

BÀI 16. CÔNG THỨC XÁC SUẤT TOÀN PHẦN VÀ CÔNG THỨC BAYES

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

Trong mục này, ta luôn giả thiết phép thử T có không gian mẫu là tập hợp Ω gồm hữu hạn phần tử và các kết quả của phép thử là đồng khả năng, các biến cố đều liên quan đến phép thử đó.

1. Công thức xác suất toàn phần

Cho hai biến cố A, B với $0 < P(B) < 1$, ta có:

$$P(A) = P(AB) + P(\overline{A}B) = P(B)P(A|B) + P(\overline{B})P(A|\overline{B})$$

2. Công thức Bayes

Với hai biến cố A, B mà $P(A) > 0, P(B) > 0$, ta có:
$$P(B|A) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)}$$

Nhận xét: Cho hai biến cố A, B với $P(A) > 0, 0 < P(B) < 1$.

Do $P(A) = P(B) \cdot P(A|B) + P(\overline{B}) \cdot P(A|\overline{B})$ nên công thức Bayes còn có dạng:

$$P(B|A) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(B) \cdot P(A|B) + P(\overline{B}) \cdot P(A|\overline{B})}$$

PHẦN B. CÂU TẬP ÁP DỤNG

Câu 1. Một cửa hàng sách ước lượng rằng: Trong tổng số các khách hàng đến cửa hàng, có 30% khách cần hỏi nhân viên bán hàng, 20% khách mua sách và 15% khách thực hiện cả hai điều trên. Gặp ngẫu nhiên một khách trong nhà sách. Tính xác suất để người này

- a) không thực hiện cả hai điều trên;
- b) không mua sách, biết rằng người này đã hỏi nhân viên bán hàng.

Lời giải

Đặt A : "khách hàng cần tư vấn"; B : "khách hàng cần mua sách".

Theo đề ta có: $P(A) = 0,3; P(B) = 0,2; P(AB) = 0,15$

a) Xác suất khách hàng không cần mua sách cũng không cần tư vấn là:

$$P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = 1 - \frac{3}{10} + 1 - \frac{2}{10} - \left(1 - \frac{15}{100}\right) = \frac{13}{20}$$

b) Không mua sách, biết rằng người này đã hỏi nhân viên bán hàng.

$$P(\overline{B}|A) = \frac{P(\overline{A}B)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{10} - \frac{15}{100}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{2}$$

Câu 2. Một cuộc điều tra cho thấy, ở một thành phố, có 20,7% dân số dùng loại sản phẩm X , 50% dùng loại sản phẩm Y và trong số những người dùng Y , có 36,5% dùng X . Phỏng vấn ngẫu nhiên một người dân trong thành phố đó, tính xác suất để người ấy

- a) Dùng cả X và Y ;
- b) Dùng Y , biết rằng người ấy không dùng X .

Lời giải

Đặt A : "người dân trong thành phố dùng sản phẩm X "; B : "người dân trong thành phố dùng sản phẩm Y ". Theo đề Câu ta có: $P(A)=0,207; P(B)=0,5; P(A|B)=0,365$

a) Xác suất người dân đó dùng cả X và Y là: $P(AB)=P(B) \cdot P(A|B)=0,5 \cdot 0,365=0,1825$

b) Xác suất người dân đó dùng Y , biết rằng không dùng X là

$$P(B|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cdot B)}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(AB)}{P(\bar{A})} = \frac{0,5 - 0,1825}{1 - 0,207} = 0,404$$

Câu 3. Theo một cuộc điều tra thì xác suất để một hộ gia đình có máy vi tính nếu thu nhập hàng năm trên 20 triệu (VNĐ) là $0,75$. Trong số các hộ được điều tra thì 60% có thu nhập trên 20 triệu và 52% có máy vi tính. Tính xác suất để một hộ gia đình được chọn ngẫu nhiên

- có máy vi tính và có thu nhập hàng năm trên 20 triệu;
- có máy vi tính, nhưng không có thu nhập trên 20 triệu.
- có thu nhập hàng năm trên 20 triệu, biết rằng hộ đó không có máy vi tính.

