Số 02 - Năm 2009

Tạp chí Toán Học dành cho Học sinh - Sinh viên Việt Nam

Mục lục

Câu chuyện Toán học

Giả Thuyết Riemann

Dựa theo J. Brian Conrey, American Institute of Mathematics

Phan Thành Nam, Khoa Toán - Đại học Copenhagen, Đan Mạch

Lời giới thiệu. Bài viết này của J. Brian Conrey, Director of the American Institute of Mathematics, đăng trên Notices of the AMS (Match 2003). Bài báo vừa được nhận giải thưởng 2008 AMS Levi L. Conant cho các bài viết hay nhất trên các tờ Notices of the AMS và Bulletin of the AMS (`http://www.ams.org/ams/press/conant-conrey-2008.html`). Bài viết cho một cái nhìn tổng quan về giả thuyết Riemann, từ lịch sử bài toán đến những bước tiến gần đây. Chúng tôi xin lược trích nửa đầu của bài báo, và bạn đọc quan tâm được khuyến khích đọc nguyên bản bài báo này tại địa chỉ `http://www.ams.org/notices/200303/fea-conrey-web.pdf`.

Hilbert, tại đại hội Toán học Thế giới năm 1990 ở Paris, đã đưa Giả Thuyết Riemann vào danh sách 23 bài toán dành cho những nhà Toán học của thế kỷ 20. Bây giờ thì nó đang tiếp tục thách thức những nhà Toán học ở thế kỷ 21. Giả thuyết Riemann (RH−Riemann Hypothesis) đã tồn tại hơn 140 năm, và hiện tại cũng chưa hẳn là thời kỳ hấp dẫn nhất trong lịch sử bài toán. Tuy nhiên những năm gần đây đã chứng kiến một sự bùng nổ trong nghiên cứu bắt nguồn từ sự kết hợp giữa một số lĩnh vực trong Toán học và Vật lý.

Trong 6 năm qua, Viện Toán học Mỹ (AIM−American Institute of Mathematics) đã tài trợ cho 3 đề án tập trung vào RH. Nơi đầu tiên (RHI) là ở Seattle vào tháng 8 năm 1996 tại đại học Washington (University of Washington). Nơi thứ hai (RHII) là ở Vienna vào tháng 10 năm 1998 tại Viện Schrödinger (Erwin Schrödinger Institute), và nơi thứ ba (RHIII) là ở New York vào tháng 5 năm 2002 tại Viện Toán Courant (Courant Institute of Mathematical Sciences). Mục tiêu của 3 đề án này là để khích lệ nghiên cứu và thảo luận về một trong những thách thức lớn nhất của Toán học và để xem xét những hướng tiếp cận khác nhau. Liệu chúng ta có tiến gần hơn tới lời giải cho Giả thuyết Riemann sau các nỗ lực đó? Liệu có phải chúng ta đã học được nhiều điều về hàm zeta (zeta-function) từ các đề án đó? Điều đó là chắc chắn! Một số thành viên trong các đề án này đang tiếp tục cộng tác với nhau trên trang web (`http://www.aimath.org/WWN/rh/`), nơi cung cấp một cái nhìn tổng quan cho chủ đề này.

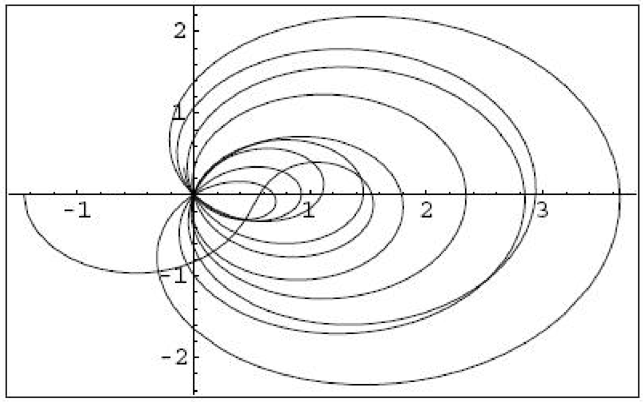
Ở đây tôi hi vọng phác thảo một số hướng tiếp cận tới RH và kể những điều thú vị khi làm việc trong lĩnh vực này tại thời điểm hiện tại. Tôi bắt đầu với bản thân Giả thuyết Riemann. Năm 1859 trong một báo cáo seminar "Ueber die Anzahl der Primzahlen unter eine gegebener Grösse", G. B. F. Riemann đã chỉ ra một số tính chất giải tích căn bản của hàm zeta

$$\zeta(s) := 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Chuỗi này hội tụ nếu phần thực của s lớn hơn 1. Riemann chứng minh rằng $\zeta(s)$ có thể mở rộng bởi sự liên tục thành một hàm giải tích trên cả mặt phẳng phức ngoại trừ tại điểm $s = 1$ (simple pole). Hơn nữa ông chứng minh rằng $\zeta(s)$ thỏa mãn một phương trình hàm thú vị mà dạng đối xứng của nó là

$$\xi(s) := s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \xi(1-s)$$

trong đó $\Gamma(s)$ là hàm Gamma (Gamma-function).



Hình 1: $\zeta(\frac{1}{2} + it)$ với $0 < t < 50$

Thật ra hàm zeta đã được nghiên cứu trước đó bởi Euler và một số người khác, nhưng chỉ như một hàm với biến số thực. Nói riêng, Euler chỉ ra rằng

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{8^s} + ...\right).\left(1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + ...\right).\left(1 + \frac{1}{5^s} + ...\right) \\ &= \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \end{aligned}$$

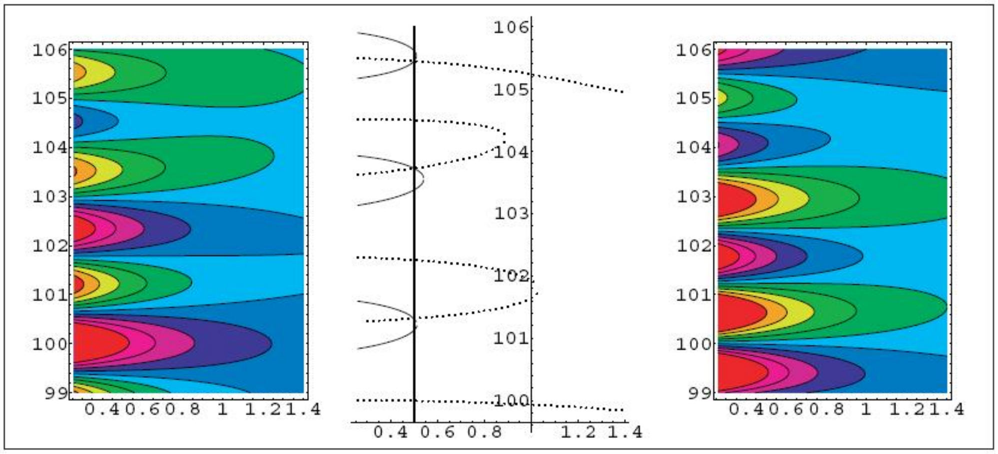
trong đó tích vô hạn (gọi là tích Euler) lấy trên tất cả các số nguyên tố. Tích này hội tụ khi phần thực của s lớn hơn 1. Đây là một phiên bản giải tích cho định lý cơ bản của số học, rằng mỗi số nguyên có thể phân tích một cách duy nhất thành các thừa số nguyên tố. Euler đã dùng tích này để chứng minh rằng tổng nghịch đảo của các số nguyên tố là không bị chặn. Chính tích Euler đã thu hút sự quan tâm của Riemann tới hàm zeta: khi đó ông đang cố gắng chứng minh một giả thuyết của Legendre, và trong một dạng chính xác hơn phát biểu bởi Gauss:

$$\pi(x) := (\text{số các số nguyên tố nhỏ hơn } x) \sim \int_2^x \frac{dt}{\log(t)}.$$

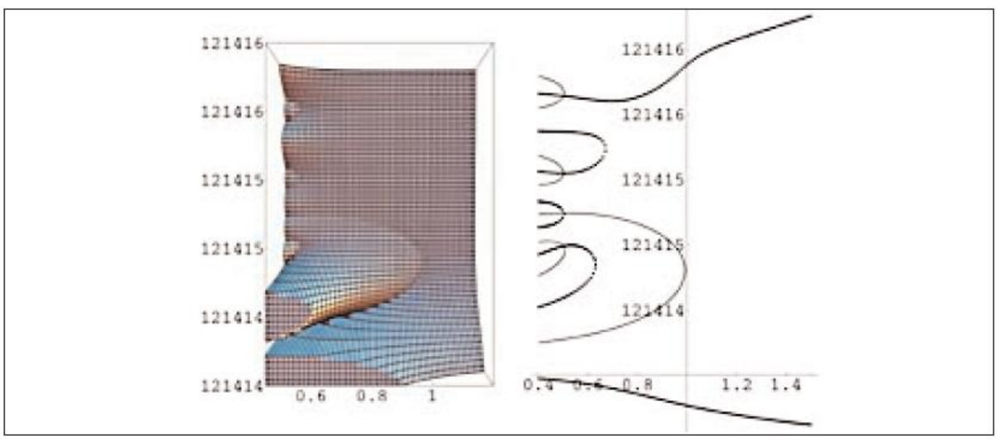
Riemann đã tạo ra một bước tiến lớn tới giả thuyết của Gauss. Ông nhận ra rằng số phân bố các số nguyên tố phụ thuộc vào sự phân bố các không điểm của hàm zeta. Tích Euler chứng tỏ không có không điểm nào của $\zeta(s)$ có phần thực lớn hơn 1; và phương trình hàm chỉ ra không có không điểm nào có phần thực nhỏ hơn 0 [Người dịch: do sự đối xứng] ngoài các không điểm tầm thường tại $s = -2, -4, -6, ...$ Do đó mọi không điểm phức phải nằm trong dải $0 \leq Re(z) \leq 1$. Riemann đưa ra một công thức tường minh cho $\pi(x)$ phụ thuộc vào các không điểm phức $\rho = \beta + i\gamma$ của $\zeta(s)$. Một dạng đơn giản của công thức nói rằng

$$\Psi(x) := \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = x - \sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho} - \log 2\pi - \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

đúng nếu x không phải là lũy thừa của một số nguyên tố, trong đó hàm von Mangoldt $\Lambda(n) = \log p$ nếu $n = p^k$ với một số nguyên k nào đó và $\Lambda(n) = \log 0$ nếu ngược lại. Chú ý rằng tổng này không hội tụ tuyệt đối (nếu vậy thì $\sum\limits_{n \leq x} \Lambda(n)$ phải liên tục theo x nhưng điều này rõ ràng không đúng). Do đó phải có nhiều vô hạn các không điểm ρ. Ở đây tổng tính trên ρ với số bội và được hiểu là $\lim\limits_{T\to\infty} \sum\limits_{|\rho|\leq T}$. Chú ý rằng $|x^\rho| = |x|^\beta$; do đó cần chỉ ra $\beta < 1$ để chứng minh rằng $\sum\limits_{n\leq x} \Lambda(n) \sim x$, một cách phát biểu khác của giả thuyết Gauss.



Hình 2: Biểu đồ viền $Re(\zeta(s))$, đường $Re(\zeta(s)) = 0$ (đậm), $Im(\zeta(s))$ (chấm), biểu đồ viền $Im(\zeta(s))$



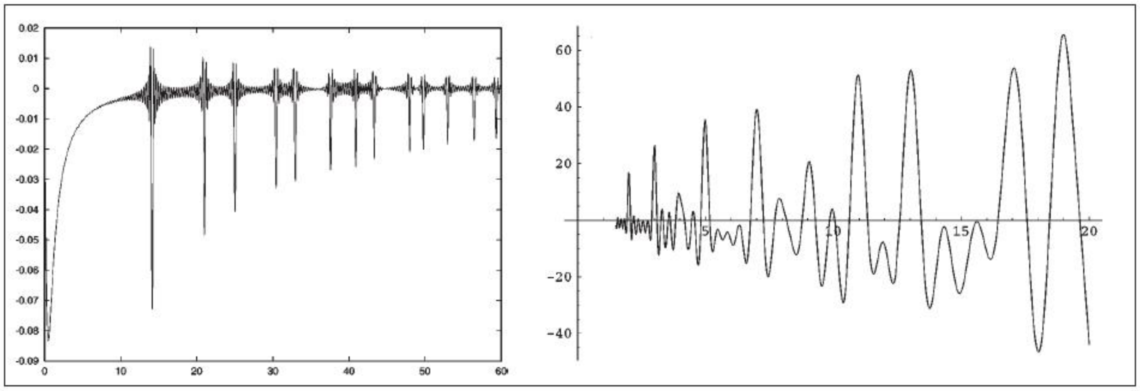
Hình 3: Biểu đồ 3D của $|Re(\zeta(s))|$, đường $Im(\zeta(s))$ (đường chấm)

Phương trình hàm ta nói ban đầu chỉ ra rằng các không điểm phức phải đối xứng với đường thẳng $Re(s) = \frac{1}{2}$. Riemann đã tính một số không điểm phức đầu tiên: $\frac{1}{2} + i14.134...$, $\frac{1}{2} + i21.022...$ và chứng tỏ rằng $N(T)$, số các không điểm với phần ảo nằm giữa 0 và T, là

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi e} + \frac{7}{8} + S(T) + O(1/T)$$

trong đó $S(T) = \frac{1}{\pi} \arg \zeta(1/2 + iT)$ được tính bởi biến phân liên tục bắt đầu từ $\arg \zeta(2) = 0$ dọc theo các đường thẳng tới $\arg \zeta(2 + iT) = 0$ rồi $\arg \zeta(1/2 + iT) = 0$. Riemann cũng chứng minh rằng $S(T) = O(\log T)$. Chú ý: ta sẽ thấy sau này rằng bước nhảy giữa các không điểm là $\sim 2\pi/\log T$. Riemann cũng dự đoán rằng số $N_0(T)$ các không điểm của $\zeta(1/2 + it)$ với $0 \le t \le T$ là khoảng $\dfrac{T}{2\pi} \log \dfrac{T}{2\pi e}$ và sau đó nêu ra giả thuyết rằng mỗi không điểm của ζ thực sự đều nằm trên đường thẳng $\mathrm{Im}(z) = 1/2$; đó chính là giả thuyết Riemann.

Các nỗ lực của Riemann đã tiến gần đến việc chứng minh giả thuyết của Gauss. Bước cuối cùng được hoàn tất bởi Hadamard và de la Vallée Poussin, hai người đã chứng minh độc lập nhau trong năm 1896 rằng $\zeta(s)$ khác không khi phần thực của s bằng 1, và từ đó dẫn tới kết luận khẳng định cho giả thuyết của Gauss, bây giờ được gọi là định lý số nguyên tố (Prime Number Theorem).



Hình 4: Biến đổi Fourier của phần sai số trong Định lý số nguyên tố và $-\sum x^\rho$ với $|\rho| < 100$

Các ý tưởng đầu tiên

Không mấy khó khăn để chứng tỏ RH (Riemann Hypothesis) tương đương với khẳng định rằng với mọi $\varepsilon > 0$

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} + O(x^{1/2+\varepsilon}).$$

Tuy nhiên khó khăn nằm ở chỗ tìm ra một cách tiếp cận khác với $\pi(x)$ và thu các thông tin về các không điểm.

Một tương đương dễ thấy khác của RH là khẳng định $M(x) = O(x^{1/2+\varepsilon})$ với mọi $\varepsilon > 0$, trong đó

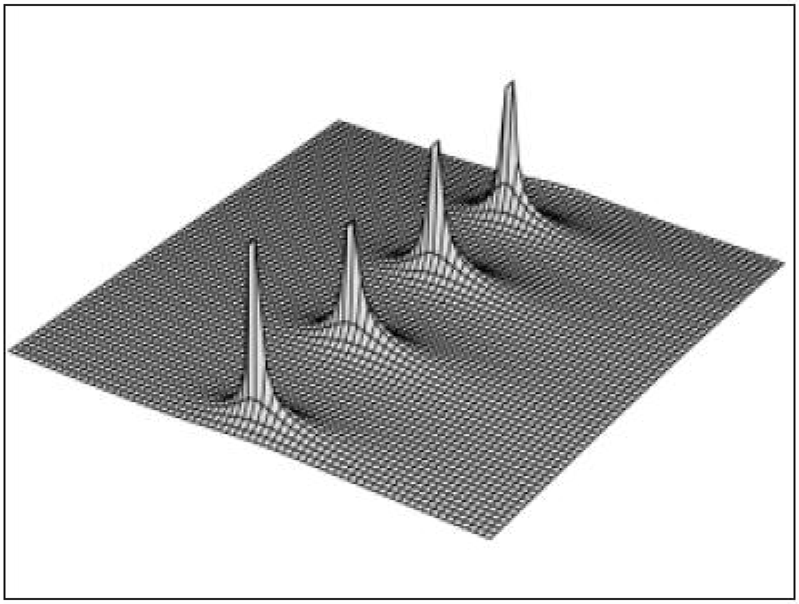
$$M(x) = \sum_{n \le x} \mu(n)$$

và $\mu(n)$ là hàm Mobius được định nghĩa từ chuỗi Dirichlet sinh $1/\zeta$

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right).$$

Vậy nếu $p_1, ..., p_k$ là các số nguyên tố phân biệt thì $\mu(p_1...p_k) = (-1)^k$; và $\mu(n) = 0$ nếu n chia hết cho p^2 với một số nguyên tố p nào đó. Chuỗi này hội tụ tuyệt đối khi $\mathrm{Re}(s) > 1$. Nếu ước lượng $M(x) = O(x^{1/2+\varepsilon})$ đúng với mọi $\varepsilon > 0$ thì bằng cách lấy các tổng riêng phần ta thấy chuỗi hội tụ với mọi s có phần thực lớn hơn 1/2; nói riêng không có không điểm nào của $\zeta(s)$ nằm trên nửa mặt phẳng mở này, bởi vì không điểm của $\zeta(s)$ là điểm kỳ dị (poles) của $1/\zeta(s)$ [Người dịch: và do tính đối xứng nên cũng dẫn đến không có không điểm nào nằm trên nửa mặt phẳng mở $\mathrm{Re}(s) < 1/2$, và do đó mỗi không điểm đều chỉ nằm trên đường thẳng $\mathrm{Re}(s) = 1/2$]. Ngược lại, RH suy ra ước lượng này cho $M(x)$, điều này cũng không khó để chứng minh.

Thay vì phân tích trực tiếp $\pi(s)$, có vẻ sẽ dễ dàng hơn khi làm việc với $M(x)$ và chứng minh ước lượng ở trên. Thật ra, Stieltjes đã thông báo rằng ông có một chứng minh như vậy. Hadamard, trong chứng minh nổi tiếng năm 1896 về Prime Number Theorem, đã dẫn ra tuyên bố của Stieltjes.



Hình 5: $1/|\zeta(x+iy)$ với $0 < x < 1$ và $16502.4 < y < 16505$

Hadarmard nói rằng định lý của ông yếu hơn nhiều, và chỉ chứng minh $\zeta(s)$ khác 0 trên đường thẳng $\mathrm{Re}(s) = 1$, nhưng hi vọng tính đơn giản của chứng minh sẽ có ích. Stieltjes, tuy nhiên, sau đó không bao giờ công bố chứng minh của mình.

Mertens dự đoán một giả thuyết mạnh hơn rằng

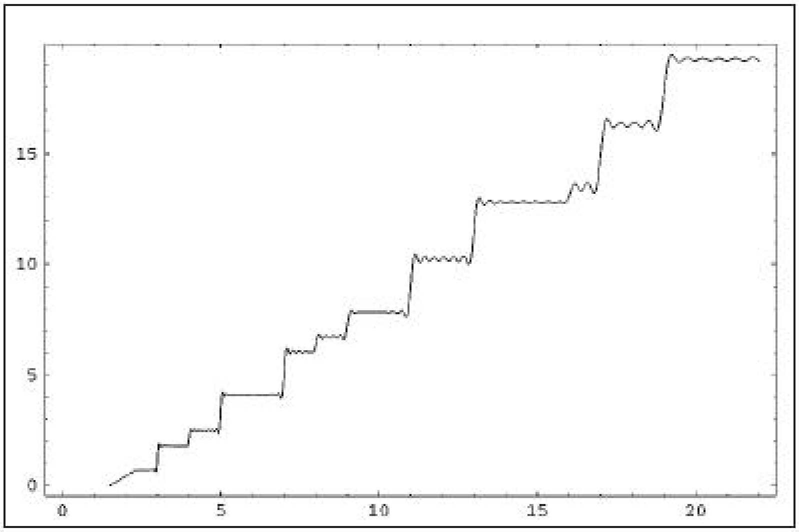
$$M(x) \leq \sqrt{x},$$

Điều rõ ràng dẫn đến RH. Tuy nhiên giả thuyết của Mertens đã bị chứng minh là sai bởi Odlyzko và te Riele năm 1985. Ước lượng $M(x) = O(\sqrt{x})$ thậm chí đã dùng RH như một lá chắn: ông từng gửi bưu thiếp tới đồng nghiệp Harald Bohr trước khi qua English Channel trong một đêm bão tố, tuyên bố là ông đã chứng minh xong RH. Thậm chí Hardy là một người vô thần, ông cũng tin một cách tương đối về Chúa, rằng nếu Chúa tồn tại, cũng chẳng để thành tựu tới trong một hoàn cảnh như vậy!

Hilbert có vẻ hơi mâu thuẫn khi nhìn nhận về độ khó của RH. Một lần ông so sánh ba bài toán mở: tính siêu việt của $2^{\sqrt{2}}$, định lý lớn Fermat, và giả thuyết Riemann. Theo quan điểm của ông, RH có thể sẽ được giải trong vài năm, định lý lớn Fermat có thể được giải khi ông còn sống, và câu hỏi về sự siêu việt có thể sẽ không bao giờ được trả lời. Đáng ngạc nhiên là câu hỏi về sự siêu việt được giải trong vài năm sau đó bởi Gelfond và Schneider, và, dĩ nhiên, Andrew Wiles gần đây đã chứng minh định lý lớn Fermat [Người dịch: vậy nếu đảo ngược dự đoán của Hilbert thì có thể RH sẽ không bao giờ được giải]. Tuy nhiên trong một dịp khác Hilbert lại nói rằng nếu ông ta sống lại sau một giấc ngủ 500 năm thì câu hỏi đầu tiên sẽ là: RH có được giải hay chưa.

Khi gần kết thúc sự nghiệp, Hans Rademacher, người được biết bởi công thức chính xác cho số các cách phân hoạch một số nguyên, nghĩ rằng ông đã có một phần chứng minh cho RH. Siegel đã kiểm tra kết quả này, công việc dựa trên kết luận rằng một hàm nhất định sẽ có một nới rộng giải tích bởi liên tục nếu RH đúng. Cộng đồng Toán học đã cố gắng làm cho Tạp chí Time (Time magazine) quan tâm câu chuyện. Time đã thích thú và đăng một bài báo sau khi người ta tìm ra lỗi sai trong chứng minh của Rademacher.

Các chứng cứ của giả thuyết Riemann



Hình 6: Công thức chính xác của $\Psi(x)$ sử dụng 100 cặp không điểm đầu tiên

Sau đây là một số lý do để tin vào RH.

• *Hàng tỉ không điểm không thể sai.* Gần đây, van de Lune đã chỉ ra 10 tỉ không điểm đầu tiên nằm trên đường thẳng $\mathrm{Re}(s) = 1/2$. Ngoài ra, một dự án với sự chung sức nhiều máy tính tổ chức bởi Sebastian Wedeniwski, chương trình đã được nhiều người hưởng ứng, đã khẳng định rằng họ đã kiểm tra 100 tỉ không điểm đầu tiên nằm trên đường thẳng đó. Andrew Odlyzko đã tính hàng triệu không điểm gần các không điểm thứ 10^{20}, 10^{21} và 10^{22} (có thể xem trên website của ông).

• *Hầu hết tất cả các không điểm đều nằm rất gần đường thẳng Re*$(s) = 1/2$. Thật sự người ta đã chứng minh rằng có hơn 99 phần trăm các không điểm $\rho = \beta + i\gamma$ thỏa mãn $|\beta - 1/2| \leq 8/\log(\gamma)$.

• *Người ta đã chứng minh có rất nhiều không điểm nằm trên đường thẳng Re*$(s) = 1/2$. Selberg đạt được một tỉ lệ dương, và N. Levinson chỉ ra ít nhất là 1/3; tỉ lệ này sau đó được cải thiện lên 40 phần trăm. Ngoài ra RH cũng ngụ ý rằng mỗi không điểm của mọi đạo hàm của $\zeta(s)$ nằm trên đường thẳng $\mathrm{Re}(s) = 1/2$. Người ta đã chứng minh được rằng có nhiều hơn 99 phần trăm các không điểm của đạo hàm bậc ba $\zeta'''(s)$ nằm trên đường thẳng $\mathrm{Re}(s) = 1/2$. Lúc gần cuối đời Levinson nghĩ rằng ông có một phương pháp cho phép đảo ngược định lý Rolle trong trường hợp này, tức là nếu $\zeta'(s)$ có ít nhất một tỉ lệ dương các không điểm nằm trên đường thẳng đó thì điều này cũng đúng với $\zeta(s)$, và tương tự với $\zeta''(s)$, $\zeta'(s)$ ... Tuy nhiên chưa ai có thể hiện thực hóa ý tưởng của ông.

• *Phương pháp thống kê.* Với ít hầu hết các dãy ngẫu nhiên gồm -1 và $+1$, hàm tổng tương ứng của x bị chặn bởi $x^{1/2+\varepsilon}$. Dãy Mobius có vẻ khá ngẫu nhiên.

• *Sự đối xứng của các số nguyên tố.* RH nói rằng các số nguyên tố phân bố theo cách đẹp nhất có thể. Nếu RH sai thì sẽ có những điều bất thường trong sự phân bố các số nguyên tố; không điểm đầu tiên có phần thực khác 1/2 chắc chắn sẽ là một hằng số toán học rất quan trọng. Tuy nhiên, có vẻ tự nhiên không khắc nghiệt tới như vậy!

Vẻ đẹp của phân số Farey

Nguyễn Mạnh Dũng, Học sinh lớp 12A2 Toán, Trường ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội

A - Mở đầu

Trong lịch sử của toán học, nhiều khi những lời giải, những định lí mới được tìm ra bởi những người nghiệp dư, những người ở lĩnh vực khác. Chính điều này đã góp phần làm cho các khía cạnh của toán học đa dạng hơn, thú vị hơn. Trong bài viết này, tôi xin được trao đổi với các bạn về phân số Farey, gắn liền với tên tuổi của nhà địa lí học John Farey (1766-1826) khi ông công bố những tính chất thú vị của phân số Farey trên một tạp chí Triết học dưới dạng phỏng đoán.

Định nghĩa. Tập hợp F_n các phân số Farey bậc n, gọi là chuỗi Farey bậc n, là tập hợp của các phân số tối giản thuộc khoảng $[0, 1]$ với mẫu số không vượt quá n và được sắp xếp theo thứ tự tăng dần. Do đó $\frac{h}{k}$ thuộc F_n nếu

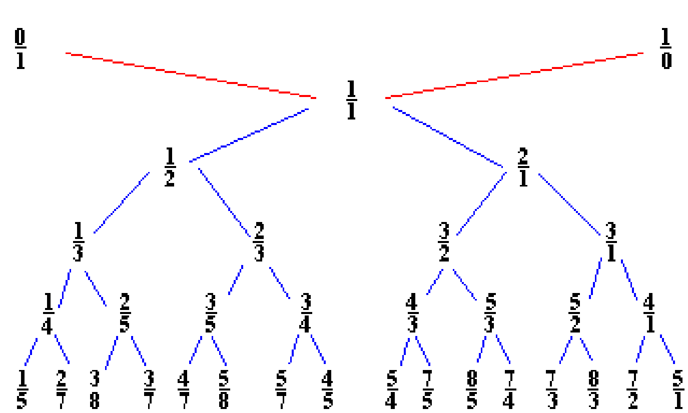
$$0 \leq h \leq k \leq n, (h, k) = 1$$

Các số 0, 1 gọi là các phần tử cơ sở của mọi tập hợp phân số Farey vì viết được dưới dạng $\frac{0}{1}$ và $\frac{1}{1}$.

Ta có thể biểu diễn phân số Farey như sau:

F_1 :	$\frac{0}{1}$																						$\frac{1}{1}$
F_2 :	$\frac{0}{1}$											$\frac{1}{2}$											$\frac{1}{1}$
F_3 :	$\frac{0}{1}$							$\frac{1}{3}$				$\frac{1}{2}$				$\frac{2}{3}$							$\frac{1}{1}$
F_4 :	$\frac{0}{1}$					$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$				$\frac{1}{2}$				$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$					$\frac{1}{1}$
F_5 :	$\frac{0}{1}$				$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{5}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{5}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$				$\frac{1}{1}$
F_6 :	$\frac{0}{1}$			$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{5}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{5}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$			$\frac{1}{1}$
F_7 :	$\frac{0}{1}$		$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{5}$		$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$		$\frac{1}{1}$
F_8 :	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{1}$

Hoặc dưới dạng cây Stern:



B - Tính chất

Chúng ta hãy cùng xét các tính chất thú vị của phân số Farey

Định lí 1. Nếu $\frac{h}{k}$ và $\frac{h'}{k'}$ là hai phần tử liên tiếp của F_n thì

$$(k+k') > n$$

Chứng minh

Xét phân số $\frac{h+h'}{k+k'}$ (phân số này được gọi là *trung bình* của $\dfrac{h}{k}$ và $\dfrac{h'}{k'}$). Khi đó

$$\frac{h+h'}{k+k'} - \frac{h}{k} = \frac{kh'-hk'}{k(k+k')} > 0$$

Và

$$\frac{h'}{k'} - \frac{h+h'}{k+k'} = \frac{kh'-hk'}{k'(k+k')} > 0$$

Do đó

$$\frac{h+h'}{k+k'} \in \left(\frac{h}{k}, \frac{h'}{k'}\right)$$

Nên nếu $k+k' \leq n$ thì $\dfrac{h+h'}{k+k'} \in F_n$. Điều này là vô lí vì $\dfrac{h}{k}$ và $\dfrac{h'}{k'}$ là hai phần tử liên tiếp. Định lí được chứng minh. Chúng ta sẽ quay lại tính chất này ở phần sau. $\triangledown$

Định lí 2. Không có hai phần tử liên tiếp nào của F_n có mẫu số giống nhau.

Chứng minh

Nếu $k > 1$ và $\dfrac{h}{k}, \dfrac{h'}{k}$ là hai phần tử liên tiếp trong F_n, khi đó $h+1 \leq h' < k$. Mặt khác

$$\frac{h}{k} < \frac{h}{k-1} < \frac{h+1}{k} \leq \frac{h'}{k}$$

Do dó $\dfrac{h}{k-1}$ là một phần tử nằm giữa 2 phần tử liên tiếp $\dfrac{h}{k}, \dfrac{h'}{k}$, vô lí. Ta có điều phải chứng minh. $\triangledown$

Định lí 3. Nếu $\dfrac{h}{k}$ và $\dfrac{h'}{k'}$ là hai phần tử liên tiếp của F_n thì

$$hh' - kk' = 1$$

Chứng minh

Đầu tiên ta cần chứng minh một bổ đề

Bổ đề 1. *Nếu (h,k) là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau thì khi đó tồn tại các số nguyên dương (x,y) sao cho*

$$kx - hy = 1$$

Chứng minh.

Xét các số nguyên

$$k, 2k, 3k, \cdots, (h-1)k$$

và số dư của chúng khi chia cho h. Các số dư này đều khác nhau. Thật vậy, nếu

$$k_1k = q_1h + r, k_2k = q_2h + r$$

với $k_1, k_2 \in \{1, 2, \cdots, (h-1)\}$ thì

$$(k_1 - k_2)k = (q_1 - q_2)h \equiv 0 \ (mod \ \ h)$$

Mà $k_1, k_2 \in \{1, 2, \cdots, (h-1)\}$ nên $k_1 - k_2 < h$. Do đó $k_1 - k_2 = 0$.

Dễ thấy rằng $kk' \not\equiv 0 \ (mod \ \ h)$ với mọi $k \in \{1, 2, \cdots, (h-1)\}$. Do đó ít nhất một số trong các số $1.k, 2.k, \cdots, (h-1)k$ có số dư là 1 khi chia cho h, suy ra tồn tại $x \in \{1, 2, \cdots, (h-1)\}$ và $y \in Z_+$.

Quay lại định lí cần chứng minh, nếu (x_0, y_0) là một nghiệm của phương trình trên, khi đó $(x_0 + rh, y_0 + rh)$ cũng là một nghiệm với mọi số nguyên r. Chúng ta có thể chọn r sao cho

$$n - k < y_0 + rk \leq n$$

Đặt $x = x_0 + rk, y = y_0 + rk$, khi đó (x, y) là một nghiệm của phương trình trên và thỏa mãn

$$(x, y) = 1, 0 \leq n - k < y \leq n$$

Do đó $\frac{x}{y}$ tối giản và $y \leq n$ nên $\frac{x}{y}$ là một phần tử của F_n. Ta cũng có

$$\frac{x}{y} = \frac{h}{k} + \frac{1}{ky} > \frac{h}{k}$$

Suy ra $\frac{x}{y}$ nằm sau $\frac{h}{k}$ trong F_n. Nếu $\frac{x}{y} \neq \frac{h'}{k'}$ thì $\frac{x}{y}$ cũng nằm sau $\frac{h}{k}$, khi đó

$$\frac{x}{y} - \frac{h'}{k'} = \frac{k'x - h'y}{ky'} \geq \frac{1}{k'y'}$$

mà

$$\frac{h'}{k'} - \frac{h}{k} = \frac{kh' - hk'}{kk'} \geq \frac{1}{kk'}$$

Vì vậy

$$\frac{1}{ky} = \frac{kx - hy}{ky} = \frac{x}{y} - \frac{h}{k} \geq \frac{1}{k'y} + \frac{1}{kk'} = \frac{k + y}{kk'y} > \frac{n}{kk'y} \geq \frac{1}{ky}$$

(theo **Định lí 1**)

Vô lí, vậy $\frac{x}{y} = \frac{h'}{k'}$ do đó $kh' - hk' = 1$. $\bigtriangledown$

Định lí 4. Nếu $\frac{h}{k}$, $\frac{h''}{k''}$ và $\frac{h'}{k'}$ là ba phần tử liên tiếp của F_n thì

$$\frac{h''}{k''} = \frac{h + h'}{k + k'}$$

Chứng minh.

