

HƯỚNG DẪN HỌC SINH GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÌNH HỌC TRONG HÌNH TỌA ĐỘ KHÔNG GIAN

Phần 1 : ĐẶT VẤN ĐỀ

I . Lý do chọn đề tài :

Trong việc dạy học toán ta luôn coi mục đích chủ yếu của bài tập toán là hình thành và phát triển tư duy toán học , tạo cho học sinh vốn kiến thức và vận dụng kiến thức vào thực tiễn . Vì vậy việc xây dựng và hình thành cho học sinh phương pháp giải từng dạng toán là hết sức cần thiết .

Trong các đề thi tốt nghiệp trung học phổ thông hay thi tuyển sinh vào các trường Đại học , Cao đẳng ,Trung học chuyên nghiệp thường xuất hiện các bài toán về phương pháp tọa độ trong không gian . Có thể nói rằng toán về phương pháp tọa độ trong không gian rất đa dạng phong phú . Cực trị hình học trong phương pháp tọa độ trong không gian là một dạng toán khó đòi hỏi học sinh vừa phải biết tư duy hình học vừa phải biết kết hợp sử dụng phương pháp tọa độ trong không gian

Trong năm học 2012- 2013 được phân công giảng dạy lớp 12 trước khi dạy chương phương pháp tọa độ trong không gian bản thân tôi luôn trăn trở :

làm thế nào để khi học sinh đọc đề thi thấy xuất hiện câu cực trị hình học trong không gian nhưng học sinh không cảm thấy sợ .Với suy nghĩ như vậy tôi đã chuẩn bị một chuyên đề xem như một đề tài cải tiến phương pháp dạy học :

“ Hướng dẫn học sinh giải một số bài toán cực trị hình học trong hình tọa độ không gian “

II Phạm vi ứng dụng

Đề tài được áp dụng vào giảng dạy tại lớp 12B, 12E trường THPT Ba Đình năm học 2012- 2013

Phần 2 GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ :

A . Cơ sở lý luận:

Trong chương trình hình học 12 phương pháp tọa độ trong không gian tập trung chủ yếu vào các dạng toán xác định tọa độ điểm thỏa mãn điều kiện cho trước, lập phương trình đường thẳng ,mặt phẳng .vì vậy việc cung cấp nội dung phương pháp là hết sức cần thiết

B . Cơ sở thực tiễn :

Đối với học sinh : Khi chưa cải tiến phương pháp mỗi lớp chỉ được 10/45 em tập trung làm bài tập dạng này

Đối với giáo viên : Sách giáo khoa hầu như bỏ qua dạng bài tập này, một số tài liệu cũng có điểm qua nhưng không có tính chất hệ thống .

Bài toán 1 : TÌM TOẠ ĐỘ ĐIỂM THỎA MÃN HỆ THỨC.

Dạng1: Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (α) sao cho:

$$T = aMA^2 + bMB^2 + cMC^2 \quad (a, b, c \in R) \text{ lớn nhất (nhỏ nhất)}$$

Cách giải:

Gọi G là điểm thỏa mãn : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

T được biểu diễn:

$$\begin{aligned} T &= a(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + b(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + c(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 \\ &= (a+b+c)\overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG}(a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC}) + a.GA^2 + b.GB^2 + c.GC^2 \end{aligned}$$

+) Nếu $a + b + c > 0$ ta có $T_{\min} \Leftrightarrow MG_{\min} \Leftrightarrow M$ là hình chiếu của G lên (P)

+) Nếu $a + b + c < 0$ ta có $T_{\max} \Leftrightarrow MG_{\min} \Leftrightarrow M$ là hình chiếu của G lên (P)

Các ví dụ:

Ví dụ 1:

a, Trong không gian với hệ Oxyz cho mặt phẳng (α) : $x - y - 2z = 0$ và điểm A(1; 3; 1); B(3; 2; 2); C(1; 1; -1).

Tìm điểm $M \in (\alpha)$ sao cho $T = MA^2 + 2MB^2 + MC^2$ nhỏ nhất.

b, Trong không gian với hệ Oxyz cho (α) : $x - y + 2z = 0$ và các điểm A(1; 2; -1); B(3; 1; -2); C(1; -2; 1). Tìm $M \in (\alpha)$ sao cho $P = MA^2 - MB^2 - MC^2$ lớn nhất.

Lời giải:

a. Giả sử G thỏa mãn: $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow G(2; 1; 1)$

$$\begin{aligned} T &= MA^2 + 2MB^2 + MC^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 \\ &= 4MG^2 + GA^2 + 2GB^2 + GC^2 \end{aligned}$$

Vì G, A, B, C cố định nên T nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của G trên mặt phẳng (α) .