Lời giải

Đặt A : "Hộ gia đình được chọn ngẫu nhiên có máy vi tính"

B : "Hộ gia đình được chọn ngẫu nhiên có thu nhập hàng năm trên 20 triệu"

Theo đề Câu ta có: $P(A)=0,52; P(B)=0,6; P(A|B)=0,75$

a) Xác suất để hộ gia đình được chọn có máy vi tính và có thu nhập hàng năm trên 20 triệu là:

$$P(AB)=P(B) \cdot P(A|B)=0,6 \cdot 0,75=0,45$$

b) Xác suất để hộ gia đình được chọn có máy vi tính nhưng thu nhập ít hơn 20 triệu là:

$$P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=0,52-0,45=0,07$$

c) Xác suất để hộ gia đình được chọn có thu nhập hàng năm trên 20 triệu nhưng không có máy vi

$$P(B|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cdot B)}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(AB)}{P(\bar{A})} = \frac{0,6 - 0,45}{1 - 0,52} = 0,3125$$

tính là:

Câu 4. Trong một đội tuyển có hai vận động viên A và B thi đua. Nếu A thi đấu trước và có hy vọng 80% thắng trận. Do ảnh hưởng tinh thần, nếu A thắng trận thì có 60% khả năng B thắng trận, còn nếu A thua thì khả năng này của B chỉ còn 30% . Tính xác suất của các biến cố sau:

- B thắng trận;
- Đội tuyển chỉ thắng có một trận.

Lời giải

Đặt A : "vận động viên A thắng"; B : "vận động viên B thắng".

Theo đề Câu ta có: $P(A)=0,8; P(B|A)=0,6; P(B|\bar{A})=0,3$

a) Xác suất B thắng trận là: $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A})=0,54$

b) Đặt D : "đội tuyển chỉ thắng 1 trận". Xác suất đội tuyển chỉ thắng 1 trận là:

$$P(D) = P(A \cdot \bar{B}) + P(\bar{A} \cdot B) = P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) \\ = P(A) + P(B) - 2 \cdot P(AB) = 0,8 + 0,54 - 2 \cdot 0,48 = 0,38$$

Câu 5. Trong năm học vừa qua, ở trường đại học X , tỉ lệ sinh viên thi trượt môn Toán là 34% , thi trượt môn Tâm lý là $20,5\%$, và trong số các sinh viên trượt môn Toán, có 50% sinh viên trượt môn Tâm lý. Gặp ngẫu nhiên một sinh viên của trường X .

- Tính xác suất để anh ta trượt cả hai môn Toán và Tâm lý;
- Tính xác suất đậu cả hai môn Toán và Tâm lý.
- Nếu biết rằng sinh viên này trượt môn Tâm lý thì xác suất để anh ta đậu môn Toán là bao nhiêu?

Lời giải

T : "sinh viên thi trượt môn Toán" $P(T) = 0,34$ và L : "sinh viên thi trượt môn Tâm Lý" $P(L) = 0,205$, khi đó $P(L|T) = 0,5$

a) Xác suất sinh viên trượt môn cả môn Toán và Tâm: $P(TL) = P(T)P(L|T) = 0,34 \cdot 0,5 = 0,17$

b) Xác suất sinh viên đậu cả môn Toán và Tâm Lý

$$P(\overline{TL}) = 1 - P(T \cup L) = 1 - P(T) - P(L) + P(TL) = 0,625$$

c) Xác suất sinh viên đậu môn Toán, biết rằng trượt môn Tâm Lý:

$$P(\overline{T}|L) = \frac{P(\overline{TL})}{P(L)} = \frac{P(L) - P(TL)}{P(L)} = \frac{7}{41}$$

Câu 6. Ba máy 1,2 và 3 của một xí nghiệp sản xuất, theo thứ tự $60\%, 30\%$ và 10% tổng số sản phẩm của một xí nghiệp. Tỉ lệ sản xuất ra phế phẩm của các máy trên, theo thứ tự, là $2\%, 3\%$ và 4% . Lấy ngẫu nhiên một sản phẩm từ lô hàng của xí nghiệp, trong đó để lẫn lộn các sản phẩm do 3 máy sản xuất.