Từ **Định lí 3** ta thu được

$$kh'' - hk'' = 1, \qquad k''h' - h''k' = 1 \quad (3.1)$$

Giải hệ phương trình trên theo ẩn h'' và k'' ta có

$$h'' = \frac{h+h'}{kh'-hk'}, \qquad k'' = \frac{k+k'}{kh'-hk'}$$

Hay

$$\frac{h''}{k''} = \frac{h+h'}{k+k'}$$

Đây chính là **Định lí 4**.

Nhận xét. Chú ý rằng **Định lí 3** và **Định lí 4** là tương đương, ta có thể suy ra **Định lí 3** từ **Định lí 4** bằng phép quy nạp như sau:

Giả sử rằng **Định lí 4** đúng với mọi F_n và **Định lí 3** đúng tới F_{n-1}, ta sẽ chứng minh nó cũng đúng với F_n. Hiển nhiên rằng nó tương đương với việc chứng minh phương trình (3.1) thỏa mãn khi $\frac{h''}{k''}$ thuộc F_n nhưng không thuộc F_{n-1}, do đó $k'' = n$. Trong trường hợp này, theo **Định lí 4**, $k, k' < k''$ và $\frac{h}{k}, \frac{h'}{k'}$ là hai phần tử liên tiếp trong F_{n-1}. Từ **Định lí 4** và giả thiết $\frac{h''}{k''}$ tối giản, ta đặt

$$h + h' = \lambda h'', k + k' = \lambda k''$$

với λ là một số nguyên. Do $k, k'' < k''$, nên $\lambda = 1$. Do đó

$$h'' = h + h', k'' = k + k' kh'' - hk'' = kh' - hk' = 1$$

Tương tự

$$k''h' - h''k' = 1$$

Phép chứng minh này gợi ý cho ta một lời giải khác cho **Định lí 3**:

Định lí đúng với $n = 1$, giả sử nó đúng tới F_{n-1} ta cần chứng minh minh nó cũng đúng với F_n.

Giả sử $\frac{h}{k}$ và $\frac{h'}{k'}$ là hai phần tử liên tiếp trong F_{n-1} nhưng bị chia ra trong F_n bởi $\frac{h''}{k''}$. Đặt

$$kh'' - hk'' = r > 0, k''h' - h''k' = s > 0$$

Giải hệ phương trình này theo ẩn h'', k'' với điều kiện $kh' - hk' = 1$ ta thu được

$$h'' = sh + rh', k'' = sk + rk'$$

Từ đó kết hợp với $(h'', k'') = 1$ nên $(r, s) = 1$. Xét tập hợp S bao gồm tất cả các phân số có dạng

$$\frac{p}{q} = \frac{\gamma h + \lambda h'}{\gamma k + \lambda k'}$$

với γ, λ là các số nguyên dương có $(\gamma, \lambda) = 1$. Do đó $\frac{h''}{k''} \in S$, Mọi phần tử của tập hợp S đều nằm giữa $\frac{h}{k}$ và $\frac{h'}{k'}$ do mọi ước chung của p và q đều chia hết cho

$$k(\gamma h + \lambda h') - h(\gamma k + \lambda k') = \lambda, h'(\gamma h + \lambda h') - k'(\gamma k + \lambda k') = \gamma$$

Do đó mọi phần tử của S đều là phần tử của một số chuỗi Farey nào đó, khi đó phân số đầu tiên xuất hiện phải có q nhỏ nhất. Suy ra $\gamma = \lambda = 1$, Vậy phân số này phải là $\frac{h''}{k''}$. Nên

$$h'' = h + h', k'' = k + k'$$

Định lí được chứng minh.

Hai phép chứng minh trên cho **Định lí 3** không phải là duy nhất, các bạn có thể tham khảo cách chứng minh bằng hình học khá hay của G.H.Hardy hoặc dùng định lí Pick, chi tiết các bạn có thể tham khảo [1]. $\triangledown$

Định lí 5. Tổng của các tử số bằng một nửa tổng các mẫu số trong chuỗi Farey bậc n.

Chứng minh

Đầu tiên ta chứng minh một bổ đề.

Bổ đề 2. Nếu $\dfrac{h}{k}$ là một phần tử của chuỗi F_n thì $\dfrac{k-h}{k}$ cũng là một phần tử của chuỗi.

Chứng minh

Do $(h,k)=1$ và $0 \le \dfrac{h}{k} \le 1$ nên $(k-h,k)=1$ và $0 \le 1-\dfrac{h}{k} \le 1$. Ta có đpcm.

Quay lại bài toán, kí hiệu $\sum$ là tổng của tất cả các phần tử của chuỗi F_n.

Áp dụng **Bổ đề 2**, ta có $\sum h = \sum (k-h)$ nên $2\sum h = \sum k$. Đây là chính là kết quả của **Định lí 5**. $\triangledown$

Định lí 6. Tổng của các phần tử của chuỗi Farey F_n bằng $\frac{n}{2}$

Chứng minh

Theo **Bổ đề 2**, ta có $\sum \frac{h}{k} = \sum \left(1-\frac{h}{k}\right)$ nên

$$2\sum \frac{h}{k} = \sum 1 = n$$

Đây là điều phải chứng minh. $\triangledown$

Định lí 7. Trong chuỗi Farey bậc n F_n, mẫu số của phân số liền trước và liền sau phân số $\dfrac{1}{2}$ bằng số nguyên lẻ lớn nhất không vượt quá n.

Chứng minh

Gọi $\dfrac{h}{k}$ là phân số liền trước $\dfrac{1}{2}$ trong F_n, khi đó $k-2h=1$ nên k lẻ. Theo **Định lí 3**, ta có $k+2>n$ nên $k \ge n-1$, mà $k \le n$ nên k là số nguyên lẻ lơn nhất không vượt quá n. $\triangledown$

C - Mở rộng

Phân số Farey và Phi hàm Euler

Trong phần trước, ta đã làm quen với một số tính chất cơ bản của phân số Farey, vấn đề đặt ra ở đây là có bao nhiêu phân số Farey trong một chuỗi Farey bậc n? Chúng ta xuất phát từ một nhận xét đơn giản: Do tất cả các phân số Farey đều ở dạng tối giản, nên với một mẫu số b cho trước, số tử số nhỏ hơn b và nguyên tố cùng nhau với b là $\phi(b)$, gọi là Phi-hàm Euler. (Chi tiết về các tính chất cũng như các phép chứng minh của Phi-hàm Euler, các bạn có thể tham khảo [3].) Ta có thể sử dụng tính chất này cho mọi nguyên từ 2 đến n. Do đó ta có thể tính được số phân số có trong F_n (kể cả hai phân số cơ sở $\frac{0}{1}$ và $\frac{1}{1}$) là

$$N = 2+\phi(2)+\phi(3)+\cdots+\phi(n)$$

Ta có thể tính được $\phi(n)$ với $n > 1$ qua công thức

$$\phi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Ví dụ khi $n = 7$ ta có

$$N = 2 + \phi(2) + \phi(3) + \cdots + \phi(7) = 2 + 1 + 2 + 2 + 4 + 2 + 6 = 19$$

Đúng với kết quả trong bảng ở phần Định nghĩa. Ví dụ ta có thể tính khi $n = 100$ thì $N = 3045$.

Do $\phi(x)$ luôn là số chẵn ngoại trừ trường hợp $x = 1, 2$ nên ta có

$$N = 2 + \phi(2) + \phi(3) + \cdots + \phi(n)$$

luôn là một số lẻ. Do đó số phân số cách đều $\frac{1}{2}$ luôn bằng nhau. Đây là một cách chứng minh khác cho **Bổ đề 2**.

Với n rất lớn thì việc tính N trở nên khó khăn hơn rất nhiều. Nhưng nhờ một tính chất của Phi hàm Euler ta có thể tính toán dễ dàng hơn:

$$\phi(1) + \phi(2) + \cdots + \phi(n) \approx \frac{3n^2}{\pi^2}$$

Do đó

$$N \approx 1 + \frac{3n^2}{\pi^2}$$

Giá trị xấp xỉ này sẽ ngày càng chính xác hơn khi giá trị của n tăng. Ví dụ với $n = 100$, theo công thức trên ta tính được $N = 1 + \frac{3.100^2}{\pi^2} \approx 3040,635...$ trong khi giá trị chính xác của N là 3045. Ta có thể lập bảng tính như sau:

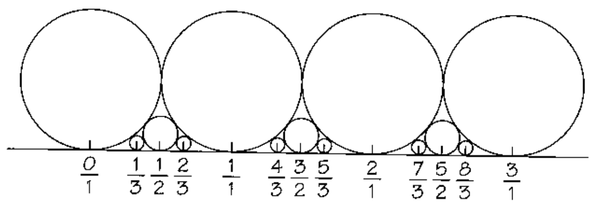
SỐ PHẦN TỬ CỦA CHUỖI FAREY

n	$\phi(n)$	$N = 1 + \sum \phi(n)$	$1 + 3n^2/\pi^2$
1	1	2	1,30
2	1	3	2,22
3	2	5	3,74
4	2	7	5,86
5	4	11	8,60
6	2	13	11,94
7	6	19	15,90
8	4	23	20.46
9	6	29	25,62
10	4	33	30,40
15	8	73	69,39
25	20	201	190,98
50	20	775	760,91
100	40	3045	3040,63
200	80	12233	12159,54
300	80	27399	27357,72
400	160	48679	48635,17
500	200	76115	75991,89

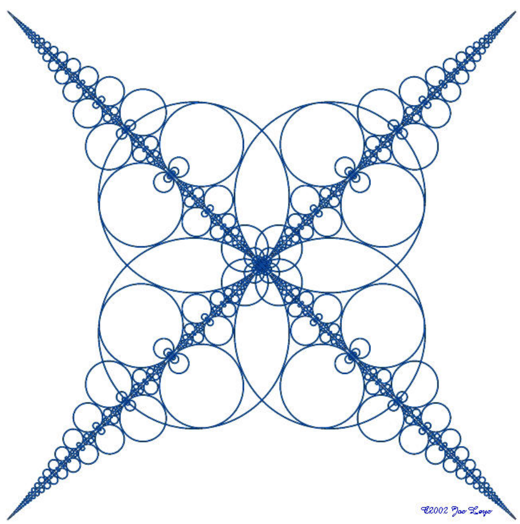
Phân số Farey và đường tròn Ford

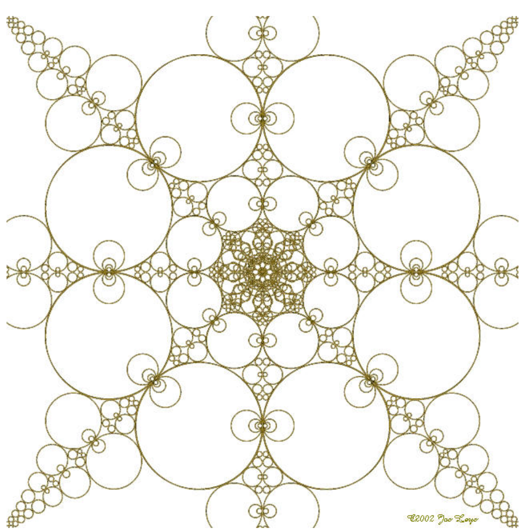
Một trong những mở rộng liên quan đến hình học của phân số Farey là đường tròn Ford.

Định nghĩa. Xét hệ trục tọa độ Oxy. Với mỗi phân số tối giản $\frac{p}{q}$ nằm trên trục Ox, ta dựng các đường tròn tiếp xúc với Ox tại điểm đó, tâm có tọa dộ là $\left(\frac{p}{q}, \frac{1}{2q^2}\right)$, được gọi là đường tròn Ford, kí hiệu $C(p, q)$.



Một số hình ảnh đẹp của đường tròn Ford sau khi được cách điệu

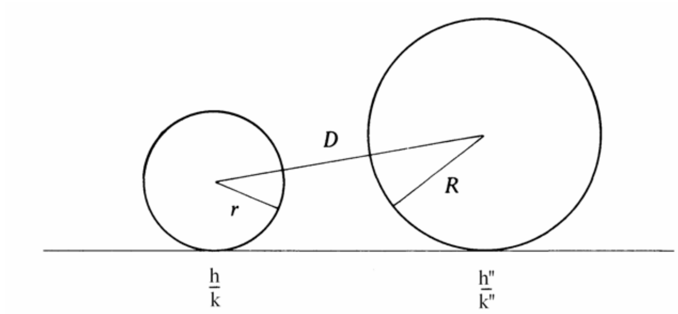




Ta có một rất cơ bản sau của đường tròn Ford:

Tính chất 1. Hai đường tròn Ford $C(h,k)$ và $C(h',k')$ hoặc tiếp xúc với nhau, hoặc nằm ngoài nhau. Điều kiện để hai đường tròn này tiếp xúc là $|hk'-h'k|=1$.

Chứng minh



Gọi D là khoảng cách giữa tâm của 2 đường tròn. r, R tương ứng là bán kính của đường tròn $C(h,k), C(h',k')$.

Khi đó ta có

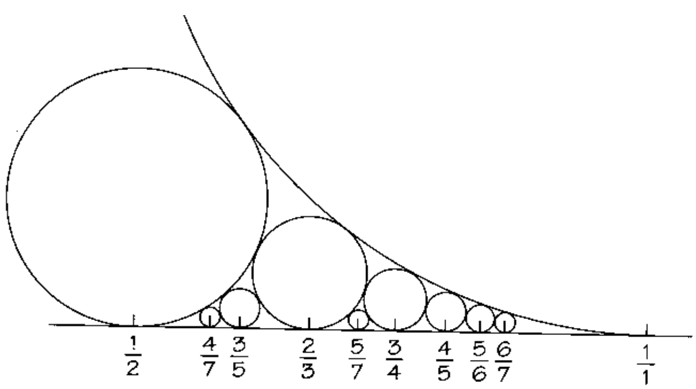
$$(r+R)^2 = \left(\frac{1}{2k^2}+\frac{1}{2k'^2}\right)^2$$

Xét hiệu số $D^2-(r+R)^2$:

$$D^2-(r+R)^2 = \left(\frac{h}{k}-\frac{h'}{k'}\right)^2+\left(\frac{1}{2k^2}-\frac{1}{2k'^2}\right)^2-\left(\frac{1}{2k^2}+\frac{1}{2k'^2}\right)^2 = \frac{(hk'-h'k)^2-1}{k^2k'^2} \geq 0$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $|hk'-h'k|=1$.

Từ tính chất này ta dễ dàng thấy được bất cứ hai phân số Farey liên tiếp nào được biểu diễn trên hệ trục tọa độ cũng có hai đường tròn Ford tiếp xúc với nhau. Ta có một ví dụ minh họa sau với chuỗi Farey bậc 7.



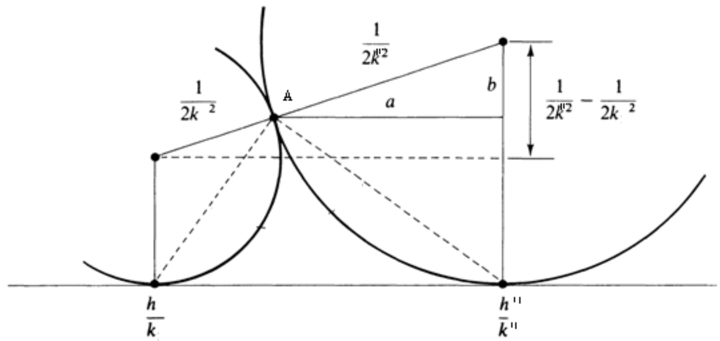
Tính chất 2. Giả sử $\frac{h}{k} < \frac{h''}{k''} < \frac{h'}{k'}$ là ba phần tử liên tiếp của F_n. Khi đó $C(h,k)$ và $C(h'',k'')$ tiếp xúc với nhau tại điểm

$$A_1 = \left(\frac{h''}{k''}-\frac{k}{k''(k^2+k''^2)}, \frac{1}{k^2+k''^2}\right)$$

và $C(h'', k'')$ và $C(h', k')$ tiếp xúc với nhau tại điểm

$$A_2 = \left(\frac{h''}{k''} + \frac{k'}{k''(k'^2 + k''^2)}, \frac{1}{k'^2 + k''^2}\right)$$

Chứng minh



Kí hiệu độ dài các đường như trong hình vẽ.

Áp dụng định lí Thales ta có

$$\frac{a}{\frac{h}{k} - \frac{h''}{k''}} = \frac{\frac{1}{2k^2}}{\frac{1}{2k''^2} - \frac{1}{2k^2}} = \frac{b}{\frac{1}{2k''^2} - \frac{1}{2k^2}}$$

Do đó

$$a = \frac{k}{k''(k^2 + k''^2)}, b = \frac{k'^2 - k''^2}{2k''^2(k^2 + k''^2)}$$

Tọa độ điểm $A_1 = (x_1, y_1)$, trong đó

$$x_1 = \frac{h''}{k''} - a = \frac{h''}{k''} - \frac{k}{k''(k^2 + k''^2)}, y_1 = \frac{h''}{k''} + \frac{1}{2k''^2} - \frac{1}{2k^2} - b = \frac{1}{k^2 + k''^2}$$

Tương tự ta cũng tính được toạ độ của A_2.

Kết thúc bài viết, tôi xin nêu ra một số bài tập để các bạn luyện tập thêm.

Bài tập 1. Hai phân số $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ được gọi là đồng bậc nếu $(c - a)(d - b) \geq 0$. Chứng minh rằng bất kì hai phần tử liên tiếp nào của chuỗi Farey bậc n cũng đồng bậc.

Bài tập 2. Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ và λ, γ là các số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$\theta = \frac{\lambda a + \gamma c}{\lambda b + \gamma d}$$

nằm giữa hai phân số $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ và $(c - d\theta)(\theta b - a) = \frac{\lambda}{\gamma}$. Khi $\lambda = \gamma$, θ chính là trung bình của $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$.

Bài tập 3. (Hurwitz) Cho một số vô tỉ θ, khi đó tồn tại vô số phân số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ sao cho

$$\left(\theta - \frac{a}{b}\right) < \frac{1}{\sqrt{5}a^2}$$

Hơn nữa ta không thể thay thế $\frac{1}{\sqrt{5}}$ bằng một số nhỏ hơn.

Tài liệu tham khảo

[1] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers, Fifth Edition*, Oxford Science Publications, 1996.

[2] J. H. Conway and R. K. Guy, *The Book of Numbers*, Springer-Verlag, NY, 1996.

[3] David M, Burton, *Elementary number theory*, 6th Edition, Mc Graw Hill, 2007.

[4] A. H. Beiler, *Recreations in the Theory of Numbers*, Dover, 1966

[5] Apostol, T. M. , *Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory*, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1997.

[6] Ford, L. R, *Fractions*, Amer. Math. Monthly 45, 586-601, 1938.

[7] Weisstein, Eric W, *Ford Circle,* From MathWorld–A Wolfram Web Resource.

`http://mathworld.wolfram.com/FordCircle.html`

BÀI VIẾT CHUYÊN ĐỀ MATHVN

Câu chuyện nhỏ về một định lý lớn

HOÀNG QUỐC KHÁNH - LỚP 12A10 THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC, TỈNH VĨNH PHÚC

A - SƠ LƯỢC VỀ ĐỊNH LÍ PASCAL VÀ PHÉP CHỨNG MINH

Một định lí được Descartes khẳng định là bao hàm được cả bốn cuốn sách đầu của Apolonius, tất nhiên là một định lí lớn, đó chính là định lí Pascal. Định lí Pascal chắc không còn quá xa lạ với những bạn yêu toán và đặc biệt là yêu thích hình học và bài viết này chỉ là một tìm tòi nhỏ của tác giả đề cập đến những ứng dụng của định lí tuyệt mĩ ấy trong toán phổ thông. Định lí Pascal tổng quát được phát biểu cho các đường cônic trong mặt phẳng xạ ảnh nhưng ở đây chúng ta sẽ chỉ đề cập đến một trường hợp đặc biệt của nó, đó là với đường tròn trong mặt phẳng, cụ thể như sau:

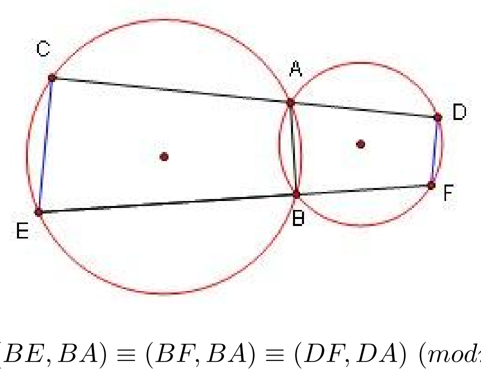
Định lí. *Cho sáu điểm bất kì A, B, C, A', B', C' cùng thuộc một đường tròn (O). Khi đó giao điểm nếu có của từng cặp đường thẳng $(AB', A'B), (BC', B'C), (CA', C'A)$ sẽ thẳng hàng.*

Chứng minh (Jan van Yzeren)

Đây là một định lí đẹp và cũng có rất nhiều chứng minh đẹp cho nó (Các bạn có thể xem thêm ở [1], [2], [3], [4])ở đây tác giả sẽ chỉ trình bày một chứng minh khá thú vị và ít quen biết, chứng minh này có sử dụng một bổ đề sau:

Bổ đề. Cho hai đường tròn phân biệt cắt nhau ở A và B. Hai điểm C, E thuộc đường tròn thứ nhất, hai điểm D, F thuộc đường tròn thứ hai sao cho C, A, D thẳng hàng; E, B, F thẳng hàng. Thế thì: $CE//DF$.

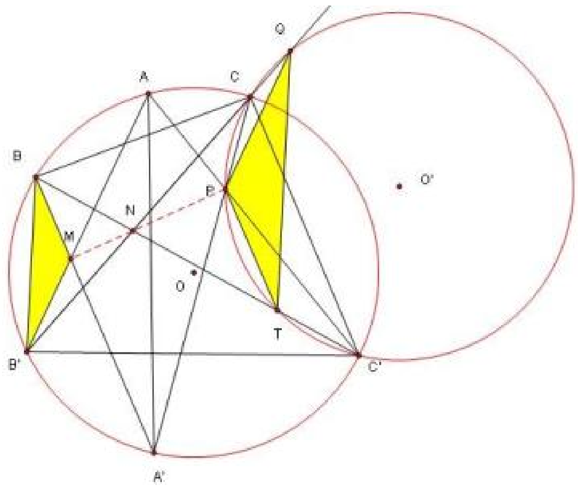
Chứng minh bổ đề



Nhận thấy: $(CE, CA) \equiv (BE, BA) \equiv (BF, BA) \equiv (DF, DA)$ $(mod\pi)$

Suy ra $CE//DF$.

Trở lại chứng minh định lí:



Gọi giao điểm của từng cặp đường thẳng $(AB', A'B), (BC', B'C), (CA', C'A)$ lần lượt là M, N, P.

Gọi (O') là đường tròn đi qua C, P, C'. $B'C$ và BC' cắt lại (O') tương ứng ở Q, T.

Sử dụng bổ đề trên ta có: $AB'//QP$ nên $MB'//QP$ (1); $BB'//TQ$ (2); $BA'//PT$ nên $BM//PT$ (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra tồn tại một phép vị tự biến tam giác BMB' thành tam giác TPQ

Do đó: $BT, MP, B'Q$ đồng quy tại tâm vị tự ấy. Nói cách khác $BC', B'C$ và MP đồng quy. Từ đây suy ra điều cần chứng minh.

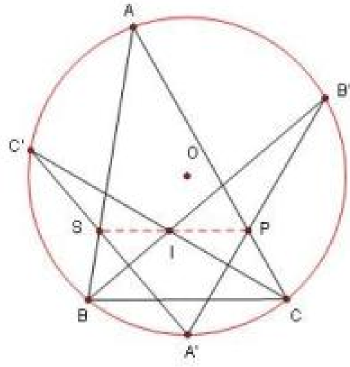
B - Một số ứng dụng của định lí Pascal trong hình học sơ cấp

I. Ứng dụng của định lí Pascal với sáu điểm phân biệt

Chúng ta cùng bắt đầu với một bài toán khá quen thuộc:

Bài toán 1. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi A', B', C' lần lượt là các điểm chính giữa của các cung BC, CA, AB không chứa A, B, C của (O). Các cạnh BC, CA, AB cắt các cặp đoạn thẳng $C'A'$ và $A'B'$; $A'B'$ và $B'C'$; $B'C'$ và $C'A'$ lần lượt ở các cặp điểm M và N; P và Q; R và S. Chứng minh rằng MQ, NR, PS đồng quy.*

Lời giải



Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC.

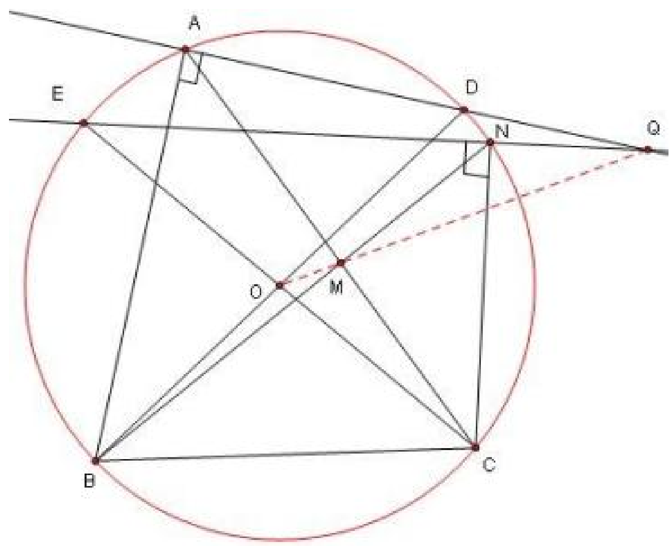
Sử dụng định lí Pascal cho sáu điểm A, B, C, A', B', C' ta thu được S, I, P thẳng hàng (1)

Hoàn toàn tương tự: M, I, Q thẳng hàng (2); N, I, R thẳng hàng (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra MQ, NR, PS đồng quy ở I.

Bài toán 2. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi M là điểm nào đó trên cạnh AC (M khác A, C). Đường thẳng BM cắt đường tròn lần nữa tại N. Đường thẳng qua A vuông góc với AB và đường thẳng qua N vuông góc với NC cắt nhau tại điểm Q. Chứng minh rằng QM luôn đi qua một điểm cố định khi M di chuyển trên cạnh AC.* (Bài T4/294 Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ)

Lời giải



Kẻ các đường kính BD, CE của (O).

Theo giả thiết bài toán ta thấy ngay: E, N, Q thẳng hàng; A, D, Q thẳng hàng.

Bây giờ áp dụng định lí Pascal cho sáu điểm A, B, C, N, D, E ta suy ra O, M, Q thẳng hàng, do đó QM luôn đi quan một điểm cố định chính là O.

Tiếp đến là một định lí rất đẹp và nổi tiếng của hình hoc - định lí Lyness cùng cách chứng minh rất thú vị bằng định lý Pascal:

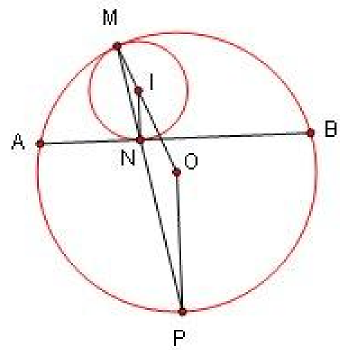
Bài toán 3. Cho tam giác ABC nội tiếp (O), ngoại tiếp (I). Một đường tròn (O') tiếp xúc trong với (O) và tiếp xúc với hai cạnh AB, AC lần lượt tại S, M, N. Chứng minh rằng I thuộc MN.

Lời giải

Trước tiên cần chứng minh một bổ đề:

Bổ đề. *Cho đường tròn (O) với dây cung AB. Một đường tròn (I) tiếp xúc trong với (O) và tiếp xúc với AB lần lượt tại M,N. Thế thì MN đi qua điểm chính giữa cung AB không chứa M của (O).*

Chứng minh bổ đề

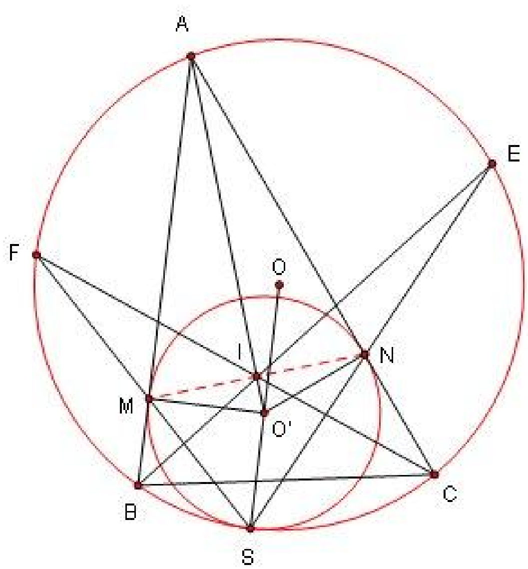


MN cắt lại (O) ở P.

Để ý rằng: $(MN, MI) \equiv (MP, MO)\ (mod\pi)$

Chú ý tam giác IMN và OMP cân ở I, O ta sẽ suy ra: $(IM, IN) \equiv (OM, OP)\ (mod\pi)$
Suy ra $OP//IN$, mà IN vuông góc với AB nên OP cũng vuông góc với AB, suy ra điều cần chứng minh.

Trở lại bài toán:

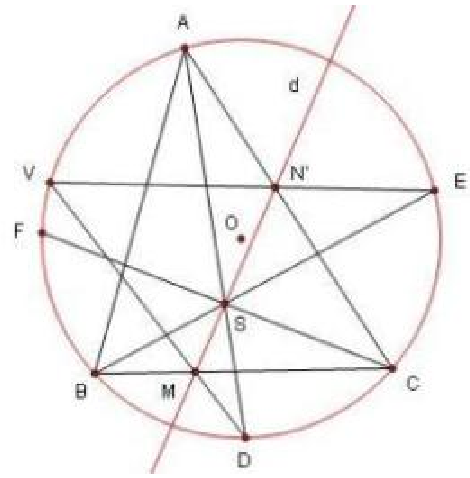


Sử dụng bổ đề ta dễ thấy: SM, CI và (O) đồng quy tại một điểm F; $SN, BI, (O)$ đồng quy tại một điểm E.

Bây giờ sử dụng định lí Pascal cho sáu điểm A, B, C, S, E, F ta suy ra M, I, N thẳng hàng.

Bài toán 4. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và một điểm S trong mặt phẳng. AS, BS, CS cắt lại (O) tương ứng ở D, E, F. Một đường thẳng d qua S cắt BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P. Chứng minh rằng: DM, EN, FP và đường tròn (O) đồng quy.*

Lời giải



Gọi giao điểm thứ hai của DM và (O) là V, VE cắt AC ở N'.

Sử dụng định lí Pascal cho bộ sáu điểm V, A, E, C, D, B ta suy ra M, S và N' thẳng hàng.

Từ đó ta khẳng định được N' chính là N,nên DM, EN và (O) đồng quy (1).

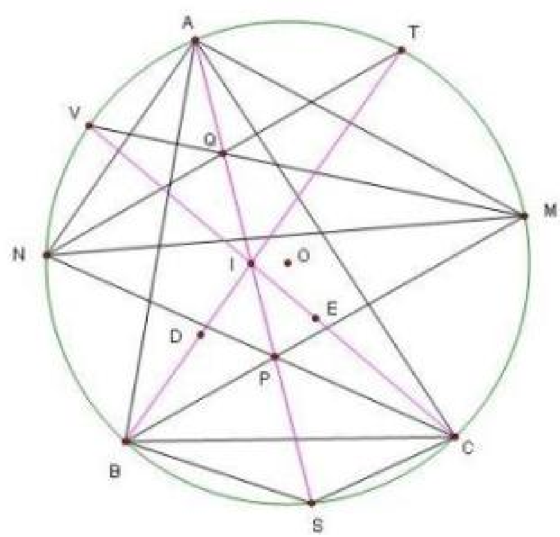
Tương tự có $DM, FP, (O)$ đồng quy (2). Từ (1) và (2) suy ra điều cần chứng minh.

Đây là bài toán khá đặc trưng trong việc vận dụng định lí Pascal, sự đơn giản của lời giải trình bày ở trên khó có thể gặp được trong một phương án khác.

