

PHẦN E. TRẢ LỜI NGẮN

- Câu 1.** Trọng lực P là lực hấp dẫn do Trái Đất tác dụng lên một vật được tính bởi công thức $P = mg$, trong đó m là khối lượng của vật (đơn vị: kg), g là vectơ gia tốc rơi tự do, có hướng đi xuống và có độ lớn $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Xác định hướng và độ lớn của trọng lực (đơn vị: N) tác dụng lên quả bóng có khối lượng 450 gam.

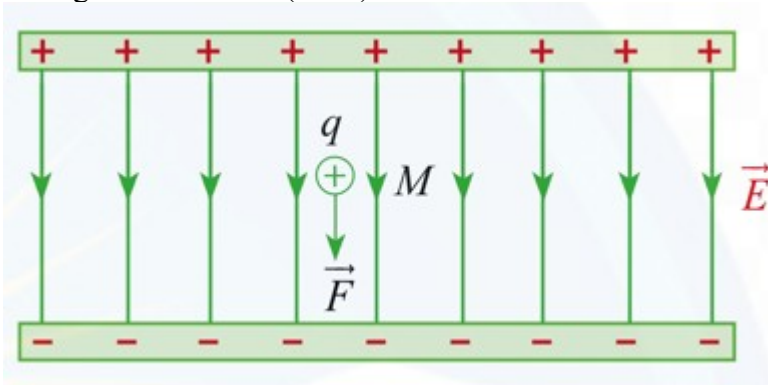


Trả lời:.....

Lời giải

Độ lớn của lực hấp dẫn của Trái Đất tác dụng lên quả bóng: $P = mg = 0,45 \cdot 9,8 = 4,41 \text{ N}$

- Câu 2.** Trong điện trường đều, lực tĩnh điện F (đơn vị: N) tác dụng lên điện tích điểm có điện tích q (đơn vị: C) được tính theo công thức $F = q \cdot E$, trong đó E là cường độ điện trường (đơn vị: N/C). Tính độ lớn của lực tĩnh điện tác dụng lên điện tích điểm khi $q = 10^{-9} \text{ C}$ và độ lớn điện trường $E = 10^5 \text{ N/C}$ (Hình).

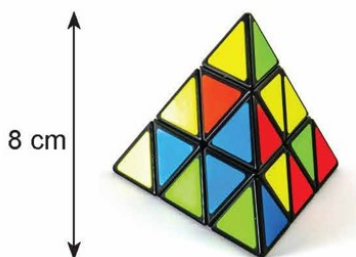


Trả lời:.....

Lời giải

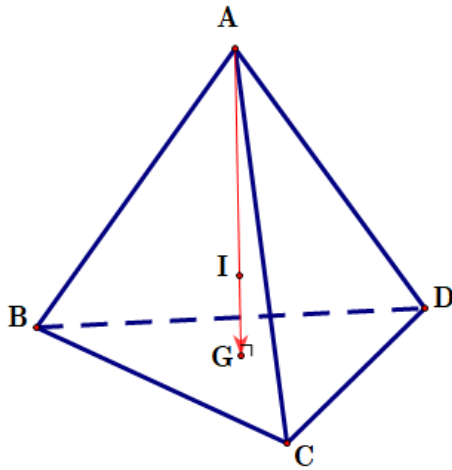
Độ lớn của lực tĩnh điện tác dụng lên điện tích điểm là: $F = qE = 2 \cdot 10^{-12} \cdot 1,8 \cdot 10^5 = 3,6 \cdot 10^{-7} \text{ N}$

- Câu 3.** Ta đã biết trọng tâm của tứ diện $ABCD$ là một điểm I thỏa mãn $\vec{AI} = 3\vec{IG}$, ở đó G là trọng tâm của tam giác BCD . Áp dụng tính chất trên để tính khoảng cách từ trọng tâm của một khối rubik (đồng chất) hình tứ diện đều đến một mặt của nó, biết rằng chiều cao của khối rubik là 8 cm .



Trả lời:.....

Lời giải



Đặt tên khối rubik là tứ diện đều $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD , I là trọng tâm tứ diện $ABCD$. Do đó,

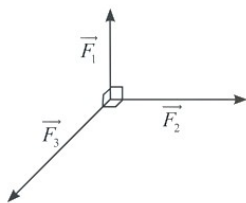
$$\overline{AI} = 3\overline{IG} \Rightarrow \overline{IG} = \frac{1}{4}\overline{AG}$$

Vì chiều cao của rubik bằng 8 cm nên

$$\overline{AG} = 8\text{ cm} \Rightarrow \overline{IG} = \frac{1}{4} \cdot 8 = 2(\text{cm})$$

Vậy khoảng cách từ trọng tâm của một khối rubik (đồng chất) hình tứ diện đều đến một mặt của nó bằng 2 cm .

Câu 4. Ba lực $\overline{F_1}, \overline{F_2}, \overline{F_3}$ cùng tác động vào một vật có phương đôi một vuông góc và có độ lớn lần lượt là $2\text{ N}; 3\text{ N}; 4\text{ N}$. Tính độ lớn hợp lực của ba lực đã cho.



Trả lời:.....

Lời giải

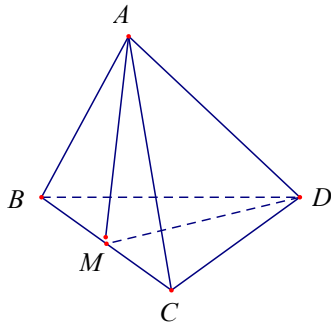
Ta có: $\left| \overline{F_2} + \overline{F_3} \right| = \sqrt{F_2^2 + F_3^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

Độ lớn hợp lực của ba lực là: $\left| \overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_3} \right| = \sqrt{F_1^2 + 5^2} = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}\text{ N}$

Câu 5. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Gọi M là trung điểm của BC . Tính $\cos(\overline{AB}, \overline{DM})$

Trả lời:.....