- Tính xác suất để sản phẩm lấy ra là sản phẩm tốt. Ý nghĩa của xác suất đó đối với lô hàng là gì?
- Nếu sản phẩm lấy được là phế phẩm, thì nhiều khả năng nhất là do máy nào sản xuất?

Lời giải

Đặt:

M_i : "sản phẩm lấy ra do máy i sản xuất" với $i \in \{1, 2, 3\}$

$$P(M_1) = 0,6; P(M_2) = 0,3; P(M_3) = 0,1$$

và T : "sản phẩm lấy ra là phế phẩm" $P(T|M_1) = 0,98; P(T|M_2) = 0,97; P(T|M_3) = 0,96$

a) $\overline{T}$: "sản phẩm lấy ra là sản phẩm tốt"

$$P(\overline{T}) = P(M_1)P(\overline{T}|M_1) + P(M_2)P(\overline{T}|M_2) + P(M_3)P(\overline{T}|M_3) = 0,975$$

Ý nghĩa, xác suất thể hiện tỉ lệ sản phẩm tốt của lô hàng.

b) Xác suất lấy ra sản phẩm là phế phẩm: $P(T) = 1 - P(\overline{T}) = 0,025$

Theo công thức Bayes

$$P(M_1 | \bar{T}) = \frac{P(M_1)P(\bar{T} | M_1)}{P(\bar{T})} = \frac{0,6 \cdot 0,02}{0,025} = 0,48$$

$$P(M_2 | \bar{T}) = \frac{P(M_2)P(\bar{T} | M_2)}{P(\bar{T})} = \frac{0,3 \cdot 0,03}{0,025} = 0,36$$

$$P(M_3 | \bar{T}) = \frac{P(M_3)P(\bar{T} | M_3)}{P(\bar{T})} = \frac{0,1 \cdot 0,04}{0,025} = 0,16$$

Câu 7. Một hãng sản xuất một loại tủ lạnh X ước tính rằng khoảng 80% số người dùng tủ lạnh có đọc quảng cáo tủ lạnh do hãng ấy sản xuất. Trong số những người được quảng cáo, có 30% mua loại tủ lạnh X ; 10% không được quảng cáo cũng mua loại tủ lạnh X . Tính xác suất để một người tiêu dùng đã mua loại tủ lạnh X mà có được quảng cáo.

Lời giải

Đặt A : "người đó đọc quảng cáo" $P(A) = 0,8$;

B : "người đó mua tủ lạnh X " $P(B | A) = 0,3; P(B | \bar{A}) = 0,1$

Trước tiên tính xác suất để người mua tủ lạnh X

$$P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B) = P(A) \cdot P(B | A) + P(\bar{A}) \cdot P(B | \bar{A}) = 0,26$$

Xác suất để 1 người tiêu dùng đã mua loại tủ lạnh X mà có đọc quảng cáo:

$$P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B | A)}{P(B)} = \frac{0,8 \cdot 0,3}{0,26} = \frac{12}{13}$$

Câu 8. Một địa phương có tỉ lệ người dân nghiện thuốc lá là 30%. Biết rằng tỉ lệ người bị viêm họng trong số người nghiện thuốc lá là 60%, còn tỉ lệ đó trong số người không nghiện thuốc lá là 40%. Chọn ngẫu nhiên một người từ địa phương trên.

a) Nếu người đó bị viêm họng, tính xác suất để người đó nghiện thuốc lá.

b) Nếu người đó không bị viêm họng, tính xác suất để người đó nghiện

Lời giải

Đặt A : "người dân nghiện thuốc lá" $P(A) = 0,3; B$: "người dân bị viêm họng"

$$P(B | A) = 0,6; P(B | \bar{A}) = 0,4$$

a) Trước tiên ta tính xác suất người này viêm họng

$$P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B) = P(A) \cdot P(B | A) + P(\bar{A}) \cdot P(B | \bar{A}) = 0,46$$

Xác suất để người nghiện thuốc lá nếu bị viêm họng là

$$P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B | A)}{P(B)} = \frac{0,3 \cdot 0,6}{0,46} = \frac{9}{23}$$

b) Xác suất để người nghiện thuốc lá nếu không bị viêm họng là

$$P(A | \bar{B}) = \frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - P(AB)}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - P(A) \cdot P(B | A)}{1 - P(B)} = \frac{2}{9}$$

Câu 9. Một nhà xuất bản gửi bản giới thiệu sách mới đến 80% giảng viên của một trường đi học. Sau một thời gian, nhà xuất bản nhận thấy: Có 30% giảng viên mua sách trong số những người nhận được bản giới thiệu, và trong số những giảng viên không nhận được bản giới thiệu, có 10% mua sách. Tìm tỉ lệ những giảng viên nhận được bản giới thiệu trong số những người mua sách.