Gọi d là đường thẳng qua G và vuông góc với (α)

$$\Rightarrow d = \left\{ \begin{aligned} &\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + t\overrightarrow{u} \\ &\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + s\overrightarrow{v} \end{aligned} \right.$$

Tọa độ của M là nghiệm của hệ: $\left\{ \begin{aligned} &\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + t\overrightarrow{u} \\ &\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + s\overrightarrow{v} \end{aligned} \right.$

$$\Rightarrow M\left(\frac{5}{3}; \frac{7}{3}; \frac{1}{3}\right)$$

b. Gọi G là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow G(3; -3; 0)$

$$MA^2 - MB^2 - MC^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 - (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 - (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2$$

$$= -MG^2 + GA^2 - GB^2 - GC^2$$

Vì G, A, B, C cố định nên P lớn nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của G lên (P) $\Rightarrow M(2; -2; -2)$

Ví dụ 2:

Trong không gian với hệ Oxyz, cho ba điểm A(3; 1; 1); B(7; 3; 9); C(2; 2; 2) và mặt phẳng (P) có phương trình: $x + y - z + 3 = 0$. Tìm trên (P) điểm M sao cho $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất.

Lời giải:

Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow I\left(\frac{23}{6}; \frac{13}{6}; \frac{25}{6}\right) \notin (P)$

Ta có $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})$

$$= 6\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = 6\overrightarrow{MI}$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}| = 6MI$$

Do đó, $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất, suy ra M là hình chiếu của I trên (P).

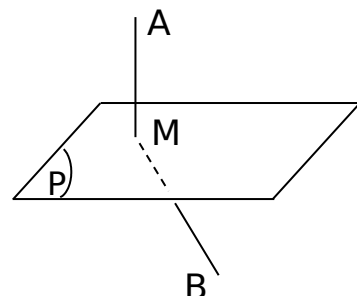
Dạng 2: Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho $(MA + MB)_{\min}$, $|MA - MB|_{\max}$

Cách giải

* Tìm $M \in (P)$ sao cho $MA + MB$ min

+ Nếu A, B khác phía đối với (P).

$MA + MB_{\min}$ khi M, A, B thẳng hàng $\Rightarrow M = AB \cap (P)$



+ Nếu A, B cùng phía đối với (P).

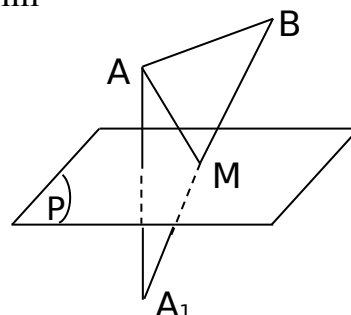
Gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua (P)

Có $MA + MB = MA_1 + MB$

Do A_1 và B khác phía đối với (P) nên $(MA + MB)_{\min}$

$\Leftrightarrow (MA_1 + MB)_{\min}$

khi và chỉ khi M, A_1 , B thẳng hàng $\Rightarrow M = A_1B \cap (P)$



* Tìm $M \in (P)$ sao cho $|MA - MB|_{\max}$

+ Nếu A, B khác phía đối với (P).

Gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua (P) , ta có:

$$|MA - MB| = |MA_1 - MB| \leq A_1B$$

$$\Rightarrow |MA - MB|_{\max} = A_1B$$

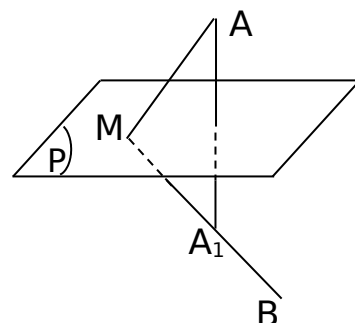
$$\Rightarrow M, A_1, B \text{ thẳng hàng} \Rightarrow M = A_1B \cap (P)$$

Từ đó tìm được tọa độ điểm M .

+ Nếu A, B cùng phía đối với (P)

$$|MA - MB| \leq AB \Rightarrow |MA - MB|_{\max} = AB$$

$$\Leftrightarrow M, A, B \text{ thẳng hàng} \Rightarrow M = AB \cap (P)$$



Ví dụ 1:

Cho $A(1; 1; 2); B(2; 1; -3)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 3z - 5 = 0$.

Tìm điểm M thuộc (P) sao cho $(MA + MB)$ nhỏ nhất.

Lời giải:

Xét vị trí tương đối của A, B đối với mặt phẳng (P) ta có:

$t_A \cdot t_B = (2 \cdot 1 + 1 - 3 \cdot 2 + 5) \cdot (2 \cdot 2 + 1 - 3 \cdot (-3) - 5) = -72 < 0$. Vậy A, B khác phía đối với (P) .

Đường thẳng AB qua $A(1; 1; 2)$ và nhận $\overrightarrow{AB}(1; 0; -5)$ làm véc tơ chỉ phương, suy ra AB có phương trình: $\begin{cases} x - 1 = t \\ y = 1 \\ z - 2 = -5t \end{cases}$

Gọi N là giao điểm của AB và (P) , suy ra tọa độ điểm N là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 1 = t \\ y = 1 \\ z - 2 = -5t \\ 2x + y - 3z - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{25}{17} \\ y = 1 \\ z = -\frac{6}{17} \end{cases}$$

Ta chứng minh $MA + MB$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $M \in N$

Thật vậy, lấy $M \in (P)$ ta có $MA + MB \geq AB = NA + NB$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $M \in N$. Vậy $M\left(\frac{25}{17}; 1; -\frac{6}{17}\right)$

Ví dụ 2:

Cho $A(-7; 4; 4); B(-6; 2; 3)$ và mặt phẳng $(P): 3x - y - 2z + 19 = 0$. Tìm điểm M thuộc (P) sao cho $AM + BM$ nhỏ nhất.