Bây giờ chúng ta sẽ đến với một bài toán đồng quy thú vị đã từng góp mặt trong kì thi Olympic toán Quốc tế năm 1996, với bài toán này có khá nhiều lời giải đẹp cho nó và lời giải sử dụng định lí Pascal cũng là một trong số đó:

Bài toán 5. *Cho P là một điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $\angle APB - \angle C = \angle APC - \angle B$. Lấy D, E tương ứng là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác APB và APC. Chứng minh rằng AP, BD và CE đồng quy.*

Lời giải



Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC; AP, BP, CP cắt đường tròn (O) lần thứ hai ở S, M, N tương ứng; BD, CE cắt nhau ở I và cắt đường tròn (O) lần thứ hai tương ứng ở T, V.

Thế thì MV, MT chính là các đường phân giác của tam giác AMN (1)

Ta thấy: $\angle SAM = \angle APB = \angle PBS = \angle APB - \angle ASB = \angle APB - \angle C$

$= \angle APC - \angle B = \angle APC - \angle ASC = \angle NCS = \angle SAN$

Do vậy AS là đường phân giác của tam giác AMN (2)

Từ (1) và (2) suy ra AS, NT, MV đồng quy tại một điểm Q.

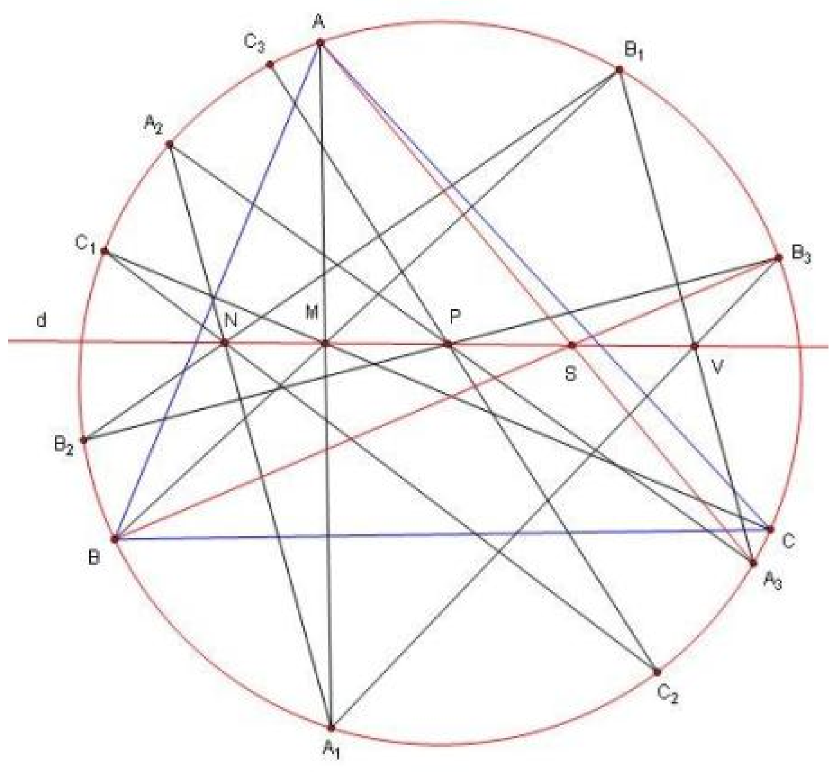
Sử dụng định lí Pascal cho sáu điểm B, N, V, T, M, C ta suy ra Q, I, P thẳng hàng.

Từ đây dễ thấy điều cần chứng minh.

Bài toán sau là một kết quả đồng quy rất đẹp của Darij Grinberg, thoạt nhìn bài toán có vẻ rắc rối nhưng nếu phân tích ngược bằng định lí Pascal thì mọi thứ lại trở nên thật rõ ràng và đơn giản.

Bài toán 6. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và ba điểm M, N, P cùng thuộc đường thẳng d. AM, BM, CM cắt lại (O) tương ứng ở A_1, B_1, C_1; A_1N, B_1N, C_1N cắt lại (O) tương ứng tại A_2, B_2, C_2; A_2P, B_2P, C_2P cắt lại (O) lần lượt tại A_3, B_3, C_3. Chứng minh rằng AA_3, BB_3, CC_3, d đồng quy.*

Lời giải



Giả sử AA_3, BB_3 cắt nhau tại S, giao điểm của B_1A_3, B_3A_1 là V.

Sử dụng định lí Pascal cho sáu điểm $B_1, A_3, B_3, A_1, A_2, B_2$ ta suy ra N, P, V thẳng hàng hay V nằm trên d (1)

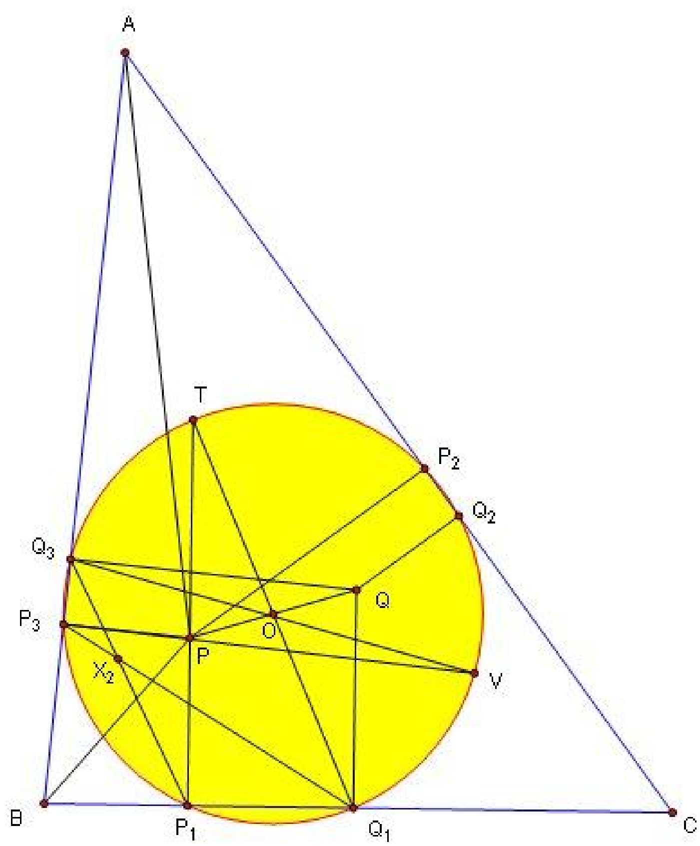
Lại áp dụng định lí Pascal cho sáu điểm B_1, A, B, A_1, A_3, B_3 suy ra M, S, V thẳng hàng, kết hợp với (1) ta được S thuộc d (2)

Tương tự trên, nếu gọi giao điểm của là S' thì S' nằm trên d (3)
Từ (2) và (3) ta sẽ có điều cần chứng minh.

Bài toán 7 dưới đây là một kết quả rất đẹp về hai điểm đẳng giác và đi kèm nó chính là một lời giải cũng rất đẹp và khéo léo bằng định lí Pascal, mời các bạn cùng "thưởng thức":

Bài toán 7. *Cho P và Q là hai điểm liên hợp đẳng giác đối với tam giác ABC.Từ P kẻ $PP_1 \perp BC, PP_2 \perp CA, PP_3 \perp AB$. Từ Q kẻ $QQ_1 \perp BC, QQ_2 \perp CA, QQ_3 \perp AB$. Gọi giao điểm của các cặp đường thẳng $(P_2Q_3, P_3Q_2), (P_1Q_3, P_3Q_1), (P_1Q_2, P_2Q_1)$ lần lượt là X_1, X_2, X_3. Chứng minh rằng X_1, X_2, X_3, P, Q thẳng hàng.*

Lời giải



Gọi O là trung điểm của PQ, ta biết rằng các điểm P_1, P_2, Q_1, Q_2, Q_3 cùng thuộc một đường tròn tâm O.

Bây giờ, kẻ các đường kính Q_1T, Q_3V của (O).

Ta thấy ngay: T, P, P_1 thẳng hàng, và V, P, P_3 thẳng hàng.

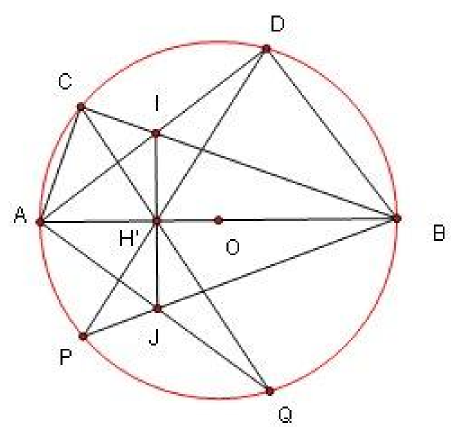
Do vậy, sử dụng định lí Pascal cho bộ sáu điểm P_3, Q_3, T, P_1, Q_1, V ta thu được O, P, X_2 thẳng hàng hay X_2 thuộc PQ.

Hoàn toàn tương tự ta cũng có X_1, X_3 cũng thuộc PQ.

Kết thúc mục một này sẽ là một bài toán đơn giản mà tác giả tin tưởng rằng ai đang đọc bài viết này cũng giải được nó, tuy nhiên lời giải sau đây bằng định lí Pascal của Greg thật sự thú vị...

Bài toán 8. *Cho hai điểm C, D nằm trên đường tròn (O) đường kính AB. AD cắt BC ở I. Kẻ IH vuông góc với AB. Chứng minh rằng $\angle IHC = \angle IHD$.*

Lời giải



Lấy P, Q đối xứng với C, D qua AB. Ta dễ thấy P, Q thuộc (O).

Gọi giao điểm của BP và AQ là J, của PD và CQ là H'.

Từ tính chất của phép đối xứng trục ta có H' nằm trên AB, IJ vuông góc với AB

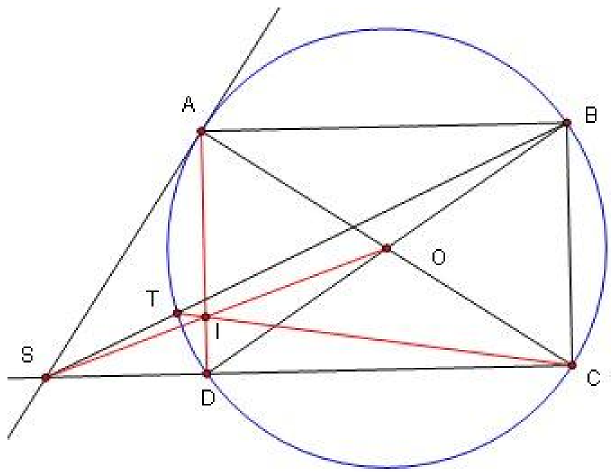
Sử dụng định lí Pascal cho sáu điểm A, B, C, D, P, Q ta được I, H', J thẳng hàng, kết hợp với trên ta có H' chính là H.
Như vậy $\angle IHC = \angle PHJ = \angle IHD$.

II. Áp dụng định lí Pascal cho sáu điểm không phân biệt

Như các bạn thấy ở phần trước, định lí Pascal luôn được sử dụng với sáu điểm hoàn toàn phân biệt, tuy nhiên định lí Pascal vẫn đúng nếu như sáu điểm ấy có thể không phân biệt (Các bạn có thể chứng minh tương tự như khi chứng minh với sáu điểm phân biệt), đó là một điều thú vị và ở mục này chúng ta sẽ nghiên cứu ứng dụng của định lí Pascal trong những trường hợp đó. Ta có bài toán mở đầu:

Bài toán 9. *Cho hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp (O). Tiếp tuyến của (O) tại A cắt CD ở S. BS cắt lại đường tròn ở T. Chứng minh rằng CT, SO và AD đồng quy.*

Lời giải

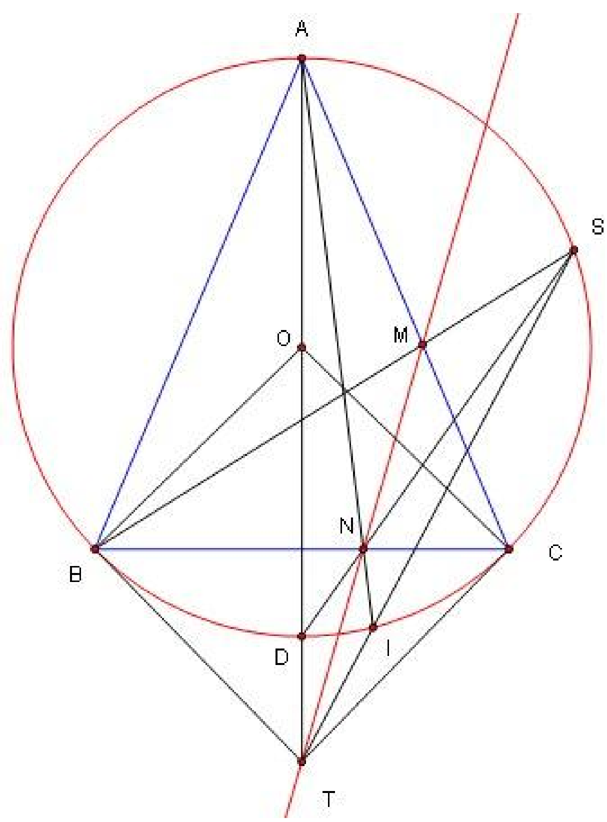


Gọi giao điểm của CT và AD là I. Sử dụng định lí Pascal cho sáu điểm A,B,C,D,T,A ta suy ra S,I,O thẳng hàng. Do đó nhận được điều cần chứng minh.

Tiếp theo chúng ta sẽ cùng xem xét một bài toán chứng minh đường thẳng đi qua điểm cố định của tác giả bài viết này, nó đã có mặt trong [6a] nhưng ở đây chúng ta sẽ không trình bày phương án cực và đối cực cho nó mà sẽ trình bày một lời giải rất ngắn gọn sử dụng định lí Pascal.

Bài toán 10. *Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$) nội tiếp đường tròn (O). Kẻ đường kính AD của đường tròn. S là một điểm di động trên đường tròn. SB cắt AC ở M, SD cắt BC ở N. Chứng minh rằng MN luôn đi qua một điểm cố định.*

Lời giải



Giả sử BM, AN cắt lại (O) tương ứng ở S, I; tiếp tuyến của (O) tại C cắt SI ở T

Chú ý rằng SN, IN tương ứng là phân giác của $\angle BSC, \angle BIC$.

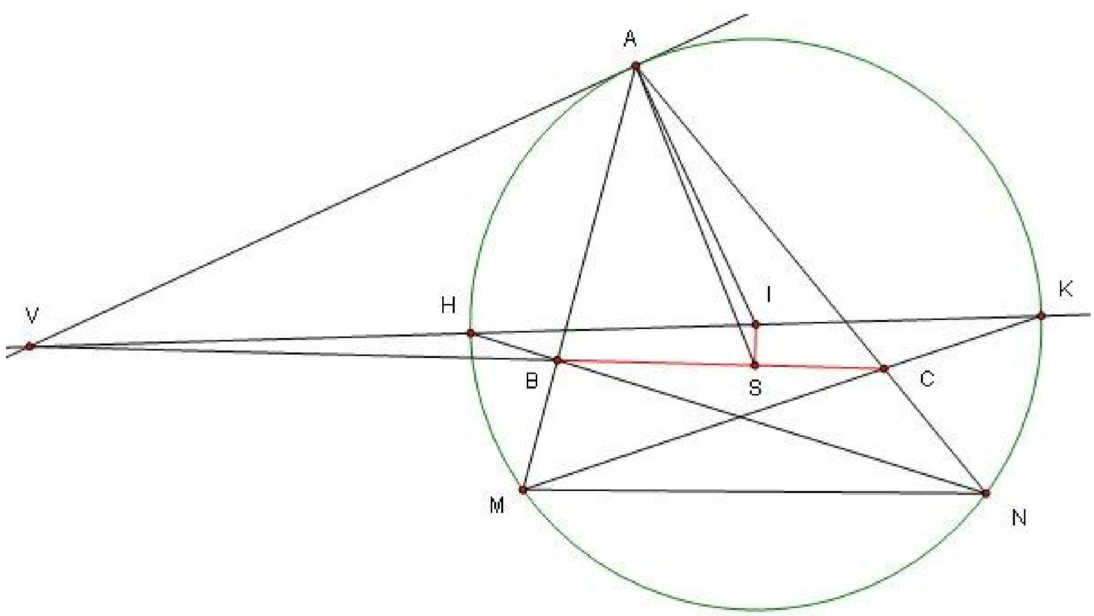
Do đó $\dfrac{SB}{SC} = \dfrac{NB}{NC} = \dfrac{IB}{IC}$

Vì vậy $BSCI$ là tứ giác điều hòa; nên SI, tiếp tuyến tại B và tiếp tuyến tại C của (O) đồng quy, nói cách khác T chính là giao điểm của hai tiếp tuyến tại B, C của (O) nên T cố định.

Cuối cùng sử dụng định lí Pascal cho sáu điểm A, B, C, C, S, I suy ra M, N, T thẳng hàng và nhận được điều cần chứng minh.

Bài toán 11. *Cho tam giác ABC và điểm S thuộc cạnh BC. Trên các tia AB, AC lấy tương ứng các điểm M, N sao cho $\angle AMC = \frac{1}{2}\angle ASC$, $\angle ANB = \frac{1}{2}\angle ASB$. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN. Chứng minh rằng $IS \perp BC$.*

Lời giải



Giả sử NB, MC cắt lại (I) tương ứng ở H, K; HK cắt tiếp tuyến tại A của (I) ở V.

Sử dụng định lí Pascal cho sáu điểm A, A, H, K, M, N ta thu được V, B, C thẳng hàng.

Bây giờ bài toán đã khá đơn giản. Để ý rằng $\angle HIA = 2\angle HNA = \angle ASV$ suy ra tứ giác $AISV$ nội tiếp.

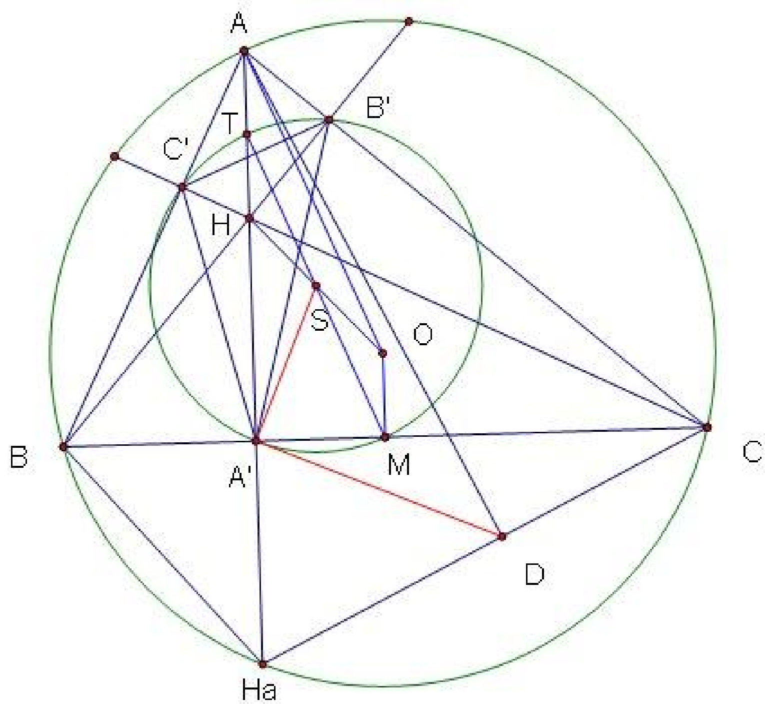
Do đó $\angle ISV = 180^\circ - \angle IAV = 90^\circ$.

Kế đến là một bài toán thú vị của Trần Quang Hùng, được giới thiệu trên diễn đàn Math-Scope.org (Xem [6*b*])

Bài toán 12. *Cho tam giác ABC trực tâm H gọi H_a, H_b, H_c là điểm đối xứng của H qua BC, CA, AB; gọi d_a là đường thẳng Simson của A tương ứng với H_aBC, tương tự với d_b, d_c thì d_a, d_b, d_c tạo thành tam giác thấu xạ với $A'B'C'$, trong đó A', B', C' là các chân đường cao kẻ từ*

A, B, C. (Ghi chú: Hai tam giác được gọi là thấu xạ nếu ba đường thẳng nối các đỉnh tương ứng của hai tam giác đồng quy)

Lời giải



Sử dụng định lí Desagues chúng ta sẽ chỉ cần chứng minh các giao điểm A'', B'', C'' của các cặp $(B'C', d_a), (C'A', d_b), (A'B', d_c)$ thẳng hàng.

Chú ý rằng theo kết quả đã biết thì H_a, H_b, H_c nằm trên đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC.

Gọi M, S, T tương ứng là các trung điểm của BC, OH, AH thế thì A', B', C', M, T cùng thuộc đường tròn Euler tâm S của tam giác ABC.

Bây giờ gọi D là hình chiếu của A trên H_aC. Ta có thể thấy:

$$(A'D, A'C) \equiv (AD, AC) \equiv (AH, AO) \equiv (TA', TM)\ (mod \pi)$$

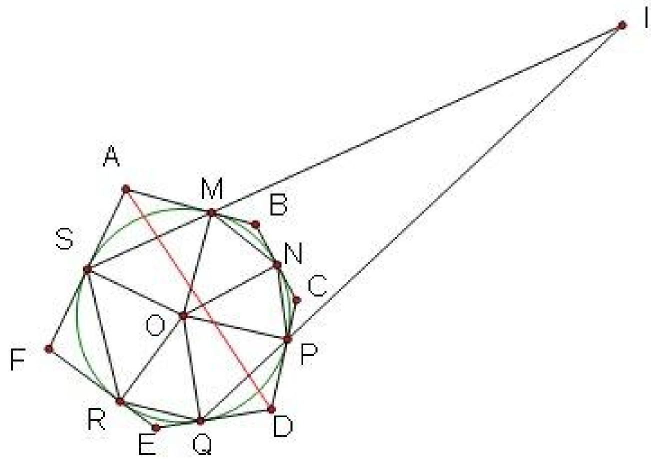
Suy ra DA' là tiếp tuyến của (S), dễ thấy DA' chính là d_a nên sử dụng định lí Pascal cho sáu điểm A', A', B', B', C', C' ta sẽ thu được $A", B", C"$ thẳng hàng, tức là có điều cần chứng minh.

III. Định lí Pascal với cực và đối cực

Định lí Pascal rất thú vị, cực và đối cực cũng rất thú vị và còn một điều cũng rất thú vị nữa là không ít trường hợp chúng ta cần kết hợp hai công cụ thú vị ấy để giải quyết các bài toán, một ví dụ kinh điển của phần này chính là phép chứng minh cho một định lí rất nổi tiếng của hình học - định lí Brianchon:

Bài toán 13. *Chứng minh rằng ba đường chéo chính của một lục giác ngoại tiếp đồng quy.*

Lời giải



Ta kí hiệu $ABCDEF$ là lục giác ngoại tiếp (O). Tiếp điểm của (O) trên AB, BC, CD, DE, EF, FA lần lượt là M, N, P, Q, R, S.

Xét cực và đối cực đối với (O)

Gọi I, J, K lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng $(SM, PQ), (MN, QR), (NP, RS)$

Dùng định lí Pascal cho lục giác nội tiếp $MNPQRS$ ta có I, J, K thẳng hàng, thế thì các đường đối cực của I, J, K đồng quy.

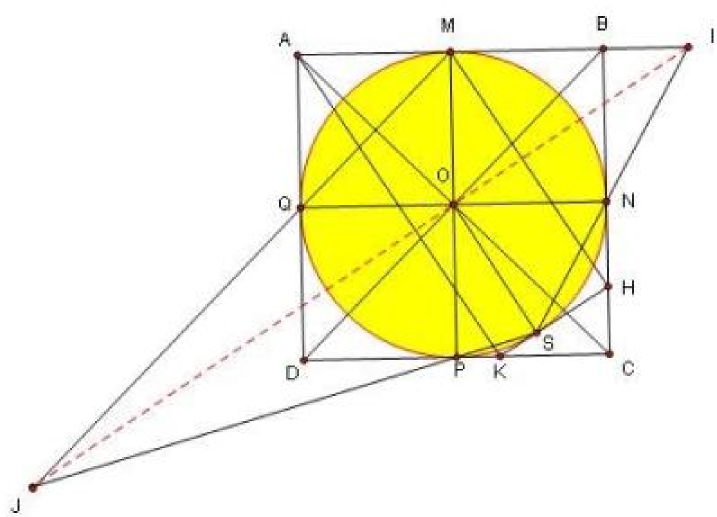
Dễ thấy các đường đối cực của I, J, K lần lượt là AD, BE, CF nên ta có AD, BE, CF đồng quy.

Như vậy ta có điều cần chứng minh!

Tiếp đến là hai bài toán khá thú vị về quan hệ song song:

Bài toán 14. *Cho hình vuông $ABCD$ ngoại tiếp (O). Tiếp điểm của (O) trên AB, BC, CD, DA lần lượt là M, N, P, Q. Một điểm S nằm trên cung nhỏ PN của (O). Tiếp tuyến của (O) tại S cắt BC, CD lần lượt tại H, K. Chứng minh rằng $MH//AK$*

Lời giải



Xét cực và đối cực đối với (O).

Giả sử SN cắt AB ở I, SP cắt MQ ở J.

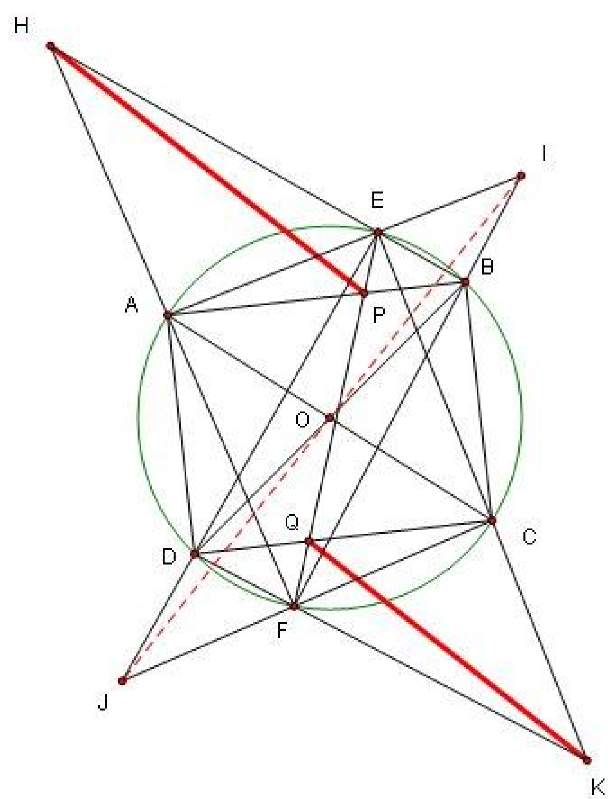
Áp dụng định lí Pascal cho sáu điểm M, M, Q, P, S, N ta thu được I, O, J thẳng hàng.

Mặt khác ta thấy rằng I, J lần lượt là các cực của MH, AK nên $MH//AK$ (vì cùng vuông góc với IJ)

Bài toán cuối cùng của phần này là do tác giả đề xuất, về tư tưởng cũng tương tự bài toán 14 nhưng nó còn mang một ý nghĩa khác...

Bài toán 15. Cho sáu điểm A, B, C, D, E, F cùng thuộc một đường tròn (O) sao cho $ABCD$ là hình chữ nhật. Giả sử EF cắt AB, CD lần lượt ở P, Q; BE cắt AF ở H; CE cắt DF ở K. Chứng minh rằng $PH//QK$.

Lời giải



Xét cực và đối cực đối với (O).

Giả sử AE cắt BF ở I, DE cắt CF ở J.

Theo định lí Pascal cho sáu điểm A, B, C, F, E, F ta có I, O, J thẳng hàng.

Ta nhận thấy I, J chính là các cực của HP, QK nên PH//QK.

Bây giờ giả sử cho E trùng vào B, ta sẽ thu được ngay một kết quả rất quen biết đó là ba đường cao trong một tam giác đồng quy. Nói cách khác bài toán 15 chính là một mở rộng cho kết quả ấy.

IV. Định lí Pascal và bài toán con bướm đối với đường tròn

Chúng ta chắc hẳn đã rất quen biết với kết quả rất đẹp sau ,chính là bài toán con bướm đối với đường tròn.

Bài toán 16. *Cho đường tròn (O) và dây cung AB. Gọi I là trung điểm của AB. Qua I vẽ hai dây cung tùy ý MN và PQ sao cho MP và NQ cắt AB tại E, F. Chứng minh rằng I là trung điểm của EF.*

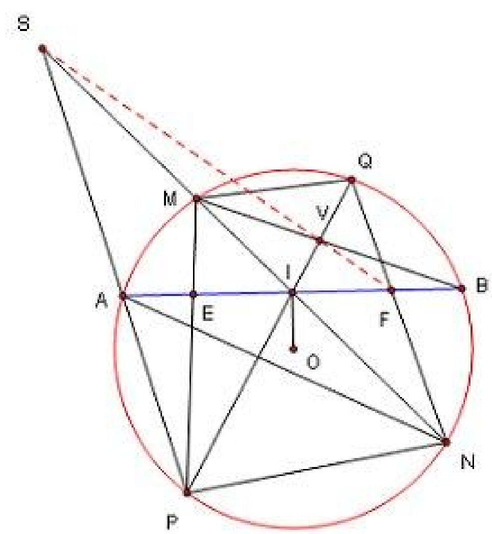
Lời giải

Chúng ta có khá nhiều chứng minh cho kết quả này, ở đây với định lí Pascal sẽ dẫn ra một cách tiếp cận không ngắn nhưng rất thú vị cho nó và chứng minh này cần sử dụng một bổ đề như sau:

Bổ đề. *Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D trong mặt phẳng. Giả sử AC cắt BD ở S. Một đường thẳng qua S cắt AB, BC, CD, DA lần lượt ở M, N, P, Q. Thế thì $IM = IP$ khi và chỉ khi $IN = IQ$.*

Bổ đề này thực ra chính là nội dung của bài toán con bướm đối với cặp đường thẳng và các bạn có thể tìm thấy một chứng minh cho nó tại mục I.39 của [6c].

Trở lại bài toán ban đầu:



Giả sử AP cắt MN ở S; QP cắt MB ở V (Trường hợp S, V không tồn tại khá đơn giản, xin dành bạn đọc).

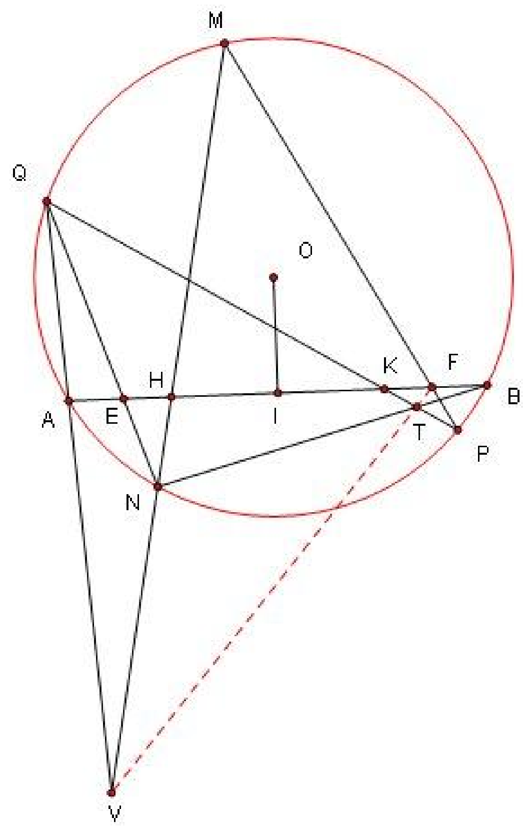
Áp dụng định lí Pascal cho sáu điểm A, B, M, N, P, Q ta thu được S, V, F thẳng hàng.

Tiếp tục sử dụng bổ đề cho bốn điểm S, V, M, P và đường thẳng AB với chú ý $IA = IB$ thì sẽ nhận được kết quả bài toán.

Trên đây là một lời giải khá mới mẻ với bài toán con bướm quen biết được tác giả tình cờ khám phá trong khi định kết hợp hai bài toán con bướm (tuy nhiên kết quả thu được lại chỉ là một trường hợp của định lí Pascal). Mạnh dạn hơn, tác giả đã thử tìm cách sử dụng ý tưởng trên vào bài toán con bướm mở rộng của Klamkin:

Bài toán 17. *Cho đường tròn (O) với dây cung AB nhận I làm trung điểm. Hai điểm H, K thuộc AB và đối xứng với nhau qua I. Gọi MN, PQ lần lượt là hai dây cung của (O) đi qua H, K. Giả sử QN, MP cắt AB tại E, F tương ứng. Chứng minh rằng $IE = IF$.*

Lời giải



Với bài toán này bổ đề trong bài toán 16 tỏ ra không có hiệu lực, chúng ta cần đến một bổ đề mở rộng hơn như sau:

Bổ đề. *Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D. Một đường thẳng d bất kì trong mặt phẳng cắt AB, BC, CD, DA lần lượt ở M, N, P, Q. Thế thì điểm I là trung điểm MP khi và chỉ khi I là trung điểm của NQ.*

Bổ đề này có thể suy ra trực tiếp và đơn giản từ định lí Blaikie, bạn đọc có thể xem mục I.40 trong [6c].

Trở lại với bài toán 17.

Giả sử MN cắt AQ ở V; QP cắt NP ở T. (Trường hợp V, T không tồn tại khá đơn giản xin dành bạn đọc)

Sử dụng định lí Pascal cho sáu điểm A, B, M, N, P, Q ta thu được F, T, V thẳng hàng.