Lời giải



Xét tứ diện $ABCD$ cạnh a ta có: $DM = \frac{a\sqrt{3}}{2}; AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\cos(\vec{AB}, \vec{DM}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{DM}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{DM}|} = \frac{AM \cdot DM}{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{AM \cdot DM}{a^2}.$$

Ta có

Tính $\vec{AB} \cdot \vec{DM}$

Ta có:

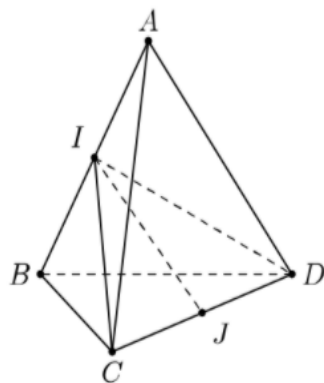
$$\vec{AB} \cdot \vec{DM} = \vec{AB} \cdot (\vec{AM} - \vec{AD}) = \vec{AB} \cdot \vec{AM} - \vec{AB} \cdot \vec{AD}$$

$$= |\vec{AB}| \cdot |\vec{AM}| \cdot \cos(\vec{AB}, \vec{AM}) - |\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}| \cdot \cos(\vec{AB}, \vec{AD}) = a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{4}.$$

Vậy $\cos(\vec{AB}, \vec{DM}) = \frac{\sqrt{3}}{6}.$

Câu 6. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD, \angle BAC = \angle BAD = 60^\circ, \angle CAD = 90^\circ$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Góc giữa cặp véc tơ $\vec{AB}, \vec{IJ}$ bằng bao nhiêu độ?
Trả lời:.....

Lời giải



Xét tam giác ICD có J là trung điểm của đoạn $CD \Rightarrow \vec{IJ} = \frac{1}{2}(\vec{IC} + \vec{ID})$.

Tam giác ABC có $AB = AC, \angle BAC = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ đều $\Rightarrow CI \perp AB$.

Tương tự ta có ΔABD đều $\Rightarrow DI \perp AB$.

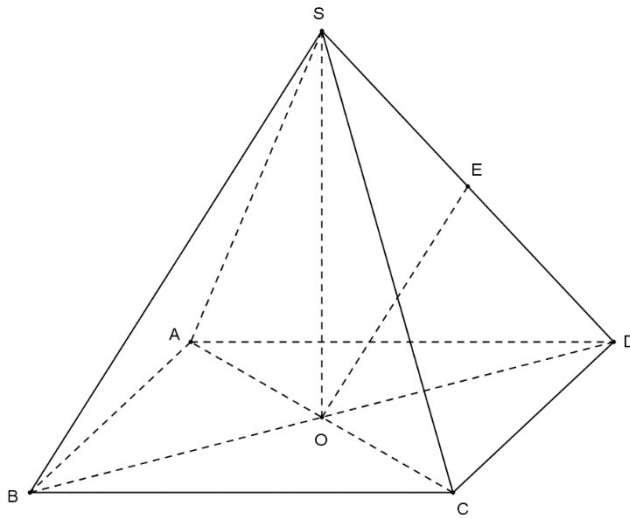
$$\text{Ta có } \vec{IJ} \cdot \vec{AB} = \frac{1}{2}(\vec{IC} + \vec{ID}) \cdot \vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{IC} \cdot \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{ID} \cdot \vec{AB} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{IJ} \perp \vec{AB} \Rightarrow (\vec{IJ}, \vec{AB}) = 90^\circ$$

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O ; $AD = a\sqrt{2}$; $AB = a$; các cạnh bên bằng nhau và bằng a . Gọi E là trung điểm của cạnh SD . Khi đó góc giữa hai vector $\vec{SA}$; $\vec{OE}$ bằng bao nhiêu độ:

Trả lời:.....

Lời giải



Từ gt $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$

$$\text{Mà } OD = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AD^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}$$

$$\text{Ta có: } \vec{SA} \cdot \vec{OE} = (\vec{SO} + \vec{OA}) \cdot \frac{1}{2}(\vec{OS} + \vec{OD}) = \frac{1}{2} \left(\vec{SO} - \frac{1}{2}\vec{AC} \right) \cdot \left(-\vec{SO} + \frac{1}{2}\vec{BD} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\vec{SO} - \frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AD} \right) \cdot \left(-\vec{SO} + \frac{1}{2}\vec{AD} - \frac{1}{2}\vec{AB} \right)$$

$$= -\frac{1}{2}SO^2 + \frac{1}{4}AD \cdot SO - \frac{1}{4}AB \cdot SO + \frac{1}{4}AB \cdot SO - \frac{1}{8}AB \cdot AD + \frac{1}{8}AB^2 + \frac{1}{4}AD \cdot SO - \frac{1}{8}AD^2 + \frac{1}{8}AB \cdot AD$$

$$= -\frac{1}{2}SO^2 + \frac{1}{8}AB^2 - \frac{1}{8}AD^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{8}a^2 - \frac{1}{8}(a\sqrt{2})^2 = -\frac{a^2}{4}$$

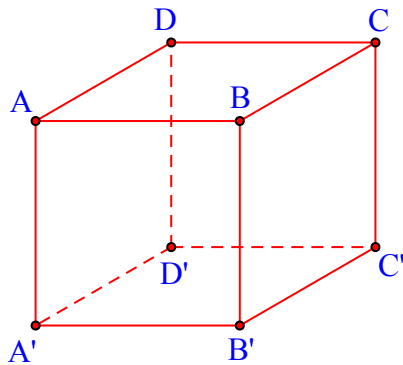
$$\text{Mặt khác } OE = \frac{1}{2}SD = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow \cos(\vec{SA}; \vec{OE}) = \frac{\vec{SA} \cdot \vec{OE}}{|\vec{SA}| \cdot |\vec{OE}|} = \frac{-\frac{a^2}{4}}{a \cdot \frac{a}{2}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{SA}; \vec{OE}) = 120^\circ$$

Câu 8. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết: $\vec{AN} = -4\vec{AB} + k\vec{AA'} - 2\vec{AD}$ ($k \in \mathbb{R}$), $\vec{AM} = 2\vec{AB} + \vec{AA'} - 3\vec{AD}$. Giá trị k thích hợp để $\vec{AN} \perp \vec{AM}$ là:

Trả lời:.....