Lời giải:

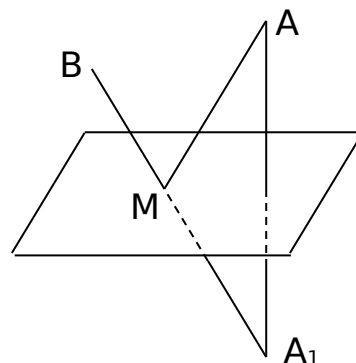
Xét vị trí tương đối của A, B đối với mặt phẳng (P) ta có: $t_A \cdot t_B = 98 > 0$

Suy ra A, B cùng phía đối với (P) .

Gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua (P)

$$MA + MB = MB + MA_1$$

$$\text{Mà } MB + MA_1 \geq BA_1$$



$\Rightarrow MB + MA_{\min} = BA_1 \Leftrightarrow B, M, A_1$ thẳng hàng.

Hay $M = BA_1 \cap (P)$

Lập phương trình đường thẳng BA_1 , giải hệ tìm được tọa độ điểm $M\left(-\frac{13}{8}; 2; 2\right)$

Ví dụ 3: Trong không gian Oxyz, cho $A(1; 2; 3); B(4; 4; 5)$. Viết phương trình đường thẳng AB, tìm giao điểm P của đường thẳng AB và (Oxy).

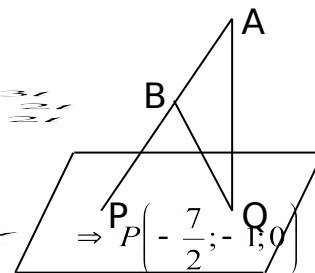
Chứng minh rằng: Với mọi $Q \in (Oxy)$ biểu thức $|QA - QB|$ có giá trị lớn nhất khi $Q \equiv P$.

Lời giải:

Phương trình đường thẳng AB: $\left\{ \begin{array}{l} x - 3y + 2z = -5 \\ x - 2y + z = -2 \end{array} \right.$

Giao điểm của đường thẳng AB với (Oxy)

là nghiệm của hệ: $\left\{ \begin{array}{l} x - 3y + 2z = -5 \\ x - 2y + z = -2 \end{array} \right.$



$$\Rightarrow P\left(-\frac{7}{2}; -1; 0\right)$$

$\forall Q \in (Oxy)$ biểu thức $|QA - QB|$ có giá trị lớn nhất khi $Q \equiv P$. Thật vậy, ta có $t_A, t_B = 4 > 0$, suy ra A, B cùng phía đối với (Oxy). Với ba điểm Q, A, B ta có: $|QA - QB| \leq AB$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi A, Q, B thẳng hàng

$$\Rightarrow Q = AB \cap (P) \Rightarrow Q \equiv P$$

Ví dụ:

Trong không gian Oxyz cho $A(-3; 5; -5); B(5; -3; 7)$ và mặt phẳng (P):

$x + y + z = 0$. Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất.

Lời giải:

Gọi H là trung điểm của AB, suy ra H có tọa độ là $H(1; 1; 1)$.

Tam giác MAB có trung tuyến MH nên $MA^2 + MB^2 = 2MH^2 + \frac{AB^2}{2}$

Do đó $MA^2 + MB^2 \min \Leftrightarrow MH^2 \min \Leftrightarrow MH \min$

$\Leftrightarrow MH \perp (P) \Leftrightarrow M$ là hình chiếu của H trên (P)

$P(P)$ có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}(1; 1; 1)$ và $O \in (P)$

Mà $\overrightarrow{OH} = (1; 1; 1) \Rightarrow M \equiv O$

Vậy $M(0; 0; 0)$ thì $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất, khi đó $MA^2 + MB^2 = OA^2 + OB^2 = 142$

Bài tập áp dụng:

1. Trong không gian với hệ Oxyz cho tam giác ABC với $A(1; 2; 5);$

$B(1; 4; 3); C(5; 2; 1)$ và mặt phẳng (P): $x - y - z - 3 = 0$. Gọi M là điểm thay đổi trên (P). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA^2 + MB^2 + MC^2$

2. Trong không gian Oxyz cho $A(1; 2; 3); B(3; 4; -1)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $2x + y + 2z + 9 = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho :

$$MA^2 + MB^2 \text{ nhỏ nhất.}$$

3. Trong không gian Oxyz cho $A(-1; 3; -2); (0; 1; 0); C(1; 0; -2)$. Tìm điểm M trên mp(P): $x + y + z + 1 = 0$ sao cho tổng $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ có giá trị nhỏ nhất.

4. Trong không gian Oxyz cho $A(-1; 3; -2); B(-3; 7; -18)$ và mp(P):

$$2x - y + z + 1 = 0. \text{ Tìm điểm M thuộc (P) sao cho } MA + MB \text{ nhỏ nhất.}$$

5. Cho $A(1; 2; 2); B(5; 4; 4)$ và mp(P): $2x + y - z + 6 = 0$. Tìm điểm M thuộc (P) sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất.