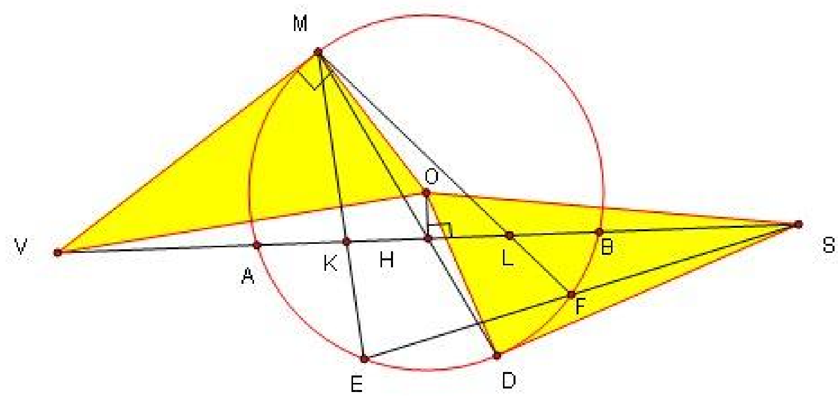
Đến đây sử dụng bổ đề cho bốn điểm V, T, Q, N và đường thẳng AB ta thu được kết quả bài toán.

Trong [7] cũng có một chứng minh rất đẹp mắt cho bài toán này bằng định lí Pascal, các bạn có thể tìm hiểu thêm.

Bài toán 17 sẽ giúp chúng ta có một cách tiếp cận khác rất thú vị với bài toán thách đấu trên Tạp chí toán tuổi thơ II số 25. Xin được trích dẫn lại bài toán để bạn đọc tiện theo dõi.

Bài toán 18. *Cho đường tròn (O); A và B là hai điểm thuộc (O); H là trung điểm của AB. Hai điểm K, L thuộc đoạn AB sao cho $HK = HL$. Điểm M thuộc (O); MH, MK, ML lần lượt cắt (O) tại D, E, F. Gọi S là giao điểm của AB và EF. Chứng minh rằng SD tiếp xúc với (O).*

Lời giải



Sử dụng bài toán số 17 trong trường hợp hai điểm trên đường tròn trùng nhau với chú ý $HK = HL$ ta nhận được kết quả là...

Nếu gọi V là giao điểm của tiếp tuyến tại M của (O) với AB thì $HV = HS$ (V luôn tồn tại)

Do đó $OV = OS$ (1)

Dễ thấy $OM = OD$ (2)

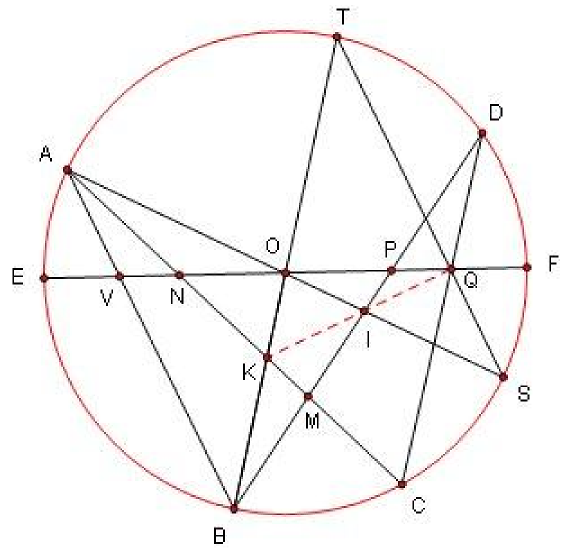
Ta lại có: $(VH, VO) \equiv (MH, MO)\ (mod\pi)$
Kết hợp với (1) và (2) suy ra rằng $(OM, OD) \equiv (OV, OS)\ (mod\pi)$
Vì vậy $(OM, OV) \equiv (OD, OS)\ (mod\pi)$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra hai tam giác OMV và ODS bằng nhau nên $\angle ODS = \angle OMV = 90°$

Bài toán cuối cùng là một bài toán khá đẹp đã được đăng trên Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ (Bài T5/297):

Bài toán 19. *Cho đường tròn tâm O đường kính EF. Lấy hai điểm N, P trên đường thẳng EF sao cho $ON = OP$. Từ điểm M nào đó nằm bên trong đường tròn mà không thuộc EF, kẻ đường thẳng MN cắt đường tròn tại A và C, đường thẳng MP cắt đường tròn tại B và D sao cho B và O nằm khác phía đối với AC. Gọi K là giao điểm của OB và AC, Q là giao điểm của EF và CD. Chứng minh rằng các đường thẳng KQ, BD và AO đồng quy.*

Lời giải



Giả sử AO cắt BD ở I và cắt lại (O) ở S; BO cắt lại (O) ở T; AB cắt EF ở V.

Theo bài toán 17 sẽ có $OV = OQ$.

Mặt khác $ATSB$ là hình chữ nhật nên dễ thấy Q thuôc TS.

Đến đây sử dụng định lí Pascal cho sáu điểm A, T, D, S, C, B ta thu được K, I, Q thẳng hàng.

Các bạn hãy thử mở rộng bài toán này nhé!

Qua 19 bài toán vừa rồi, tác giả hi vọng rằng định lí Pascal đã phần nào gần gũi hơn với bạn đọc, cuối bài viết là một số bài tập hay khác liên quan dành cho các bạn tự luyện tập.

Bài tập đề nghị

Bài 1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Một đường thẳng đi qua O cắt hai cạnh AB, AC lần lượt tại M, N. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của CM, BN, MN. Chứng minh bốn điểm I, J, K, O nằm trên một đường tròn.

Bài 2. Cho ngũ giác lồi $ABCDE$ có $DC = DE$ và $\angle BCD = \angle DEA = \frac{\pi}{2}$. Gọi F là một điểm nằm trên đoạn thẳng AB sao cho $\dfrac{AF}{BF} = \dfrac{AE}{BC}$. Chứng minh rằng $\angle FCE = \angle ADE$ và $\angle FEC = \angle BDC$ (Thi vô địch quốc gia Ba Lan 1997)

Bài 3. (Virgil Nicula) Cho tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp (I) của nó tiếp xúc với các cạnh AB, AC tại E, F tương ứng. Đường thẳng EF cắt đường tròn ω đường kính BC tại X, Y sao cho X, F nằm về hai phía của AI.Đường tròn ω cắt AB, AC tương ứng tại M, N. Giả sử MX cắt NY tại K; NX cắt MY ở L. Chứng minh rằng K thuộc AI và L thuộc HI, trong đó H là trực tâm của tam giác ABC.

Bài 4. Một đường tròn cắt các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC lần lượt tại $D_1, D_2; E_1, E_2; F_1, F_2$. D_1E_1 cắt D_2F_2 ở L; E_1F_1 cắt E_2D_2 ở M; F_1D_1 cắt F_2E_2 ở N. Chứng minh rằng AL, BM và CN đồng quy. (Chinese Math Olympiad 2005)

Bài 5. Cho tam giác ABC không cân nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh rằng các đường tròn $(AOM), (BON), (COP)$ có hai điểm chung.

Bài 6. Hãy sử dụng định lí Pascal với sáu điểm không phân biệt để chứng minh cho định lí Brianchon.

Bài 7. Cho tứ giác $PQRS$ ngoại tiếp đường tròn tâm O; PR cắt QS ở T. H_A, H_B, H_C, H_D tương ứng là trực tâm của các tam giác POQ, QOR, ROS, SOP. Chứng minh rằng T, H_A, H_B, H_C, H_D thẳng hàng.

Bài 8. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp một đường tròn (O). Tiếp điểm của (O) trên AB, BC, CD, DA lần lượt là M, N, P, Q; BP, BQ cắt lại (O) tương ứng tại F, E. Chứng minh rằng ME, NF và BD đồng quy. (MOP 1995)

Bài 9. Gọi O là tâm của đường tròn có các đường kính BB_t, CC_t, M_tN_t và các dây cung BA_b, CA_c. Giả sử rằng BA_b, CA_c cắt M_tN_t tương ứng tại M, N. Gọi K_b, K_c là giao điểm thứ hai của NB_t, NC_t với đường tròn. Chứng minh rằng A_b, A_c trùng nhau khi và chỉ khi K_b, K_c trùng nhau.

Bài 10. Xét một lục giác lồi nội tiếp $ABCDEF$. Đường chéo BF cắt AE, AC lần lượt tại M, N. Đường chéo BD cắt CA, CE lần lượt tại P, Q. Đường chéo DF cắt EC, EA lần lượt tại R, S. Chứng minh rằng MQ, NR và PS đồng quy. (Bài T12/344 Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ).

Tài liệu tham khảo

[1] Milivoje Lukic, Projective Geometry, Olympiad Traning Materials

Link: http : //www.imomath.com/tekstkut/projg_ml.pdf

[2] Nguyễn Minh Hà, Nguyễn Xuân Bình, Bài tập nâng cao và một số chuyên đề Hình học 10, NXB Giáo dục 2006.

[3] V.V.Praxolov, Các bài toán về hình học phẳng, NXB Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh.

[4] Tạp chí Toán tuổi thơ II số 25, 27, 54

[5] Nguyễn Phạm Đạt, Một số bài toán sử dụng định lí Pascal.

[6] Diễn đàn MathScope. Link:

http : //forum.mathscope.org/showthread.php?t = 7287

http : //forum.mathscope.org/showthread.php?t = 7198

http : //forum.mathscope.org/showthread.php?t = 4986

[7] Darij Grinberg, On cyclic quadrilaterals and the butterfly theorem

Link: http : //www.cip.ifi.lmu.de/ ∼ grinberg/Butterfly.zip

[8] Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ số 301, 294

[9] Kirans Kedlaya, Geometry Unbound

Link: http : //www − math.mit.edu/ ∼ kedlaya/geometryunbound/gu − 060118.pdf

[10] Mathematical Excalibur vol.10 no. 3, vol. 11 no. 2

Link: http : //www.math.ust.hk/excalibur/

[11] Tuyển tập 30 năm tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, NXB Giáo dục 2004.

[12] Diameters and Chords, Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles

Link: http : //www.cut − the − knot.org/Curriculum/Geometry/DiametersAndChords.shtml

Bất đẳng thức Turkevici và một số dạng mở rộng

Võ Quốc Bá Cẩn - Sinh viên Đại học Y Dược Cần Thơ, Thành phố Cần Thơ

A- Mở đầu

Trong bài này, chúng ta sẽ cùng bàn về bất đẳng thức nổi tiếng sau:

Bài toán 1. *Chứng minh rằng nếu a, b, c, d là các số thực không âm thì*

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd \geq a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2.$$

Bất đẳng thức này có tên là bất đẳng thức *Turkevici* do nó được nhà toán học *Turkevici* đề nghị đầu tiên trên tạp chí *Kvant* của Nga vào năm 1979. Đây là một bất đẳng thức đẹp và không hề dễ để ta giải nó. Không những thế, nó còn ẩn chứa nhiều kết quả mở rộng mạnh và thú vị khiến ta không thể nào thoát khỏi sự cuốn hút, kéo ta vào vòng xoáy đào sâu về nó. Bài viết này, chúng tôi sẽ giới thiệu đến các bạn một số chứng minh của chúng tôi cho bất đẳng thức nổi tiếng này cùng với một số mở rộng của nó.

B - Một số chứng minh

Cách chứng minh thứ nhất

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $0 \leq a \leq b \leq c \leq d$, khi đó xét hàm số sau

$$f(d) = a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd - a^2b^2 - a^2c^2 - a^2d^2 - b^2c^2 - b^2d^2 - c^2d^2.$$

Ta có

$$f'(d) = 4d^3 + 2abc - 2d(a^2 + b^2 + c^2), \quad \text{và} \quad f''(d) = 12d^2 - 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 0,$$

nên $f'(d)$ là hàm đồng biến và ta suy ra được

$$f'(d) \geq f'(c) = 4c^3 + 2abc - 2c(a^2 + b^2 + c^2) = 2c\left[(c^2 - b^2) + a(b - a)\right] \geq 0.$$

Vậy $f(d)$ là hàm đồng biến, suy ra

$$\begin{aligned} f(d) &\geq f(c) = a^4 + b^4 + c^4 + 2abc^2 - a^2b^2 - 2(a^2 + b^2)c^2 \\ &= (c^2 - b^2)^2 + a(2c^2 - ab - a^2)(b - a) \geq 0, \end{aligned}$$

nên bất đẳng thức của ta được chứng minh xong. Dễ thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d$ hoặc $a = 0, b = c = d$ và các hoán vị tương ứng.

Nhận xét. Cách giải này dựa trên ứng dụng của phương pháp khảo sát hàm số vào chứng minh bất đẳng thức. Đây là một phương pháp hay và được ứng dụng khá nhiều để giải toán bất đẳng thức. Một điều lưu ý khi ta lựa chọn hàm số để khảo sát là hãy chú ý đến đẳng thức của bài toán, chẳng hạn ở bài toán này, với giả thiết $a \leq b \leq c \leq d$ thì ngoài bộ $(a, b, c, d) \sim (1, 1, 1, 1)$ ra, đẳng thức còn xảy ra tại $a = 0, b = c = d$ nên ta nên chọn hàm $f(d)$ như trên để tiện cho việc khảo sát!

Cách chứng minh thứ hai

Với giả thiết rằng $0 \leq a \leq b \leq c \leq d$, ta thấy rằng kết quả của bài toán là hiển nhiên dựa trên đẳng thức sau

$$\begin{aligned} &a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd - a^2b^2 - a^2c^2 - a^2d^2 - b^2c^2 - b^2d^2 - c^2d^2 = \\ = \ &(c - d)^2(a + c + d)(c + d - a) + (d^2 - b^2)(c^2 - b^2) + a(b - a)(2cd - ab - a^2). \end{aligned}$$

Cách chứng minh thứ ba

Đây là một lời giải bằng phương pháp dồn biến của *Gabriel Dospinescu* ở [1]. Đặt $x = a^2$, $y = b^2$, $z = c^2$, $t = d^2$, khi đó bất đẳng thức của ta được viết lại là

$$f(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2\sqrt{xyzt} - xy - xz - xt - yz - yt - zt \ge 0.$$

Do tính đối xứng nên ta có thể giả sử một cách không mất tổng quát rằng $t = \min\{x, y, z, t\}$. Với giả thiết này, ta sẽ chứng minh $f(x, y, z, t) \ge f(u, u, u, t) \ge 0$, với $u = \sqrt[3]{xyz}$. Thật vậy, ta thấy rằng bất đẳng thức này tương đương với

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \ge t\,(x + y + z - 3u)\,,$$

hay là

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \ge t\,(x + y + z - 3\sqrt[3]{xyz})\,.$$

Do $t \le \sqrt[3]{xyz}$ nên ta chỉ cần chứng minh được

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \ge \sqrt[3]{xyz}\,(x + y + z - 3\sqrt[3]{xyz})\,,$$

tương đương

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \ge \sqrt[3]{xyz}(x + y + z) + xy + yz + zx.$$

Áp dụng bất đẳng thức *Schur* dạng bậc 3 cho bộ $(x^{2/3}, y^{2/3}, z^{2/3})$, ta được

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \ge \sum_{cyc} x^{2/3}y^{2/3}(x^{2/3} + y^{2/3}).$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức *AM – GM* thì ta có

$$\sum_{cyc} x^{2/3}y^{2/3}(x^{2/3} + y^{2/3}) \ge 2(xy + yz + zx),$$

và

$$\begin{aligned}\sum_{cyc} x^{2/3}y^{2/3}(x^{2/3} + y^{2/3}) &= \sum_{cyc} x^{4/3}(y^{2/3} + z^{2/3})\\ &\ge 2x^{4/3}y^{1/3}z^{1/3} + 2y^{4/3}z^{1/3}x^{1/3} + 2z^{4/3}x^{1/3}y^{1/3}\\ &= 2\sqrt[3]{xyz}(x + y + z).\end{aligned}$$

Cộng tương ứng 2 bất đẳng thức này rồi chia cả 2 vế cho 2, ta thu được

$$\sum_{cyc} x^{2/3}y^{2/3}(x^{2/3} + y^{2/3}) \ge \sqrt[3]{xyz}(x + y + z) + xy + yz + zx.$$

Từ đó kết hợp với bất đẳng thức *Schur* ở trên, ta có thể dễ dàng thu được

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \ge \sqrt[3]{xyz}(x + y + z) + xy + yz + zx,$$

hay nói cách khác, bất đẳng thức $f(x, y, z, t) \ge f(u, u, u, t)$ được chứng minh. Và với bất đẳng thức này, ta thấy rằng để chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta chỉ cần chứng minh được $f(u, u, u, t) \ge 0$, tức là $t^2 + 2u\sqrt{ut} \ge 3ut$, đây là một kết quả hiển nhiên đúng theo *AM – GM*. Phép chứng minh của ta được hoàn tất.

Nhận xét. Đây là một cách dồn biến rất đặc sắc, thay vì như các phép dồn biến thông thường đưa về 2 biến bằng nhau trước rồi tiếp tục lập luận thì tác giả lời giải đã dồn một cách trực tiếp đưa về ba biến bằng nhau để giải. Cách dồn biến này khá mạnh và sử dụng nó, ta có giải được một số kết quả tương tự như sau

1. Nếu a, b, c, d là các số không âm có tổng bằng 4 thì

$$3(a^2+b^2+c^2+d^2)+4abcd \ge 16.$$

(*Nguyễn Anh Cường*)

2. Nếu a, b, c, d là các số không âm có tổng bằng 1 thì

$$abc+bcd+cda+dab \le \frac{1}{27}+\frac{176}{27}abcd.$$

(*Nguyễn Minh Đức*, IMO Shortlist 1996)

Cách chứng minh thứ tư

Tương tự với lời giải 3, ta cũng sẽ chứng minh bất đẳng thức sau với x, y, z, t là các số không âm

$$x^2+y^2+z^2+t^2+2\sqrt{xyzt} \ge xy+yz+zx+xt+yt+zt,$$

tương đương

$$x^2+y^2+z^2+t^2+2\sqrt{xyzt} \ge (x+z)(y+t)+xz+yt,$$

hay là

$$\frac{1}{2}(x-z)^2+\frac{1}{2}(y-t)^2+\frac{1}{2}(x+z-y-t)^2 \ge \left(\sqrt{xz}-\sqrt{yt}\right)^2.$$

Bây giờ, ta giả sử $x \ge z \ge y \ge t$, và đặt $x=t+m, y=t+n, z=t+p$, với $m \ge p \ge n \ge 0$, thì bất đẳng thức trên có thể được viết lại thành

$$\frac{1}{2}(m-p)^2+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}(m+p-n)^2 \ge \left[\sqrt{(t+m)(t+p)}-\sqrt{t(t+n)}\right]^2.$$

Nếu $n+p \ge m$ thì ta có $0 \le \sqrt{(t+m)(t+p)}-\sqrt{t(t+n)} \le \sqrt{mp}$. Thật vậy, bất đẳng thức bên trái là hiển nhiên nên ta sẽ chứng minh bất đẳng thức bên phải, ta viết lại nó như sau

$$\sqrt{(t+m)(t+p)} \le \sqrt{t(t+n)}+\sqrt{mp}.$$

Bình phương 2 vế và thu gọn, ta thấy bất đẳng thức này tương đương với từng bất đẳng thức trong dãy sau

$$(t+m)(t+p) \le t(t+n)+mp+2\sqrt{tmp(t+n)},$$

$$t(m-n+p) \le 2\sqrt{tmp(t+n)},$$

$$t(m-n+p)^2 \le 4mp(t+n),$$

$$t(m^2+n^2+p^2-2mn-2mp-2np) \le 4mnp.$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng bởi vì

$$m^2+n^2+p^2-2mn-2mp-2np = m(m-n-p)+n(n-m)+p(p-m)-2np \le 0.$$

Do đó, khẳng định của ta ở trên là đúng, và sử dụng nó, ta có thể đưa bất đẳng thức về chứng minh

$$\frac{1}{2}(m-p)^2+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}(m+p-n)^2 \ge mp, \quad \text{hay} \quad m^2+n^2+p^2 \ge mn+np+pm.$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng theo AM – GM.

Nếu $m \ge n+p$ thì ta có $0 \le \sqrt{(t+m)(t+p)}-\sqrt{t(t+n)} \le \frac{m+p-n}{\sqrt{2}}$. Thật vậy, bất đẳng thức này tương đương với

$$\sqrt{(t+m)(t+p)} \le \frac{m+p-n}{\sqrt{2}}+\sqrt{t(t+n)},$$

hay là

$$(t+m)(t+p) \le \frac{(m+p-n)^2}{2} + t(t+n) + (m+p-n)\sqrt{2t(t+n)},$$

$$t(m+p-n) + mp \le \frac{(m+p-n)^2}{2} + (m+p-n)\sqrt{2t(t+n)}.$$

Ta có $(m+p-n)\sqrt{2t(t+n)} \ge (m+p-n)t\sqrt{2} \ge (m+p-n)t$, và

$$\frac{(m+p-n)^2}{2} - mp = \frac{1}{2}m(m-2n) + \frac{1}{2}(n-p)^2 \ge 0 \text{ (do } m \ge n+p \ge 2n),$$

nên bất đẳng thức trên là đúng, từ đó ta suy ra được

$$\left[\sqrt{(t+m)(t+p)} - \sqrt{t(t+n)}\right]^2 \le \frac{1}{2}(m+p-n)^2 \le \frac{1}{2}(m-p)^2 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}(m+p-n)^2.$$

Bất đẳng thức của ta được chứng minh xong.

Cách chứng minh thứ năm

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a \ge b \ge c \ge d$, khi đó với chú ý rằng

$$\sum_{cyc} a^4 - 4abcd = (a^2-b^2)^2 + (c^2-d^2)^2 + 2(ab-cd)^2,$$

và

$$3\sum_{cyc} a^4 - 2\sum_{sym} a^2b^2 = \sum_{sym}(a^2-b^2)^2,$$

ta có thể viết lại bất đẳng thức cần chứng minh như sau

$$(a^2-c^2)^2 + (b^2-c^2)^2 + (a^2-d^2)^2 + (b^2-d^2)^2 \ge 2(ab-cd)^2.$$

Bây giờ, áp dụng các bất đẳng thức *Cauchy Schwarz* và *AM – GM*, ta có

$$\begin{aligned}(a^2-d^2)^2 + (b^2-d^2)^2 &\ge \frac{1}{2}(a^2+b^2-2d^2)^2 \ge \frac{1}{2}(2ab-2d^2)^2 \\ &= 2(ab-d^2)^2 \ge 2(ab-cd)^2,\end{aligned}$$

nên bất đẳng thức trên là hiển nhiên, và phép chứng minh của ta được hoàn tất.

Cách chứng minh thứ sáu

Ta sẽ giả sử $a \ge b \ge c \ge d$ và viết lại bất đẳng thức cần chứng minh như sau

$$a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2 \ge d\left[d(a^2+b^2+c^2-d^2) - 2abc\right],$$

hay

$$(a^2-b^2)^2 + (b^2-c^2)^2 + (c^2-a^2)^2 \ge 2d\left[d(a^2+b^2+c^2-d^2) - 2abc\right].$$

Do $(a^2-b^2)^2 \ge 2d(a+b)(a-b)^2$, $(b^2-c^2)^2 \ge 2d(b+c)(b-c)^2$, $(c^2-a^2)^2 \ge 2d(c+a)(c-a)^2$ nên

$$(a^2-b^2)^2 + (b^2-c^2)^2 + (c^2-a^2)^2 \ge 2d\left[(a+b)(a-b)^2 + (b+c)(b-c)^2 + (c+a)(c-a)^2\right].$$

Từ đó ta có thể đưa bài toán về chứng minh

$$(a+b)(a-b)^2 + (b+c)(b-c)^2 + (c+a)(c-a)^2 \ge d(a^2+b^2+c^2-d^2) - 2abc,$$

tương đương

$$2(a^3+b^3+c^3+abc)-ab(a+b)-bc(b+c)-ca(c+a)\geq d(a^2+b^2+c^2-d^2).$$

Bây giờ, áp dụng bất đẳng thức *Schur* bậc 3, ta có $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\leq a^3+b^3+c^3+3abc$, nên để chứng minh bất đẳng thức này, ta chỉ cần chứng minh

$$2(a^3+b^3+c^3+abc)-(a^3+b^3+c^3+3abc)\geq d(a^2+b^2+c^2-d^2),$$

tương đương

$$a^3+b^3+c^3-abc\geq d(a^2+b^2+c^2-d^2).$$

Áp dụng bất đẳng thức *Chebyshev*, ta được

$$a^3+b^3+c^3\geq \frac{1}{3}(a+b+c)(a^2+b^2+c^2).$$

Do đó, ta cần chứng minh

$$\frac{1}{3}(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-abc\geq d(a^2+b^2+c^2)-d^3,$$

hay là

$$(a^2+b^2+c^2)(a+b+c-3d)\geq 3(abc-d^3).$$

Áp dụng bất đẳng thức *AM – GM*, ta có

$$\begin{aligned} 3(abc-d^3) &= 3\left(\sqrt[3]{abc}-d\right)\left(\sqrt[3]{a^2b^2c^2}+d\sqrt[3]{abc}+d^2\right)\leq 9\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\left(\sqrt[3]{abc}-d\right)\\ &\leq 3(a^2+b^2+c^2)\left(\sqrt[3]{abc}-d\right)\leq 3(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{a+b+c}{3}-d\right)\\ &= (a^2+b^2+c^2)(a+b+c-3d), \end{aligned}$$

nên bất đẳng thức trên là hiển nhiên đúng. Phép chứng minh của ta được hoàn tất.

Cách chứng minh thứ bảy

Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $a\geq b\geq c\geq d\geq 0$. Khi đó, đặt

$$\begin{aligned} A &= a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2=\sum_{a,b,c}(a^2-b^2)(a^2-c^2),\\ B &= d^2(ab+bc+ca)-d^2(a^2+b^2+c^2)=-d^2\sum_{a,b,c}(a-b)(a-c), \end{aligned}$$

và

$$C=d^4+2abcd-d^2(ab+bc+ca),$$

ta thu được

$$\begin{aligned} &a^4+b^4+c^4+d^4+2abcd-a^2b^2-a^2c^2-a^2d^2-b^2c^2-b^2d^2-c^2d^2=\\ &\quad= A+B+C=\sum_{a,b,c}(a^2-b^2)(a^2-c^2)-d^2\sum_{a,b,c}(a-b)(a-c)+C\\ &\quad= \sum_{a,b,c}(a^2-d^2)(a-b)(a-c)+(ab+bc+ca)\sum_{a,b,c}(a-b)(a-c)+C. \end{aligned}$$

Vì $a^2-d^2\geq b^2-d^2\geq c^2-d^2\geq 0$ nên

$$\begin{aligned} \sum_{a,b,c}(a^2-d^2)(a-b)(a-c) &\geq (a^2-d^2)(a-b)(a-c)+(b^2-d^2)(b-c)(b-a)\\ &\geq (b^2-d^2)(a-b)(a-c)+(b^2-d^2)(b-c)(b-a)\\ &= (b^2-d^2)(a-b)^2\geq 0. \end{aligned}$$

Ngoài ra, ta dễ dàng kiểm tra được

$$\sum_{a,b,c}(a-b)(a-c) \geq 0.$$

Do vậy, để chứng minh bất đẳng thức *Turkevici*, ta thấy rằng chỉ cần chứng minh $C \geq 0$ là đủ, tức là

$$d^3 + 2abc - d(ab+bc+ca) \geq 0.$$

Ta có

$$\begin{aligned} d^3 + 2abc - d(ab+bc+ca) &= d^3 - dab + c(2ab - ad - bd) \\ &\geq d^3 - dab + d(2ab - ad - bd) \\ &= d(d-a)(d-b) \geq 0. \end{aligned}$$

Nên bất đẳng thức $C \geq 0$ là hiển nhiên, và vì thế, phép chứng minh của ta được hoàn tất.

Nhận xét. Theo chúng tôi, hai lời giải 5 và 6 là hai lời giải đẹp và đặc sắc nhất cho bài toán này, bởi lẽ chúng chỉ hoàn toàn sử dụng những bất đẳng thức kinh điển như *AM – GM*, *Cauchy Schwarz* và *Schur*. Chúng cho ta thấy rằng dù hiện nay có nhiều phương pháp mạnh để giải bất đẳng thức đến đâu đi nữa thì các lời giải sử dụng bất đẳng thức kinh điển vẫn là những lời giải đẹp và sâu sắc nhất. Đây chính là vẻ đẹp của sự "*thô sơ*" mà hiệu quả. Ngoài 7 cách chứng minh này, còn có một số cách chứng minh khác như cách chứng minh dùng phương pháp dồn biến mạnh *SMV* của *Phạm Kim Hùng*, dùng phương pháp phân tích bình phương của *Michael Rozenberg* hay dùng phương pháp *EV* của *Vasile Cirtoaje*, ... Nhưng chúng tôi cho rằng những lời giải này đều phải dùng đến những công cụ quá mạnh, và chúng khiến bài toán mất đi vẻ đẹp của nó. Vì thế chúng tôi sẽ không giới thiệu chúng ở đây, nếu các bạn có hứng thú muốn tham khảo thêm những lời giải này thì có thể liên hệ trực tiếp với chúng tôi. Bây giờ chúng ta sẽ đến với những mở rộng của bài toán này

C- Một số mở rộng

Để ý rằng bất đẳng thức *Turkevici* tương đương với

$$3\sum_{cyc} a^4 + 4abcd \geq \left(\sum_{cyc} a^2\right)^2. \tag{1}$$

Với những dạng phát biểu như thế này, ta thường nghĩ đến liệu bất đẳng thức của ta có thể tổng quát cho n biến được không? May mắn thay, điều đó là được trong trường hợp này. Và ta có kết quả sau

Bài toán 2. *Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geq 2)$ là các số thực không âm. Khi đó ta có*

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + n\sqrt[n]{x_1^2 x_2^2 \cdots x_n^2} \geq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2.$$

Chứng minh của kết quả này, các bạn có thể tham khảo thêm ở [1].

Bây giờ, nếu ta áp dụng bất đẳng thức *Cauchy Schwarz*

$$\left(\sum_{cyc} a^2\right)^2 \leq \left(\sum_{cyc} a\right)\left(\sum_{cyc} a^3\right),$$

để đưa bất đẳng thức về chứng minh

$$3\sum_{cyc} a^4 + 4abcd \geq \left(\sum_{cyc} a\right)\left(\sum_{cyc} a^3\right).$$

Rất may mắn là kết quả này lại một lần nữa đúng, và nó chính là một trường hợp riêng của bài toán sau (được *Suranyi* đề nghị trong cuộc thi *Miklos Schweitzer Competition*)

Bài toán 3. *Chứng minh rằng nếu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số không âm thì*

$$(n-1)(x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n) + nx_1x_2\cdots x_n \geq (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \cdots + x_n^{n-1}).$$

(Suranyi)

Các bạn cũng có thể tham khảo thêm chứng minh của *Gabriel Dospinescu* ở [1].

Bây giờ, chúng ta sẽ đi đến kết quả mở rộng chính mà chúng tôi muốn giới thiệu đến các bạn ở phần này

Bài toán 4. *Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geq 2)$ là các số thực không âm. Chứng minh rằng với mọi số thực k, ta luôn có*

$$(n-1)\sum_{i=1}^n x_i^{n+k} + x_1x_2\cdots x_n \sum_{i=1}^n x_i^k \geq \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n x_i^{n+k-1}\right).$$

Ta thấy rằng kết quả mà *Suranyi* đề nghị thực chất chính là một trường hợp riêng của kết quả này (ứng với $k=0$). Để chứng minh nó, ta sẽ thực hiện phép quy nạp trên n tương tự như *Gabriel Dospinescu* đã thực hiện ở [1] để chứng minh bất đẳng thức *Suranyi.*

Với $n=2$ thì bất đẳng thức trên trở thành đẳng thức, còn với $n=3$ thì sau một vài biến đổi, ta thấy rằng nó tương đương với bất đẳng thức *Schur* dạng bậc 3

$$x_1^{k+1}(x_1-x_2)(x_1-x_3) + x_2^{k+1}(x_2-x_3)(x_2-x_1) + x_3^{k+1}(x_3-x_1)(x_3-x_2) \geq 0,$$

nên nó hiển nhiên đúng. Bây giờ, giả sử rằng bất đẳng thức trên đúng với n biến, ta sẽ chứng minh rằng nó cũng đúng với $n+1$ biến. Thật vậy, do tính thuần nhất nên không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$, khi đó ta cần chứng minh

$$n\left(\sum_{i=1}^n x_i^{n+k+1} + x_{n+1}^{n+k+1}\right) + x_{n+1}\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n x_i^k + x_{n+1}^k\right) \geq (n+x_{n+1})\left(\sum_{i=1}^n x_i^{n+k} + x_{n+1}^{n+k}\right).$$

Áp dụng giả thiết quy nạp, ta có

$$(n-1)\sum_{i=1}^n x_i^{n+k} + \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n x_i^k\right) \geq n\sum_{i=1}^n x_i^{n+k-1},$$

nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\begin{aligned} n\left(\sum_{i=1}^n x_i^{n+k+1} + x_{n+1}^{n+k+1}\right) + nx_{n+1}\sum_{i=1}^n x_i^{n+k-1} - (n-1)x_{n+1}\sum_{i=1}^n x_i^{n+k} + \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)x_{n+1}^{k+1} \\ \geq (n+x_{n+1})\left(\sum_{i=1}^n x_i^{n+k} + x_{n+1}^{n+k}\right), \end{aligned}$$

tương đương

$$n\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{n+k+1}-\sum_{i=1}^{n}x_i^{n+k}\right)-nx_{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{n+k}-\sum_{i=1}^{n}x_i^{n+k-1}\right)+$$
$$+x_{n+1}^{k+1}\left[\prod_{i=1}^{n}x_i-nx_{n+1}^{n-1}+(n-1)x_{n+1}^{n}\right]\ge 0.$$

+ Nếu $n+k-1\ge 0$ thì theo bất đẳng thức *Chebyshev*, ta có

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^{n+k}-\sum_{i=1}^{n}x_i^{n+k-1}=\sum_{i=1}^{n}x_i^{n+k}-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{n+k-1}\right)\ge 0.$$

Giả sử $x_1\ge x_2\ge\cdots\ge x_n\ge x_{n+1}$ (ta có thể giả sử điều này vì bất đẳng thức cần chứng minh là đối xứng), suy ra $0\le x_{n+1}\le 1$. Khi đó

$$\begin{aligned}
&n\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{n+k+1}-\sum_{i=1}^{n}x_i^{n+k}\right)-nx_{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{n+k}-\sum_{i=1}^{n}x_i^{n+k-1}\right)\ge\\
\ge\ &n\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{n+k+1}-\sum_{i=1}^{n}x_i^{n+k}\right)-n\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{n+k}-\sum_{i=1}^{n}x_i^{n+k-1}\right)\\
=\ &n\sum_{i=1}^{n}(x_i^{n+k+1}-2x_i^{n+k}+x_i^{n+k-1})=n\sum_{i=1}^{n}x_i^{n+k-1}(x_i-1)^2\ge 0.
\end{aligned}$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức *Bernoulli* (chú ý rằng $\frac{x_i-x_{n+1}}{x_{n+1}}\ge 0\ \forall i=1,2,\ldots,n$), ta được

$$\prod_{i=1}^{n}x_i=x_{n+1}^{n}\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{x_i-x_{n+1}}{x_{n+1}}\right)\ge x_{n+1}^{n}\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-x_{n+1}}{x_{n+1}}\right)=nx_{n+1}^{n-1}-(n-1)x_{n+1}^{n},$$

nên hiển nhiên

$$\prod_{i=1}^{n}x_i-nx_{n+1}^{n-1}+(n-1)x_{n+1}^{n}\ge 0.$$

Do đó, bất đẳng thức đã cho cũng đúng với $n+1$ biến. Theo nguyên lý quy nạp, ta suy ra được nó đúng với mọi $n\ge 2$.