Lời giải

Đặt A : "giảng viên nhận được bản giới thiệu sách mới" $P(A) = 0,8$

B : "giảng viên mua sách" $P(B|A) = 0,3; P(B|\bar{A}) = 0,1$

Trước hết ta tính xác suất để giảng viên mua sách

$$P(B) = P(\bar{A}B) + P(AB) = P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A}) + P(A) \cdot P(B|A) = 0,26$$

Nên, xác suất để giảng viên nhận được bản giới thiệu trong số những người mua sách:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)} = \frac{0,8 \cdot 0,3}{0,26} = \frac{12}{13}$$

Câu 10. Giả sử một xét nghiệm X cho kết quả dương tính (+) đối với những người nhiễm HIV với xác suất 95% và cho kết quả (+) đối với những người không nhiễm HIV với xác suất 1%. Một người đến từ địa phương có tỉ lệ nhiễm HIV là 1% được làm xét nghiệm X và cho kết quả (+). Tính xác suất để người này thực sự nhiễm HIV.

Lời giải

Đặt A : "Người bị nhiễm HIV đến từ địa phương" $P(A) = 0,01$

B : "người đến từ địa phương làm xét nghiệm X cho kết quả dương tính với HIV"

$$P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A}) = 0,01 \cdot 0,95 + 0,99 \cdot 0,01 = 0,0194$$

Xác suất để người đến từ địa phương có tỉ lệ 1% được xét nghiệm và cho kết quả dương tính là

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)} = \frac{0,95 \cdot 0,01}{0,0194} = \frac{95}{194}$$

Câu 11. Một nhà máy sản xuất linh kiện điện tử với 96% sản phẩm có chất lượng cao. Một qui trình kiểm tra chất lượng sản phẩm có được điểm: 2% sản phẩm có chất lượng cao lại không được công nhận và 5% sản phẩm không có chất lượng cao lại được công nhận. Hãy tính xác suất để sau khi kiểm tra, một sản phẩm được công nhận có chất lượng cao đúng là sản phẩm có chất lượng cao.

Lời giải

Gọi A : "sản phẩm chất lượng cao" và B : "sản phẩm được công nhận"

$$P(A) = 0,96, P(\bar{B}|A) = 0,02 \text{ và } P(B|\bar{A}) = 0,05$$

Ta có
$$P(\bar{B}|A) = \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(A)} = \frac{P(A) - P(AB)}{P(A)} = 0,02$$
 suy ra $P(AB) = 0,940$.

Lại có
$$P(B|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(AB)}{P(\bar{A})} = 0,05$$
 suy ra $P(B) = 0,9428$

Xác suất để 1 sản phẩm đó được công nhận chất lượng cao đúng là sản phẩm chất lượng cao là

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0,9408}{0,9428} = 0,9978$$

Câu 12. Một cặp trẻ sinh đôi có thể do cùng một trứng (sinh đôi thật), hay do hai trứng khác nhau sinh ra (sinh đôi giả). Các cặp sinh đôi thật luôn có cùng giới tính. Đối với cặp sinh đôi giả thì giới tính của mỗi đứa độc lập với nhau và có xác suất 0,5 là con trai. Thống kê cho thấy 34% cặp sinh đôi đều là trai, 30% cặp sinh đôi đều là gái, và 36% cặp sinh đôi có giới tính khác nhau.

a) Tìm tỉ lệ cặp sinh đôi thật.

b) Chọn ngẫu nhiên một cặp sinh đôi thì được một cặp có cùng giới tính. Tính xác suất để đó là cặp sinh đôi thật.