Lời giải



Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên:

+ $AB = AA' = AD$;

+ Các vector $\vec{AB}$, $\vec{AA'}$, $\vec{AD}$ đôi một vuông góc với nhau. Do đó: $\vec{AB} \cdot \vec{AA'} = 0$, $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0$, $\vec{AA'} \cdot \vec{AD} = 0$.

$$\text{Để } \vec{AN} \perp \vec{AM} \text{ thì } \vec{AN} \cdot \vec{AM} = 0 \Leftrightarrow (-4\vec{AB} + k\vec{AA'} - 2\vec{AD}) \cdot (2\vec{AB} + \vec{AA'} - 3\vec{AD}) = 0$$

$$\Leftrightarrow -8\vec{AB} \cdot \vec{AB} - 4\vec{AB} \cdot \vec{AA'} + 12\vec{AB} \cdot \vec{AD} + k\vec{AA'} \cdot (2\vec{AB} + \vec{AA'} - 3\vec{AD}) - 2\vec{AD} \cdot (2\vec{AB} + \vec{AA'} - 3\vec{AD}) = 0$$

$$\Leftrightarrow -8(\vec{AB})^2 - 0 + 0 + 2k\vec{AA'} \cdot \vec{AB} + k\vec{AA'} \cdot \vec{AA'} - 3k\vec{AA'} \cdot \vec{AD} - 4\vec{AD} \cdot \vec{AB} - 2\vec{AD} \cdot \vec{AA'} + 6\vec{AD} \cdot \vec{AD} = 0$$

$$\Leftrightarrow -8(\vec{AB})^2 - 0 + 0 + 0 + k(\vec{AA'})^2 - 0 - 0 - 0 + 6(\vec{AD})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -8AB^2 + kAA'^2 + 6AD^2 = 0 \text{ (Mà } AB = AA' = AD \text{)}$$

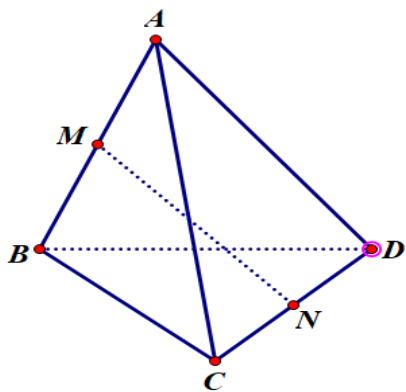
$$\Leftrightarrow -8AB^2 + kAB^2 + 6AB^2 = 0 \Leftrightarrow (-8 + k + 6)AB^2 = 0 \Leftrightarrow -8 + k + 6 = 0 \Leftrightarrow k - 2 = 0 \Leftrightarrow k = 2$$

Vậy giá trị k thích hợp để $\vec{AN} \perp \vec{AM}$ là $k = 2$.

Câu 9. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD . Tính $\cos(\vec{AC}, \vec{MN})$

Trả lời:.....

Lời giải



$$\cos(\vec{AC}, \vec{MN}) = \frac{\vec{AC} \cdot \vec{MN}}{|\vec{AC}| \cdot |\vec{MN}|} \quad (1)$$

♦ Ta có

$$|\vec{AC}| = a \quad (2)$$

$$\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{BD}) \Rightarrow |\vec{MN}|^2 = MN^2 = \frac{1}{4}(\vec{AC}^2 + 2\vec{AC} \cdot \vec{BD} + \vec{BD}^2) = \frac{1}{4}(2a^2 + 2\vec{AC} \cdot \vec{BD})$$

$$\text{Mà } \vec{AC} \cdot \vec{BD} = \vec{AC} \cdot (\vec{AD} - \vec{AB}) = \vec{AC} \cdot \vec{AD} - \vec{AC} \cdot \vec{AB} = |\vec{AC}| \cdot |\vec{AD}| \cos 60^\circ - |\vec{AC}| \cdot |\vec{AB}| \cos 60^\circ = 0$$

$$\text{Vậy } |\vec{MN}| = \frac{a}{\sqrt{2}} \quad (3)$$

$$\text{♦ ta có } \vec{AC} \cdot \vec{MN} = \frac{1}{2} \vec{AC} \cdot (\vec{AC} + \vec{BD}) = \frac{1}{2}(\vec{AC}^2 + \vec{AC} \cdot \vec{BD}) = \frac{a^2}{2} \quad (4)$$

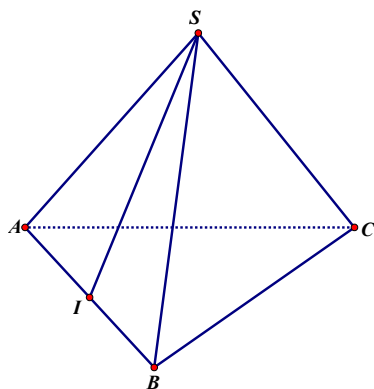
$$\text{Thay (2),(3),(4) vào (1) ta có } \cos(\vec{AC}, \vec{MN}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Vậy } \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc và $SA = SB = SC$. Gọi I là trung điểm của AB . Khi đó góc giữa hai vectơ $\vec{SI}; \vec{BC}$

Trả lời:.....

Lời giải



Giả sử $SA = SB = SC = a$.

$$\begin{aligned} \cos(\vec{SI}; \vec{BC}) &= \frac{\vec{SI} \cdot \vec{BC}}{|\vec{SI}| \cdot |\vec{BC}|} = \frac{1}{2} \frac{(\vec{SA} + \vec{SB}) \cdot (\vec{SC} - \vec{SB})}{|\vec{SI}| \cdot |\vec{BC}|} = \frac{1}{2} \frac{SA \cdot SC - SA \cdot SB + SB \cdot SC - SB^2}{|\vec{SI}| \cdot |\vec{BC}|} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{SB^2}{|\vec{SI}| \cdot |\vec{BC}|} = -\frac{1}{2} \frac{a^2}{a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

. (Vì hình chóp $S.ABC$ có các cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc nên $\vec{SA} \cdot \vec{SB} = 0$; $\vec{SA} \cdot \vec{SC} = 0$ và $\vec{SB} \cdot \vec{SC} = 0$). Suy ra: $(\vec{SI}; \vec{BC}) = 120^\circ$.