+ Nếu $n+k-1\le 0$ thì theo bất đẳng thức *Chebyshev*, ta có

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^{n+k}-\sum_{i=1}^{n}x_i^{n+k-1}=\sum_{i=1}^{n}x_i^{n+k}-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{n+k-1}\right)\le 0.$$

Giả sử $x_1\le x_2\le\cdots\le x_n\le x_{n+1}$ (ta có thể giả sử điều này vì bất đẳng thức cần chứng minh là đối xứng), suy ra $x_{n+1}\ge 1$. Khi đó

$$\begin{aligned}
&n\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{n+k+1}-\sum_{i=1}^{n}x_i^{n+k}\right)-nx_{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{n+k}-\sum_{i=1}^{n}x_i^{n+k-1}\right)\ge\\
\ge\ &n\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{n+k+1}-\sum_{i=1}^{n}x_i^{n+k}\right)-n\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{n+k}-\sum_{i=1}^{n}x_i^{n+k-1}\right)\\
=\ &n\sum_{i=1}^{n}(x_i^{n+k+1}-2x_i^{n+k}+x_i^{n+k-1})=n\sum_{i=1}^{n}x_i^{n+k-1}(x_i-1)^2\ge 0.
\end{aligned}$$

Và theo bất đẳng thức *Bernoulli* (với chú ý rằng $0 \geq \frac{x_i - x_{n+1}}{x_{n+1}} \geq -1$), ta có

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_{n+1}^n \prod_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{x_i - x_{n+1}}{x_{n+1}}\right) \geq x_{n+1}^n \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - x_{n+1}}{x_{n+1}}\right) = nx_{n+1}^{n-1} - (n-1)x_{n+1}^n,$$

nên hiển nhiên

$$\prod_{i=1}^{n} x_i - nx_{n+1}^{n-1} + (n-1)x_{n+1}^n \geq 0.$$

Do đó, bất đẳng thức đã cho cũng đúng với $n+1$ biến. Theo nguyên lý quy nạp, ta suy ra được nó đúng với mọi $n \geq 2$.

Phép chứng minh của ta được hoàn tất.

Với lời giải của kết quả mở rộng trên, chúng tôi xin được kết thúc bài viết của mình ở đây. Rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của bạn đọc cho bài viết này. Xin chân thành cảm ơn!

Tài liệu tham khảo

[1] T. Andreescu, V. Cartoaje, G. Dospinescu, M. Lascu, *Old and New Inequalities*, Vol. 1, GIL, 2004.

[2] V. Q. B. Can, C. Pohoaţă, *Old and New Inequalities*, Vol. 2, GIL, 2008.

[3] I. Boreico, V. Q. B. Can, Mircea Lascu, Yong Su, Bin Xiong, *Introduction to Inequalities*, GIL, 2009.

[4] T. N. Dung, G. Dospinescu, *Mixing variables method*, chuyên đề bồi dưỡng giáo viên THPT chuyên, hè 2005.

Các phương pháp tính tích phân

Nguyễn Văn Vinh, Sinh viên chuyên ngành Toán Lý, Đại học Tổng hợp Quốc gia Belarus

Nói đến vấn đề về tích phân thì người học toán đều va chạm ít nhiều, tuy nhiên có những người chỉ ở mức độ sơ cấp với mức độ tính toán thông thường có nhiều người lại sử dụng nó như là công cụ để giải quyết các vấn đề phức tạp hơn, nhưng ở góc độ ứng dụng nào cũng cần có những kĩ năng và sự hiểu biết nhất định. Bài viết nhỏ này nêu ra một số phương pháp mà nhiều người làm toán cao cấp hay sử dụng, có thể nói chỉ là những chia sẻ mang tính cá nhân trong quá trình học tập đã thu nhận được. Các phương pháp tính tích phân thông thường xin không nêu lại, chỉ đề cập các phương pháp như sử dụng phép biến đổi Laplace, Fourier, hàm sinh của các hàm đặc biệt, tích phân tham số, hàm Gamma, Beta, Gauss, Dirac, lý thuyết thặng dư, tích phân kép, chuỗi Taylor... Lượng kiến thức được sử dụng trong bài này khá nhiều không thể trình bày tất cả, nên chỉ có thể điểm qua đôi nét kiến thức cần thiết trước mỗi phương pháp, có thể có nhiều khái niệm định nghĩa được bỏ qua. Vì khối lượng bài viết khá dài nên các ví dụ đưa ra chỉ mang tính định hình phương pháp có các bài tập áp dụng kèm theo.

1. Phép biến đổi Laplace, và biến đổi Fourier

Như chúng ta đã biết $L\left[f(t),p\right]=\int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$ là ảnh của hàm $f(t)$ qua phép biến đổi Laplace với đối số p. Trong đó $f(t)$ được gọi là hàm gốc và cho bởi công thức

$$f(t)=L^{-1}\left[f(t),p\right]=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} L\left[f(t),p\right]e^{pt}dp$$

Đối với phép biến đổi Fourier thì có nhiều dạng khác nhau nhưng có hai dạng mà chúng ta hay gặp và sử dụng đó là dạng đối xứng

$$F\left[f(t),p\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ipt}dt$$

Và không đối xứng

$$\widehat{F}\left[f(t),p\right]=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ipt}dt$$

Tương ứng với hai hàm gốc được cho bởi công thức

$$f(t)=F^{-1}\left[f(t),p\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F\left[f(t),p\right]e^{ipt}dp$$

Và

$$f(t)=\widehat{F}^{-1}\left[f(t),p\right]=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{F}\left[f(t),p\right]e^{ipt}dp$$

Các tính chất của hai phép biến đổi này khá nhiều mọi người có thể xem thêm cuốn "The Transforms and Applications Handbook" của Alexander D. Poularikas.

Để đơn giản ta kí hiệu các hàm ảnh không có đối số $L[f(t)], F[f(t)], \widehat{F}[f(t)]$

Chúng ta bắt đầu bằng một ví dụ đơn giản.

Ví dụ 1. Tính $I(x) = \int\limits_0^\infty \frac{1-\cos xt}{t^2}dt$

Lời giải

Nói chung, cách áp dụng của cả hai phép biến đổi này là thay vì ta tính trực tiếp các tích phân cần tính thì ta có thể tác động vào cả hai vế một phép biến đổi Laplace hay Fourier và sau đó ta tìm hàm gốc của tích phân vừa tìm được thì sẽ thu được kết quả như mong muốn.

Ta có

$$L[I(x)] = \int\limits_0^\infty e^{-px}\left(\int\limits_0^\infty \frac{1-\cos xt}{t^2}dt\right)dx = \int\limits_0^\infty \frac{1}{t^2}\left(\int\limits_0^\infty e^{-px}(1-\cos xt)\,dx\right)dt$$

$$= \int\limits_0^\infty \frac{1}{t^2}L[1-\cos xt]\,dt = \int\limits_0^\infty \frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+t^2}\right)dt = \frac{1}{p}arctg\frac{t}{p}\bigg|_{t=0}^{\infty} = \frac{\pi}{2p^2}$$

Ta dễ dàng nhận thấy $L^{-1}\left[\frac{\pi}{2p^2}\right] = \frac{\pi}{2}x.$

Vậy ta có $I(x) = \frac{\pi}{2}x.$

Ta áp dụng tương tự cho phép biến đổi Fourier và thu được kết quả tương tự.

Bài tập áp dụng

1. Tính $I(x) = \int\limits_0^\infty \frac{\cos xt}{a^2+t^2}dt$

2. Tính $I = \int\limits_0^\infty \frac{x\sin mx}{1+x^2}dx$

3. Tính $I = \int\limits_0^\infty \frac{\cos t.\sin tx}{t}dt$

Bên cạnh đó ta có thể sử dụng các tính chất của phép biến đổi Laplace, Fourier để thu được các kết quả nhanh và hiệu quả. Có ba tính chất đơn giản mà chúng ta đã biết khi làm quen với phép biến đổi Laplace

i. $\int\limits_0^\infty \frac{f(t)dt}{t} = \int\limits_0^\infty L[f(t)]\,dp$

ii. $L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int\limits_p^\infty L[f(t),q]\,dq$

iii. $L\left[\int\limits_0^t f(x)g(t-x)dx\right] = L[f].L[g]$

Ta thử xem thêm một vài ví dụ ứng dụng ba tích chất này

Ví dụ 2. Tính $I = \int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$

Lời giải

Tích phân này khá là phức tạp khi ta sử dụng các kiến thức thông thường ngay cả sử dụng tích phân tham số cũng khá dài nhưng nếu áp dụng tính chất trên ta thấy ngay kết quả

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \int\limits_0^\infty L\left[\sin t\right] dp = \int\limits_0^\infty \frac{dp}{1+p^2} = arctgp|_0^\infty = \frac{\pi}{2}$$

Ví dụ 3. Tính $I = \int\limits_x^\infty \frac{p^2-1}{\left(p^2+1\right)^2} dp$

Lời giải

Dựa vào tính chất thứ hai dễ dàng thu được kết quả của bài trên:

$$I = L\left[\cos t, x\right] = \frac{x}{1+x^2}$$

Ví dụ 4. Tính $I = \int\limits_0^t e^x \sin x \cos(t-x) dx$

Lời giải

Áp dụng tính chất thứ ba ở trên ta có

$$L\left[\int\limits_0^t e^x \sin x \cos(t-x) dx\right] = L\left[e^x \sin x\right] \, L\left[\cos x\right] = \frac{1}{\left(p-1\right)^2+1} . \frac{p}{p^2+1}$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{p}{p^2+1} - \frac{p-1}{(p-1)^2+1} - 2\frac{1}{p^2+1} + 3\frac{1}{(p-1)^2+1}\right)$$

Từ đó ta có lấy nghịch ảnh của hàm thu được và thu được kết quả cần tìm khá dễ dàng vì các hàm ảnh có dạng quen thuộc

$$I = \frac{1}{5}\left(\cos t - e^t \cos t - 2\sin t + 3e^t \sin t\right)$$

Bài tập áp dụng

1. Tính $I = \int\limits_0^t e^{t-\tau} ch(\alpha\tau) d\tau$, trong đó α là hằng số.

2. Tính $I = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha t}\sin t}{t} dt$trong đó $\alpha > 0$.

3. Tính $I = \int\limits_x^\infty \frac{\beta\left(p-a\right)}{\left[\left(p-a\right)^2+\beta^2\right]^2} dp$

Phép biến đổi Laplace còn có các tính chất khác mà mỗi tính chất đều có thể áp dụng xử lý linh hoạt các tích phân như tính chất về dịch ảnh, công thức Duhamel,... (bạn đọc có thể tham khảo thêm ở [2],[5]). Với phép biến đổi Fourier, ngoài kĩ thuật đã nêu ở trên đối với phép biến đổi Laplace ta còn có những cách áp dụng khác.

Ví dụ 5. Tính

$$I(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx, \quad \alpha > 0$$

Lời giải

Để cho thuận tiện khi các bạn đọc các sách tham khảo thêm và dễ dùng ta sẽ sử dụng phép biến đổi Fourier không đối xứng có dạng

$$\widehat{F}\left[f(t)\right] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i p t} dt$$

Nhận thấy

$$\widehat{F}\left[e^{-\alpha x^2}\right] = \widehat{F}\left[e^{-\pi\left(\sqrt{\alpha}x/\sqrt{\pi}\right)^2}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\pi^2 p^2/\alpha}$$

Từ đó dễ dàng thu được tích phân cần tính

$$I(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} e^{-2\pi i 0 x} dx = \widehat{F}\left[0\right] = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{0} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Đây chính là tích phân Euler Poisson mà chúng ta đã biết.

Việc áp dụng công thức trên để tính tích phân hết sức đơn giản và thuận tiện tuy nhiên trong một số trường hợp có nhiều hàm thì việc lựa chọn hàm gốc cho phép biến đổi Fourier cũng hết sức quan trọng, hầu hết các hàm liên quan đến tích phân này là tích phân có chứa hàm lượng giác, hàm mũ, hàm luỹ thừa,...

Ví dụ 6. Tính

$$I(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi x)\cos(2\pi\alpha x)}{\pi x} dx, \quad -\infty < \alpha < \infty$$

Lời giải

Ta có

$$\widehat{F}\left[\sin c(x)\right] = \begin{cases} 1, & |p| < 1/2 \\ 1/2, & |p| = 1/2 \\ 0, & |p| > 1/2 \end{cases}$$

Trong đó$\sin c\left(\frac{x}{\pi}\right) = \frac{\sin x}{x}$.

Khi đó ta có tích phân cân tính là

$$I(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} e^{-2\pi i \alpha x} dx = \widehat{F}\left[\alpha\right] == \begin{cases} 1, & |\alpha| < 1/2 \\ 1/2, & |\alpha| = 1/2 \\ 0, & |\alpha| > 1/2 \end{cases}$$

Đối với phép biến đổi Fourier bên cạnh các tính chất cơ bản gần giống với phép biến đổi Laplace thì còn có một số các tính chất đặc biệt khác. Một vài tính chất thường hay sử dụng:

+ Đẳng thức Plancherel

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|\widehat{F}\left[p\right]\right|^2 dp$$

+ Đẳng thức Parseval

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{F}\left[p\right]\overline{\widehat{G}\left[p\right]}dp$$

Ví dụ 7. Tính

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$$

Lời giải

Ta có

$$\widehat{F}\left[\frac{1}{1+x^2}\right] = \pi e^{-2\pi|p|}$$

Áp dụng đẳng thức Plancherel, thế thì

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{1}{1+x^2}\right|^2 dx = 2\pi^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-4\pi p}dp = \frac{\pi}{2}$$

Ta thu được kết quả rất nhanh và nhẹ nhàng.

Ví dụ 8. Tính

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 dx$$

Lời giải

Áp dụng đẳng thức Parseval đối với hai hàm

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, g(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

Ta thu được tích phân cần tìm

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{F}\left[\sin c\left(\frac{x}{\pi}\right)\right]\overline{G\left[\sin c^2\left(\frac{x}{\pi}\right)\right]}dp = \pi^2\frac{1}{2\pi}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\pi$$

Trong đó $\sin c\left(\frac{x}{\pi}\right) = \frac{\sin x}{x}$

Phép biến đổi Fourier cũng có tính chất của tích chập giống với phép biến đổi Laplace (tính chất số 3).

Sử dụng tính chất này ta cũng dễ dàng tính được tích phân sau

$$g(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi u}{\pi u} \frac{\sin \pi (x-u)}{\pi (x-u)} du = \sin c(x)$$

Bài tập áp dụng

1. Tính $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos (\pi x)}{1+x^4} dx$

2. Tính $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x} \right)^3 dx$

3. Tính $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x} \right)^4 dx$

4. Tính $I = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin (ax) \cos (bx)}{x} dx$

5. Tính $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin (\pi a x)}{x (x^2+b^2)} dx$

Phép biến đổi Laplace và Fourier còn chứa khá nhiều các tính chất hữu ích cho việc tính tích phân. Ngay cả đối với các tích phân bội khi sử dụng phương pháp này cũng hết sức hiệu quả. Phép biến đổi Laplace và Fourier cũng có các dạng suy rộng cho nhiều biến khác nhau mà với mỗi dạng điều có những ứng dụng hết sức thú vị. Vì bài viết chỉ mang tính giới thiệu các phương pháp nên hi vọng sẽ trở lại chủ đề này trong một bài viết khác.

2. Khai triển tích phân thành chuỗi

Đây là một kĩ thuật khá sơ cấp nhưng rất thú vị và thường gặp trong các bài toán tính tích phân phức tạp. Vấn đề lựa chọn hàm để khai triển sẽ quyết định bài giải có đẹp và tối ưu hay không. Khi khai triển và hoán vị tích phân của tổng và tổng của tích phân ta cần chú ý đến các đối tượng thu được có quen và đảm bảo tính hội tụ của tích phân hay không.

Ví dụ 9. Tính $I = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-x} \left(\int\limits_{0}^{x} \frac{e^{-t}-1}{t} dt \right) \ln x dx$

Lời giải

Đây là một bài toán khá khó của tạp chí Crux. Tuy nhiên nếu áp dụng kĩ thuật khai triển chuỗi Taylor thì ta cũng thu được kết quả không mấy là khó khăn. Dưới đây là lời giải khi áp dụng kĩ thuật trên

$$I = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-x} \left(\int\limits_{0}^{x} \frac{e^{-t}-1}{t} dt \right) \ln x dx = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-x} \left(\int\limits_{0}^{x} \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} - 1}{t} dt \right) \ln x dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!n} \int_0^{\infty} e^{-x} \left(\int_0^x t^{n-1} dt \right) \ln x dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!n} \int_0^{\infty} e^{-x} x^n \ln x dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma'(n+1)}{n!n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \Psi(n+1)}{n}$$

Trong đó $\Gamma(x), \Psi(x)$ là các hàm Gamma và PolyGamma.

Như ta thấy ở trên, ta đã sử dụng kĩ thuật khai triển hàm e^{-t} dưới dạng chuỗi Taylor và chuyển tích phân cần tính thành tổng của chuỗi.

Vấn đề tính tổng của chuỗi chúng ta không bàn ở đây nhưng ta cũng dễ dàng nhận được kết quả của chuỗi này là

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \Psi(n+1)}{n} = \gamma \ln 2 + \int_0^1 \frac{-\ln 2 + \ln(1+t)}{1-t} dt = \frac{1}{12} \left(-\pi^2 + 12\gamma \ln 2 + 6 \ln^2 2 \right)$$

Trong đó γ là hằng số Euler-Mascheroni.

Chúng ta có một bài biến đổi tích phân thành chuỗi khá thú vị ở tạp chí La Gaceta.

Ví dụ 10. Chứng minh

$$I = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{x e^{2x}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,(n+1)!}$$

Lời giải

Ta có

$$I = \frac{1}{\pi} \int_0^1 x \left(e^{2x} - e^{-2x} \right) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2n+2}}{(2n+1)!} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+2}}{(2n+1)!} \int_0^1 x^{2n+2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+2}}{(2n+1)!} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+2} \theta d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+2}}{(2n+1)!} \frac{(2n+2)!\pi}{2^{2n+3} \left((n+1)! \right)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,(n+1)!}$$

Nhìn vào dạng biểu diễn của chuỗi, ta nhận thấy ngay đó là hàm $I_1(2)$ (Hàm modified Bessel bậc nhất).

Phương pháp trên cho phép ta tiếp cận nhiều tích phân phân khó và giúp ích khá nhiều cho công tác nghiên cứu. Một trong những ứng dụng mạnh và hết sức hiệu quả đó là "Định lí cộng", những người làm toán cao cấp và liên quan đến các vấn đề về phương trình vi tích phân hẳn sẽ thấy đây là một công cụ hiệu quả và thú vị. Các bạn có thể xem thêm về vấn đề này ở [7].

Sử dụng kĩ thuật này ta tính được khá nhiều tích phân hay mà nhiều phương pháp khác không làm được hoặc quá cồng kềnh, thí dụ như một bài của tạp chí PIMU

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{n} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Bên cạnh đó một phép chuyển tích phân về chuỗi rất thường gặp khi giải các bài toán tích phân liên quan đến phần lẻ và phần nguyên. Xin đưa ra một ví dụ về vấn đề này để chúng ta thấy rõ sự thú vị của phương pháp chuyển tích phân thành chuỗi.

Chúng ta bắt đầu bằng một ví dụ nhỏ với hàm phần nguyên

Ví dụ 11. Tính

$$\int_0^1 \left(\left[\frac{2}{x}\right] - 2\left[\frac{1}{x}\right]\right)dx$$

Lời giải

Đây là bài toán cơ bản áp dụng kĩ thuật đã nói ở trên. Sử dụng kĩ thuật khai tích phân thành dạng chuỗi ta có:

$$\int_0^1 \left(\left[\frac{2}{x}\right] - 2\left[\frac{1}{x}\right]\right)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{1/(k+1)}^{1/k} \left(\left[\frac{2}{x}\right] - 2\left[\frac{1}{x}\right]\right)dx$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+(1/2)} - \frac{1}{k+1}\right)$$

Vấn đề tính tổng chuỗi trên không khó khăn, kết quả cuối cùng ta thu được

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+(1/2)} - \frac{1}{k+1}\right) = 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + ...\right) = 2\ln 2 - 1 \approx 0.386$$

Bài toán khá đơn giản nhưng phần nào nói lên được kĩ thuật ta đã mô tả và có ý nghĩa khá thú vị, giá trị tích phân ta vừa tính được chính là xác suất để số dư không bé hơn một nữa của số bị chia, nói rõ hơn ta xét phương trình đồng dư $n \equiv n_\nu \,(\mathrm{mod}\nu)\,, 0 \le n_\nu < \nu$, thì giá trị tích phân thu được là xác suất để xảy ra trường hợp $n_\nu \ge \dfrac{\nu}{2}$.

Ta xem tiếp một ví dụ hay về phần lẻ

Ví dụ 12. Tính $I = \displaystyle\int_0^1 \left\{\frac{1}{x}\right\} \ln x dx$

Lời giải

Đây là một bài toán rất hay ở tạp chí MJMS và dưới đây là lời giải của Ovidiu Furdui.

Ta dễ dàng biến đổi tích phân về dạng sau

$$I = \int_0^1 \left\{\frac{1}{x}\right\} \ln x dx = -\sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} \frac{\ln t}{t^2}(t-k)\,dt$$

Tích phân từng phần các tích phân thu được, ta có

$$I = -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\ln^2(k+1) - \ln^2 k}{2} + \ln(k+1) - \ln k - \frac{\ln(k+1)}{k+1} - \frac{1}{k+1}\right)$$

Chú ý rằng $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ là hằng số Euler-Mascheroni, và $\gamma_1 = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} - \frac{\ln^2 n}{2}\right)$ là hằng số Stieltjes.

Ta thu được tổng của chuỗi trên là

$$I = \gamma + \gamma_1 - 1.$$

Các công đoạn biến đổi để thu được kết quả khá đơn giản bạn đọc có thể làm như là bài tập.

Sử dụng kĩ thuật như trên ta thu được nhiều kết quả đẹp của các tích phân có giá trị đặc biệt là các tham số như Stieltjes, Euler-Mascheroni, Gold ratio...

Cũng dùng phương pháp trên, Ngô Phước Nguyên Ngọc đã tính được tích phân sau rất đẹp và thu được một biểu diễn khá thú vị của hằng số Euler-Mascheroni

$$I = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{x} \right\} \frac{x}{1-x} dx = \gamma.$$

Chúng ta đã nhận thấy ở trên việc chuyển các tích phân cần tính đến các chuỗi tương đương giúp ta thu được nhiều đẳng thức đẹp. Bằng phương pháp này chúng ta cũng có thể chứng minh hai dạng biểu diễn của hàm hypergeometric function là tương đương nhau

$$F(a,b,c,z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a} \, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k \, (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}$$

Chứng minh xin dành cho bạn đọc.

Bài tập áp dụng

1. $I = \int\limits_0^1 \{\ln x\} \, x^m dx, m > -1.$

2. $I = \int\limits_0^1 \frac{\ln x \ln^2(1-x)}{x} dx.$

3. $I = \int\limits_0^1 \left\{ \frac{1}{x} \right\} \frac{x}{1-x} dx = \gamma.$

4. $I = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 x^t y^t \left\{ \frac{x}{y} \right\} \left\{ \frac{y}{x} \right\} dxdy, \; t > -1.$

3. Tích phân phụ thuộc tham số

Có thể nói đây là một chủ đề rất lớn với tính ứng dụng rất cao. Có khá nhiều kĩ thuật đối với phép tính tích phân nhưng phương pháp tích phân tham số là một vấn đề hết sức thú vị. Đều khó khăn nhất khi áp dụng phương pháp này bạn phải nghĩ ra tham số cần thêm là gì, chúng ta đi theo chiều thuận hay ngược của phép biến đổi. Việc áp dụng phương pháp này cho phép ta thu được nhiều kết quả rất là thú vị liên quan đến chuỗi, hàm đặc biệt. Vì chủ đề này khá dài và có nhiều ứng dụng phức tạp nên sẽ được đề cập chi tiết trong bài viết ở số tạp chí tiếp theo.

Tài liệu tham khảo

1. Manzirov A.V., Polyanin A.D.; *Tuyển tập phương trình tích phân: Các phương pháp giải*; NXB Factorial, Moskva 2000 (bản Tiếng Nga).

2. Alexander D. Poularikas, *The Transforms and Applications Handbook, Second Edition*; CRC Press, 2000.

3. Lê Văn Trực, Nguyễn Văn Thoả, *Phương pháp Toán cho Vật lý*; NXB ĐHQG Hà Nội.

4. *Các tạp chí CMJ, Crux, MJMS, PIMU, SSMJ.*

5. *Tuyển tập MathVn - Các kĩ thuật biến đổi vi tích phân*, 2009 (preprint)

6. A.M. Mathai, Hans J. Haubold; *Special Functions for Applied Scientists*; Springer, 2008.

7. Erofeenko V.T., *Tuyển tập về Định lý cộng*; NXB Khoa học và Kỹ thuật, Minsk 1989 (bản Tiếng Nga).

Lý thuyết các quân xe

Nguyễn Tuấn Minh, Lớp Cử nhân Chất lượng cao, Khóa III - Đại học Huế

A - Mở đầu

Hoán vị với các vị trí cấm

Ta có một mô hình cho một bài toán tổng quát như sau:

Xét các tập khác rỗng $X_1, X_2, ..., X_n \subset \{1, 2, .., n\}$ và kí hiệu S_n tập các hoán vị với độ dài bằng n

Đặt $P(X_1, X_2, ..., X_n) = \{\sigma \in S_n \ \mid \ \sigma(i) \notin X_i, \ i = 1, 2, ..., n \ \}$, tập X_i được gọi là vị trí cấm của $\sigma(i)$, các hoán vị thuộc $P(X_1, X_2, ..., X_n)$ gọi là hoán vị với các vị trí cấm (permutation with forbidden positions) tương ứng với hệ $(X_1, X_2, ..., X_n)$

Một hoán vị $\sigma \in S_n$ tương đương với một cách sắp đặt n con xe trên bàn cờ vua $n \times n$ ở các tọa độ $(i, \sigma(i))$ (Ở đây ta đánh số các cột và các dòng bằng các số $1, 2, ..., n$ từ trái sáng sang phải và từ trên xuống dưới, (x, y) là tọa độ của ô nằm ở cột thứ x và hàng thứ y), dĩ nhiên là $\sigma(i) \neq \sigma(j)$ nên không có 2 con nào ăn nhau.

Nếu $\sigma \in P(X_1, X_2, ..., X_n)$ thì hoán vị này tương ứng với một cách sắp đặt n con xe lên bàn cờ $n \times n$ sao cho không có hai con nào ăn nhau và con xe nằm ở cột thứ i thì không được phép đặt vào các ô vuông có tọa độ thuộc tập $M_i = \{(i, x) \mid x \in X_i\}$, các vị trí này gọi là vị trí cấm (dĩ nhiên $M_i \cap M_j = \emptyset$ với $i \neq j$).

Gọi A_i là tập các cách sắp xếp mà con xe ở cột thứ i được đặt vào vị trí cấm. Theo nguyên lý bao hàm-loại trừ ta có kết quả tổng quát

$$|P(X_1, X_2, ..., X_n)| = |S_n| - |A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n|$$
$$= n! - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| - .... + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n|$$

Gọi r_k là số sắp đặt k con xe lên bàn cờ $n \times n$ sao cho mỗi con xe đều ở vị trí cấm, quy ước $r_0 = 1$. Thế thì

$$\sum_{1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}| = r_k (n-k)!$$

Do đó

$$|P(X_1, X_2, ..., X_n)| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k r_k (n-k)!$$

Số cách sắp đặt các quân xe

Gọi $r_k(C)$ là số cách sắp đặt k con xe (rook number) lên miền ô vuông C (miền ở đây không nhất thiết là phải liên thông) trên bàn cờ sao cho không có 2 con nào ăn nhau.

Hàm sinh $R_C(x) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k(C) x^k$ gọi là đa thức xe (rook polynomial) của miền C, quy ước $r_0(C) = 1$.

Một miền các ô vuông C trên bàn cờ $m \times n$ có thể được đặc trưng bởi một trận $(c_{ij})_{m\times n}$ trên trường $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ với c_{ij} bằng 1 nếu ô $(i, j) \in C$ và $c_{ij} = 0$ nếu ô $(i, j) \notin C$.

Một số tính chất quan trọng:

1. $R_C(x) = R_{C\setminus\Delta}(x) + xR_{C-\Delta}(x)$ trong đó Δ là một ô vuông trong C, $C \setminus \Delta$ là miền ô vuông nhận được từ C khi bỏ đi Δ và $C - \Delta$ là miền ô vuông nhận được từ C khi bỏ đi tất cả các ô có cùng hàng và cùng cột với Δ.

Thật vậy, khi sắp xếp k quân xe lên miền C, trong đó ô Δ cố định, thì có hai trường hợp xảy ra:
- Ô Δ được sắp một quân xe, khi đó đối với $k - 1$ quân xe còn lại thì không thể sắp cùng hàng hoặc cùng cột với Δ. Số cách sắp trong trường hợp này là $R_{k-1}(C - \Delta)$.

- Ô Δ không được sắp quân xe nào, khi đó đối với k quân xe có thể sắp trên miền $C\Delta$. Số cách sắp xếp trong trường hợp này là $R_k(C \setminus \Delta)$. Vì vậy:

$$R_k(C) = R_k(C \setminus \Delta) + R_{k-1}(C - \Delta)$$

Từ đây dễ suy ra kết quả với dạng hàm sinh.

Miền các ô vuông S gọi là một block của miền các ô vuông C nếu thỏa mãn:

i. Với bất kì các dòng i, i' có chứa ô của S và cột j không chứa ô nào của S thì ô $c_{ij} = c_{i'j}$.

ii. Với bất kì dòng i không chứa nào của S, và các cột j, j' chứa ô của S thì $c_{ij} = c_{ij'}$.

Ta có một mở rộng (xem thêm ở [1]) của tính chất 1 như sau:

2. Với C là miền ô vuông trên bàn cờ và S là một block nằm trên s hàng và t cột thế thì

$$R_C(x) = \sum_{j=0}^{\min(s,t)} r_j(S)x^j R_{C(S,j)}(x)$$

Trong đó $C(S, j)$ với $0 \le j \le \min(s, t)$ là miền nhận được bằng cách bỏ các ô của C sao cho:

i. Bỏ đi tất cả các ô của S

ii. Bỏ đi tất cả các ô thuộc j dòng trong số s dòng chứa các ô của S

iii. Bỏ đi tất cả các ô thuộc j cột trong số t cột chứa các ô của S

Chứng minh này cũng không khó khăn, chi tiết xin dành cho bạn đọc.

3. $R_{C_1\cup C_2}(x) = R_{C_1}(x)R_{C_2}(x)$ với C_1 và C_2 là hai miền không có hàng nào chung và cột nào chung, $C_1 \cup C_2$ là miền ô vuông bao gồm tất cả các ô vuông của C_1 và C_2

Thật vậy, vì C_1, C_2 là hai miền không có hàng nào chung và cột nào chung nên mỗi cách sắp đặt i quân xe lên C_1 và j quân xe lên C_2 sẽ ứng với mỗi cách sắp đặt $i + j$ quân xe lên miền $C_1 \cup C_2$, với $i, j \ge 0$. Vì vậy $r_k(C_1\cup C_2) = \sum_{i+j=k} r_i(C_1)r_j(C_2)$. Từ đây nhận được kết quả dưới dạng hàm sinh.

