CHƯƠNG

**II**

**DÃY SỐ**

**CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN**

BÀI 1: DÃY SỐ

**LÝ THUYẾT.**

**I ===I**

**I. KHÁI NIỆM**

Mỗi hàm số : () được gọi là một dãy số hữu hạn.

Do mỗi số nguyên dương  tương ứng với đúng một số  nên ta có thể viết dãy số đó dưới dạng khai triển:  trong đó  là số hạng đầu,  là số hạng cuối của dãy số đó.

Mỗi hàm số :  được gọi là một dãy số vô hạn.

Do mỗi số nguyên dương  tương ứng với đúng một số  nên ta có thể viết dãy số đó dưới dạng khai triển: 

Dãy số đó còn được viết tắt là .

Số  gọi là số hạng đầu,  gọi là số hạng thứ 2, …  là số hạng thứ  (hay số hạng tổng quát) của dãy số.

Nếu thì ta nói  là dãy số không đổi.

**II. CÁCH XÁC ĐỊNH DÃY SỐ**

**Thông thường một dãy số có thể được cho bằng các cách sau:**

**a) Dãy số cho bằng liệt kê các số hạng**

**b) Diễn đạt bằng lời cách xác định mỗi số hạng của dãy số đó.**

**c) Dãy số cho bằng công thức của số hạng tổng quát**

**d) Dãy số cho bằng phương pháp truy hồi**

Cách cho một dãy số bằng phương pháp truy hồi, tức là:

Cho số hạng đầu.

Cho hệ thức truy hồi, tức là hệ thức biểu thị số hạng thứ  qua số hạng đứng trước nó.

**III. DÃY SỐ TĂNG, DÃY SỐ GIẢM VÀ DÃY SỐ BỊ CHẶN**

Dãy số  được gọi là dãy số tăng nếu ta có  với mọi 

Dãy số  được gọi là dãy số giảm nếu ta có  với mọi 

**Chú ý:** Không phải mọi dãy số đều tăng hoặc giảm. Chẳng hạn, dãy số  với  tức là dãy  không tăng cũng không giảm.

**IV. DÃY SỐ BỊ CHẶN**

Dãy số  được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại một số  sao cho



Dãy số  được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại một số  sao cho



Dãy số  được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại các số  sao cho



Lưu y: + Dãy tăng sẽ bị chặn dưới bởi 

+ Dãy giảm sẽ bị chặn trên bởi 

**HỆ THỐNG BÀI TẬP.**

**II ===I**

### *DẠNG 1: TÌM SỐ HẠNG CỦA DÃY SỐ*

**Bài toán 1:** Cho dãy số : . Hãy tìm số hạng .

**PHƯƠNG PHÁP.**

**1 ===I**

**Tự luận:** Thay trực tiếp  vào .

**MTCT:** Dùng chức năng CALC:

Nhập: 

Bấm r nhập 

Bấm  Kết quả

**BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

**2 ===I**

1. Cho dãy số biết . Tìm số hạng .

1. Cho dãy số  có số hạng tổng quát . Số  là số hạng thứ mấy?

**Bài toán 2:** Cho dãy số cho bởi . Hãy tìm số hạng .

**PHƯƠNG PHÁP.**

**1 ===I**

**Tự luận:** Tính lần lượt  bằng cách thế  vào , thế  vào , …, thế  vào .

**MTCT:** Cách lập quy trình bấm máy:

*- Nhập giá trị của số hạng u1*: 

*- Nhập biểu thức của *

*-* Lặp dấu  lần thứ  cho ra giá trị của số hạng .

**BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

**2 ===I**

1. Cho dãy số biết . Tìm số hạng .

1. Cho dãy số  được xác định như sau: . Tìm số hạng .

**Bài toán 3:** Cho dãy số cho bởi . Hãy tìm số hạng .

**PHƯƠNG PHÁP.**

**1 ===I**

**Tự luận:** Tính lần lượt  bằng cách thế  vào ; thế  vào ; …; thế  vào .

**MTCT:** Cách lập quy trình bấm máy:

*-* Nhập **

**-** Bấm r nhập , ấn =, nhập  ấn 

**-** Lặp dấu = cho đến khi xuất hiện lần thứ  giá trị của C thì đó chính là giá trị của số hạng .

**BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

**2 ===I**

1. Cho dãy số  được xác định như sau: . Tìm số hạng .

**Bài toán 4:** Cho dãy số cho bởi ******. Trong đó  là kí hiệu của biểu thức ** tính theo ** và **. Hãy tìm số hạng .

**PHƯƠNG PHÁP.**

**1 ===I**

**Tự luận:** Tính lần lượt  bằng cách thế  vào ; thế  vào ; …; thế  vào .

**MTCT:** Cách lập quy trình bấm máy:

*- Sử dụng 3 ô nhớ: *: *chứa giá trị của n*

**: *chứa giá trị của un*

**: *chứa giá trị của un+1*

*- Lập công thức tính un+1 thực hiện gán *: = * +* 1 *và *:*= để tính số hạng tiếp theo của dãy*