Câu 11. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có $G_1; G_2$ lần lượt là trọng tâm tam giác BDA_1 và CB_1D_1 . Biết $\vec{AC_1} = a\vec{AG_1} + b\vec{AG_2}$. Tính $a + b$

Trả lời:.....

Lời giải

Ta có: $\vec{AB} = \vec{AG_1} + \vec{G_1B}$

$\vec{AD} = \vec{AG_1} + \vec{G_1D}$

$\vec{AA_1} = \vec{AG_1} + \vec{G_1A_1}$

Suy ra $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA_1} = 3\vec{AG_1}$

Mà $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA_1} = \vec{AC_1}$ suy ra $\vec{AC_1} = 3\vec{AG_1}$. (1)

Ta lại có: $\vec{AC} = \vec{AG_2} + \vec{G_2C}$

$\vec{AB_1} = \vec{AG_2} + \vec{G_2B_1}$

$\vec{AD_1} = \vec{AG_2} + \vec{G_2D_1}$

Suy ra $\vec{AC} + \vec{AB_1} + \vec{AD_1} = 3\vec{AG_2} \Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AB} + \vec{AA_1} + \vec{AD} + \vec{AA_1} = 3\vec{AG_2}$

$$\Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA_1} = \frac{3}{2} \vec{AG_2} \Leftrightarrow \vec{AC_1} = \frac{3}{2} \vec{AG_2} \quad (2)$$

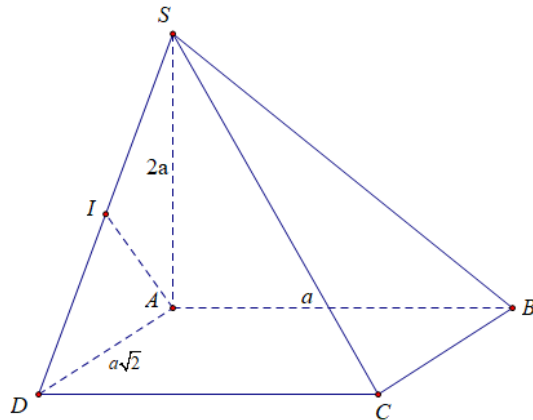
Từ (1) và (2) suy ra $\vec{AC}_1 = \frac{3}{2} \vec{AG}_1 + \frac{3}{4} \vec{AG}_2$.

Suy ra $a + b = \frac{9}{4}$

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$. Ba cạnh SA, AB, AD đôi một vuông góc và $SA = 2a$. Gọi I là trung điểm của SD . Tính $\cos(AI, SC)$

Trả lời:.....

Lời giải



Ta có: $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + a^2} = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{(2a)^2 + (a\sqrt{3})^2} = a\sqrt{7}$;

$AI = \frac{1}{2}SD = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + AD^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(2a)^2 + (a\sqrt{2})^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

$\cos(AI, SC) = \left| \cos(\vec{AI}, \vec{SC}) \right| = \frac{|\vec{AI} \cdot \vec{SC}|}{|\vec{AI}| \cdot |\vec{SC}|} = \frac{|\vec{AI} \cdot \vec{SC}|}{\frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot a\sqrt{7}}$

Khi đó:

Lại có: $\vec{AI} = \frac{1}{2}(\vec{AS} + \vec{AD})$; $\vec{SC} = \vec{AC} - \vec{AS} = \vec{AB} + \vec{AD} - \vec{AS}$

$\Rightarrow \vec{AI} \cdot \vec{SC} = \frac{1}{2}(\vec{AS} + \vec{AD}) \cdot (\vec{AB} + \vec{AD} - \vec{AS})$

$= \frac{1}{2}(\vec{AS} \cdot \vec{AB} + \vec{AS} \cdot \vec{AD} - \vec{AS} \cdot \vec{AS} + \vec{AD} \cdot \vec{AB} + \vec{AD} \cdot \vec{AD} - \vec{AD} \cdot \vec{AS})$

$= \frac{1}{2}(-AS^2 + AD^2) = \frac{1}{2}(-4a^2 + 2a^2) = -a^2$

$\Rightarrow \cos(AI, SC) = \frac{a^2}{\frac{a^2\sqrt{42}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{42}}$

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABC$ với $SA=3, SB=4, SC=5$. Một mặt phẳng (α) thay đổi luôn đi qua trọng tâm của $S.ABC$ cắt các cạnh SA, SB, SC tại các điểm A_1, B_1, C_1 . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{SA_1^2} + \frac{1}{SB_1^2} + \frac{1}{SC_1^2}$.

Trả lời:.....

Lời giải

Gọi G là trọng tâm của $S.ABC$ khi đó $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GS} = \vec{0}$.

$$\vec{SG} = \frac{1}{4}(\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC}) \quad (1)$$

Từ đó

Do A_1, B_1, C_1 thuộc các tia SA, SB, SC nên $\vec{SA}, \vec{SA_1}$ cùng hướng, $\vec{SB}, \vec{SB_1}$ cùng hướng, $\vec{SC}, \vec{SC_1}$ cùng hướng, từ đó $\frac{\vec{SA}}{SA} = \frac{\vec{SA_1}}{SA_1}, \frac{\vec{SB}}{SB} = \frac{\vec{SB_1}}{SB_1}, \frac{\vec{SC}}{SC} = \frac{\vec{SC_1}}{SC_1}$.

$$\vec{SG} = \frac{1}{4} \left(\frac{SA}{SA_1} \vec{SA_1} + \frac{SB}{SB_1} \vec{SB_1} + \frac{SC}{SC_1} \vec{SC_1} \right) \quad (2)$$

Vậy (1) tương đương với

$$\text{Do } G, A_1, B_1, C_1 \text{ thuộc một mặt phẳng nên từ (2) ta có } \frac{1}{4} \left(\frac{SA}{SA_1} + \frac{SB}{SB_1} + \frac{SC}{SC_1} \right) = 1$$

$$\text{Hay } \frac{3}{x} + \frac{4}{y} + \frac{5}{z} = 4 \quad \text{trong đó } x = SA_1, y = SB_1, z = SC_1.$$

Vậy bài toán quy về tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$ trong điều kiện $\frac{3}{x} + \frac{4}{y} + \frac{5}{z} = 4$ và $0 < x < 3; 0 < y < 4; 0 < z < 5$.