Lời giải

a) Kí hiệu B_1 : "cặp sinh đôi là thật", B_2 : "cặp sinh đôi là giả", A : "cặp sinh đôi cùng giới".

Theo giả thiết $P(A) = 0,34 + 0,3 = 0,64$ và $P(A|B_1) = 1, P(A|B_2) = \frac{1}{2}$

Đặt $P(B_1) = x, P(B_2) = 1 - x$.

Theo công thức xác suất đầy đủ: $P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2)$

$$\Leftrightarrow 0,64 = x + \frac{1-x}{2} \Rightarrow x = 0,28$$

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)} = \frac{0,28}{0,64} = 0,4375$$

b)

Câu 13. Có hai chuồng thỏ. Chuồng thứ nhất có 5 con thỏ đen và 10 con thỏ trắng. Chuồng thứ hai có 3 con thỏ trắng và 7 thỏ đen. Từ chuồng thứ hai ta bắt ngẫu nhiên một con thỏ cho vào chuồng thứ nhất, rồi sau đó lại bắt ngẫu nhiên một con thỏ ở chuồng thứ nhất ra, thì được một thỏ trắng. Tính xác suất để thỏ trắng này là của chuồng thứ nhất.

Lời giải

Kí hiệu E_1 : "Từ chuồng 2 bắt được thỏ trắng"; E_2 : "Từ chuồng 2 bắt được thỏ đen"; A : "Bắt được thỏ trắng ở lần bắt sau"; B : "Bắt được thỏ trắng của chuồng 1 ở lần bắt sau".

Ta có $P(A) = P(E_1)P(A|E_1) + P(E_2)P(A|E_2) = \frac{3}{10} \cdot \frac{11}{16} + \frac{7}{10} \cdot \frac{10}{16} = \frac{103}{160}$

$$P(B) = P(E_1)P(B|E_1) + P(E_2)P(B|E_2) = \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{16} + \frac{7}{10} \cdot \frac{10}{16} = \frac{100}{160}$$

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{100}{103}$$

Vậy

Câu 14. Hộp thứ nhất có 8 sản phẩm loại A và 2 sản phẩm loại B ; hộp thứ hai có 5 sản phẩm loại A và 3 sản phẩm loại B . Lấy ngẫu nhiên một hộp, rồi lấy ngẫu nhiên từ đó ra 4 sản phẩm.

a) Tính xác suất để được 3 sản phẩm loại A ;

b) Giả sử lấy được một sản phẩm loại B và 3 sản phẩm loại A . Nhiều khả năng là sản phẩm loại B thuộc hộp nào? Tại sao?

Lời giải

a) Lấy ngẫu nhiên ra 1 hộp, rồi lấy ngẫu nhiên từ đó ra 4 sản phẩm.

Đặt M_i : "lấy được hộp thứ $i, i \in \{1, 2\}$ " suy ra $P(M_1) = P(M_2) = \frac{1}{2}$

Gọi C : "lấy được 3 sản phẩm loại A và 1 sản phẩm loại B "

$$P(C) = P(M_1) \cdot P(C|M_1) + P(M_2) \cdot P(C|M_2) = \frac{1}{2} \left[\frac{C_5^3 \cdot C_2^1}{C_{10}^4} + \frac{C_5^3 \cdot C_3^1}{C_5^4} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{8}{15} + \frac{3}{7} \right] = \frac{101}{210}$$

b) Gọi $P(H_1), P(H_2)$ lần lượt là xác suất để sp loại B thuộc hộp thứ nhất và hộp thứ hai

$$P(H_1) = \frac{P(M_1) \cdot P(C|M_1)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{C_5^3 \cdot C_2^1}{C_{10}^4}}{\frac{101}{210}} = \frac{56}{101}$$

Ta có

$$P(H_2) = \frac{P(M_2) \cdot P(C|M_2)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{C_5^3 \cdot C_3^1}{C_5^4}}{\frac{101}{210}} = \frac{45}{101}$$

Thấy $P(H_1) > P(H_2)$ nên sản phẩm loại B nhiều khả năng thuộc hộp thứ nhất.