Dạng 3:

Trong không gian với hệ Oxyz cho hai điểm A, B và đường thẳng (d). Tìm điểm M trên (d) sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất, $|MA - MB|$ lớn nhất

Cách giải:

Tìm điểm M trên (d) sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất

Bước 1: Tìm tọa độ các điểm A_1, B_1 theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A, B lên (d).

Bước 2: Tính các độ dài AA_1, BB_1 từ đó tìm được điểm $N \in d$ chia véc tơ $\overrightarrow{A_1B_1}$ theo tỷ số $-\frac{AA_1}{BB_1}$ (Gọi N là điểm chia $\overrightarrow{A_1B_1}$ theo tỷ số $-\frac{AA_1}{BB_1}$)

$$\overrightarrow{NA_1} = -\frac{AA_1}{BB_1} \cdot \overrightarrow{NB_1}$$

Bước 3: Chứng minh $(MA + MB)$ min

khi và chỉ khi M trùng với N

Thật vậy: Gọi A_2 là điểm thuộc mặt phẳng (B; (d)),

A_2, B khác phía đối với (d) và thỏa mãn:

$$\begin{cases} \overline{AA_1} = \overline{A_1A_2} \\ \overline{A_1A_1} \perp d \Rightarrow \overline{BB_1} = \overline{B_1A_2} \Rightarrow \overline{NA_1} = -\frac{\overline{AA_1}}{\overline{BB_1}} \cdot \overline{NB_1} \end{cases}$$

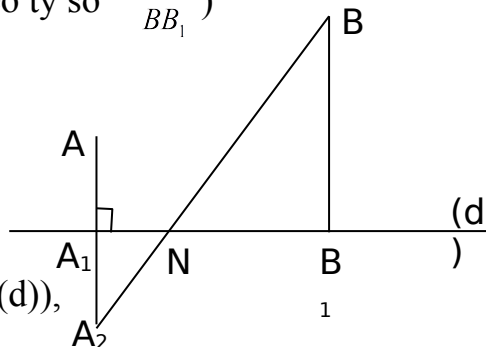
$$\Rightarrow NA_1 = \frac{A_1A_2}{BB_1} \cdot NB_1 \Rightarrow \frac{NA_1}{NB_1} = \frac{A_1A_2}{BB_1} \Rightarrow A_2, N, B \text{ thẳng hàng.}$$

$$\Rightarrow MA + MB = MA_2 + MB \geq A_2B = NA + NB$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv N$

Ví dụ: Cho $A(1; 1; 0); B(3; -1; 4)$ và đường thẳng (d): $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{2}$

Tìm điểm M trên (d) sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất.



Lời giải:

Đường thẳng (d) có phương trình tham số là: $x = -1 + t$; $y = 1 - t$;
 $z = -2 + 2t$, $\vec{a} = (1; -1; 2)$

+, Gọi A_1 là hình chiếu vuông góc của A lên d, suy ra A_1 thuộc d
 $\Rightarrow A_1 \in (d) \Rightarrow A_1(-1 + t; 1 - t; -2 + 2t)$

Vì $\overrightarrow{AA_1} \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{AA_1} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow (t - 2) - (-t) + (2t - 2) = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Vậy $A_1(0; 0; 0)$ và $\overrightarrow{AA_1} = (-1; -1; 0) \Rightarrow AA_1 = \sqrt{2}$

+, Gọi B_1 là hình chiếu vuông góc của B lên d

$\Rightarrow B \in d \Rightarrow B_1(-1 + t; 1 - t; -2 + 2t) \Rightarrow BB_1(t - 4; -t + 2; 2t - 6)$

Vì $\overrightarrow{BB_1} \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{BB_1} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{BB_1} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow (t - 4) \cdot 1 - (-t + 2) \cdot 1 + 2(2t - 6) = 0 \Leftrightarrow t = 3$
 $\Rightarrow BB_1 = \sqrt{2}$

Vậy, điểm $N \in d$ chia véc tơ $\overrightarrow{A_1B_1}$ theo tỉ số $\frac{AA_1}{BB_1} = -1$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{NA_1} = -\overrightarrow{NB_1} \Rightarrow N(1; -1; 2)$

+, Ta chứng minh $(MA + MB)_{\min} \Leftrightarrow M \equiv N$

Thật vậy, gọi A_2 là điểm thuộc mặt phẳng

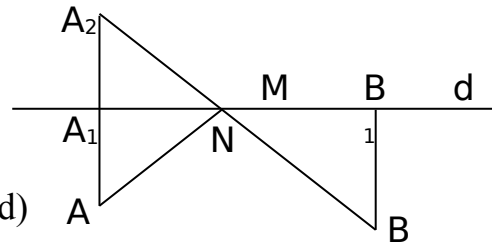
xác định bởi B và d (A_2 và B khác phía đối với d)

thỏa mãn $AA_1 = A_2A_1$; $A_1A_2 \perp d$

$\Rightarrow \frac{AA_1}{BB_1} = \frac{A_1A_2}{BB_1} \Rightarrow \overrightarrow{NA_1} = \frac{A_1A_2}{BB_1} \cdot \overrightarrow{NB_1} \Rightarrow A_2, N, B$ thẳng hàng

Vậy $MA + MB = MA_2 + MB \geq A_2B = MA + MB$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv N \Rightarrow M(1; -1; 2)$