*- Lặp phím* dấu  *cho đến khi giá trị của C xuất hiện lần thứ  thì đó là giá trị của số hạng .*

**BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

**2 ===I**

1. Cho dãy số  được xác định như sau: . Tìm số hạng .

1. Cho dãy số  được xác định bởi: . Tìm số hạng .

### *DẠNG 2: XÉT TÍNH TĂNG, GIẢM CỦA DÃY SỐ*

**PHƯƠNG PHÁP.**

**1 ===I**

**Cách 1:** Xét hiệu 

 Nếu thì  là dãy số tăng.

 Nếu  thì  là dãy số giảm.

**Cách 2 :** Khi **** ta xét tỉ số 

 Nếu  thì  là dãy số tăng.

 Nếu  thì  là dãy số giảm.

**Cách 3 :** Nếu dãy số được cho bởi một hệ thức truy hồi thì ta có thể sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh 

**\* Công thức giải nhanh một số dạng toán về dãy số**

Dãy số có tăng khi và giảm khi 

Dãy số có 

 Không tăng, không giảm khi 

 Giảm khi 

 Tăng khi 

Dãy số có  với điều kiện 

 Tăng khi 

 Giảm khi 

Dãy số đan dấu cũng là dãy số không tăng, không giảm

Nếu dãy số tăng hoặc giảm thì dãy số  không tăng, không giảm

Dãy số có  tăng nếu  ; giảm nếu và không tăng không giảm nếu 

Dãy số có tăng nếu và giảm nếu 

Dãy số có không tăng không giảm nếu 

|  |  |
| --- | --- |
| Nếu thì dãy số | Nếu thì dãy số |
| Nếu thì dãy số | Nếu thì dãy số |
| Nếu  và  thì dãy số  và dãy số | Nếu  và  thì dãy số  và dãy số |
| Nếu  và  thì dãy số | Nếu  và  thì dãy số |

**BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

**2 ===I**

1. Xét tính đơn điệu của dãy số biết .

1. Xét tính đơn điệu của dãy số biết .

1. Xét tính đơn điệu của dãy số biết .

1. Cho dãy số biết.

### *DẠNG 3: XÉT TÍNH BỊ CHẶN CỦA DÃY SỐ*

**PHƯƠNG PHÁP.**

**1 ===I**

**Phương pháp 1:** Chứng minh trực tiếp bằng các phương pháp chứng minh bất đẳng thức

**Cách 1:** Dãy số có  là hàm số đơn giản.

Ta chứng minh trực tiếp bất đẳng thức  hoặc 

**Cách 2:** Dãy số có 

Ta làm trội 

Lúc đó 

Suy ra 

**Cách 3:** Dãy số có  với 

Ta làm trội 

Lúc đó 

Suy ra 

**Phương pháp 2:** Dự đoán và chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Nếu dãy số được cho bởi một hệ thức truy hồi thì ta có thể sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh

**Chú ý: *Nếu dãy số giảm thì bị chặn trên, dãy số tăng thì bị chặn dưới***

**\* Công thức giải nhanh một số dạng toán về dãy số bị chặn**

Dãy số có  bị chặn

Dãy số có  không bị chặn

Dãy số có  với  bị chặn dưới

Dãy số có  bị chặn dưới nếu và bị chặn trên nếu 

Dãy số có  bị chặn dưới nếu và bị chặn trên nếu 

Dãy số có  bị chặn dưới nếu  và bị chặn trên nếu 

Dãy số có với  và  không bị chặn

Dãy số có  bị chặn dưới với 

Dãy số có  bị chặn dưới nếu  và bị chặn trên nếu 

Dãy số có  trong đó và là các đa thức, bị chặn nếu bậc của nhỏ hơn hoặc bằng bậc của 