Câu 15. Một phân xưởng có 2 máy tự động: máy I sản xuất 45%, máy II sản xuất 55% số sản phẩm. Tỷ lệ phế phẩm tương ứng của các nhà máy lần lượt là 0,1% và 0,2%. Chọn ngẫu nhiên ra một sản phẩm của phân xưởng, tính xác suất sản phẩm được chọn là phế phẩm.

Lời giải

Gọi A là biến cố "sản phẩm lấy ra là phế phẩm"; B là biến cố "sản phẩm lấy ra từ nhà máy I".

Khi đó ta có:

$$P(B) = 45\% = \frac{9}{20}; P(\bar{B}) = 1 - \frac{9}{20} = \frac{11}{20}; P(A|B) = 0,1\% = \frac{1}{1000}; P(A|\bar{B}) = 0,2\% = \frac{1}{500}$$

Xác suất chọn được phế phẩm:

$$P(A) = P(B) \cdot P(A|B) + P(\bar{B}) \cdot P(A|\bar{B}) = \frac{9}{20} \cdot \frac{1}{1000} + \frac{11}{20} \cdot \frac{1}{500} = \frac{31}{20000}$$

Câu 16. Hình dạng hạt của đậu Hà Lan có hai kiểu hình: hạt trơn và hạt nhăn, có hai gene ứng với hai kiểu hình này là gene trội B và gene lặn b .

Khi cho lai hai cây đậu Hà Lan, cây con lấy ngẫu nhiên một cách độc lập một gene từ cây bố và một gene từ cây mẹ để hình thành một cặp gene. Giả sử cây bố và cây mẹ được chọn ngẫu nhiên từ một quần thể các cây đậu Hà Lan, ở đó tỉ lệ cây mang kiểu gene bb , Bb tương đương là 40% và 60%. Tính xác suất để cây con có kiểu gene bb

Lời giải

Gọi A là biến cố: "Cây bố có kiểu gen bb "; M là biến cố: "Cây con lấy gene b từ cây bố"; N là biến cố: "Cây con lấy gene b từ cây mẹ"; E là biến cố: "Cây con có kiểu gene bb ". Theo giả

thuyết hai biến cố M và N là độc lập nên $P(E) = P(M) \cdot P(N)$.

Tính $P(M)$:

Ta áp dụng công thức xác suất toàn phần $P(M) = P(A) \cdot P(M|A) + P(\bar{A}) \cdot P(M|\bar{A})$,

$$P(A) = 0,4; P(\bar{A}) = 0,6; P(M|A) = 1; P(M|\bar{A}) = \frac{1}{2}$$

Trong đó

$$P(M) = 0,4 \cdot 1 + 0,6 \cdot \frac{1}{2} = 0,7$$

Suy ra

Tương tự ta tính được $P(N) = 0,7$. Vậy $P(E) = P(M) \cdot P(N) = 0,7 \cdot 0,7 = 0,49$.

Câu 17. Trong một kì thi tốt nghiệp trung học phổ thông, một tỉnh X có 80% học sinh lựa chọn vào tổ hợp A00 (gồm các môn Toán, Vật Lí, Hóa học). Biết rằng, nếu học sinh chọn tổ hợp A00 thì xác suất học sinh đó đỗ đại học là 0,6; còn nếu học sinh đó không chọn tổ hợp A00 thì xác suất để học sinh đó đỗ đại học là 0,7. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh của tỉnh X đã tốt nghiệp trung học phổ thông trong kì thi trên. Biết rằng học sinh đã đỗ đại học. Tính xác suất để học sinh đó chọn tổ hợp A00.