Ví dụ:

Trong hệ Oxyz cho các điểm $A(1; 5; 0)$; $B(3; 3; 6)$ và đường thẳng

$$\Delta = \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = 5 - t \\ z = 2t \end{array} \right.$$

Một điểm M bất kỳ trên Δ . Xác định vị trí của M để chu vi tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải:

$$2P_{ABM} = AB + MA + MB \Rightarrow 2P_{\min} \Leftrightarrow MA + MB_{\min}$$

Δ có véc tơ chỉ phương: $\vec{u} = (2; -1; 2)$

+, A_1 là hình chiếu của A trên $\Delta \Rightarrow A_1(-1 + 2t; 1 - t; 2t)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AA_1} = (2t - 2; -t - 4; 2t)$

$AA_1 \perp \Delta \Rightarrow \overrightarrow{AA_1} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AA_1} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 2(2t - 2) - 1(-t - 4) + 4t = 0$

$$\Leftrightarrow 9t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow A_1(-1; 1; 0) \Rightarrow \overrightarrow{AA_1} = (-2; -4; 0) \Rightarrow AA_1 = 2\sqrt{5}$$

+, B_1 là hình chiếu của B trên $\Delta \Rightarrow B_1(-1 + 2t_1; 1 - t_1; 2t_1)$

$$\overrightarrow{BB_1} = (2t_1 - 4; -t_1 - 2; 2t_1 - 6)$$

$BB_1 \perp \Delta$ nên $\overrightarrow{BB_1} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{BB_1} \cdot \vec{u} = 0$

$$\Leftrightarrow (2t_1 - 4)2 + (-t_1 - 2)(-1) + (2t_1 - 6)2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9t_1 = 18 \Leftrightarrow t_1 = 2 \Rightarrow B_1(3; -1; 4) \Rightarrow \overrightarrow{BB_1} = (0; -4; -2) \Rightarrow BB_1 = 2\sqrt{5} \Rightarrow \frac{AA_1}{BB_1} = 1$$

+, Gọi N là điểm chia $\overrightarrow{A_1B_1}$ theo tỉ số $-\frac{AA_1}{BB_1} = -1$ (N nằm giữa A_1 và B_1)

$$\Rightarrow \overrightarrow{NA_1} = -\overrightarrow{NB_1} \Rightarrow N(1; 0; 2) \text{ (N là trung điểm của } A_1B_1)$$

+, Ta chứng minh $MA + MB \text{ min} \Leftrightarrow M \equiv N$

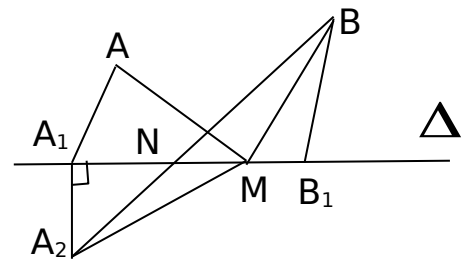
Thật vậy, gọi A_2 là điểm thuộc mặt phẳng xác định bởi $(B; (\Delta))$, A_2 và B khác phía đối với Δ và thỏa mãn $\begin{cases} A_1A_2 \parallel \vec{u} \\ A_1A_2 \perp \Delta \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{AA_1}{BB_1} = \frac{A_1A_2}{BB_1} \Rightarrow \overrightarrow{NA_1} = -\frac{A_1A_2}{BB_1} \cdot \overrightarrow{NB_1}$$

$\Rightarrow A_2, N, B$ thẳng hàng.

Vậy $MA + MB + MA_2 + MB \geq A_2B = NA + NB$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv N \Rightarrow M(1; 0; 2)$



Ví dụ:

Trong không gian với hệ Oxyz cho $A(2; 0; 3); B(2; -2; -3)$

$\Delta: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$. Chứng minh A, B và (Δ) cùng nằm trong một mặt phẳng. Tìm điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho $MA^4 + MB^4$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải:

Phương trình đường thẳng AB: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2t \\ z = 3t \end{cases}$

Phương trình $\Delta = \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2t \\ z = 3t \end{cases}$

Gọi I là giao điểm của AB và Δ ta có: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2t \\ z = 3t \end{cases} = \begin{cases} x = 2 + t' \\ y = -2t' \\ z = 3t' \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t' = 0 \end{cases} \Rightarrow I(2; -1; 0)$$

Vậy AB và (Δ) cắt nhau tại I nên A, B và Δ đồng phẳng.

$$\text{C\acute{o: } } \overrightarrow{IA} = (0; -1; -3); \overrightarrow{IB} = (0; -1; -3)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB} \Rightarrow I \text{ là trung điểm của AB, } IA + IB = AB$$

$$\text{Khi \acute{đ\o} } MA^4 + MB^4 \geq \frac{1}{2}(MA^2 + MB^2)^2 \geq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(MA + MB)^2 \right]^2 \geq \frac{1}{8} AB^4 = \frac{1}{8} (IA + IB)^4$$

Suy ra $MA^4 + MB^4$ nhỏ nhất khi $M \equiv I(2; -1; 0)$

Bài toán 2: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG .

Dạng 1 : Cho hai điểm phân biệt A và B. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa B và cách A một khoảng lớn nhất.

