ Với $x_0=1\Rightarrow x_0\in\mathbb{R}$; $f\left(x_0\right)=f\left(1\right)=a-1$	0,5đ
	$\lim\limits_{x\to1^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\left(x+1\right)=2$	0,5đ
	$\lim\limits_{x\to1^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(x^2+ax-2\right)=a-1$	0,5đ
	Hàm số liên tục tại $x_0=1\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to1^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to1^-} f\left(x\right)=f\left(1\right)\Leftrightarrow a-1=2\Leftrightarrow a=3$	0,5đ
Câu 4 (2,0 điểm)	**Cho dãy số $\left(u_n\right)$ thỏa mãn** $\begin{cases}u_1=2021\\ u_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(u_n+\dfrac{2020}{u_n}\right), n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$. **Chứng minh rằng dãy $\left(u_n\right)$ có giới hạn hữu hạn khi $n\to+\infty$ và tính giới hạn đó.**	
	Bằng quy nạp ta dễ dàng chứng minh được $u_n>0,\forall n\in\mathbb{N}, n\ge1$	0.25đ
	Ta có: $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(u_n+\dfrac{2020}{u_n}\right)\ge\dfrac{1}{2}.2.\sqrt{u_n.\dfrac{2020}{u_n}}=\sqrt{2020},\ \forall n\ge1.$ vậy $\left(u_n\right)$ là dãy bị chặn dưới.	0.5đ
	Chứng minh $\left(u_n\right)$ là dãy giảm. Xét $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{2}\left(u_n+\dfrac{2020}{u_n}\right)-u_n=\dfrac{2020-\left(u_n\right)^2}{2u_n}\le0$, vậy $\left(u_n\right)$ là dãy giảm.	0.5đ
	Vì $\left(u_n\right)$ là dãy giảm và bị chặn dưới nên tồn tại $\lim u_n=l$ ($l\ge0$, l hữu hạn).	0.25đ
	Lấy giới hạn 2 vế của đẳng thức $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(u_n+\dfrac{2020}{u_n}\right)$ ta có: $l=\dfrac{1}{2}\left(l+\dfrac{2020}{l}\right)\Leftrightarrow l=\sqrt{2020}$. Vậy $\left(u_n\right)$ là dãy số giảm có hữu hạn hữu hạn và $\lim\left(u_n\right)=\sqrt{2020}$	0.5đ
Câu 5 (2,0 điểm)	**Cho hàm số** $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$ **có đồ thị $\left(C\right)$. Cho biết $I\left(1;2\right)$; $d_1:x=1$; $d_2:y=2$.** **Gọi *d* tiếp tuyến bất kỳ của $\left(C\right)$; A,B lần lượt là giao điểm của *d* với d_1 và d_2. Chứng minh rằng $IA.IB$ là hằng số.**	
	Gọi $M\left(x_0;y_0\right)\in\left(C\right)$ với $x_0\ne1$ Phương trình tiếp tuyến d của $\left(C\right)$ tại M có phương trình: $y=\dfrac{1}{\left(x_0-1\right)^2}\left(x-x_0\right)+\dfrac{2x_0-3}{x_0-1}$	0.5đ
	$d\cap d_1=A\left(1;\dfrac{2x_0-4}{x_0-1}\right)$	0.5đ
	$d\cap d_2=B\left(2x_0-1;2\right)$	0.5đ
	Ta có $IA=\left\|\dfrac{2}{x_0-1}\right\|$, $IB=2\left\|x-1\right\|$. Vậy $IA.IB=4$	0.5đ