Lời giải

Gọi A là biến cố: "học sinh chọn tổ hợp A00"; B là biến cố: "học sinh đó đỗ đại học".

$$P(A) = 0,8; P(\bar{A}) = 0,2; P(B|A) = 0,6; P(B|\bar{A}) = 0,7$$

Khi đó, ta có:

Xác suất học sinh đó đỗ đại học:

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = 0,8 \cdot 0,6 + 0,2 \cdot 0,7 = 0,62$$

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} = \frac{0,8 \cdot 0,6}{0,62} = \frac{24}{31}$$

Xác suất học sinh đỗ đại học chọn tổ hợp A00:

Câu 18. Giả sử một loại bệnh mà tỉ lệ người mắc bệnh là 0,1%. Giả sử có một loại xét nghiệm, mà ai mắc bệnh khi xét nghiệm cũng có phản ứng dương tính, nhưng tỉ lệ dương tính giả là 5% (tức là trong số những người không bị bệnh có 5% số người xét nghiệm lại có phản ứng dương tính). Tính xác suất khi một người xét nghiệm phản ứng dương tính thì khả năng mắc bệnh của người đó là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi A là biến cố: "người được chọn ra mắc bệnh"; B là biến cố: "người được chọn có phản ứng dương tính".

$$P(A) = 0,1\%; P(B|A) = 100\% = 1; P(B|\bar{A}) = 5\%$$

Khi đó ta có:

Xác suất chọn được một người dương tính

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = 0,1\% \cdot 1 + 99,9\% \cdot 5\% = 0,05095$$

Xác suất xét nghiệm được người có phản ứng dương tính thì mắc bệnh là

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} = \frac{0,1\% \cdot 1}{0,05095} = \frac{20}{1019}$$

Câu 19. Có hai hộp đựng các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Hộp thứ nhất có chứa 4 viên bi đỏ và 6 viên bi xanh, hộp thứ hai có 6 viên đỏ và 4 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai, sau đó lấy ra ngẫu nhiên một viên bi từ hộp thứ hai.

a) Tính xác suất: để viên bi được lấy ra từ hộp thứ hai là viên bi đỏ.

b) Giả sử viên bi lấy ra được từ hộp II có màu đỏ. Tính xác suất viên bi màu đỏ thuộc hộp I.

Lời giải

a) Gọi A là biến cố: "viên bi lấy ra từ hộp thứ hai có màu đỏ".

B là biến cố: "viên bi lấy ra từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai có màu đỏ".

$\bar{B}$ là biến cố: "viên bi lấy ra từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai có màu xanh".

$$P(B) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}; P(\bar{B}) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}; P(A|B) = \frac{7}{11}; P(A|\bar{B}) = \frac{6}{11}$$

Khi đó, ta có:

Xác suất hộp thứ hai lấy được bi đỏ:

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{11} + \frac{3}{5} \cdot \frac{6}{11} = \frac{32}{55}$$

b) Xác suất bi lấy được từ hộp II có màu đỏ thuộc hộp I

Gọi C là biến cố: "bi lấy được từ thuộc hộp I".

$$P(C) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}; P(A|C) = \frac{1}{2}$$

Khi đó ta có:

$$P(C|A) = \frac{P(C)P(A|C)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{32}{55}} = \frac{55}{128}$$

Xác suất bi lấy được có màu đỏ thuộc hộp I:

Câu 20. Một nhà máy sản xuất bóng đèn có tỉ lệ bóng đèn đạt tiêu chuẩn là 80%. Trước khi xuất xưởng ra thị trường mỗi bóng đèn đều được qua kiểm tra chất lượng. Vì sự kiểm tra không thể tuyệt đối hoàn hảo, nên một bóng đèn tốt có xác suất 0,9 được công nhận là tốt, và một bóng đèn hỏng có xác suất 0,95 bị loại bỏ. Hãy tính tỉ lệ bóng đèn đạt tiêu chuẩn sau khi qua khâu kiểm tra chất lượng sản phẩm.

Lời giải

Gọi E_1 : "bóng đèn tốt"; E_2 : "bóng đèn hỏng"; A : "Bóng đèn được đóng dấu đã kiểm tra".

Ta có $P(E_1) = 0,8; P(E_2) = 0,2; P(A|E_1) = 0,9$ và $P(A|E_2) = 0,05$

Thành thử

$$P(E_1|A) = \frac{P(E_1)P(A|E_1)}{P(E_1)P(A|E_1) + P(E_2)P(A|E_2)} = \frac{(0,8)(0,9)}{(0,8)(0,9) + (0,2)(0,05)} = 0,986$$

Câu 21. Có bốn nhóm xạ thủ tập bắn. Nhóm thứ nhất có 5 người, nhóm thứ hai có 7 người, nhóm thứ ba có 4 người và nhóm thứ tư có 2 người. Xác suất bắn trúng đích của mỗi người trong nhóm thứ nhất, nhóm thứ hai, nhóm thứ ba và nhóm thứ tư theo thứ tự là $0,8; 0,7; 0,6$ và $0,5$. Chọn ngẫu nhiên một xạ thủ và xạ thủ này bắn trượt. Hãy xác định xem xạ thủ này có khả năng ở trong nhóm nào nhất.