Cách giải:

Gọi H là hình chiếu của A lên (P),

khi đó tam giác ABH vuông tại H

$$d(A; (P)) = AH \leq AB \Rightarrow d(A; (P))_{\max} = AB \Leftrightarrow H \equiv B$$

Khi đó (P) là mặt phẳng đi qua B và vuông góc với AB.

Ví dụ 1: Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm B(1; 2; -1) và cách gốc toạ độ một khoảng lớn nhất.

Lời giải:

Gọi H là hình chiếu của A trên mp(P) cần tìm, khi đó $OH \leq OB$

$$d(O; (P)) = OH \leq OB \Rightarrow d(O; (P))_{\max} = OB$$

Vậy mp(P) đi qua B(1; 2; -1) và nhận $\overrightarrow{OB} = (1; 2; -1)$ làm véc tơ pháp tuyến.

Vậy mp(P) có phương trình: $1(x - 1) + 2(y - 2) - 1(z + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow x + 2y - z - 6 = 0$$

Dạng 2: Cho điểm A và đường thẳng Δ không đi qua A. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa Δ sao cho khoảng cách từ A đến mp(P) là lớn nhất.

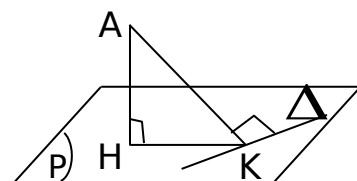
Cách giải:

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên mp(P),

K là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng Δ

$$d(A; (P)) = AH \leq AK \Rightarrow d(A; (P))_{\max} = AK \Leftrightarrow H \equiv K$$

Vậy mp(P) cần tìm là mặt phẳng chứa Δ và vuông góc với AK. Hay (P) chứa Δ và vuông góc với mp(AK; Δ)



Ví dụ:

Cho ba điểm A(1; 1; 1); B(2; 1; 0); C(2; 0; 2). Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm B, C và cách điểm A một khoảng lớn nhất.

Lời giải: Mặt phẳng cần tìm chứa BC và vuông góc với mp(ABC). Ta có

$$\overrightarrow{BC} = (0; -1; 2), \overrightarrow{AB} = (1; 0; -1). \text{ Toạ độ véc tơ pháp tuyến của mp(ABC) là}$$

$$\vec{n}_{(ABC)} = [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB}] = (1; 2; 1). \text{ Suy ra mp}(\alpha) \text{ có một véc tơ pháp tuyến là}$$

$$\vec{n}_\alpha = [\overrightarrow{BC}, \vec{n}_{(ABC)}] = (-5; 2; 1).$$

Vậy phương trình mặt phẳng (α) là $-5(x - 2) + 2(y - 1) + z = 0$

hay $-5x + 2y + z + 8 = 0$.

Dạng 3 : Cho đường thẳng d và điểm A không thuộc d . Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A , song song với d và khoảng cách từ d tới (P) lớn nhất.

Cách giải :

Bước 1 : Gọi I là hình chiếu vuông góc của A trên d . Tìm được tọa độ điểm I .

Bước 2 : Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên (P) . Ta có $IH \leq IA$ Suy ra $IH_{\max} = IA$ khi và chỉ khi $H \equiv A$. Vậy (P) đi qua A và nhận $\overrightarrow{AI}$ làm vec tơ pháp tuyến.

Bước 3 : Viết phương trình mặt phẳng (P) .

Ví dụ : Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(10;2;-1)$ và đường thẳng d có phương trình : $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{3}$. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua A , song song với d và khoảng cách từ d tới (P) lớn nhất.

Lời giải: Áp dụng phương pháp giải trên ta tìm được phương trình mặt phẳng (P) là : $7x + y - 5z - 77 = 0$.

Dạng 4: Cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 phân biệt và không song song với nhau. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa Δ_1 và tạo với Δ_2 một góc lớn nhất.

Lời giải: Vẽ một đường thẳng bất kỳ Δ_3 song song với Δ_2 và cắt Δ_1 tại K . Gọi A là điểm cố định trên Δ_3 và H là hình chiếu của A trên $mp(\alpha)$. Ta có góc giữa Δ_2 và (α) chính là góc AKH . Kẻ $AT \perp \Delta_1, (T \in \Delta_1)$

Khi đó tam giác HKT vuông tại T , nên $\cos AKH = \frac{HK}{AK} \geq \frac{KT}{AK}$ (không đổi)

Vậy góc AKH lớn nhất khi và chỉ khi $HK = KT$ hay $H \equiv T$.

Góc lớn nhất đó chính bằng góc $AKT = (\Delta_1, \Delta_2)$.

Khi đó mặt phẳng (α) cần tìm có vec tơ chỉ phương là $[\vec{u}_{\Delta_1}, \vec{u}_{\Delta_2}]$

Do đó vec tơ pháp tuyến của $mp(\alpha)$ là $\vec{n}_\alpha = [\vec{u}_{\Delta_1}, [\vec{u}_{\Delta_1}, \vec{u}_{\Delta_2}]]$

Ví dụ: Cho hai đường thẳng $\Delta_1 : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1}$; $\Delta_2 : \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa Δ_1 và tạo với Δ_2 một góc lớn nhất.