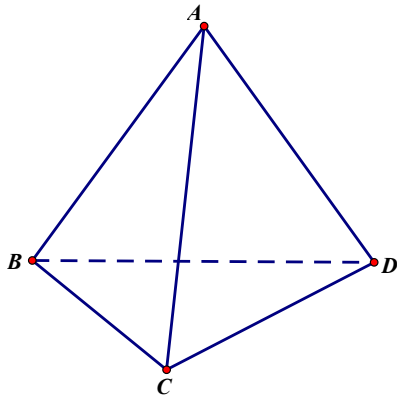
$$\text{Ta có } 16 = \left(\frac{3}{x} + \frac{4}{y} + \frac{5}{z} \right)^2 \leq (3^2 + 4^2 + 5^2) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right).$$

$$\text{Suy ra } P = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \geq \frac{8}{25}$$

Câu 14. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC=BD=a$, $AB=CD=2a$, $AD=BC=a\sqrt{6}$. Khi đó góc giữa hai đường thẳng AD và BC bằng bao nhiêu độ

Trả lời:.....

Lời giải



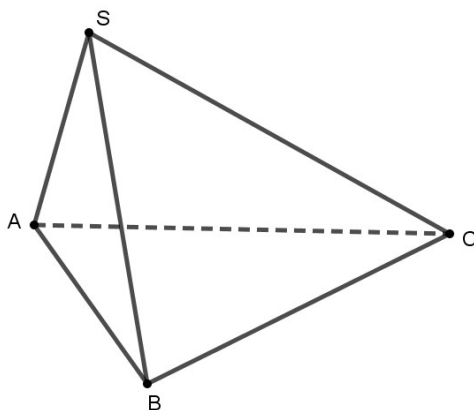
Ta có

$$\begin{aligned} \cos(\angle AD, BC) &= \left| \cos(\vec{AD}, \vec{BC}) \right| = \frac{|\vec{AD} \cdot \vec{BC}|}{AD \cdot BC} \\ \vec{AD} \cdot \vec{BC} &= \vec{AD} \cdot (\vec{AC} - \vec{AB}) = \vec{AD} \cdot \vec{AC} - \vec{AD} \cdot \vec{AB} \\ &= AD \cdot AC \cdot \cos \angle DAC - AD \cdot AB \cdot \cos \angle BAD \\ &= AD \cdot AC \cdot \frac{AD^2 + AC^2 - CD^2}{2AD \cdot AC} - AD \cdot AB \cdot \frac{AD^2 + AB^2 - BD^2}{2AD \cdot AB} \\ &= \frac{AD^2 + AC^2 - CD^2}{2} - \frac{AD^2 + AB^2 - BD^2}{2} = \frac{AC^2 + BD^2 - CD^2 - AB^2}{2} \\ &= \frac{a^2 + a^2 - 4a^2 - 4a^2}{2} = -3a^2 \\ \Rightarrow \cos(\angle AD, BC) &= \frac{|-3a^2|}{6a^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow (\angle AD, BC) = 60^\circ \end{aligned}$$

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = a$, $SB = 2a$, $SC = 3a$, $\angle ASB = \angle BSC = 60^\circ$, $\angle CSA = 90^\circ$. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng SA và BC . Tính $\cos \alpha$.

Trả lời:.....

Lời giải

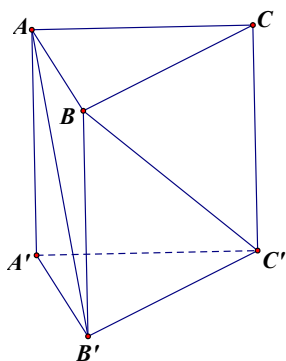


$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \left| \cos(\angle SA, BC) \right| = \frac{|\vec{SA} \cdot \vec{BC}|}{SA \cdot BC} = \frac{|\vec{SA} \cdot (\vec{SC} - \vec{SB})|}{SA \cdot BC} = \frac{|\vec{SA} \cdot \vec{SC} - \vec{SA} \cdot \vec{SB}|}{SA \cdot BC} \\ &= \frac{|\vec{SA} \cdot \vec{SC} \cdot \cos 90^\circ - \vec{SA} \cdot \vec{SB} \cdot \cos 60^\circ|}{a \cdot \sqrt{4a^2 + 9a^2 - 2 \cdot 2a \cdot 3a \cdot \cos 60^\circ}} = \frac{\sqrt{7}}{7} \end{aligned}$$

Câu 16. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = \sqrt{2}a$. Khi đó góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng bao nhiêu độ

Trả lời:.....

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC'} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{CC'}$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{CC'} = -\frac{a^2}{2} + 0 + 0 + 2a^2 = \frac{3a^2}{2}$$

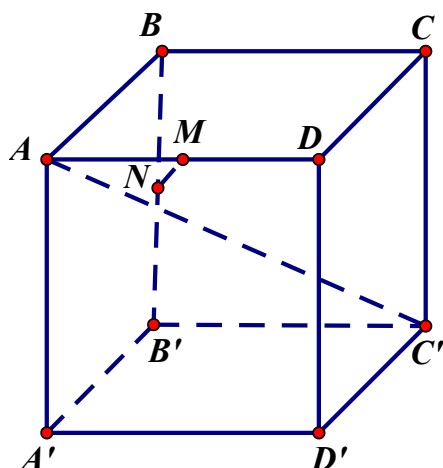
$$\cos(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'}) = \frac{\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC'}}{|\overrightarrow{AB'}| \cdot |\overrightarrow{BC'}|} = \frac{\frac{3a^2}{2}}{a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'}) = 60^\circ$$

Suy ra

Câu 17. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BB' . Cosin của góc hợp bởi MN và AC' bằng

Trả lời:.....

Lời giải



* Xét hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a .