Lời giải

Gọi E_1 : "Xạ thủ thuộc nhóm 1"; E_2 : "Xạ thủ thuộc nhóm 2"; E_3 : "Xạ thủ thuộc nhóm 3"; E_4 : "Xạ thủ thuộc nhóm 4"; A : "Xạ thủ bắn trượt".

$$P(E_1) = \frac{5}{18}; P(E_2) = \frac{7}{18}; P(E_3) = \frac{4}{18}; P(E_4) = \frac{2}{18};$$

Theo đầu Câu ta có:

$$P(A|E_1) = 0,2; P(A|E_2) = 0,3; P(A|E_3) = 0,4 \text{ và } P(A|E_4) = 0,5$$

Áp dụng công thức Bayet, ta thu được:

$$P(E_1 | A) = \frac{\frac{5}{18}(0,2)}{\frac{5}{18}(0,2) + \frac{7}{18}(0,3) + \frac{4}{18}(0,4) + \frac{2}{18}(0,5)} = \frac{10}{57}$$

$$P(E_2 | A) = \frac{21}{57}, P(E_3 | A) = \frac{16}{57} \quad P(E_4 | A) = \frac{10}{57}$$

Tương tự và

Vậy xạ thủ có khả năng ở nhóm hai nhất.

Câu 22. Trong số bệnh nhân ở một bệnh viện có 50% điều trị bệnh A , 30% điều trị bệnh B và 20% điều trị bệnh C . Xác suất để chữa khỏi các bệnh A, B và C trong bệnh viện này tương ứng là 0,7; 0,8 và 0,9. Hãy tính tỉ lệ bệnh nhân được chữa khỏi bệnh A trong tổng số bệnh nhân đã được chữa khỏi bệnh.

Lời giải

Gọi A : "Bệnh nhân điều trị bệnh A "; B : "Bệnh nhân điều trị bệnh B "; C : "Bệnh nhân điều trị bệnh C "; H : "Bệnh nhân được chữa khỏi bệnh".

Theo Câu ra ta có: $P(A) = 0,5; P(B) = 0,3; P(C) = 0,2$;

$$P(H | A) = 0,7; P(H | B) = 0,8; P(H | C) = 0,9$$

$$P(A | H) = \frac{(0,5)(0,7)}{(0,5)(0,7) + (0,3)(0,8) + (0,2)(0,9)} = \frac{5}{11} \approx 0,4545$$

Từ đó theo công thức Bayet:

Câu 23. Trong một kho rượu số lượng rượu loại A và rượu loại B bằng nhau. Người ta chọn ngẫu nhiên một chai rượu trong kho và đưa cho 5 người sành rượu nếm thử để xác định xem đây là loại rượu nào. Giả sử mỗi người có xác suất đoán đúng là 75%. Có 4 người kết luận chai rượu loại A và 1 người kết luận chai rượu loại B . Hỏi khi đó xác suất để chai rượu được chọn thuộc loại A là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi A là biến cố: "Chai rượu thuộc loại A "; B là biến cố: "Chai rượu thuộc loại B " và H là biến cố: "Có 4 người kết luận rượu loại A , 1 người kết luận rượu loại B ".

Ta cần tính $P(A | H)$.

$$P(A | H) = \frac{P(A)P(H | A)}{P(A)P(H | A) + P(B)P(H | B)}$$

Áp dụng công thức Bayes:

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(H | A) = C_5^4 \left(\frac{3}{4}\right)^4 \frac{1}{4}, P(H | B) = C_5^4 \left(\frac{1}{4}\right)^4 \frac{3}{4}$$

$$P(A | H) = \frac{27}{28} \approx 0,9642$$

Thay vào ta thu được