Lời giải: Ta thấy hai đường thẳng trên phân biệt và không song song với nhau. Theo kết quả bài toán trên thì do $\vec{u}_{\Delta_1} = (1;1;2)$, $\vec{u}_{\Delta_2} = (1;1;1)$, suy ra $[\vec{u}_{\Delta_1}, \vec{u}_{\Delta_2}] = (-1;1;0)$

Do đó vec tơ pháp tuyến của $mp(\alpha)$ là $\vec{n}_\alpha = [\vec{u}_{\Delta_1}, [\vec{u}_{\Delta_1}, \vec{u}_{\Delta_2}]] = (-2;-2;2)$

Vậy phương trình $mp(\alpha)$ là $-2x - 2(y - 1) + 2z = 0$ hay $x + y - z - 1 = 0$.

Dạng 5 : Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng (d) và tạo với mặt phẳng (Q) một góc nhỏ nhất.

Cách giải:

Bước 1: Gọi $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc (d); mặt phẳng (P) chứa (d) nên điểm M thuộc (P)

Phương trình mp(P): $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ ($A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$)

Bước 2: mp(P) có véc tơ pháp tuyến: $\vec{n}_P = (A; B; C)$

(Q) có véc tơ pháp tuyến: $\vec{n}_Q = (A'; B'; C')$

Gọi α là góc giữa (P) và (Q). Ta có $\cos \alpha = \frac{|AA' + BB' + CC'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$

Bước 3: (P) chứa (d) nên $\vec{n}_P \cdot \vec{u}_d = 0$ biểu thị sự liên quan giữa A, B, C. Tìm giá trị lớn nhất của $\cos \alpha$.

Ví dụ: Viết phương trình mp(P) chứa đường thẳng (d): $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$ và tạo với mp(Q): $2x - y - 2z - 2 = 0$ một góc nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Áp dụng kết quả bài toán trên tìm được } \cos \alpha = \frac{|3B|}{3\sqrt{5B^2 + 4BC + 2C^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{C}{B} + 1\right)^2 + 3}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ Suy ra } \cos \alpha \text{ lớn nhất bằng } \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{C}{B} = -1 \Leftrightarrow C = -B$$

Vậy mp(P) có phương trình $x + y - z + 3 = 0$.

Bài tập áp dụng:

1. Trong không gian với hệ Oxyz cho điểm A(2; 5; 3), đường thẳng d: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$. Viết phương trình mp(P) chứa (d) sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất.

2. Cho $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-1}$ và $d_2: \frac{x}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-1}$.

Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 đồng thời tạo với d_2 một góc nhỏ nhất.

3. Trong không gian với hệ Oxyz cho d: $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}$. Viết phương trình mp(P) chứa d và tạo với mp(Oxy) một góc nhỏ nhất.

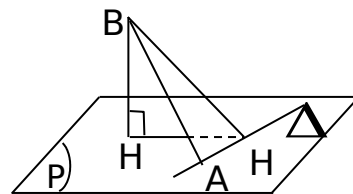
Bài toán 3 : VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG.

Dạng 1: Cho mặt phẳng (α) và điểm A thuộc (α), điểm B khác A. Tìm đường thẳng Δ nằm trong (α) đi qua A và cách B một khoảng nhỏ nhất.

Cách giải: Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên Δ , ta thấy $d(B; \Delta) = BH \leq AB$

Vậy khoảng cách đó lớn nhất khi và chỉ khi $H \equiv A$.

Khi đó Δ là đường thẳng qua A có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_\Delta = [\vec{n}_\alpha, \vec{AB}]$. Gọi T là hình chiếu của B trên (α) , ta thấy $BH \geq BT$.



Vậy khoảng cách BH nhỏ nhất bằng BT khi và chỉ khi $H \equiv T$ hay đường thẳng Δ đi qua A và T.

để viết phương trình đường thẳng Δ ta có hai cách :

+, Tìm hình chiếu vuông góc T của B trên Δ , từ đó viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A và T.

+, Tìm tọa độ một véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ : $\vec{u}_\Delta = [\vec{n}_\alpha, [\vec{n}_\alpha, \vec{AB}]]$

Ví dụ: Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A(1;1;1) vuông góc với đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$ và cách điểm B(2;0;1) một khoảng lớn nhất.

Lời giải: Gọi (α) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với d .

Khi đó đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (α) đi qua A và cách B một khoảng lớn nhất.

Theo bài toán trên, ta có $\vec{AB} = (1; -1; 0)$, $\vec{n}_\alpha = (1; 1; 2)$, $\vec{u}_\Delta = [\vec{n}_\alpha, \vec{AB}] = (2; 2; -2)$

Vậy phương trình đường thẳng Δ là $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$

Dạng 2: Cho mặt phẳng (α) và điểm A thuộc (α) , đường thẳng d không song song hay nằm trên (α) . Tìm đường thẳng Δ nằm trong (α) đi qua A và tạo với đường thẳng d góc bé nhất, lớn nhất.

Cách giải: Vẽ đường thẳng qua A song song với d. Trên đường thẳng này lấy điểm B khác A cố định. Hình chiếu vuông góc của B trên Δ và (α) theo thứ tự là H và K.