Giả sử B là một miền ô vuông trên bàn cờ và $\overline{B}$ là miền bù của nó trên bàn cờ $m \times n$, thế thì số cách đặt k quân xe lên $\overline{B}$ sẽ bằng số cách sắp đặt k quân xe lên bàn cờ và coi các ô thuộc B như là các vị trí cấm. Tương tự như phần đầu, kí hiệu A_i với $i = 1, 2, ..., k$ là số cắp sắp đặt mà quân xe thứ i nằm vào miền cấm là B.

Bằng quy tắc nhân ta tính được

$$\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_s\le k} |A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap \ldots \cap A_{i_s}| = r_s(B).\frac{(m-s)!(n-s)!}{(n-k)!(n-k)!(k-s)!}$$

Ở đây ta chú ý rằng số cách sắp t quân xe lên bàn cờ $p\times q$ bằng $\dfrac{p!q!}{(p-t)!(q-t)!t!}$, với $t\le \min(m,n)$ (chứng minh điều này xem như bài tập), và ta đã áp dụng cho $t=k-s, p=m-s, q=n-s$.

Theo nguyên lý bao hàm-loại trừ, ta có

$$r_k(\overline{B}) = \sum_{s=0}^{k}(-1)^s\frac{(m-s)!(n-s)!}{(n-k)!(n-k)!(k-s)!}r_s(B)$$

Từ đây ta có một liên hệ đẹp giữ đa thức xe của hai miền ô vuông bù nhau:

4.
$$R_{\overline{B}}(x) = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{s=0}^{k}(-1)^s\frac{(m-s)!(n-s)!}{(n-k)!(n-k)!(k-s)!}r_s(B)\right)x^k$$

Bài tập.

1. Kí hiệu $R_{m,n}(x)$ là đa thức xe của bảng chữ nhật $m\times n$ ô. Chứng tỏ rằng

$$R_{m,n} = R_{m-1,n}(x) + xnR_{m-1,n-1}(x)$$

và dạng tương tự

$$R_{m,n} = R_{m,n-1}(x) + xmR_{m-1,n-1}(x)$$

Từ đó suy ra

$$R_{m,n}(x) = \sum_{k=0}^{\min(n,m)}\frac{m!n!}{(m-k)!(n-k)!k!}x^k$$

2. Kí hiệu $L_n^\alpha = \dfrac{e^x}{n!x^\alpha}\dfrac{d^n}{dx}\left(\dfrac{x^{n+\alpha}}{e^x}\right)$ (Đa thức Laguerre). Chứng tỏ rằng

$$R_{n,n+\alpha}(x) = n!x^nL_n^\alpha\left(-\frac{1}{x}\right)$$

3. Chứng minh rằng

$$\sum_{m=0}^{\infty}R_{m,n}(x)\frac{t^m}{m!} = (1+xt)^ne^t$$

và

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}R_{m,n}(x)\frac{t^mu^n}{m!n!} = e^{t+u+xtu}$$

4. Với C là một bảng vuông bất kì, ta viết r_k thay vì $r_k(C)$. Giả sử n là bậc của đa thức $R_C(x)$, chứng các bất đẳng thức sau

a. $\dbinom{k+m}{k}r_{k+m}\le r_mr_k$

b. $k^{k-2}r_k \le \binom{r_2}{k-1}$ với $1 \le k \le n$.

c. $r_{k-1}r_{k+1} \le r_k^2$

d. $r_{k-1}r_{k+1}\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{n-k}\right) \le r_k^2$

e. $\left(\frac{r_k}{\binom{n}{k}}\right)^{1/k} \le \left(\frac{r_m}{\binom{n}{m}}\right)^{1/m}$ với $0 \le m < k \le n$.

f. $r_k \le n_{n-k}$ với $0 \le k \le \frac{n}{2}$

g. $\frac{n-k}{k+1}r_k \le r_{n-k-1}$ với $0 \le k \le \frac{n-1}{2}$

Lý thuyết các quân xe (Rook Theory) mà đối tượng của nó là đa thức xe được nghiên cứu đầu tiên bởi Kaplansky and Riordan vào năm 1946, và sau đó là các mở rộng của Goldman với sự ứng dụng của nhiều phương pháp tổ hợp hiện đại từ những năm 1970. Trong những năm gần đây Haglund đạt được nhiều thành công trong việc gắn kết đa thức xe với nhiều lĩnh vực khác như chuỗi siêu hình học, bài toán đếm ma trận trên trường hữu hạn, lý thuyết biểu diễn nhóm. Lý thuyết các quân xe có quan hệ gần gũi với nhiều ứng dụng trong lý thuyết đồ thị, người ta cũng đã vận dụng đa thức xe cùng với cơ học lượng tử và đại số Weyl. Còn trong Tổ hợp đếm nói riêng, đa thức xe liên quan đến hàng loạt các bài toán đếm về hoán vị, phân hoạch, hình vuông Latin...

Trong phần mở đầu chúng ta đã làm quen với cách tính toán ma thức xe với sự đệ quy của các miền ô vuông. Phần ứng dụng máy tính trong tính toán đa thức xe sẽ được đề cập ở cuối bài viết, xem như là phụ lục.

B - Mở rộng và ứng dụng

1. Bài toán đếm hoán vị bất hòa

Bài toán 1. (Derangement problem[1]) Tìm số các hoán vị $\sigma \in S_n$ sao cho $\sigma(i) \neq i$.

Lời giải

Bài toán tương đương với việc tìm số các cách sắp xếp các quân xe lên bàn cờ $n \times n$ ô với và miền các vị trí cấm chính là đường chéo chính của bàn cờ:

$$C = \{(1,1),(2,2),...,(n,n)\}$$

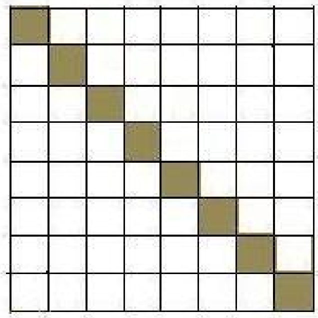
Rõ ràng miền này có thể được xem là phân hoạch thành n ô vuông đôi một không cùng hàng và cùng cột. Đa thức xe của mỗi ô như vậy là $R_0(x) = 1 + x$.

Áp dụng tính chất 3, ta có $R_C(x) = [R_0(x)]^n = (1+x)^n$. Suy ra $r_k(C) = \binom{n}{k}$.

Áp dụng bài toán hoán vị với các vị trí cấm, ta thu được công thức tính số các hoán vị $\sigma \in S_n$ thỏa mãn điều kiện bài toán:

$$D_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)! = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

[1]Bài toán được nghiên cứu đầu tiên bởi Pierre Raymond de Montmort vào năm 1713



Một hoán vị như vậy gọi là vô trật tự (derangement permutation).

Chú ý là khi $n \to \infty$ thì $\dfrac{D_n}{n!} \to e^{-1}$.

Bài toán 2. (Ménage problem[2]) Tìm số cách sắp xếp n cặp cô dâu, chú rể vào một bàn tròn $2n$ chỗ ($n \geq 3$) sao cho các cô dâu, chú rể ngồi luân phiên nhau, nhưng không xảy ra trường hợp chú rể ngồi bên cạnh cô dâu của mình.

Lời giải

Đầu tiên, ta sắp n cô dâu vào bàn, sao cho giữa hai cô dâu để trống một ghế dành cho một chú rể nào đó. Số cách sắp xếp như vậy bằng $2.n!$

Trong mỗi cách sắp xếp các cô dâu, đánh số họ theo chiều kim đồng hồ lần lượt là $1, 2, ..., n$. Ghế trống bên phải cô dâu thứ i ta đánh số là i.

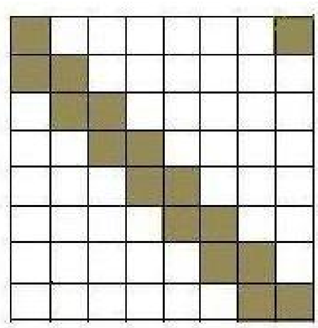
Bây giờ ta xếp các chú rể vào n ghế trống này sao cho thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Giả sử chú rể của cô dâu thứ i được sắp vào ghế số $\sigma(i) \in \{1, 2, ..., n\}$.

Thế thì $\sigma(i) \neq i, i+1 \ (mod\ n)$

Ta có thể cho tương ứng một hoán vị $\sigma \in S_n$ ($n \geq 2$) như vậy bằng với một cách sắp các quân xe lên bàn cờ $n \times n$ ô với miền các vị trí cấm là:

$$C_n = \{(1,1), (2,2), ..., (n,n), (1,2), (2,3), ..., (n,1)\}$$



[2]Bài toán được nghiên cứu đầu tiên bởi Édouard Lucas vào năm 1891

Áp dụng tính chất 1, đối với miền ô vuông C_n khi bỏ đi ô $(n, 1)$ ta được miền S_n, nếu xóa đi dòng và cột chứa ô này ta được miền S_{n-1}. Ta có:

$$R_{C_n}(x) = R_{S_n}(x) + xR_{S_{n-1}}(x)$$

Với miền S_n ta loại đi ô $(1, 1)$ được miền T_n, loại đi hàng và cột chứa ô này thu được S_{n-1}, tương tự ta nhận được

$$R_{S_n}(x) = R_{T_n}(x) + xR_{S_{n-1}}(x)$$

Với miền T_n, ta loại đi ô $(1, 2)$ thu được miền S_{n-1}, loại đi hàng và cột chứa ô này thu được T_{n-1}. Thế thì

$$R_{T_n}(x) = R_{S_{n-1}}(x) + xR_{T_{n-1}}(x)$$

Từ các quan hệ đệ quy trên, ta rút ra được:

$$R_{C_{n+1}}(x) - (2x + 1)R_{C_n}(x) + x^2 R_{C_{n-1}}(x),\ n = 2, 3, ...$$

Và với các trường hợp đầu tiên, ta tính được $R_{C_2}(x) = 1+4x+2x^2$, $R_{C_3}(x) = 1+6x+9x^2+2x^3$.

Kết quả cuối cùng, tính được (có thể sử dụng hàm sinh hoặc đa thức đặc trưng):

$$R_{C_n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} x^k$$

Áp dụng bài toán hoán vị với các vị trí cấm, ta có số các hoán vị $\sigma \in S_n$ thỏa mãn điều kiện là

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} (n-k)!$$

Đây là số cách sắp xếp n chú rể vào n vị trí trống như đã đánh số. Công thức của số cách sắp xếp các cô dâu chú rể thỏa mãn điều kiện bài toán là:

$$2.n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} (n-k)!$$

Trường hợp tổng quát của **Bài toán 1** và **Bài toán 2**, ta gọi hoán vị $\sigma \in S_n$ sao cho $\sigma(i) \neq i, i+1, ..., i+k-1 \ (mod\ n)$ là k-bất hòa (k-discordant). Cho đến nay người ta đã có các kết quả cho bài toán này cho $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Trường hợp $k = 3, 4, 5$ có thể tiếp cận một cách sơ cấp để tìm quan hệ đệ quy và hàm sinh, trong bài viết không đề cập đến do khá phức tạp, bạn đọc có thể tham khảo ở [2], [3], [4]. Trong trường hợp tổng quát, vấn đề tìm một công thức chính xác để tính số hoán vị k-bất hòa vẫn là bài toán mở.

Bài tập.

1. Một hoán vị $\sigma \in S_n$ được gọi là không liên tiếp (nonconsecutive) nếu như thỏa mãn $\sigma(i) \neq i+1$ với $i = 1, 2, ..., n-1$. Tìm công thức Q_n tính số các hoán vị độ dài n không liên tiếp và chứng tỏ $Q_n = D_n + D_{n-1}$

2. Chứng minh rằng:

a. $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}),\ n \geq 1$

b. $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n,\ n \geq 2$

c. $D_n = \left[\dfrac{n!}{e} + \dfrac{1}{2}\right],\ n \geq 1$

d. $D_n = \left[\dfrac{n!}{e} + \dfrac{n+2}{(n+1)^2}\right],\ n \geq 2$

e. $D_n = \left[(e + e^{-1})n!\right] - [en!],\ n \geq 2$

f. $D_n = \left[\left(\dfrac{[e(n+m-2)!]}{(n+m-2)!} + \dfrac{n+m}{(n+m-1)(n+m-1)!} + e^{-1}\right)n!\right] - [en!]$

với $m \geq 3, n \geq 2$

g. $D_n = \left[\left(\dfrac{\{e(n+2m)!\}}{(n+2m)!} + \sum_{i=1}^{m}\dfrac{n+2i-1}{(n+2i)!} + e^{-1}\right)n!\right]$

với $m \geq 1, n \geq 2$.

3. Tìm công thức tính số các cách sắp xếp $2n$ quân xe lên bàn cờ $2n \times 2n$ sao cho không có hai con nào nằm trên hai đường chéo lớn của bàn cờ.

4. Với $U_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \dfrac{2n}{2n-k}\dbinom{2n-k}{k}(n-k)!$ (ménage number), chứng minh rằng:

a. $U_n = nU_{n-1} + \dfrac{n}{n-2}U_{n-2} + \dfrac{4(-1)^{n-1}}{n-2},\ n \geq 2$

b. $U_n = nU_{n-1} + 2U_{n-2} - (n-4)U_{n-3} - U_{n-4},\ n \geq 4$

2. Bảng Ferrers

Với $1 \leq c_1 \leq c_2 \leq ... \leq c_n$ thì miền các ô vuông được xác định bởi

$$F = \{(i,j) \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq c_i\}$$

gọi là bảng một bảng Ferrers. Như vậy bảng Ferrers được tạo thành từ dãy các cột ô vuông với chiều cao không giảm.

Ta có các định nghĩa:

1. $h(F) = (c_1, c_2, ..., c_n)$ gọi là vector chiều cao của F.

2. $h_m(B) = (c_1^{(m)}, c_2^{(m)}, ..., c_m^{(m)})$ $(s \geq n)$ với $c_i^{(m)} = 0,\ i = 1, 2, ..., m-n$ và $c_i^{(m)} = c_{i-m+n}$ với $i = m-n+1, ..., n$ gọi là m-vector chiều cao của F.

Chú ý rằng $h_n(F) = h(F)$. Có thể hiểu một cách đơn giản rằng $h_m(F)$ là vector tạo ra từ $h(F)$ bằng cách thêm các giá trị 0 vào $m-n$ vị trí đầu tiên .

3. $s_m(F) = (s_1^{(m)}, s_2^{(m)}, ..., s_m^{(m)})$ với $s_i^{(m)} = c_i^{(m)} - i + 1$ gọi là vector m-cấu trúc của F.

Dễ dàng kiểm chứng các tính chất sau:

i. $s_1^{(m)} \geq 0$

ii. $s_i^{(m)} \geq s_{i-1}^{(m)} - 1$ với $i = 2, 3, ..., m$

iii. $s_i(m) = s_{i-1}^{(m)} - 1$ khi và chỉ khi $c_i^{(m)} = c_{i-1}^{(m)}$

Ngược lại, nếu một vector gồm n số nguyên thỏa mãn (i) và (ii) thì nó là một vector n-cấu trúc của một bảng Ferrers xác định duy nhất.

4. $P_m(F,x) = \sum_{k=0}^{m} r_k(F).[x]_{m-k}$ $(m \geq s)$ gọi là đa thức m-giai thừa của bảng Ferrers F.

Định lý 1. (Factorization theorem) Xét bảng Ferrers F với n cột, với $m \geq n$ có vector m-cấu trúc $s_m = (s_1^{(m)}, s_2^{(m)}, ..., s_m^{(m)})$ và đa thức m-giai thừa $P_m(F,x)$ thế thì

$$P_m(F,x) = \prod_{i=1}^{m}(x + s_i^{(m)})$$

Ở đây $[x]_i = x(x-1)(x-2)...(x-i+1)$ nếu $0 \leq i \leq x$ và bằng 0 nếu $i > x$.

Chứng minh

Giả sử F có vector chiều cao là $h(F) = (c_1, c_2, ..., c_n)$ và m-vector chiều cao

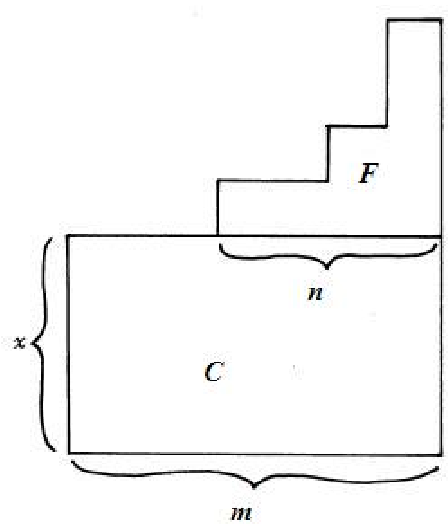
$$h_m(F) = (c_1^{(m)}, c_2^{(m)}, ..., c_m^{(m)}), \quad m \geq n$$

Với $x \in \mathbb{N}$, xét bảng $F_{x,m}$ với vector chiều cao

$$h(F_x) = (c'_1, c'_2, ..., c'_m) = (x, ..., x, x + c_1, x + c_2, ..., x + c_n)$$

Dễ thấy, vế phải của đẳng thức cần chứng minh đúng bằng $r_m(F_{x,m})$.

Ta sẽ tính $r_m(F_{x,m})$ theo một cách khác. Coi $F_{x,m} = F \cup C$, C là bảng hình chữ nhật $x \times m$ ô nằm bên dưới F (hình vẽ)



Trong mỗi trường hợp sắp xếp m quân xe lên $F_{x,m}$, giả sử trên F có k quân xe, thì số cách sắp xếp các quân xe trên F bằng $r_k(F)$, khi đó còn lại $m-k$ quân xe sắp xếp trên C. Sau loại đi k cột đã bị chiếm bởi k quân xe đã sắp trên F thì chỉ còn $m-k$ cột có thể sắp xe lên được trên C. Nên đối với $m-k$ quân xe còn lại ta xem như sắp xếp chúng lên một miền chữ nhật $x \times (m-k)$, có tất cả $[x]_{m-k}$ cách sắp xếp.

Vì vậy $r_m(F_{x,m}) = P_m(F,x) = \sum_{k=0}^{m} r_k(F).[x]_{m-k}$

Đẳng thức cần chứng minh được kiểm chứng với vô hạn điểm là các số tự nhiên, hơn nữa do dạng đa thức nên ta thu được kết quả cho mọi $x \in \mathbb{R}$.

Hệ quả 1. Xét bảng Ferrers F với $h(F) = (s+1, 2(s+1), ..., (n-1)(s+1))$ thế thì

$$P_n(F,x) = x(x+s)(x+2s)...(x+(n-1)s)$$

Hệ quả này suy ra từ định lý 1 với $h_n(F) = (0, s+1, 2(s+1), ..., (n-1)(s+1))$, và tương ứng $s_n(F) = (0, s, 2s, ..., (n-1)s)$.

Trường hợp đặc biệt, đối với bảng $F = (1, 2, ..., n-1)$ thế thì $r_k(F) = S(n, n-k)$, ở đây $S(s,r)$ là số Stirling loại II.

Thật vậy, áp dụng hệ quả trên ta có

$$\sum_{k=1}^{n} r_k[x]_{n-k} = x^n$$

đây là phương trình quen thuộc của số Stirling loại hai.

Ngoài ra chúng ta có thể giải quyết bằng một phương án thuần túy hơn. $S(n, n-k)$ là số các phân hoạch tập $\{1, 2, ..., n\}$ thành $n-k$ khối khác rỗng không giao nhau. Xét mỗi cách sắp xếp k quân xe lên bảng $F = \{(i,j) \mid 1 \le i \le n, 1 \le j \le i\}$. Quân xe được sắp ở vị trí (i,j) thì ta cho tương ứng hai số i, j nằm cùng một khối trong phân hoạch. Việc kiểm tra đây là một song ánh xin dành cho bạn đọc.

Ta định nghĩa rằng hai miền ô vuông là tương đương (rook equivalence) nếu chúng có cùng đa thức xe. Theo định lý 1 ta suy ra được rằng:

i. Hai bảng Ferrers F_1 và F_2 tương đương nếu và chỉ nếu với m nào đó thì đa thức m-giai thừa của chúng đồng nhất nhau.

ii. Hai bảng Ferrers F_1 và F_2 tương đương nếu và chỉ nếu với m nào đó thì $S_m(F_1) = S_m(F_2)$. Ở đây kí hiệu $S_m(F)$ là tập có lặp gồm các thành phần của vector $s_m(F)$.

Định lý 2. Mỗi bảng Ferrers tương đương với duy nhất một bảng Ferrers với dãy chiều cao các cột là tăng ngặt.

Chứng minh

Trước hết, xét bảng Ferrer F_0 với các cột có chiều cao tăng ngặt $1 \le a_1 < a_2 < ... < a_n$. Thế thì $h_m(F_0) = (0, 0, ..., 0, a_1, ..., a_n)$, trong đó $m-n$ vị trí đầu tiên bằng 0. Khi đó $s_m(F_0) = (0, -1, -2, ..., -(m-n-1), u_1, u_2, ..., u_n)$ với $-(m-n-1) \le u_1 \le ... \le u_n$. Một vector m-cấu trúc như vậy xác định duy nhất một bảng Ferrers, và bảng này có các cột có chiều cao tăng ngặt.

Với F là một bảng Ferrers bất kì, theo nhận xét trên ta sẽ xây dựng một bảng Ferrers F' tương đương với F, nghĩa là có m để $S_m(F) = S_m(F')$, và các thành phần $s_m(F')$ được sắp tương tự như dạng của $s_m(F_0)$.

Ta có $r_1(F) = |F|$ nên các bảng tương đương thì có cùng số ô. Xét $m = |F| + 1$, thế thì $s_1^{(m)} = 0$. Giả sử $-t$ là thành phần có giá trị nhỏ nhất trong $s_m(F)$. Theo tính chất của của vector m-cấu trúc thì $-1, -2, ..., -(t-1)$ cũng xuất hiện trong $s_m(F)$. Xét vector:

$$q = (0, -1, -2, ..., -(t-1), -t, q_1, q_2, ..., q_{m-t-1})$$

Ở đây q_i là các phần tử của tập có lặp $S_m(F)$ loại đi các phần tử $0, -1, -2, ..., -t$ và sắp thứ tự không giảm $q_1 \leq q_2 \leq ... \leq q_{m-t-1}$. Như vậy q là một vector m-cấu trúc của một bảng Ferrers F' với các cột có chiều cao tăng ngặt. Hơn nữa do $-t$ là phần tử nhỏ nhất trong tập có lặp $S_m(F) = S_m(F')$ nên F' là bảng Ferrers với các cột có chiều cao tăng ngặt duy nhất tương đương với F.

Một bài toán nảy sinh là có bao nhiêu bảng Ferrers tương đương với một bảng Ferrers cho trước? Ta thấy rằng $s_m(F)$ và $s_m(F')$ đều là các hoán vị của tập có lặp $S_m(F)$. Như vậy bài toán được giải quyết khi ta đếm được số hoán vị của tập có lặp $S_m(F)$.

Định lý 3. Số bảng Ferrers tương đương với bảng Ferrers F cho trước bằng:

$$\binom{j_0 + j_1 - 1}{j_1}\binom{j_1 + j_2 - 1}{j_2}...\binom{j_{t-1} + j_t - 1}{j_t}$$

Ở đây $-t$ là thành phần có giá trị bé nhất trong vector $s_{|F|+1}(F)$, và j_i là số lần xuất hiện của phần tử $-i$ trong tập có lặp $S_{|F|+1}(F)$.

Chứng minh công thức này có thể xem trong [8], [9].

Bài tập.

1. Cho (c_n) là dãy tăng bao gồm các số nguyên dương, và bảng Ferrers F_n với $h_F = (c_1, c_2, ..., c_n)$. Đặt

$$q_n(x) = x^{c_{n+1}} e^x R_{F_n}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Chứng tỏ rằng

$$q_n(x) = x^{c_{n+1} - c_n} \frac{d}{dx} q_{n-1}(x)$$

2. Có bao nhiêu bảng Ferrers tương đương với bảng Ferrers F, trong đó:

a. $h(F) = (1, 2, ..., n-1)$.

b. $h(F) = (2, 4, ..., 2(n-1))$.

c. $h(F) = (k, 2k, ..., (n-1)k)$ với $k > 2$.

C - Lập trình tính toán

1. Sử dụng Mathematica

Bài toán của chúng ta là tìm đa thức xe trên một miền ô vuông cho trước.

Lập hàm `RookPolynomial` như sau để sinh đa thức xe

```
RookPolynomial[n_List] :=
 Module[{stacklist, top, SameColumnValues, SameRowValues,
 EntriesToEliminate, InclusionList, ExclusionList},
  stacklist = {Union[n]};
  While[Union[Flatten[stacklist]] =!= {1, x}, top = First[stacklist];
```

```
   SameColumnValues = Position[top, {_, top[[1, 2]]}];
   SameRowValues = Position[top, {top[[1, 1]], _}];
   EntriesToEliminate = Union[SameColumnValues, SameRowValues];
   InclusionList = Append[Delete[top, EntriesToEliminate], {x}];
   ExclusionList = Delete[top, 1];
   If[Length[ExclusionList] == 0, ExclusionList = {{1}}];
   stacklist = Delete[Append[Append[stacklist, ExclusionList], InclusionList], 1];
   While[Union[Flatten[First[stacklist]]] == {x},
    stacklist = RotateLeft[stacklist]]];
  Total[Apply[Times, stacklist, 2]]]
```

Input của hàm này là một danh sách, bao gồm tọa độ các ô của miền ô vuông cần tính toán đa thức xe.

Thí dụ. Tính $R_C(x)$ với miền ô vuông $C = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$.

Ta sử dụng hàm trên như sau:

```
RookPolynomial[{{1, 1}, {2, 2}, {3, 3}, {4, 4}, {5, 5}}]
```

Nhấp `Shift+Enter`, kết quả sẽ là

```
Out[1]= 1 + 5 x + 10 x^2 + 10 x^3 + 5 x^4 + x^5
```

2. Sử dụng Maple

Như phần đầu, ta cũng có thể lập một giải thuật tương tự bằng Maple. Nhưng để tránh sự lặp lại, ta xét bài toán tìm đa thức xe trên bàn cờ $n \times n$ với miền các vị trí cấm cho trước.

Đầu tiên ta sử dụng hàm `complement_board` để tính miền cho phép đặt các quân xe trên bàn cờ, giá trị trả về là một danh sách.

```
> with(combinat);
> complement_board := proc (F, n)
    local i, j, x, L;
    L := [];
    for i to n do
        for j to n do
          if `not`(member([i, j], F)) then L := [op(L), [i, j]] end if
        end do
    end do;
    RETURN(L)
end proc;
```

Hàm `non_attacking_rooks_pos` tìm tất cả các cách sắp đặt k quân xe trên bàn cờ $n \times n$, với miền các vị trí cấm cho dưới dạng một danh sách F.

```
>non_attacking_rooks_pos := proc (F, k, n)
   local i, j, ans, cols, R, pos, F0, F1, F2, m, P, x, stop0, is;
   P := permute(n, n);
   F0 := F; pos := [];
   if k = 1 then RETURN(complement_board(F0, n)) end if;
   for x in P do
      stop0 := 0;
      R := choose(n, k);
```

```
      for is in R do
         stop0 := 0;
         for i in is do
              if member([i, x[i]], F0) then stop0 := 1 end if
         end do;
         if stop0 = 0 then pos := [op(pos), [seq([i, x[i]], i = is)]] end if
      end do
   end do;
   RETURN(convert(convert(pos, set), list))
end proc
```

Cuối cùng, hàm `rook_polynomial` để tính đa thức xe theo biến x của bài toán sắp xếp các quân xe trên bàn cờ $n \times n$ với miền các vị trí cấm là danh sách F.

```
>rook_polynomial := proc (F, n, x)
   local i, a, p;
   p := 1+add(nops(non_attacking_rooks_pos(F, i, n))*x^i, i = 1 .. n);
   RETURN(p)
end proc
```

Thí dụ. Sắp xếp các quân xe lên bàn cờ 5×5 với miền các vị trí cấm là

$$F = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\}$$

Ta làm như sau:

```
> rook_polynomial([[1, 1], [2, 2], [3, 3], [4, 4], [5, 5]], 5, x);
```

Nhấp `Enter` kết quả sẽ là

```
1 + 20 x + 130 x^2 + 320 x^3 + 265 x^4 + 44 x ^5
```

Chú ý là ở đây hàm `non_attacking_rooks_pos` cho giá trị trả về là một danh sách các cách sắp xếp.

Ta có thể xuất ra tất cả các cách sắp xếp trong từng trường hợp của n, k và F.

```
> array_rooks := proc (L, n)
   local i, j, A;
   A := array(1 .. n, 1 .. n);
   for i to n do
      for j to n do
        A[i, j] := 0;
        if member([i, j], L) then A[i, j] := R end if
      end do
   end do;
   print(A)
end proc
```

Thí dụ.

```
L:=non_attacking_rooks_pos([[1,2],[1,3],[2,1],[2,3],
   [3,2],[3,4],[3,5],[5,4]],5,5):nops(L);
for i from 1 to 4 do array_rooks(L[i],5); end do;
```

Khi đó kết quả trên màn hình sẽ là số các cách sắp xếp 5 quân xe lên bàn cờ 5×5 với miền các vị trí cấm như trên là bằng 18, và 4 cách sắp xếp đầu tiên:

$$\begin{bmatrix} R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R \\ 0 & R & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R \\ 0 & 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dĩ nhiên để liệt kết hết ta thay 4 trong vòng for bằng `nops(L)`.

Giải thuật cũng áp dụng được đối với các sự sắp xếp các quân xe lên các bảng vuông không có vị trí cấm.

Thí dụ. Đa thức xe của các bảng $4 \times 4, 5 \times 5$

Ta làm như sau:

```
rook_polynomial([],4,x);
rook_polynomial([],5,x);
```

Kết quả là:

```
1 + 16 x + 72 x^2  + 96 x^3  + 24 x^4
1 + 25 x + 200 x^2  + 600 x^3  + 600 x^4  + 120 x^5
```

Tài liệu tham khảo

[1] Abigail Mitchell, *A block decomposition algorithm for computing rook polynomials*; preprint at `http://arxiv.org/abs/math/0407004v1`

[2] William Oscar Jules Moser, *The number of very reduced* $4 \times n$ *Latin rectangles*; Canad. J. Math. 19 (1967) pp. 1011-1017.

[3] Earl Glen Whitehead Jr, *Four-discordant permutations*; Journal of the Australian Mathematical Society (Series A)(1979), 28 : 369-377.

[4] Joseph M. Santmyer, *Five discordant permutations*; Graphs and Combinatorics (1993) 9:279-292.

[5] K.P. Kohas, *Rook numbers and Rook Polynomials*; MCCME, Moskva - 2003 (in Russian).

[6] Richard P. Stanley, *Enumerative Combinatorics, Volume 1*; Cambridge University Press, 1999.

[7] Mehdi Hassani, *Derangements and Applications*; Journal of Integer Sequences, Vol. 6 (2003).

[8] Jay R. Goldman, J. T. Joichi, Dennis E. White, *Rook Theory. I: Rook Equivalence of Ferrers Boards*; Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 52, No. 1 (Oct., 1975), pp. 485-492.

[9] Jay R. Goldman, J. T. Joichi, David L. Reiner, Dennis E. White, *Rook Theory. II: Boards of Binomial Type*; SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. 31, No. 4 (Dec., 1976), pp. 618-633.

[10] D. C. Foata and M. P. Schutzenberger, *On the Rook Polynomials of Ferrers Relations*; Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, 4, Combinatorial Theory and its Applications, vol. 2, 1970.

[11] John Riordan, *An introdoction to Combinatorial Analysis*, Moskva 1963 (in Russian)

[12] `http : //www.usna.edu/Users/math/wdj/teach/sm342/rook_polynomials.html`

[13] `http : //mathworld.wolfram.com/notebooks/Combinatorics/RookPolynomial.nb`

[14] D. C. Fielder, *A Generator of Rook Polynomials*; Mathematica J. 9, 371-375, 2004.

CUỘC THI GIẢI TOÁN MATHVN

Phần A - Đề toán dành cho Học sinh

A13. Cho n số tự nhiên liên tiếp được xếp trên một vòng tròn. Bắt đầu đánh dấu các số có dạng $\frac{k(k+1)}{2}+1,\ k=0,1,2,...$ theo chiều kim đồng hồ. Kí hiệu $f(n)$ là số đầu tiên được đánh dấu lần thứ hai.

a. Chứng tỏ rằng tồn tại vô hạn số n sao cho $f(n)=500501$

b. Tìm công thức tường minh của $f(3^k)$.

c. Mô tả tất cả các số n sao cho $f(n)$ được xác định sau $n+1$ lần đánh dấu. Tìm công thức tường minh $f(n)$ đối với các số n như vậy.

d. Chứng tỏ thu hẹp của hàm số f lên tập các số nguyên tố lẻ, tức là $f(p)\neq f(q)$ nếu p,q là hai số nguyên tố lẻ khác nhau.