Câu 6 (2,0 điểm)	**Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C) xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn: $f^3(1+x)+2f(1+2x)-21x-3=0$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 1.**	
	Từ đẳng thức $f^3(1+x)+2f(1+2x)-21x-3=0$ Cho $x=0$ ta được $f^3(1)+2f(1)-3=0 \Leftrightarrow f(1)=1$	0,75đ
	Lấy đạo hàm $f^3(1+x)+2f(1+2x)-21x-3=0$ ta có: $3f^2(1+x).f'(1+x)+4f'(1+2x)-21=0$ Tại $x=0$ ta có $3f^2(1).f'(1)+4f'(1)-21=0 \Leftrightarrow 7f'(1)-21=0 \Leftrightarrow f'(1)=3$	0,75đ
	Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 1 có phương trình $y=3(x-1)+1 \Leftrightarrow y=3x-2$	0,5đ
Câu 7 (4,0 điểm)	**Cho tam giác đều ABC cạnh là a. Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC. Trên đường thẳng d đi qua D và vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại D lấy điểm S sao cho $SD=\frac{a\sqrt{6}}{2}$.** **CMR $(SAD)\perp(SBC)$ và $(SAB)\perp(SAC)$**	
		
	Chứng minh $(SAD)\perp(SBC)$	
	$\begin{cases} BC\perp AD \\ BC\perp SD \end{cases} \Rightarrow BC\perp(SAD)$ và $BC\subset(SBC)$ nên $(SAD)\perp(SBC)$	1,5đ
	Chứng minh $(SAB)\perp(SAC)$	
	Gọi K là hình chiếu của D trên SA và H là trung điểm của AK; $O=BC\cap AD$ ta có: $OH\perp SA$ vì $OH//DK\perp SA$ $BC\perp SA$ vì $BC\perp(SAD)$ Do đó $SA\perp(HBC)\Rightarrow HB\perp SA; HC\perp SA$	0,5đ
	Khi đó góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) là góc giữa HB và HC *(1)*	0,5đ
	Tam giác ABC đều cạnh a, $OA=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow AD=a\sqrt{3}$	0,5đ
	Tam giác SAD vuông tại D, đường cao DK nên $\frac{1}{DK^2}=\frac{1}{SD^2}+\frac{1}{DA^2}=\frac{4}{6a^2}+\frac{1}{3a^2}=\frac{1}{a^2}\Rightarrow DK=a$	0,5đ

	Trong tam giác HBC có $OH=\frac{a}{2}$ (vì $OH=\frac{1}{2}DK$) nên ta có $OH=OB=OC$ suy ra tam giác HBC vuông tại H $\Rightarrow HB\perp HC$ *(2)* Vậy từ *(1), (2)* ta kết luận $(SAB)\perp(SAD)$	0,5đ
Câu 8 (2,0 điểm)	**Cho hình chóp $S.ABC$ và điểm M tùy ý nằm bên trong tam giác ABC. Ba đường thẳng đi qua M, song song với SA,SB,SC cắt lần lượt các mặt phẳng $(SBC),(SAC),(SAB)$ tại A_1,B_1,C_1.** **Chứng minh rằng** $\frac{SA}{MA_1}+\frac{SB}{MB_1}+\frac{SC}{MC_1}\geq 9$.	
		
	Gọi $H=AM\cap BC;K=BM\cap AC;I=CM\cap AB$. Theo định lý Thales ta có: $\frac{SA}{MA_1}+\frac{SB}{MB_1}+\frac{SC}{MC_1}=\frac{AH}{MH}+\frac{BK}{MK}+\frac{CI}{MI}$	1,0đ
	Do M nằm bên trong tam giác ABC nên ta có: $\frac{AH}{MH}+\frac{BK}{MK}+\frac{CI}{MI}=\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MBC}}+\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MAC}}+\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MAB}}=S_{\Delta ABC}\left(\frac{1}{S_{\Delta MBC}}+\frac{1}{S_{\Delta MAC}}+\frac{1}{S_{\Delta MAB}}\right)$ $=\left(S_{\Delta MBC}+S_{\Delta MAC}+S_{\Delta MAB}\right)\left(\frac{1}{S_{\Delta MBC}}+\frac{1}{S_{\Delta MAC}}+\frac{1}{S_{\Delta MAB}}\right)\geq 9$	1,0đ

<u>Chú ý:</u> Học sinh có thể làm theo cách khác. Nếu bài làm đúng vẫn được điểm tối đa theo các phần tương ứng.