* Đặt $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{b} = \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{c} = \overrightarrow{AA'} \Rightarrow |\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{c}| = a, \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} = 0$

* Ta có:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{AM} = a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c \Rightarrow |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = a + b + c \Rightarrow |\overrightarrow{AC'}| = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$$

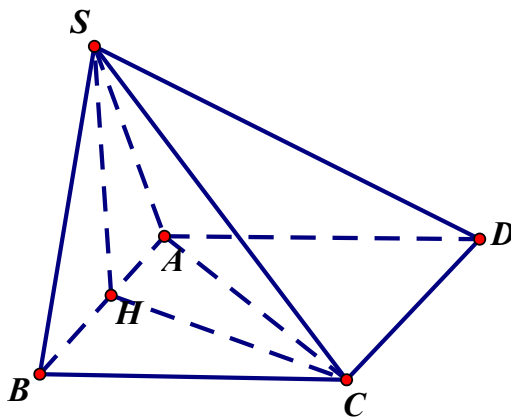
$$\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{MN} = a^2 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2 = a^2$$

$$\cos(MN; AC') = \left| \cos(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC'}) \right| = \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AC'}|}{|\overrightarrow{MN}| \cdot |\overrightarrow{AC'}|} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = 2a$, $BC = a$. Hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt phẳng đáy là trung điểm của cạnh AB , góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng 60° . Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SB và AC

Trả lời:.....

Lời giải



$$(SC, (ABCD)) = (SC, CH) = \angle SCH = 60^\circ$$

$$\cos(SB, AC) = \frac{|\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{AC}|}{\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{AC}}$$

$$\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{SH} + \overrightarrow{HB})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{SH} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{SH} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$= \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}AB^2 = 2a^2$$

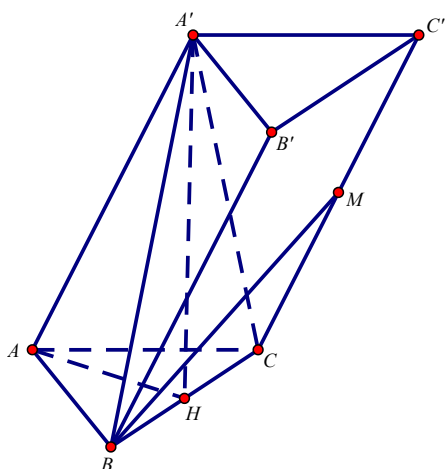
$$AC = a\sqrt{5}, CH = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}, SH = CH \cdot \tan \angle SCH = a\sqrt{6}$$

$$SB = \sqrt{SH^2 + HB^2} = \sqrt{(a\sqrt{6})^2 + a^2} = a\sqrt{7}$$

$$\cos(SB, AC) = \frac{\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{AC}} = \frac{2a^2}{a\sqrt{7} \cdot a\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{35}}$$

Câu 19. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , tam giác $A'BC$ đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC) . M là trung điểm cạnh CC' . Tính cosin góc α giữa hai đường thẳng AA' và BM .
Trả lời:.....

Lời giải



Ta có: $AH = A'H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $AH \perp BC, A'H \perp BC \Rightarrow BC \perp (AA'H) \Rightarrow BC \perp AA'$ hay $BC \perp BB'$. Do đó: $BCC'B'$ là hình chữ nhật.

Khi đó: $CC' = AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow BM = \sqrt{a^2 + \frac{a^2 \cdot 6}{16}} = a \frac{\sqrt{22}}{4}$.

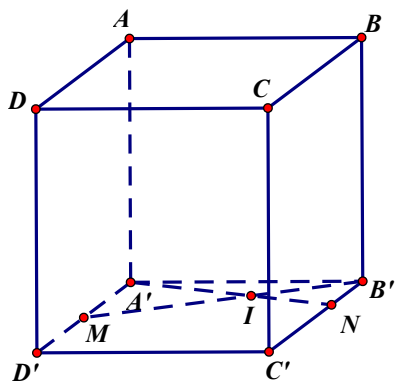
Xét: $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AA'} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}) = 0 + \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{CM} = \frac{3a^2}{4}$.

$$\cos(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BM}) = \frac{\left| \frac{3a^2}{4} \right|}{\frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{22}}{4}} = \frac{\sqrt{33}}{11}.$$

Suy ra

Câu 20. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, gọi N là điểm thỏa $\overrightarrow{C'N} = 2\overrightarrow{NB'}$, M là trung điểm của $A'D'$, I là giao điểm của $A'N$ và $B'M$. Biết $\overrightarrow{AI} = a\overrightarrow{AA'} + b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AD}$. Tính $a + b + c$.
Trả lời:.....

Lời giải



Ta có: tam giác $IA'M$ đồng dạng với tam giác INB' nên suy ra:

$$\frac{IA'}{IN} = \frac{A'M}{B'N} = \frac{\frac{1}{2}A'D'}{\frac{1}{3}A'D'} = \frac{3}{2} \Rightarrow A'I = \frac{3}{5}A'N$$

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'I} = \overrightarrow{AA'} + \frac{3}{5}\overrightarrow{A'N} = \overrightarrow{AA'} + \frac{3}{5}(\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'N}) = \overrightarrow{AA'} + \frac{3}{5}\left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)$$

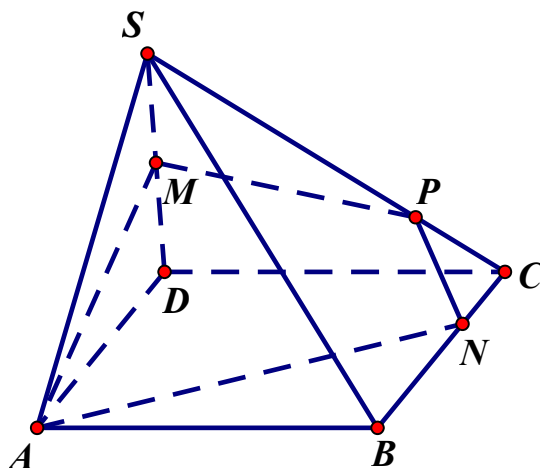
$$= \overrightarrow{AA'} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AD}$$

$$a + b + c = \frac{9}{5}$$

Suy ra

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành, gọi M và N là các điểm thỏa mãn

$\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MS} = \vec{0}$, $\overrightarrow{NB} + 2\overrightarrow{NC} = \vec{0}$. Mặt phẳng (AMN) cắt SC tại P . Tính tỉ số $\frac{SP}{SC}$.