PGS VLADIMIR LESKO, KHOA ĐẠI SỐ, HÌNH HỌC VÀ TIN HỌC, ĐẠI HỌC SƯ PHẠM VOLGOGRAD, LB NGA

A14. Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$ được ghép từ các hình lập phương đơn vị, hai thiết diện $EKLMN, OPRST$ song song với BD có diện tích lần lượt là 50 và 100. Tính thể tích hình lập phương này.

PGS VLADIMIR LESKO, KHOA ĐẠI SỐ, HÌNH HỌC VÀ TIN HỌC, ĐẠI HỌC SƯ PHẠM VOLGOGRAD, LB NGA

A15. Cho tam giác ABC với đường cao AH. Gọi M,N lần lượt là hình chiếu của B,C trên phân giác trong tại đỉnh A. Gọi P,Q lần lượt là hình chiếu của B,C trên phân giác ngoài tại đỉnh A của tam giác. Chứng minh rằng hai đường tròn (HPQ) và (HMN) trực giao với nhau. (Hai đường tròn gọi là trực giao với nhau nếu góc giữ hai tiếp tuyến của hai đường tròn tại một điểm chung của chúng vuông góc với nhau)

HOÀNG QUỐC KHÁNH, HỌC SINH LỚP 12A10 THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC, TỈNH VĨNH PHÚC

A16. Cho tam giác ABC cân tại A. Đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc BC, CA, AB lần lượt tại K, L, M. Gọi N là giao điểm của OL và KM , Q là giao điểm của BN và CA. P là hình chiếu của A lên BN. Giả sử $BP = AP + 2PQ$, hãy xác định giá trị của $\dfrac{AB}{BC}$.

NGUYỄN TRẦN THI, THỊ TRẤN CỦNG SƠN, HUYỆN SƠN HÒA, TỈNH PHÚ YÊN

A17. Cho tam giác ABC diện tích S và P là điểm bất kì; gọi A', B', C' là trung điểm các cạnh BC, CA, AB; h_a, h_b, h_c là các đường cao tương ứng. Chứng minh rằng

$$PA^2+PB^2+PC^2 \geq \frac{4}{3}S.\max\left\{\frac{PA+PA'}{h_a}, \frac{PB+PB'}{h_b}, \frac{PC+PC'}{h_c}\right\}$$

TRẦN QUANG HÙNG, ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN - ĐHQG HÀ NỘI

A18. Cho hai dãy vô han $(a_n), (b_n)$ thỏa mãn $a_1 = b_1$ và với $n = 0, 1, 2, ...$ thì

$$b_{n+1} = b_n(1 - a_{n+1}) + (1 - b_n)a_{n+1}$$

Chứng minh rằng $\frac{1}{2}$ là một phần tử của (a_n) khi và chỉ khi nó là phần tử của (b_n)

Lê Nguyễn, Sinh viên Lớp TC0662A1, Đại học Cần Thơ

A19. Cho $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục, tuần hoàn với chu kì T. Gọi F là một nguyên hàm của f, chứng minh rằng với số thực a bất kì thì

$$\int\limits_a^{a+T} F(x)dx - \int\limits_0^T F(x)dx = a\int\limits_0^T f(t)dt$$

Nguyễn Văn Vinh, Sinh viên Khoa Toán Lý, Đại học THQG Belarus

A20. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 6$. Chứng minh rằng

$$-4 \leq a^2b + b^2c + 4ca^2 - 5abc \leq 128$$

Võ Quốc Bá Cẩn - Sinh viên Lớp YY0647A1, Đại học Cần Thơ

A21. Cho a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng

a. $$a + b + c + \frac{a-b}{1+ab}.\frac{b-c}{1+bc}.\frac{c-a}{1+ca} \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

b. $$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{a-b}{1+ab}.\frac{b-c}{1+bc}.\frac{c-a}{1+ca} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$$

Nguyễn Đình Thi, Học sinh Trường THPT Chuyên Lương Văn Chánh, Tỉnh Phú Yên

A22. Tìm giá trị lớn nhất của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ tại giá trị $x = 2009$. Biết rằng hàm số nhận giá trị thuộc đoạn $[0, 1]$ với x lần lượt bằng $0, 1, -1$.

Trần Thanh Nam, Sinh viên Đại học Bách khoa Tomsk, LB Nga

A23. Cho bảng ô vuông $n \times n$. Người ta tô đỏ n ô vuông của bảng sao cho không có hai ô vuông màu đỏ nào nằm trên cùng một hàng hoặc cùng một cột. Hỏi có thể tô xanh tối đa bao nhiêu ô vuông con trong số các ô vuông còn lại sao cho không có 2 ô xanh và hai ô đỏ nào tạo thành 4 đỉnh của một hình chữ nhật.

Lê Hồng Quý - Darmstadt, CHLB Đức

A24. Tìm công thức tính số các song ánh σ từ tập $\{1, 2, ..., 2n\}$ vào chính nó sao cho

$$|\sigma(i) - i| < n, \quad i = 1, 2, ..., 2n$$

Nguyễn Tuấn Minh, Sinh viên Lớp Cử nhân Chất lượng cao K3, Đại học Huế

Phần B - Đề toán dành cho Sinh viên

B4. Xét $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ và $M = \begin{pmatrix} A & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ với $rank(B) \geq rank(A)$. Chứng minh rằng M tồn tại nghịch đảo suy rộng nếu và chỉ nếu $rank(A) = rank(B) = rank(AB) = rank(BA)$

Ghi chú: Ma trận X gọi là nghịch đảo suy rộng của ma trận A nếu thỏa mãn:

$$AXA = A,\ XAX = X,\ AX = XA$$

B5. Chứng minh với mọi hàm số liên tục $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ thảo mãn bất đẳng thức sau

$$\int_0^1 f(x)dx. \int_0^1 \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} f(x)dx \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \right) \int_0^1 f^2(x)dx + \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{4k+2} \right) \left(\int_0^1 f(x)dx \right)^2$$

Trong đó n là một số nguyên dương

Ngô Phước Nguyên Ngọc, Sinh viên Khoa Xác suất Thống kê, Đại học THQG Belarus

B6. Tính tích phân

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{2n+1} dx, \quad n \in N$$

Nguyễn Văn Vinh, Sinh viên Khoa Toán Lý, Đại học THQG Belarus

Phần C - Các vấn đề mở[1]

C1. Xét B là ma trận vuông cấp n với $rank(B) = m \leq n$. Đặt $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$. Chứng tỏ hàm $\mathcal{C}(\Lambda) = trace((B^*\Lambda B)^{-2})$ là lồi với $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$.

Theo Problems and Solutions, SIAM

C2. Xét phương trình vi phân $u''(x) + u(x)(a(x) - u(x)) = 0,\ -1 < x < 1$; và $u(-1) = u(1) = 0$. Trong đó $a(x)$ là hàm chẵn liên tục trên $[-1, 1]$. Giả sử phương trình có nghiệm $u(x) > 0$ với mọi $x \in (-1, 1)$, chứng tỏ rằng nghiệm này là hàm chẵn.

Theo Khoa Toán, Trường Đại học Khoa học và Nghệ thuật McMicken, ĐH Cincinnati, Hoa Kỳ

C3. Phải chăng xác suất để s số nguyên dương được chọn ngẫu nhiên ($s \geq 2$) có ước chung là h bằng $\dfrac{1}{\zeta(s)h^s}$. Ở đây $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^s},\ s > 1$ là kí hiệu của hàm zeta.

Theo Mehdi Hassani, Khoa Toán, Học viện Khoa học Cơ bản, Iran

[1]Các bài toán của phần này được chúng tôi chọn ra từ những vấn đề của các khoa Toán, các trường Đại học trên Thế Giới và từ các tạp chí Toán học. Những bài toán như thế này mang tính chất sinh viên nên chúng tôi hi vọng các bạn có thể cùng nhau tham gia giải quyết.

OLYMPIC HỌC SINH - SINH VIÊN

Olympic Sinh Viên Toàn Belarus 2009

Bài 1. Cho $A_1, A_2, ..., A_{1066}$ là các tập hợp con của tập X hữu hạn. $|X| \geq 10$ và $|A_i| > \frac{1}{2}|X|$ với mọi $i = \overline{1, 1066}$. Chứng minh rằng trong tập X tồn tại 10 phần tử sao cho mỗi tập A_i chứa ít nhất một phần tử trong số 10 phần tử trên.

Bài 2. Chúng ta xem xét một toán tử hai ngôi trên mặt phẳng. Cố định tam giác XYZ trong đó bộ ba điểm X, Y, Z được đánh dấu theo chiều ngược chiều kim đồng hồ. Đối với bất kì hai điểm phân biệt A, B của mặt phẳng ta xét toán tử $A * B = C$, trong đó C là đỉnh của tam giác ABC sao cho bộ ba các điểm A, B, C và X, Y, Z có cùng chiều định hướng và ΔABC đồng dạng với ΔXYZ (Khi $A \equiv B$ thì $A * A = A$). Chứng minh với bất kì bốn điểm A, B, C, D của mặt phẳng thì đẳng thức sau đúng

$$(A * B) * (C * D) = (A * C) * (B * D)$$

Bài 3. Cho $f \in C^{\infty}([a,b],)$, $0 \in [a,b]$, đồng thời $f^{(n)}(0) = 0$ và $\sup\limits_{[a,b]} \left|f^{(n)}(x)\right| \leq n!M^n, \forall n \in \mathbb{N}$, trong đó M là hằng số. Chứng minh $f \equiv 0$.

Bài 4. Tiến hành tung nhiều lần một đồng xu với xác suất rơi vào mặt huy hiệu (1) và mặt số (0) là như nhau (1/2). Dãy bao gồm từ các số 0 và 1 được gọi là dãy số “thưa thớt” nếu trong đó không có hai số 1 nào nằm cạnh nhau.

a) Tìm xác suất thu được “dãy thưa thớt” sau n lần tung đồng xu.

b) Giả sử xác suất rơi vào mặt có huy hiệu là p. Kí hiệu ξ_n là số các số 1 có trong một “dãy thưa thớt” ngẫu nhiên có độ dài n. Tính $M[\xi_n]$.

Bài 5. Cho E là không gian véctơ hữu hạn chiều trên trường số thực, u, v là hai ánh xạ tuyến tính từ E vào chính nó. Giả sử $Ker(u) \supset Ker(v)$. Chứng minh rằng tồn tại một ánh xạ tuyến tính $w : E \to E$ sao cho $u = w \circ v$.

Bài 6. Với số tự nhiên cố định $m \geq 2$ xét ánh xạ

$$f_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{km+1} + \frac{1}{km+2} + ... + \frac{1}{km+m-1} - \frac{x}{(k+1)m} \right)$$

Xác định miền xác định và miền giá trị của hàm f_m.

Olympic Khoa Toán Đại học Tổng hợp Sofia 2009

Dành cho sinh viên năm I và II

Bài 1. Tập $\{1, 2, ..., 3n\}$ được phân hoạch thành 3 tập con không giao nhau, mỗi tập n phần tử. Chứng tỏ rằng với 3 tập con như vậy có thể chọn từ mỗi tập một phần tử sao cho 1 phần tử chọn ra bằng tổng của 2 phần tử còn lại.

Bài 2. a. Chứng minh phương trình $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 2x + 1 = 0$ có 4 nghiệm thực phân biệt

b. Tính $det\begin{pmatrix} 1+x_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x_4 \end{pmatrix}$, $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ - các nghiệm của phương trình đã cho.

Bài 3. Cho đa thức $P(x)$ biết rằng $P(2) = 6$, $P(1) + P(2) + ... + P(2n-1) = 2nP(2n)$, $\forall n \in \mathbb{R}$. Tính $P(2009)$.

Bài 4. Tính $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$

Bài 5. Chứng minh $\left[\frac{(n+1)!}{e}\right]$ chia hết cho n

Bài 6. Tìm tất cả các hàm số $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ sao cho $0 < f(x) \le x$ và $f(x) \le 2f(x/2) - (f(x/2))^2$ với mọi $x \in (0, 1)$

Bài 7. Với mỗi $p > 0$, liệu có tồn tại hàm $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ sao cho $0 < f(x) \le x$ và $f(x) \le 2f(x/2) - (f(x/2))^p$ với mọi $x \in (0, 1)$ hay không?

Dành cho sinh viên năm III và IV

Bài 1. tương tự bài 1, **Bài 2.** tương tự bài 6 ở phần trên.

Bài 3. Cho hai hàm cộng tính $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và thỏa mãn $f^{-1}((0, +\infty)) = g^{-1}((0, +\infty))$. Chứng minh rằng tồn tại $c > 0$ để $f(x) = cg(x)$ với mọi số thực x

Bài 4. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ có đạo hàm đến cấp 3, đặt $L_h(f, x) = f(x + 2h) - 2hf'(x + h) - f(x) - \frac{h^3}{3}f'''(x + h)$. Chứng minh $L_h(f, x) = 0$ với mọi $x, h \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $f(x)$ là đa thức với bậc không vượt quá 4.

Bài 5. Cho nhóm hữu hạn G.

a. Chứng minh rằng G không thể biểu diễn thành hợp của 2 nhóm con không tầm thường của nó.

b. Giả sử G biểu diễn thành hợp của 3 nhóm con không tầm thường của nó. Chứng tỏ rằng bậc của G chia hết cho 4

Bài 6. Với số tự nhiên n và hàm số liên tục $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^1 x^k f(x)dx = 1$ với $k = 1, 2, ..., n-1$. Chứng tỏ $\int_0^1 (f(x))^2 dx \ge n^2$

VMO 2009 – Đề thi, lời giải và bình luận

Trần Nam Dũng, Trường Đại học Khoa học tự nhiên, ĐHQG TP Hồ Chí Minh

Kỳ thi chọn học sinh giỏi quốc gia môn Toán năm 2009 (VMO 2009) diễn ra vào ngày 25/2/2009 với sự tham gia của gần 360 thí sinh đến từ các tỉnh thành. Kết quả 131 thí sinh được giải, trong đó có 1 giải nhất, 22 giải nhì, 62 giải ba và 46 giải khuyến khích, đạt tỷ lệ 34%. 42 thí sinh có điểm từ 15 trở lên được triệu tập để tham dự kỳ thi chọn đội tuyển diễn ra vào nửa cuối tháng 4. Đề thi năm nay được đánh giá là dễ hơn nhưng cũng có những bài toán thực sự khó khăn hơn.

Từ 7 bài xuống 5 bài

Sau 2 năm thí điểm đề thi 7 bài làm trong vòng 180 phút, với kết quả tương ứng các năm 2007, 2008 là 13% và 8% số thí sinh đoạt giải. Bộ giáo dục, theo đề nghị của các chuyên gia đã quyết định chọn phương án đề thi gồm 5 bài toán làm trong vòng 180 phút. Có thể nói, đây là một thay đổi quan trọng giúp kết quả của kỳ thi tốt hơn 2 năm trước.

Một thay đổi khác cũng ảnh hưởng không nhỏ đến kết quả kỳ thi, đó là việc phân bố điểm cho các phân môn được ấn định như sau: Các bài toán thuộc 3 phân môn Giải tích, Đại số, Hình học là các phân môn mà đa số các thí sinh được chuẩn bị tốt hơn, quen hơn sẽ có tổng điểm là 14, điểm vừa đủ để đạt giải 3. Trong khi đó, các bài toán thuộc phần số học và tổ hợp thuộc dạng toán lạ và khó đối với học sinh, chỉ có 6 điểm. Cách phân bố điểm này rõ ràng là có lợi cho số đông các thí sinh, khiến khả năng đạt giải của họ cao hơn.

Tuy nhiên, cũng cần phải nói rằng cách phân bố này cũng gây đôi chút bất lợi cho các thí sinh có sở trường về số học và tổ hợp, đặc biệt trong bối cảnh kỳ thi VMO năm nay (khi các bài toán thuộc phần số học và tổ hợp khó hơn hẳn so với ba phần còn lại). Có thể sẽ có một vài thí sinh làm được bài số học nhưng lại bỏ bài hình hoặc bài đại số. Hoặc có thí sinh dồn sức cho bài tổ hợp nhưng lại sơ suất ở các bài dễ hơn. Kết quả là số điểm đạt được ở bài khó không bù được với số điểm bị mất ở bài dễ.

Có thể là vẫn còn có những vấn đề cần bàn cãi, tranh luận, làm thế nào để có được một đề thi tốt, phân loại được thí sinh và khuyến khích được phong trào nhưng nhìn chung, đề thi năm nay đã đáp ứng được những yêu cầu cơ bản nhất: Số thí sinh đạt giải đông hơn; có đủ cơ cấu giải nhất, nhì, ba; đề thi có những bài cơ bản nhưng cũng có những bài khó và hay.

Ba bài cơ bản

Ba bài toán đầu, gồm bài Đại số, bài Giải tích và bài Hình học là ba bài toán rất cơ bản, mà theo ngôn ngữ của các thầy là bài "kính biếu". Tuy nhiên, theo thông tin từ ban chấm thi thì không phải thí sinh nào cũng nhận "quà biếu". Nhiều thí sinh "bó tay" với bài 1. Nhiều thí sinh không làm được bài hình hoặc bỏ câu b) của bài này. Thậm chí với bài 2, bài được coi là dễ nhất của kỳ thi, cũng có thí sinh không làm được hoặc làm được cũng tốn khá nhiều thời gian. Dưới đây, chúng tôi sẽ không trình bày lời giải chi tiết mà chỉ bình luận một số vấn đề xung quanh đề bài và lời giải.

Câu 1. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+2y^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{1+2xy}} \\ \sqrt{x(1-2x)} + \sqrt{y(1-2x)} = \dfrac{2}{9} \end{cases}$$

Bình luận. Rõ ràng ý đồ của các thầy ra đề là muốn kiểm tra kiến thức cơ bản của học sinh về bất đẳng thức, cụ thể là:

"Chứng minh rằng với $x, y \in [0,1]$ ta có bất đẳng thức

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \le \frac{2}{\sqrt{1+xy}}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y$ (*)".

Bài này khá quen thuộc, xuất hiện trong nhiều đề thi cũng như là bổ đề của nhiều bài toán khác (chẳng hạn đề thi Nga năm 2000), nếu ra thẳng bất đẳng thức thì quá lộ nên các thầy đã thay đổi đi một chút, đưa nó vào trong một hệ phương trình. Tất nhiên là nếu đã có $x = y$ rồi thì thay vào phương trình thứ hai, mọi việc quá đơn giản.

Phương pháp chứng minh bất đẳng thức (*) cũng khá đa dạng. Chúng ta điểm qua các phương pháp đó.

1. Bình phương hai vế của bất đẳng thức, ta được bất đẳng thức tương đương

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{2}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{1+y^2} \le \frac{4}{1+xy}$$

Theo bất đẳng thức CBS, ta có

$$\sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+y^2} \ge 1+xy \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+y^2}} \le \frac{2}{1+xy}$$

Như vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \le \frac{2}{1+xy} \quad (**)$$

là xong

Nhưng (**) qua các phép biến đổi đại số đơn giản, tương đương với

$$\frac{(1-xy)(x-y)^2}{(1+xy)(1+x^2)(1+y^2)} \ge 0$$

đúng do $x, y \in [0,1]$.

2. Ta có thể làm khác đi một chút bằng cách áp dụng CBS ngay từ đầu:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\right)^2 \le 2\left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2}\right) \le \frac{4}{1+xy}$$

(theo (**))

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. Rõ ràng trong hai cách chứng minh trên, ta chỉ cần điều kiện $-1 < xy \le 1$.

3. Giữ y cố định, xét hàm số $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1+xy}} - \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$ trên $[0,1]$.

Ta có

$$f'(x) = \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} - \frac{y}{(1+xy)^{3/2}} = \frac{x^2(1+xy)^3 - y^2(1+x^2)^3}{(1+x^2)^{3/2}(1+xy)^{3/2}(x(1+xy)^{3/2} + y(1+x^2)^{3/2}}$$

Như vậy dấu của $f'(x)$ là dấu của

$$x^2(1+xy)^3 - y^2(1+x^2)^3 = (x-y)(x+y+3x^2y-x^5y^2)$$

Do x, y thuộc $[0,1]$ nên thừa số thứ hai luôn dương, như thế $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương tại y, suy ra y là điểm cực tiểu, suy ra $f(x) \geq f(y) = 0$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

4. Còn một cách khác để chứng minh bất đẳng thức dạng này, đó là đặt $x = e^u, y = e^v$ với $u, v \in (-\infty, 0]$ đưa bất đẳng thức về dạng $f(u) + f(v) \leq 2f(\frac{u+v}{2})$

Trong đó $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

Tính đạo hàm bậc hai, ta được $f(x) = \dfrac{e^{2x}(e^{2x}-2)}{(1+e^{2x})^{5/2}} < 0$ (do $x \leq 0$).

Vậy hàm $f(x)$ lõm trên $(-\infty, 0]$ và ta có điều cần chứng minh.

Câu 2. *Cho dãy số (x_n) xác định bởi*

$$x_1 = 1/2, x_n = \frac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + x_{n-1}}{2}$$

với mọi $n \geq 2$.

Chứng minh rằng dãy (y_n) với $y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^2}$ có giới hạn hữu hạn khi $n \to \infty$ và tìm giới hạn đó.

Bình luận. Đây là bài toán dễ nhất của kỳ thi. Việc chứng minh dãy (x_n) tăng và không bị chặn trên (tức là có giới hạn bằng $+\infty$) là quá đơn giản. Chẳng hạn có thể đánh giá:

$$x_n = \frac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + x_{n-1}}{2} \geq \frac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 2x_{n-1} + 1} + x_{n-1}}{2} = x_{n-1} + \frac{1}{2}$$

Việc tính giới hạn của y_n chỉ có thể thực hiện được nếu ta tìm được công thức tường minh cho tổng $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^2}$. Mà điều này chỉ có thể thực hiện thông qua sai phân. Ta biến đổi tương đương

$$x_n = \frac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + x_{n-1}}{2} \Leftrightarrow 2x_n - x_{n-1} = \sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}}$$

$$\Leftrightarrow 4x_n^2 - 4x_n x_{n-1} + x_{n-1}^2 = x_{n-1}^2 + 4x_{n-1} \Leftrightarrow x_n^2 - x_n x_{n-1} = x_{n-1} \Leftrightarrow \frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_n^2}$$

Sai phân đã được tìm ra, từ đó dễ dàng tìm được $y_n = 6 - \dfrac{1}{x_n}$ và giới hạn cần tìm bằng 6.

Quá đơn giản, không một chút lắt léo, từ việc nghĩ ra lời giải đến trình bày lời giải đều đơn giản. Tuy nhiên trên thực tế thì bày này cũng làm khó cho không ít thí sinh. Không kể các bạn không giải được, các bạn giải được cũng hao tổn khá nhiều công lực ở bài này. Nhiều bạn cứ máy móc, khi đã tìm được công thức cho y_n rồi vẫn cứ tiếp tục đi chứng minh (y_n) tăng và bị chặn trên. Nhiều bạn không biết khái niệm giới hạn bằng ∞!

Bài toán sẽ trở nên khó hơn nếu đề bài yêu cầu tính $\lim\limits_{n\to} \dfrac{x_n}{n}$. Khi đó sẽ phải vận dụng định lý trung bình Cesaro hoặc dùng đánh giá chặt hơn:

$$x_n = \frac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + x_{n-1}}{2} < \frac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1} + 4} + x_{n-1}}{2} = \frac{x_{n-1} + 2 + x_{n-1}}{2} = x_{n-1} + 1.$$

$$x_n = \frac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + x_{n-1}}{2} > \frac{x_{n-1} + 2 - \frac{2}{x_{n-1}} + x_{n-1}}{2} = x_{n-1} + 1 - \frac{1}{x_{n-1}}$$

Đề toán sẽ hay và thú vị hơn nhưng đổi lại sẽ không còn dễ chịu với đại đa số các thí sinh. Trong bối cảnh làm 5 bài toán trong vòng 180 phút, có lẽ các thầy đã tránh phương án này.

Câu 3. *Trong mặt phẳng cho hai điểm A, B ($A \neq B$). C là một điểm di động trên mặt phẳng sao cho $\angle ACB = \alpha$, ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$). Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC và tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA lần lượt tại D, E, F. Các đường thẳng AI, BI cắt đường thẳng EF lần lượt tại M và N.*

a) Chứng minh rằng đoạn MN có độ dài không đổi;

b) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN luôn đi qua một điểm cố định.

Bình luận. Bài hình học phẳng này khá đơn giản, lời giải chỉ dùng kiến thức hình học lớp 9 (tứ giác nội tiếp) và một chút lượng giác. Cấu hình bài toán cũng quen thuộc và có nhiều tính chất hay xung quanh. Ví dụ M và N chính là chân các đường cao hạ từ B, A xuống AI, BI tương ứng. Ngoài ra M, N nằm trên các đường trung bình của tam giác ABC (Từ đó suy ra $\angle MKN = \angle MDN$, trong đó K là trung điểm của AB, suy ra tứ giác $AKDN$ nội tiếp, suy ra kết luận phần b) của bài toán). Cũng có thể nhận thấy rằng đường tròng ngoại tiếp tam giác DMN chính là đường tròn Euler của tam giác IAB và do đó sẽ đi qua trung điểm của AB. Nhiều thí sinh đã nhận ra điều này và kết luận luôn. Theo kinh nghiệm của chúng tôi thì các thí sinh nên thận trọng trong việc sử dụng các kết quả như vậy. Tốt nhất là nên dựa vào kết quả để chứng minh lại.

Cuối cùng, chúng tôi xin đưa ra một số đề thi Olympic của Nga liên quan đến cấu hình bài toán 3.

1. (Olympic Nga, vòng 4, lớp 11, 1994) Đường tròn tâm O nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB, BC và AC tại các điểm E, F và D tương ứng. Các đường thẳng AO và CO cắt đường thẳng EF tại N và M. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN, điểm O và điểm D cùng nằm trên một đường thẳng.

2. (Olympic Nga, vòng 5, lớp 9, 1997) Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB, BC và CA tại các điểm M, N và K tương ứng. Đường thẳng đi qua đỉnh A và song song với NK cắt đường thẳng MN tại điểm D. Đường thẳng qua A và song song với MN cắt đường thẳng NK ở điểm E. Chứng minh rằng đường thẳng DE chứa đường trung bình của tam giác ABC.

3. (Olympic Nga, vòng 5, lớp 10, 1997) Đường tròn tâm O nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AC, AB và BC tại các điểm K, M và N tương ứng. Trung tuyến BB_1 của tam giác cắt MN tại điểm D. Chứng minh rằng điểm O nằm trên đường thẳng DK.

4. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh CA, AB tương ứng tại E, F; BI cắt EF tại M. Chứng minh rằng M nằm trên đường trung bình của tam giác ABC.

Hai bài phân loại thí sinh

Trong khi ba bài đầu tiên rất cơ bản và có phần dễ thì hai bài toán còn lại khá khó chịu. Để làm được hai bài này, ngoài việc hiểu đề bài, tìm được hướng đi đúng, còn cần phải có thời gian. Vì thế, hai bài toán này chỉ dành cho những thí sinh đã "tiêu diệt gọn" ba bài đầu trong vòng 1,5-2 tiếng đầu tiên. Hơn nữa, vẻ đơn giản bề ngoài có thể làm nhiều thí sinh sa lầy.

Câu 4. *Cho ba số thực a, b, c thoả mãn điều kiện: với mỗi số nguyên dương n, $a^n + b^n + c^n$ là số nguyên. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên p, q, r sao cho a, b, c là 3 nghiệm của phương trình $x^3 + px^2 + qx + r = 0$.*

Bình luận. Đây là một bài toán khá lạ và khó chịu. Để giải nó cần đến cả kiến thức về đại số và số học. Không có gì cao siêu (định lý Viet, các phép biến đổi đại số trên các biểu thức đối xứng, tính chất đơn giản $2c \in \mathbb{Z}$ và $2c^2 \in \mathbb{Z}$ suy ra $c \in \mathbb{Z}$) nhưng lại gây khó khăn cho các thí sinh.

Chúng ta hãy bắt đầu bằng trường hợp "2 chiều" của bài toán: "*Cho hai số thực a, b thoả mãn điều kiện: với mỗi số nguyên dương n, $a^n + b^n$ là số nguyên. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên p, q sao cho a, b là 2 nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$.*"

Theo định lý Viet, rõ ràng điều phải chứng minh tương đương với việc chứng minh $a + b$ và ab là số nguyên. $a + b$ hiển nhiên nguyên theo điều kiện đề bài. Ngoài ra ta có $2ab = (a + b)^2 - (a^2 + b^2)$ là số nguyên.

Ta có thể tiếp tục dùng hằng đẳng thức này để suy ra $2a^2b^2$ cũng là số nguyên:

$$2a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2 - (a^4 + b^4)$$

Đến đây ta dùng bổ đề đơn giản sau:

Bổ đề. *Nếu x là số thực sao cho $2x$ và $2x^2$ là các số nguyên thì x là số nguyên.*

Chứng minh. Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử $2x = k$ nguyên, nhưng x không nguyên. Khi đó k là số nguyên lẻ: $k = 2m + 1$. Suy ra $x = m + 1/2$. Nhưng khi đó $2x^2 = 2(m + 1/2)^2 = 2m^2 + 2m + 1/2$ không nguyên. Mâu thuẫn. Vậy điều giả sử là sai, tức là x nguyên.

Như vậy, theo bổ đề thì ab nguyên và ta suy ra điều phải chứng minh. Từ phép chứng minh ta cũng suy ra kết quả mạnh hơn: Nếu $a + b, a^2 + b^2, a^4 + b^4$ là các số nguyên thì a, b là 2 nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$ với p, q là các số nguyên nào đó (và do đó $a^n + b^n$ nguyên với mọi n nguyên dương). Điều đó cũng có nghĩa là ta chỉ cần dùng giả thiết của bài toán đến $n = 4$. Ví dụ $a = \sqrt{2}/2, b = -\sqrt{2}/2$ cho thấy $k = 4$ là giá trị nhỏ nhất thoả mãn điều kiện: Nếu a, b là các số thực thoả mãn điều kiện $a^n + b^n$ là số nguyên với mọi $n = 1, 2, ..., k$ thì $a^n + b^n$ nguyên với mọi n nguyên dương.

Quay trở lại với lời giải của bài toán VMO 2009. Ta sẽ thấy rằng kỹ thuật không có gì thay đổi, tuy có phức tạp hơn đôi chút. Rõ ràng ta chỉ cần chứng minh $a + b + c, ab + bc + ca$ và abc nguyên. Theo điều kiện đề bài thì $a + b + c$ là số nguyên. Tiếp theo ta có

$$2(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$$

là số nguyên.

Tương tự như lời giải trên, ta muốn chứng minh rằng $2(ab + bc + ca)^2$ cũng là số nguyên. Từ đó dùng bổ đề suy ra $ab + bc + ca$ là số nguyên. Điều này phức tạp hơn đôi chút vì đẳng thức tương tự

$$2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - (a^4 + b^4 + c^4)$$

Chưa cho ta kết quả mong muốn, vì

$$2(ab + bc + ca)^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 4abc(a + b + c) \qquad (1)$$

Mà ta chưa chứng minh được abc nguyên. Để xử lý điều này, ta lại sử dụng một hằng đẳng thức quen thuộc

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \quad (2)$$

Từ đây, do $a + b + c$, $a^2 + b^2 + c^2, a^3 + b^3 + c^3$ và $2(ab + bc + ca)$ là số nguyên nên ta suy ra $6abc$ là số nguyên (ta nhân (2) với 2!). Từ đó, nhân (2) với 3 ta thu được

$$6(ab + bc + ca)2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 12abc(a + b + c)$$

là số nguyên.

Áp dụng cách chứng minh như bổ đề nêu trên, ta suy ra $ab + bc + ca$ là số nguyên. Từ đây, thay vào (2) ta có $3abc$ là số nguyên.

Tiếp theo, ta sử dụng hằng đẳng thức tương tự (2)

$$a^6 + b^6 + c^6 - 3a^2b^2c^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2)$$

với chú ý $2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$ là số nguyên ta suy ra $6a^2b^2c^2$ là số nguyên. Từ $6abc$ và $6a^2b^2c^2$ là số nguyên, bằng cách chứng minh hoàn toàn tương tự ta suy ra abc là số nguyên. Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

Lời giải trên cho thấy rằng chúng ta chỉ sử dụng giả thiết $a^n + b^n + c^n$ cho đến $n = 6$ (trong đó không sử dụng giả thiết với $n = 5$!). Liên quan đến vấn đề này, chúng tôi đề xuất các độc giả suy nghĩ đến các vấn đề sau:

1. Chứng minh bổ đề tổng quát: Cho $k > 1$ là một số nguyên phi chính phương (không có ước chính phương), $(m, k) = 1$. Khi đó nếu x là một số thực sao cho kx và mkx^2 là số nguyên thì x là số nguyên.

2. Hãy tìm ví dụ về bộ ba số thực a, b, c thoả mãn điều kiện $a^n + b^n + c^n$ nguyên với mọi $n = 1, 2, 3, 4, 5$ nhưng $a^6 + b^6 + c^6$ không nguyên.

3. (Giả thuyết) Có phải chăng nếu $a_1^n + a_2^n + ... + a_k^n$ là số nguyên với mọi n nguyên dương thì $a_1, a_2, ..., a_k$ là nghiệm của một đa thức đơn khởi bậc k với hệ số nguyên? Và các hằng số 4 (đối với $k = 2$) và 6 (đối với $k = 3$) sẽ bằng bao nhiêu trong trường hợp tổng quát?