Ta có: $\widehat{(d, \Delta)} = \widehat{BAH}$; $\sin(\widehat{(d, \Delta)}) = \frac{BH}{AB} \geq \frac{BK}{AB}$

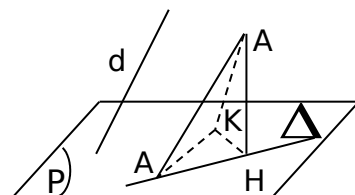
Vậy $\widehat{(d, \Delta)}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $H \equiv K$,

hay Δ chính là đường thẳng AK.

Ta thấy một véc tơ chỉ phương của Δ là $\vec{u}_\Delta = [\vec{n}_\alpha, [\vec{n}_\alpha, \vec{u}_d]]$,

còn đường thẳng Δ tạo với d góc lớn nhất bằng 90°

và có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_\Delta = [\vec{n}_\alpha, \vec{u}_d]$.



Dạng 3 : Cho mặt phẳng (α) và điểm A thuộc (α) , đường thẳng d không song song với (α) , không nằm trên (α) , không đi qua A. Tìm đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (α) đi qua A sao cho khoảng cách giữa Δ và đường thẳng d là lớn nhất.

Cách giải:

Gọi d' là đường thẳng qua A và song song với d và B là giao điểm của d với mp (α) .

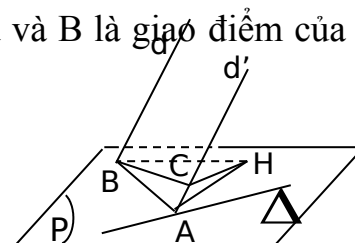
Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên

mặt phẳng (d', Δ) . Khoảng cách giữa d và Δ bằng BH.

Gọi C là hình chiếu vuông góc của B trên d'.

Ta thấy $BH \leq BC$, nên BH lớn nhất khi và chỉ khi $H \equiv C$.

Khi đó đường thẳng Δ có một véc tơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta = [\vec{n}_\alpha, \vec{BC}]$. Có thể thay véc tơ $\vec{BC}$ bằng $\vec{AT}$, trong đó T là hình chiếu vuông góc của A trên d.



Bài tập áp dụng:

1. Trong không gian với hệ Oxyz viết phương trình đường thẳng d_1 qua $A(1; 1; 2)$ và vuông góc với $d_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{2}$ đồng thời tạo với trục Oz góc α nhỏ nhất.

2. Trong không gian với hệ Oxyz, cho $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}$ và hai điểm $A(1; 1; 0); B(2; 1; 1)$. Viết phương trình đường thẳng d_2 đi qua A và vuông góc với d_1 sao cho khoảng cách từ điểm B đến đường thẳng d_2 lớn nhất.

Phần 3 : KẾT QUẢ ĐẠT ĐƯỢC VÀ BÀI HỌC KINH NGHIỆM

1 Kết quả :

Khi chưa thực hiện đề tài này tôi cảm thấy học sinh hay vướng mắc khi giải các bài toán về cực trị hình học trong không gian .Sau khi nghiên cứu và thực hiện giảng dạy theo đề tài này đã gây được hứng thú học tập cho học sinh và giúp học sinh giải nhiều bài khó .đây là dạng toán thường xuất hiện trong các đề thi đại học ,cao đẳng và trung học chuyên nghiệp .Giải quyết được dạng bài tập này giúp học sinh rèn luyện khả năng tư duy cho học sinh ,phát huy tính tích cực sáng tạo trong học toán và hơn nữa giúp học sinh hệ thống kiến thức và phương pháp giải để học sinh tự tin hơn khi bước vào các kỳ thi

Thực tế khi thực hiện đề tài này chất lượng học sinh được nâng lên rõ rệt

Lớp	Số HS	Điểm 8-10		Điểm 6.5 đến dưới 8		Điểm 5 đến 6.5		Điểm 2 đến dưới 5		Điểm dưới 2	
12 B	45	6	13.3	13	28.9	22	48.9	4	9.8	0	0
12E	45	8	17.8	15	33.3	19	42.2	3	6.7	0	0

2 . Bài học kinh nghiệm :

Việc lựa chọn phương pháp , hệ thống kiến thức và rèn cho học sinh khả năng tư duy là hết sức cần thiết .

Trong thực tế nhiều học sinh tiếp thu phương pháp rất nhanh nhưng việc trình bày chưa chặt chẽ vì vậy giáo viên cần sửa cho học sinh một cách tỉ mỉ .

Trên đây là một số kinh nghiệm được rút ra từ thực tế giảng dạy môn toán lớp 12 năm học 2012-2013 .Trong khuôn khổ có hạn của đề tài không tránh khỏi những thiếu sót , rất mong các cấp lãnh đạo các bạn đồng nghiệp trao đổi góp ý để đề tài được đầy đủ hơn, góp phần vào việc nâng cao chất lượng giảng dạy bộ môn toán ở trường THPT nói chung ,trường THPT Ba Đình nói riêng .

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ	<i>Thanh Hóa, ngày 10 tháng 5 năm 2013</i> Tôi xin cam đoan đây là SKKN của mình viết, không sao chép nội dung của người khác. Mai Thị Mơ
--------------------------------	--