Dãy số có  trong đó và là các đa thức, bị chặn dưới hoặc bị chặn trên nếu bậc của  lớn hơn bậc của 

**BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

**2 ===I**

1. Xét tính bị chặn của dãy số biết .

1. Xét tính bị chặn của dãy số biết .

1. Xét tính bị chặn của dãy số biết .

1. Xét tính bị chặn của dãy số biết . Mệnh đề nào sau đây đúng ?

### *DẠNG 4: TÍNH TỔNG CỦA DÃY SỐ*

**Dạng 4.1: Tính tổng của dãy số cách đều**

**PHƯƠNG PHÁP.**

**1 ===I**

Giải sử cần tính tổng: . Trong đó: 

**- Tự luận:**

Ta có: 

Từ đó suy ra: 

**- Trắc nghiệm:**

Công thức tính nhanh:

+ Số hạng tổng quát của dãy số cách đều là: với *d* là khoảng cách giữa 2 số hạng

+ Số số hạng =: + 1

+ Tổng = •: 2

**- Casio**

Bước 1: Từ công thức của tổng tìm số hạng tổng quát của tổng và số số hạng.

Bước 2: Sử dụng công cụ tính:   nhập số hạng tổng quát của dãy số  nhập  chạy từ 1 tới  số số hạng  =.

**BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

**2 ===I**

1. Tính ?

1. Cho tổng . Khi đó  bằng?

1. Cho dãy số  xác định bởi:  và  với mọi  Khi đó tổng  số hạng đầu tiên là:

**Dạng 4.2: Tính tổng của dãy số bằng phương pháp khử liên tiếp**

**PHƯƠNG PHÁP.**

**1 ===I**

Giả sử cần tính tổng: .

**- Tự luận:**

Bước 1: Ta tìm cách tách: ; ;.

Bước 2: Rút gọn: 

**- Trắc nghiệm:**

**+** Một số công thức tách thường sử dụng:

 

 

+ Nhận định kết quả của tổng là: 

**- Casio:**

Làm tương tự như dạng 1

**BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

**2 ===I**

1. Tính tổng sau: 

1. Cho tổng . Khi đó công thức của là:

1. Cho tổng . Tính 

**Dạng 4.3: Tính tổng bằng cách chuyển về phương trình có ẩn là tổng cần tính**

**PHƯƠNG PHÁP.**

**1 ===I**

Giả sử cần tính tổng: .

**- Tự luận:**

Sơ đồ giải: Từ công thức của tổng S ta chuyển về phương trình chứa ẩn  Giải pt 

**- Trắc nghiệm:**

Tổng có dạng:  với 

**- Casio:**

Làm tương tự như dạng 1

**BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

**2 ===I**

1. Tính tổng: ?

1. Tính tổng ?

1. Tính tổng: . Tính 

**Dạng 4.4: Tính tổng bằng cách đưa về các tổng đã biết**

**PHƯƠNG PHÁP.**

**1 ===I**

Giải sử cần tính tổng: .

**- Tự luận:**

Tìm cách tách: . Trong đó: đã biết công thức tính tổng.

**- Trắc nghiệm:**

Ta có thể dùng phương pháp thử giá trị  vào các đáp án để loại trừ và chọn ra đáp án đúng.

**- Casio:**

Làm tương tự như dạng 1

**BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

**2 ===I**

1. Tính: . Biết rằng:



1. Cho: . Tính biết rằng:

.

1. Cho tổng:  với . Biết: . Giá trị của *k* là:

***DẠNG 5: XÁC ĐỊNH CÔNG THỨC SỐ HẠNG TỔNG QUÁT CỦA DÃY SỐ***

**PHƯƠNG PHÁP.**

**1 ===I**

 Nếu  có dạng  thì biến đổi  thành hiệu của hai số hạng, dựa vào đó thu gọn .

 Nếu dãy số  được cho bởi một hệ thức truy hồi, tính vài số hạng đầu của dãy số, từ đó dự đoán công thức tính  theo n, rồi chứng minh công thức này bằng phương pháp quy nạp. Ngoài ra cũng có thể tính hiệu  dựa vào đó để tìm công thức tính  theo n.

**BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

**2 ===I**

1. Cho dãy số  có . Đặt . Xác định công thức tính  theo n.

1. Xác định công thức tính số hạng tổng quát  theo n của dãy số sau: .

1. Xác định công thức tính số hạng tổng quát  theo n của dãy số sau: 