Câu 5. *Cho số nguyên dương n. Ký hiệu T là tập hợp gồm $2n$ số nguyên dương đầu tiên. Hỏi có bao nhiêu tập con S của T có tính chất: trong S không tồn tại các phần tử a, b mà $|a - b| \in \{1, n\}$ (Lưu ý: Tập rỗng được coi là tập con có tính chất nêu trên).*

Bình luận. Bài toán có vẻ khá quen thuộc. Chẳng hạn một bài toán nổi tiếng *«Tìm số tất cả các xâu nhị phân độ dài n sao cho không có 2 bít 1 đứng kề nhau»* có thể phát biểu một cách tương đương là *«Tìm số tất cả các tập con S thuộc $\{1, 2, ..., n\}$ sao cho trong S không tồn tại hai phần tử mà $|a - b| = 1$.»*. Kết quả bài toán này là chúng ta sẽ có dãy số Fibonacci.

Tương tự, một bài toán khác có vẻ bề ngoài còn giống hơn nữa, đó là đề thi của Thuỵ Sĩ năm 2006: *«Cho số nguyên dương n. Tìm số tất cả các tập con $A \subset \{1, 2, ..., 2n\}$ sao cho không tồn tại $x, y \in A$ với $x + y = 2n + 1$»*.

Tuy nhiên, đó chỉ là cái giống bề ngoài. Bản chất bên trong thì bài VMO 2009 khó hơn hẳn. Với bài xâu nhị phân độ dài n, ta có thể dễ dàng lập được công thức truy hồi $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ bằng cách lý luận như sau: Xét 1 xâu nhị phân độ dài n thoả mãn đề bài. Nếu xâu này bắt đầu bằng 0 thì bỏ số 0 này đi, ta được 1 xâu nhị phân độ dài $n - 1$ thoả đề bài và ngược lại, nếu có

1 xâu nhị phân độ dài $n-1$ thoả đề bài thì thêm số 0 vào phía đầu, ta được 1 xâu nhị phân độ dài n thoả đề bài bắt đầu bởi 0. Từ đó số xâu loại này bằng x_{n-1}. Nếu xâu này bắt đầu bằng 1 thì chữ số tiếp theo phải là 0. Bỏ đi hai chữ số đầu tiên, ta được 1 xâu nhị phân độ dài $n-2$ thoả đề bài. Từ đó số xâu nhị phân độ dài n thoả đề bài bắt đầu bằng 1 bằng x_{n-2}. Vậy $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$.

Bài Thuỵ Sĩ 2006 có lời giải trực quan khá đơn giản như sau: Ta xếp cách số từ 1 đến $2n$ thành 2 hàng, n cột

1	2	3	$\cdots$	n
2n	*2n-1*	*2n-2*	$\cdots$	$n+1$

Khi đó bài toán tương đương với việc tìm số cách chọn ra một số ô, sao cho hai ô cùng cột không đồng thời được chọn. Như vậy, tại mỗi cột ta chỉ có 3 lựa chọn: hoặc không chọn cả hai, hoặc chọn số ở hàng trên, hoặc chọn số ở hàng dưới. Suy ra đáp số bài toán là $3n$.

Từ lời giải trên, dễ dàng nhận thấy rằng Thuỵ Sĩ 2006 tương đương với bài *«Tìm số các tập con S thuộc T sao cho không tồn tại a, b thuộc S với $|a-b| = n$»*. Lúc này ta chỉ cần đổi bảng thành

1	2	3	$\cdots$	n
n+1	*n+2*	*n+3*	$\cdots$	$2n$

Lời giải các bài toán trên tuy khá xa với lời giải VMO 2009 (thậm chí bài Fibonacci có thể dẫn đến sa lầy) nhưng gợi ý cho chúng ta một số ý tưởng: xây dựng công thức truy hồi, đưa về mô hình trực quan bảng.

Sau đây là lời giải chi tiết:

Ta đặt các số thuộc $\{1, 2, ..., 2n\}$ vào bảng $2 \times n$ như sau

1	2	$\cdots$	*n-1*	n
n+1	*n+2*	$\cdots$	*2n-1*	$2n$

Bài toán của chúng ta tương đương với việc đếm số cách chọn một số số (có thể là không số nào) sao cho:

i. Hai số kề nhau trong bảng không đồng thời được chọn

ii. n và $n+1$ không đồng thời được chọn.

Gọi $S(n)$ là đáp số của bài toán. Ký hiệu $A(n), B(n), C(n)$ là số các cách chọn một số số (có thể không số nào) từ các bảng ở hình bên dưới sao cho không có hai số nào cạnh nhau được chọn.

1	*2*	*3*	...		*n-1*	*n*
n+1					*2n-1*	*2n*

1	*2*	*3*	...		*n-1*	*n*
					2n-1	*2n*

1	*2*	*3*	...		*n-1*	***n***
	n+2				*2n-1*	*2n*

Khi đó dễ thấy rằng $S(n) = A(n) - C(n-2)$. Và ta có các hệ thức sau:

$$A(n) = A(n-1) + 2B(n-1) \quad (1)$$

(ta chia các cách chọn của $A(n)$ thành ba trường hợp: cả 1 và $n+1$ đều không được chọn; 1 được chọn; $n+1$ được chọn)

$$B(n) = A(n-1) + B(n-1) \quad (2)$$

(lý luận tương tự)

$$C(n) = B(n-1) + B(n-2) + C(n-2) \quad (3)$$

(1 không được chọn; 1 được chọn và $n+2$ không được chọn; 1 được chọn và $n+2$ được chọn)

Từ các hệ thức này ta có thể tính được $A(n), B(n), C(n)$ và $S(n)$. Ví dụ, ta có thể dễ dàng suy ra

$$A(n) = 2A(n-1) + A(n-2), A(0) = 1, A(1) = 3, A(2) = 7. \quad (4)$$

và từ đó

$$A(n) = \frac{(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}}{2},$$

C(n) được tính tứ hệ thức

$$C(n) = C(n-2) + A(n-1) \quad (5)$$

$(B(n-1) + B(n-2) = A(n-2) + B(n-2) + B(n-2) = A(n-1))$

$\Leftrightarrow C(n) = C(n-2) + \frac{A(n)-A(n-2)}{2}$

$\Leftrightarrow C(n) - \frac{A(n)}{2} = C(n-2) - \frac{A(n-2)}{2}$

Ta chú ý rằng $C(1) = 1, C(2) = 4, C(3) = 8$. Từ hệ thức cuối cùng và

$$C(1) - A(1)/2 = -1/2, C(2) - A(2)/2 = 1/2, C(3) - A(3)/2 = -1/2$$

Ta suy ra rằng

$$C(n) - A(n)/2 = (-1)^n/2$$

Như thế

$$C(n) = \frac{A(n) + (-1)^n}{2}$$

Và cuối cùng

$$S(n) = A(n) - C(n-2) = \frac{(3+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^n + (3-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^n - 2(-1)^n}{4}.$$

Ghi chú

1. Từ (1), (2), (3) có thể suy ra rằng $S(n) = S(n-1) + 3S(n-2) + S(n-3)$. Chúng tôi không rõ là có thể tìm được cách chứng minh trực tiếp hệ thức này mà không thông qua các dãy số phụ được không.

2. Bài toán sẽ dễ chịu hơn nếu yêu cầu không tồn tại a, b sao cho $|a-b| \in \{1, n\}$ được đổi thành không tồn tại a, b sao cho $|a-b| = 1$ hoặc $a+b = 2n+1$. Khi đó đáp số sẽ chính là $A(n)$.

Góc lập trình tính toán

Đồ thị trong Mathematica

Đồ thị là một phần quan trọng trong các chương trình toán. Mathematica là phần mềm hỗ trợ khá tốt về mặt này. Mathematica có tập hợp các câu lệnh cho phép chúng ta xây dựng phần lớn đồ thị của các hàm toán học. Có thể sử dụng Mathematica để vẽ đồ thị của hàm một biến, vẽ một lúc nhiều đồ thị, vẽ những mặt phức tạp trong không gian ba chiều. Trong đồ thị, chúng ta có thể kèm theo văn bản, âm thanh, và có thể tạo ra một loạt hình ảnh (kể cả hình ảnh động). Ngoài ra, khi thay đổi tham số trong những câu lệnh, ta có thể thay đổi màu nền, khung.

Đầu tiên chúng ta xét khả năng của hệ thống Mathematica để xây dựng đồ thị của hàm một biến. Để vẽ đồ thị hàm một biến chúng ta sử dụng hàm `Plot`, hàm này có thể được sử dụng như sau:

- `Plot[f, {x, xmin, xmax}]` - dùng để xây dựng đồ thị hàm trong khoảng từ `xmin` đến `xmax`.

- `Plot[{f1, f2, ...}, {x, xmin, xmax}]` - dùng để xây dựng dãy đồ thị của các hàm `f1, f2,...` trong khoảng từ `xmin` đến `xmax`.

- `Plot[Evaluate[f], {x, xmin, xmax}]` - đầu tiên nó chuyển `f` sang dạng số, và sau đó từ nó vẽ đồ thị trong khoảng đã cho.

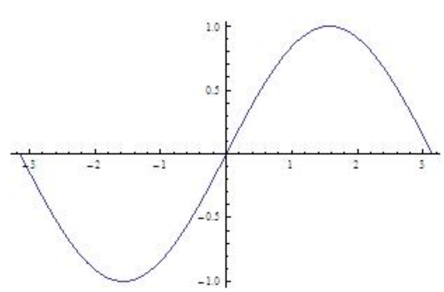
- `Plot[Evaluate[y[x]/.solution], {x, xmin, xmax}]`- nó xây dựng đồ thị của nghiệm số phương trình vi phân nhận được khi sử dụng lệnh `NDSolve`.

- `Plot[Evaluate[Table[f, ...]], {x, xmin, xmax}]` – tạo ra danh sách hàm số, sau đó xây dựng đồ thị của chúng trong khoảng đã cho.

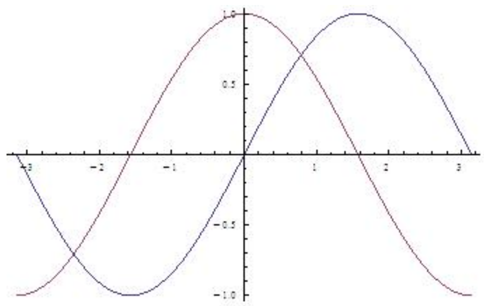
Ta đưa ra một vài ví dụ minh họa:

1. Xây dựng đồ thị hàm `Sin[x]` trong khoảng $(-\pi, \pi)$

`Plot[Sin[x], {x, -π, π}]`



2. Bây giờ, yêu cầu vẽ đồ thị đường tròn được cho dưới dạng tham số $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t \end{cases}$ trong đó $t \in (-\pi, \pi)$.



Nếu chúng ta dùng lệnh `Plot`$[\{$`Sin`$[$t$]$, `Cos`$[$t$]\}, \{$t$, -\pi, \pi\}]$ ta sẽ nhận được đồ thị như trên

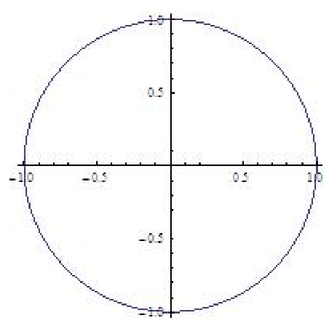
Điều này không đúng yêu cầu của chúng ta. Ở đây ta phải dùng một câu lệnh khác đó là `ParametricPlot`:

- `ParametricPlot[{x, y}, {t, tmin, tmax}]` - xây dựng đồ thị của hàm theo tham số `t`, trong đó `t` nhận giá trị từ `tmin` đến `tmax`.

- `ParametricPlot[{{x1, y1}, {x2, y2}, ...}, {t, tmin, tmax}]` – xây dựng đồng thời đồ thị của nhiều hàm cho bởi tham số.

Đối với thí dụ trên

`ParametricPlot`$[\{$`Sin`$[$t$]$, `Cos`$[$t$]\}, \{$t$, -\pi, \pi\}]$



Ngoài các đối số bắt buộc, hàm xây dựng đồ thị có một số lượng lớn các tùy chọn, dùng để làm cho đồ thị nổi bật hơn, dễ nhìn hơn. Những lựa chọn được cho với cấu trúc chung `name` → `value`. Giá trị của chúng có thể là số, danh sách, giá trị logic `True` hoặc `False`, và những từ đặc biệt: `Automatic` (sử dụng tự động tùy chọn), `None` (các tùy chọn không được sử dụng), `All` (tùy chọn được sử dụng trong mọi trường hợp). Bây giờ chúng ta làm quen với một vài tùy chọn (đối với những tùy chọn có dấu sao trên đầu có thể sử dụng cho đồ thị 3 chiều):

- `AspectRatio*` - đưa ra tỉ lệ của chiều cao đối với chiều rộng (mặc định là `1/GoldenRatio`);

- `Axes*` - xác định cần có vẻ trục tọa độ hay không (mặc định – `Automatic`);

- `AxesLabel*` - cần đưa vào chú ý đối với các trục tọa độ hay không (mặc định – `None`);

- `AxesOrigin` - chỉ ra nơi đặt gốc tọa độ (mặc định – `Automatic`);

- `AxesStile*` - chỉ ra loại (style) nào để xây dựng trục của đồ thị (mặc định – `Automatic`);

- `Background*` - chỉ ra màu nền của đồ thị (mặc định – `Automatic`);

- `ColorOutput*` - chỉ ra màu sắc của đồ thị (mặc định – `Automatic`);

- `DefaultFont*` - chỉ ra font để viết lên đồ thị (mặc định – `$DefaultFont`);

- `Frame` – chỉ ra cần có vẻ khung quanh đồ thị hay không (mặc định – `False`);

- `FrameLabel` – chỉ ra có đặt trên biên của khung các ghi chú hay nhãn hiệu (mặc định – `None`);

- `FrameTicks` – chỉ ra mật độ phân bố của các nhãn hiệu trên biên của khung (mặc định – `Automatic`);

- `GridLines` – chỉ ra có cần xây dựng các đường lưới trên đồ thị hay không (mặc định – `None`);

- `MaxBend` – đưa ra giá trị lớn nhất của đường cong khi vẽ đồ thị hàm số (mặc định 10);

- `PlotDivision` – chỉ ra số đoạn lớn nhất khi vẽ đồ thị của đường cong trơn (mặc định 20);

- `PlotLabel*` cho biết có đưa vào nhãn của đồ thị hay không (mặc định - `None`);

- `PlotRange*` chỉ ra các loại điểm nằm trong đồ thị (mặc định - `Automatic`);

- `Ticks*` chỉ ra có đánh dấu các giá trị trên các trục hay không (mặc định - `Automatic`).

Để xác định giá trị các tùy chọn ta có thể dùng hàm sau `Options[Name]`.

Khi xây dựng các mặt 3 chiều ta sử dụng các hàm cơ bản sau:

- `Plot3D[f, {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}]` – xây dựng đồ thị 3 chiều của hàm số `f(x, y)`, trong miền xác định đã cho;

- `ParametricPlot[{x, y, z}, {t, tmin, tmax}]` – xây dựng đồ thị được cho dưới dạng tham số
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$
trong đó `t` nhận giá trị từ `tmin` đến `tmax`;

- `ParametricPlot[{x, y, z}, {t, tmin, tmax}, {u, umin, umax}]` – xây dựng đồ thị 3 chiều được cho dưới dạng tham số (2 tham số), trong đó `t` và `u` được cho trong các khoảng tương ứng `(tmin,tmax)` và `(umin, umax)`.

- Thông thường, theo mặc định khi vẽ các mặt 3 chiều thì đồ thị chứa đựng trong một "hộp", nếu chúng ta không muốn tùy chọn này chúng ta có thể viết `Boxed → False`.

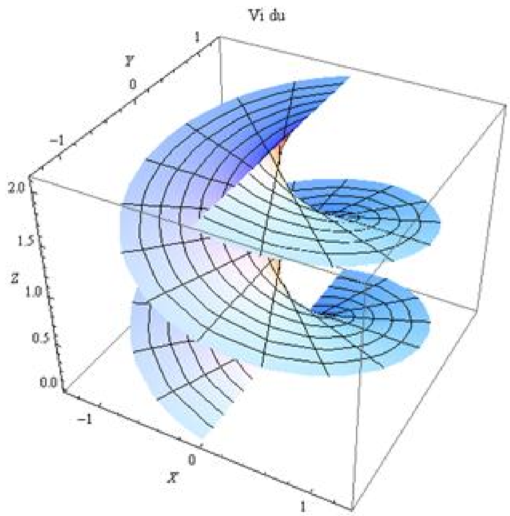
- Khi xây dựng đồ thị, thỉnh thoảng, xảy ra sự biến đổi dạng, tham số và các tùy chọn. Trong trường hợp này, để tốt hơn chúng ta có thể sử dụng các hàm sau:

- `Show[plot, option → value]` – xây dựng đồ thị với tùy chọn cho trước;

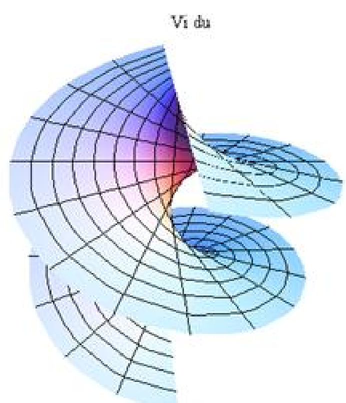
- `Show[plot1, plot2,...]` – xây dựng một số đồ thị và kết hợp chúng lại với nhau.

Chúng ta xét thêm một ví dụ:

```
g = ParametricPlot3D[{uSin[t], uCos[t], t/3}, {t, 0, 2π}, {u, −1.3, 1.3},
AxesLabel → {X, Y, Z}, PlotLabel → "Vidu"]
```




```
Show[g, Boxed → False, Axes → None, ViewPoint → {0, −1, 1}]
```



Trong các phiên bản Mathematica gần đây, khả năng xử lý đồ thị là rất rộng. Trong bài viết này chỉ điểm qua sơ lược các hàm cũng như những tùy chọn.

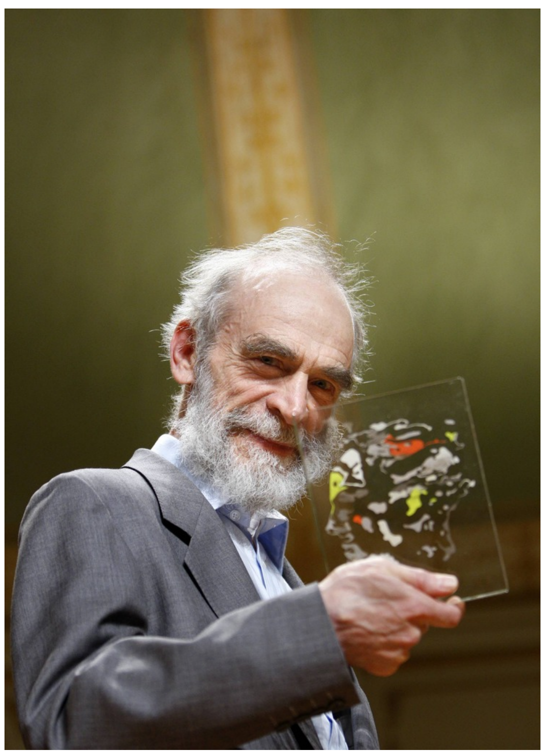
Tin tức Toán học

A - Tin Thế Giới

Giải thưởng Abel 2009

Giải thường Abel 2009 được trao cho Mikhail Leonidovich Gromov, giáo sư thường trực, Viện Hautes Études Scientifiques (Pháp) và giáo sư Viện Toán Courant, ĐH New York, ông được vinh danh vì những đóng góp mang tính cách mạng cho hình học. Giải thưởng này trị giá 6 triệu Kroner Thụy Điển (tương đương với gần 950.000 USD).

Leonidovich Mikhail Gromov sinh ngày 23-12-1943 tại Boksitogorsk, Liên Xô cũ. Ông đã nhận bằng Thạc sỹ năm 1965, bảo vệ Tiến sĩ năm 1969 và Tiến sĩ Khoa học năm 1973 tại Đại học Leningrad, nơi ông đã làm trợ giảng từ 1967 đến 1974. Kể từ 1982, Gromov được bổ nhiệm vào vị trí Giáo sư thường trực tại Viện Hautes Études Scientifiques, Bures-sur-Yvette, Pháp. IHÉS là một viện nghiên cứu chuyên sâu về toán học, vật lý lý thuyết và các lĩnh vực liên quan đến khoa học. Ông nhập quốc tịch Pháp từ năm 1992. Mikhail Gromov L. và hiện nay cũng là cũng là giáo sư tại Viện Toán Courant, Đại học New York, Hoa Kỳ.



Tên tuổi của Gromov mãi mãi gắn liền với những kết quả sâu sắc và những khái niệm quan trọng đối với hình học Riemann, Symplectic Geometry, String Theory và lý thuyết nhóm. Hội đồng của giải thưởng đã nhận xét rằng: "Mikhail Gromov luôn luôn theo đuổi các vấn đề mới và không ngừng suy nghĩ về những ý tưởng mới cho các lời giải của những vấn đề cũ. Ông đã cho chúng ta thấy những ông trình sâu sắc trong suốt sự nghiệp của mình và những sự sáng tạo đáng chú ý. Các công trình của Gromov sẽ tiếp tục là nguồn cảm hứng cho nhiều khám phá toán học trong tương lai". Mikhail L. Gromov đã nhận được nhiều giải thưởng quốc tế khác như Kyoto Prize in Basic Sciences (2002), Balzan Prize (1999), Leroy P. Steele Prize for Seminal Contribution to Research (1997), Lobatchewski Medal (1997) và Wolf Prize (1993). Ông là thành viên của Viện Hàn lâm khoa học quốc gia Hoa Kỳ, Viện Hàn Lâm Khoa học và Nghệ Thuật Hoa Kỳ và Viện hàn lâm khoa học Pháp. Ông là thành viên thứ 3 của Viện Toán Courant nhận được giải Abel (Peter Lax, năm 2005 và Srinivasa S.R. Varadhan năm 2007).

"Các công trình của Leonidovich Mikhail Gromov ảnh hưởng to lớn đến ngành hình hoc và từ đó có nhiều ứng dụng rộng rãi trong giải tích và đại số. Hội Toán học Hoa kỳ nhiệt thành gửi lời chúc mừng đến giáo sư Mikhail Gromov nhân dịp ông được nhận giải thưởng Abel 2009. Không ai có thể tưởng được được điều gì còn xứng đáng hơn" - *George Andrews*, Chủ tịch AMS.

GS Gromov được nhà vua Thụy Điển Harald trao giải thưởng Abel vào ngày 19, tháng 5, 2009 tại Oslo.

Thông tin có thể xem thêm tại: `http://www.abelprisen.no/no/nyheter/nyhet.html?id=180`

Hội nghị của SIAM về Điều khiển và Ứng dụng 2009

Năm nay Cộng đồng Toán Ứng dụng và Công nghiệp thế giới (SIAM) sẽ tổ chức hội nghị về Điều khiển và Ứng dụng (SIAM Conference on Control and Its Applications) từ ngày 06 đến 08 tháng 07, 2009 tại khách sạn Sheraton Denver Downtown, Denver, bang Colorado, Hoa Kỳ.

Lĩnh vực của lý thuyết điều khiển liên quan đến hàng loạt các vấn đề về hàng không dân dụng, hàng không vũ trụ, các hệ thống tự động hóa và kĩ thuật cao và được xem như là nền tảng cho những công nghệ tiên tiến đang phát triển mạnh hiện nay từ công nghệ nano đến công nghệ điều chỉnh tế bào. Lý thuyết này ứng dụng rộng rãi cho các ngành vật lý, sinh học, máy tính và khoa học xã hội.

Hội nghị sẽ trình bày hàng loạt các vấn đề về lý điều khiển và hệ thống và những ứng dụng liên quan đến real-time optimization, data assimilation, cellular và điều tiết sinh học, kỹ thuật điều khiển và toán tài chính, điều khiển y-sinh, điều khiển hệ thống thông minh, điều khiển dòng chảy và điều khiển lượng tử... Hội nghị năm 2009 là sự tiếp nối loạt hội nghị bắt đầu từ tổ chức đầu tiên tại San Francisco năm 1989.

Thông tin thêm có thể xem tại: `http://www.siam.org/meetings/ct09/`

Chủ tích của các hiệp hội Toán học Châu Âu nhóm họp tại Warsaw

Trong hai ngày 09 – 10 tháng 05, 2009 tại Banach Centre, Thủ đô Warsaw, Ba Lan, đã diễn cuộc gặp gỡ giữa chủ tịch các hiệp hội Toán học các quốc gia trên toàn Châu Âu do Hiệp hội Toán học Châu Âu chủ trì (EMS).

Được biết đây là lần gặp gỡ thứ 2 mà EMS đã tổ chức thành công. Lần thứ nhất diễn ra tại Luminy, Pháp tháng 04 năm ngoái. EMS dự định sẽ tổ chức thường niên sự kiện này để tăng cường sự hữu nghị hợp tác của toàn thể các nhà Toàn học trên toàn châu Âu.

Tin tức về hội nghị này có thể xem thêm tại: `http://www.euro-math-soc.eu/node/263`

Cuộc thi Olympic Toán học sinh viên Thế giới lần thứ 16

Năm nay cuộc thi Olympic Toán học sinh viên Thế giới (IMC) được tổ chức tại thủ đô Budapest, Hungary từ ngày 25-30 tháng 07 dưới sự phối hợp giữa Đại học London (Anh Quốc) và Đại học Eötvös Loránd, Đại học Công nghệ và Kinh tế Budapest. Cuộc thi có sự tham gia của các sinh viên từ năm 1 đến năm 4 các trường đại học trên toàn thế giới, được chia làm hai vòng, mỗi vòng có thời gian làm bài là 5 tiếng đồng hồ. Các bài toán được đề nghị thuộc lĩnh vực Đại số, Giải tích (thực và phức), Hình học và Tổ hợp. Các thí sinh phải sử dụng tiếng anh trong bài thi của mình.

International Mathematics Competition

IMC

Được biết trong suốt các kỳ thi IMC được tổ chức từ năm 1994 đã thu hút sinh viên của hơn 150 trường đại học từ 40 quốc gia trên toàn thế giới tham dự.

Thông tin được cập nhật từ: `http://www.imc-math.org/`

B - Tin trong nước

Trường hè "Toán học cho sinh viên"

Năm nay viện toán tiếp tục mở trường hè tạo điều kiện cho nhiều bạn sinh viên khoa Toán trên toàn quốc tham gia trao đổi và giao lưu. Trường hè là hoạt động chính của Đề án "Nâng cao năng lực nghiên cứu Toán học" được Quỹ Phát triển Khoa học và Công nghệ quốc gia phê duyệt và tài trợ kinh phí. Mục đích của Đề án là hỗ trợ sinh viên giỏi của các trường đại học phát huy được khả năng học tập của mình, tập dượt nghiên cứu trong quá trình học đại học. Qua đó sẽ tăng số sinh viên tốt nghiệp đại học có khả năng nghiên cứu Toán.

Trường hè "Toán học cho sinh viên" năm 2009 sẽ được tổ chức tại Viện Toán học, là bước tiếp nối của Trường hè 2008. Nội dung của Trường hè bao gồm 6 loạt bài giảng về các hướng khác nhau vào các buổi sáng và các báo cáo, thảo luận vào các buổi chiều. Viện Toán học có thể tài trợ cho một số sinh viên xuất sắc tham dự Trường hè, bao gồm chi phí đi lại bằng tàu (vé nằm cứng), ở tại Hà Nội (kí túc xá của Trường ĐHSP Hà Nội) và hỗ trợ một phần sinh hoạt phí.

Thông tin tham khảo từ Viện Toán học Việt Nam: `http://www.math.ac.vn/`

Đội tuyển Việt Nam tham dự IMO 2009 tại Đức

Kết thúc hai đợt thi quốc gia và TST cuối cùng chúng ta cũng đã có 6 đại diện thuộc nhiều tỉnh thành khác nhau có mặt tại BREMEN, Đức vào hè này:

1) Hà Khương Duy (ĐHKHTN - ĐHQG HN)

2) Nguyễn Xuân Cương (Hải Dương)

3) Phạm Hy Hiếu (PTNK - ĐHQG Tp HCM)

4) Tạ Đức Thành (Phú Thọ)

5) Nguyễn Hoàng Hải (Vĩnh Phúc)

6) Phạm Đức Hùng (Hải Phòng)

Thi giải Toán cấp quốc gia qua Internet

Ngày 12/5 vừa qua, đội tuyển Toán lớp 5 và lớp 9 của 63 tỉnh, thành phố đã tham dự cuộc thi "Giải Toán qua Internet" (ViOlympic Toán học) dành cho học sinh phổ thông do Bộ Giáo dục & Đào tạo và Tập đoàn FPT lần đầu tổ chức.

Mỗi Sở Giáo dục & Đào tạo thành lập 2 đội tuyển (lớp 5 và lớp 9), mỗi đội ít nhất 10 thi sinh. Những em này phải được tuyển chọn trong số các thí sinh tham dự đầy đủ các kỳ thi cấp trường, Phòng Giáo dục và Sở Giáo dục & Đào tạo.

Đây đang là một hoạt động thu hút được sự chú ý của đông đảo học sinh tham gia.

`Xem thêm tại: http://www.violympic.vn/`

Chủ tịch và Tổng Thư ký Liên đoàn Toán học Thế giới thuyết trình tại ĐHQGHN

Ngày 4/3/2009 GS. Laszlo Lovasz - Chủ tịch và GS. Martin Groetschel - Tổng Thư ký Liên đoàn Toán học Thế giới đã có buổi gặp gỡ, thuyết trình với cán bộ, giảng viên cùng sinh viên ngành toán học của một số trường đại học đóng trên địa bàn Hà Nội.

Buổi gặp gỡ do Trường ĐHKHTN – ĐHQGHN phối hợp cùng với Hội Toán học Việt Nam, Trường ĐH Sư phạm Hà Nội và Viện Toán học Việt Nam tổ chức.

GS.TS Nguyễn Hữu Đức – Phó Giám đốc ĐHQGHN đã tới dự và chúc mừng sự hiện diện của hai giáo sư tại ĐHQGHN.

Tại buổi giao lưu, ngài Chủ tịch Laszlo Lovasz đã trình bày báo cáo chuyên đề làm thế nào để hoàn thiện một đồ thị ("How to draw graphs?"); GS. Martin Groetschel trình bày báo cáo về những ứng dụng của toán học trong cuộc sống hiện đại hiện nay ("Mathematics in everyday life"). Cũng trong khôn khổ của buổi gặp gỡ, hai ông đã có những trao đổi trực tiếp với sinh viên về một số vấn đề thời sự và vai trò của toán học ngày nay. Đây thực sự là những thông tin hữu ích và hấp dẫn với những người yêu toán học.

Thông tin được cập nhật từ: `http://www.hus.edu.vn/News`

Olympic Toán Sinh viên 2009

Nhằm góp phần nâng cao chất lượng dạy và học toán, thúc đẩy phong trào học tập của sinh viên, đồng thời góp phần phát hiện, bồi dưỡng các sinh viên giỏi toán các trường đại học và cao đẳng, kỳ thi Olympic Toán Sinh Viên đã được tổ chức tại Quảng Bình từ ngày 15 đến 20 tháng 04 năm 2009 dưới sự phối hợp giữa Hội Toán học Việt Nam, Bộ Giáo dục và Đào tạo, Đại học Quảng Bình, Liên hiệp các hội khoa học và kĩ kĩ thuật Việt Nam, Hội Sinh viên Việt Nam.

Năm nay đã có sự tham gia của gần 650 sinh viên của 69 trường Đại và Cao đẳng trong cả nước dự thi ở hai môn là Giải tích và Đại số. Kết quả có hai bạn Nguyễn Trọng Nghĩa, Trường Đại học Bách khoa Thành phố Hồ Chí Minh và bạn Nguyễn Trần Thuận, Trường Đại học Vinh cùng đạt tổng số điểm tuyệt đối là 30.

Đề thi và danh sách sinh viên đạt giải có thể xem ở: `http://www.vms.org.vn/`

Hội nghị Đại số - Hình học - Tô pô, Huế 2009

Hội nghị Đại số-Hình học-Tôpô được tổ chức hai năm một lần. Mục đích của Hội nghị là tạo điều kiện cho các nhà nghiên cứu, giảng viên đang công tác tại các viện nghiên cứu, các trường đại học và cao đẳng trong cả nước trao đổi các kết quả nghiên cứu đạt được trong thời gian gần đây về các lĩnh vực Đại số, Hình học và Tôpô.

Xem thêm tại: `https://sites.google.com/site/hoitoanhochue/dahito`

Mười suất học bổng du học toàn phần tại Liên bang Nga

Vào ngày 10-5, tại hai địa điểm là Trường THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm (Hà Nội) và hội trường Lê Văn Thiêm của ĐH Quốc gia Hà Nội tại 19 Lê Thánh Tông đã diễn cuộc thi dành học bổng du học tại Nga.

Mười suất học bổng toàn phần du học tại Liên bang Nga được trao cho mười thí sinh đạt kết quả cao nhất trong cuộc thi Olympic toán học dành cho học sinh lớp 12 do Khoa Quốc tế (ĐH Quốc gia Hà Nội) phối hợp với Hiệp hội các trường Đại học tại Liên bang Nga tổ chức.

Mỗi suất học bổng toàn phần du học tại Liên bang Nga bao gồm học phí các giai đoạn học dự bị tiếng, chương trình đào tạo ĐH, nhà ở và sinh hoạt phí tại một trong số 22 trường ĐH thuộc. Hiệp hội các trường ĐH Liên bang Nga.