Lời giải

Đặt $\overrightarrow{AB} = x$, $\overrightarrow{AD} = y$, $\overrightarrow{AS} = z$ và $\overrightarrow{SP} = k\overrightarrow{SC}$.

Ta có $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AS}) = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$.

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = x + \frac{2}{3}y$$

$$\begin{aligned}
 \vec{AP} &= \vec{AS} + \vec{SP} = \vec{AS} + k\vec{SC} \\
 &= \vec{AS} + k(\vec{AC} - \vec{AS}) \\
 &= \vec{AS} + k(\vec{AB} + \vec{AD} - \vec{AS}) \\
 &= kx + ky + (1-k)z
 \end{aligned}$$

Vì 3 véc tơ $\vec{AM}, \vec{AN}, \vec{AP}$ đồng phẳng nên $\vec{AP} = m\vec{AM} + n\vec{AN}$.

Khi đó

$$\begin{aligned}
 kx + ky + (1-k)z &= m\left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z\right) + n\left(x + \frac{2}{3}y\right) \\
 &= nx + \left(\frac{m}{2} + \frac{2n}{3}\right)y + \frac{m}{2}z
 \end{aligned}$$

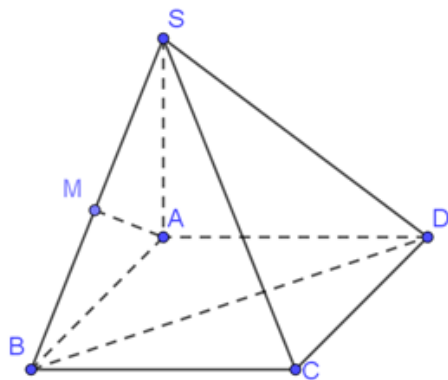
$$\text{Suy ra } \begin{cases} n = k \\ \frac{m}{2} + \frac{2n}{3} = k \\ \frac{m}{2} = 1 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = k \\ 1 - k + \frac{2k}{3} = k \\ \frac{m}{2} = 1 - k \end{cases}, \text{ từ phương trình } 1 - k + \frac{2k}{3} = k \Leftrightarrow k = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Vậy } \frac{SP}{SC} = \frac{3}{4}.$$

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA = a$. Gọi M là trung điểm của SB . Khi đó góc giữa AM và BD bằng bao nhiêu độ?

Trả lời:.....

Lời giải



Xét $\triangle ABD$ vuông cân tại A , ta có $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

Góc giữa 2 đường thẳng BA và BD bằng 45° , suy ra $(\vec{AB}, \vec{BD}) = 135^\circ$.

Xét $\triangle SAB$ vuông cân tại A , ta có $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

$$AM = \frac{SA \cdot AB}{SB} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Vì M là trung điểm của SB nên: $2\vec{AM} = \vec{AS} + \vec{AB}$.

Ta có $2\vec{AM} \cdot \vec{BD} = (\vec{AS} + \vec{AB}) \cdot \vec{BD} = \vec{AS} \cdot \vec{BD} + \vec{AB} \cdot \vec{BD} = \vec{AB} \cdot \vec{BD}$ (Do $\vec{AS} \perp \vec{BD}$, nên $\vec{AS} \cdot \vec{BD} = 0$)

$$\text{Suy ra } \frac{\vec{AM} \cdot \vec{BD}}{|\vec{AM}| |\vec{BD}|} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{BD}}{|\vec{AB}| |\vec{BD}|} = \frac{AB \cdot BD \cdot \cos(\vec{AB}, \vec{BD})}{a \cdot a\sqrt{2}} = \frac{a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos(135^\circ)}{2} = \frac{-a^2}{2}$$

$$\cos(\vec{AM}, \vec{BD}) = \frac{\vec{AM} \cdot \vec{BD}}{|\vec{AM}| |\vec{BD}|} = \frac{\frac{-a^2}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{AM}, \vec{BD}) = 120^\circ$$

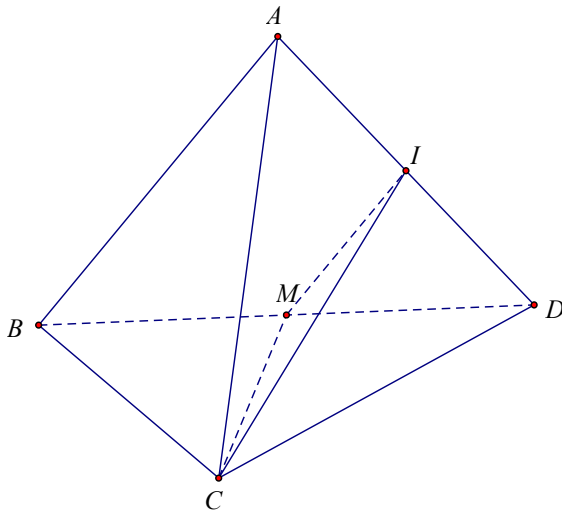
Do đó

Vậy góc giữa AM và BD bằng 60° .

Câu 23. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Tính cosin góc giữa hai đường thẳng AB và CI , với I là trung điểm của AD .

Trả lời:.....

Lời giải



Gọi M là trung điểm của BD .

Ta có: $IM \parallel AB$.

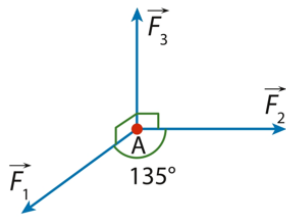
$$\Rightarrow (\vec{AB}, \vec{IC}) = (\vec{IM}, \vec{IC})$$

$$\Rightarrow \cos(\vec{AB}, \vec{IC}) = \cos(\vec{IM}, \vec{IC}) = |\cos(\vec{IM}, \vec{IC})| = |\cos \angle MIC|$$

$$\text{Mà: } \cos \angle MIC = \frac{MI^2 + IC^2 - MC^2}{2 \cdot MI \cdot IC} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\Rightarrow \cos(\vec{AB}, \vec{IC}) = |\cos \angle MIC| = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Câu 24. Một chất điểm A nằm trên mặt phẳng nằm ngang (α) , chịu tác động bởi ba lực F_1, F_2, F_3 . Các lực F_1, F_2 có giá nằm trong (α) và $(F_1, F_2) = 135^\circ$, còn lực F_3 có giá vuông góc với (α) và hướng lên trên. Xác định hợp lực của các lực F_1, F_2, F_3 , biết rằng độ lớn của ba lực đó lần lượt là 20 N , 15 N và 10 N .



Trả lời:.....

Lời giải

Vẽ $\overrightarrow{OA} = F_1, \overrightarrow{OB} = F_2, \overrightarrow{OC} = F_3$.

Dựng hình bình hành $OADB$ và hình bình hành $ODEC$.

Hợp lực tác động vào vật là $F = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE}$

Áp dụng định lí côsin trong tam giác OBD , ta có

$$OD^2 = BD^2 + OB^2 - 2 \cdot BD \cdot OB \cdot \cos \angle OBD = OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 135^\circ.$$

Vì $OC \perp (OADB)$ nên $OC \perp OD$, suy ra $ODEC$ là hình chữ nhật.

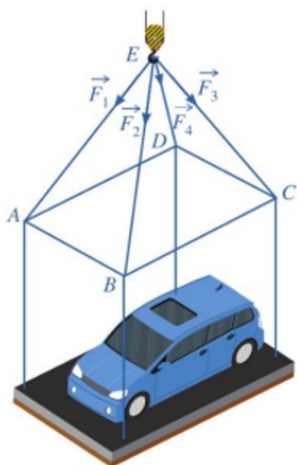
Do đó tam giác ODE vuông tại D .

Ta có $OE^2 = OC^2 + OD^2 = OC^2 + OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 135^\circ$.

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } OE &= \sqrt{OC^2 + OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 135^\circ} \\ &= \sqrt{10^2 + 20^2 + 15^2 + 2 \cdot 20 \cdot 15 \cdot \cos 135^\circ} \approx 17,34. \end{aligned}$$

Vậy độ lớn của hợp lực là $F = OE \approx 17,34\text{ N}$.

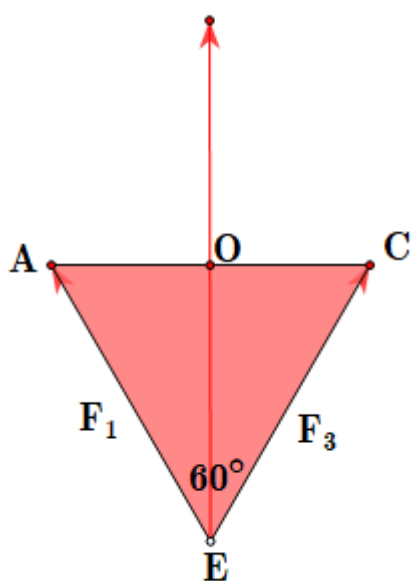
Câu 25. Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60° (Hình). Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng.



Tính trọng lượng của chiếc xe ô tô (làm tròn đến hàng đơn vị), biết rằng các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ đều có cường độ là 4700 N và trọng lượng của khung sắt là 3000 N .

Trả lời:.....

Lời giải



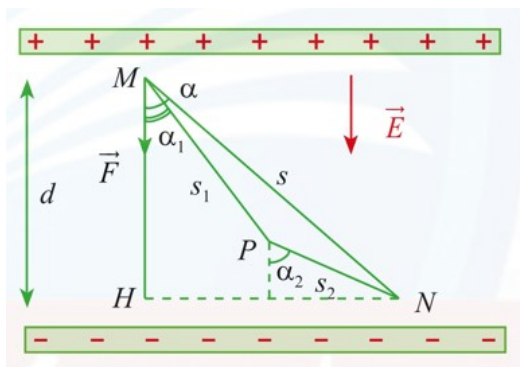
Ta có $\angle AEC = 60^\circ$

Ta có $\vec{F}_1 + \vec{F}_3 = 2\vec{EO} \Rightarrow |\vec{F}_1 + \vec{F}_3| = 2|\vec{EO}| \Rightarrow |\vec{F}_1|\sqrt{3} = 4700\sqrt{3}$

Tương tự ta cũng có $|\vec{F}_2 + \vec{F}_4| = \sqrt{3} = 4700\sqrt{3}$

Vậy trọng lực ô tô là: $(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4) \cdot \vec{g}$ (trọng lực khung sắt) $\approx 13281\text{ (N)}$

Câu 26. Một lực tĩnh điện F tác động lên điện tích điểm M trong điện trường đều làm cho M dịch chuyển theo đường gấp khúc MNP (Hình). Biết $q = 2 \cdot 10^{-12}\text{ C}$, vector điện trường có độ lớn $E = 1,8 \cdot 10^5\text{ N/C}$ và $d = MH = 5\text{ mm}$. Tính công A sinh bởi lực tĩnh điện F .



Trả lời:.....

Lời giải

Đổi: $5\text{ mm} = 0,005\text{ m}$

Gọi K là điểm thuộc MH sao cho $PK \perp MH$, L là điểm thuộc HN sao cho $PL \perp HN$

$$A_{MNP} = A_{MP} + A_{PN} = F_d \cdot MP \cos \alpha_1 + F_d \cdot PN \cos \alpha_2$$

$$\Leftrightarrow A_{MNP} = qE \cdot \frac{MK}{\cos \alpha_1} \cos \alpha_1 + qE \cdot \frac{PL}{\cos \alpha_2} \cos \alpha_2$$

$$\Leftrightarrow A_{MNP} = qE(MK + PL) = qE(MK + KH) = qE \cdot MH = 2 \cdot 10^{-12} \cdot 1,8 \cdot 10^5 \cdot 0,005 = 1,8 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$