

Chuyên đề 5. PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ BẰNG MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP KHÁC

A. Kiến thức cần nhớ

1. Chúng ta đã biết ba phương pháp để phân tích một đa thức thành nhân tử là đặt nhân tử chung, dùng hằng đẳng thức, nhóm các hạng tử và phối hợp ba phương pháp đó. Tuy nhiên có những đa thức mặc dù rất đơn giản, nếu chỉ biết dùng ba phương pháp đó thôi thì không thể phân tích thành nhân tử được. Do đó trong chuyên đề này chúng ta sẽ xét thêm một số phương pháp khác để phân tích đa thức thành nhân tử.

Phương pháp tách một hạng tử thành nhiều hạng tử.

Phương pháp thêm bớt cùng một hạng tử

Phương pháp đổi biến

Phương pháp đồng nhất hệ số

Phương pháp xét giá trị riêng của các biến.

B. Một số ví dụ

1. Phương pháp tách một hạng tử thành nhiều hạng tử

Ví dụ 1: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

Giải

Cách 1: Tách hạng tử thứ hai: $-3x = -2x - x$

Ta có: $f(x) = (2x^2 - 2x) - (x - 1) = 2x(x - 1) - (x - 1) = (x - 1)(2x - 1)$

Cách 2: Tách hạng tử thứ nhất và hạng tử thứ hai: $2x^2 = x^2 + x^2$.

Ta có:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 2x + 1) + (x^2 - x) = (x - 1)^2 + x(x - 1) = (x - 1)[(x - 1) + x] \\ &= (x - 1)(2x - 1) \end{aligned}$$

Nhận xét. Để phân tích tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ra nhân tử, ta tách hạng tử bx thành $b_1x + b_2x$ sao cho $b_1b_2 = ac$ và $b_1 + b_2 = b$.

Ví dụ 2: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $f(x) = x^3 - x^2 - 4$

Giải

Tìm cách giải. Ta lần lượt kiểm tra với $x = \pm 1; x = \pm 2; x = \pm 4$, ta thấy $f(2) = 0$.

Đa thức $f(x)$ có nghiệm $x = 2$, do đó khi phân tích thành nhân tử, $f(x)$ chứa nhân tử $x - 2$.

Trình bày lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } f(x) &= x^3 - x^2 - 4 = (x^3 - 2x^2) + (x^2 - 2x) + (2x - 4) \\ &= x^2(x - 2) + x(x - 2) + 2(x - 2) \\ &= (x - 2)(x^2 + x + 2) \end{aligned}$$

Nhận xét. Nếu đa thức $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ có nghiệm nguyên là $x = x_0$ thì x_0 là một ước của hệ số tự do a_0 khi phân tích $f(x)$ ra nhân tử thì $f(x)$ có chứa nhân tử $x - x_0$. Vì vậy đối với những đa thức một biến bậc cao, ta nên nhằm lấy một nghiệm của nó để định hướng việc phân tích thành nhân tử.

2. Phương pháp thêm bớt cùng một hạng tử

Ví dụ 3: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4 + 324$

Giải

$$\begin{aligned} x^4 + 324 &= x^4 + 36x^2 + 324 - 36x^2 \\ &= (x^2 + 18)^2 - (6x)^2 = (x^2 + 18 - 6x)(x^2 + 18 + 6x) \end{aligned}$$

Ví dụ 4: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^5 + x^4 + 1$

Giải

$$\begin{aligned} x^5 + x^4 + 1 &= x^5 + x^4 + x^3 - x^3 + 1 \\ &= x^3(x^2 + x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1) \end{aligned}$$

Nhận xét. Với kỹ thuật trên chúng ta phân tích thành nhân tử được: $x^{3k+2} + x^{3n+1} + 1$

3. Phương pháp đổi biến

Một số đa thức có bậc cao, nhờ đặt biến phụ đưa về đa thức có bậc thấp hơn để thuận tiện cho việc phân tích thành nhân tử, sau khi phân tích thành nhân tử đối với đa thức mới, thay trở lại biến cũ để được đa thức với biến cũ.

Ví dụ 5: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $f(x) = x(x+4)(x+6)(x+10) + 128$

Giải

Ta có: $f(x) = (x^2 + 10x)(x^2 + 10x + 24) + 128$

Đặt $x^2 + 10x + 12 = y$, đa thức trở thành:

$$f(y) = (y - 12)(y + 12) + 128 = y^2 - 16 = (y - 4)(y + 4)$$

Suy ra: $f(x) = (x^2 + 10x + 8)(x^2 + 10x + 16) = (x + 2)(x + 8)(x^2 + 10x + 8)$

Ví dụ 6: Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 15$$

Giải

Tìm cách giải. Bài toán có dạng $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) + m$ với $a+d = b+c$. Ta có thể đặt

$y = (x+a)(x+d)$ hoặc $y = (x+b)(x+c)$ hoặc $y = x^2 + (a+d)x$. Khi đó ta phân tích với đa thức biến y .

Trình bày lời giải

Ta có: $(x+1)(x+4)(x+2)(x+3) - 15 = (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) - 15$

Đặt $y = x^2 + 5x + 9$.

Khi đó đa thức có dạng: $y(y+2) - 15 = y^2 + 2y - 15 = (y+5)(y-3)$

Từ đó suy ra: $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 15 = (x^2 + 5x + 9)(x^2 + 5x + 1)$

Ví dụ 7: Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$A = (3x+2)(3x-5)(x-1)(9x+10) + 24x^2$$

Giải

Tìm cách giải. Nếu khai triển ngoặc thì bài toán trở lên khá phức tạp và có thể dẫn đến sai lầm. Quan sát kỹ đề bài chúng ta nhận thấy hệ số của bốn ngoặc có đặc điểm: $3.3 = 1.9$ và $2.(-5) = (-1).10$, do vậy chúng ta nghĩ đến việc nhóm hai ngoặc lại và đặt biến phụ nhằm đưa về bài toán đơn giản hơn.

Trình bày lời giải

Ta có:

$$A = (3x+2)(3x-5)(x-1)(9x+10) + 24x^2$$

$$= (9x^2 - 9x - 10)(9x^2 + x - 10) + 24x^2$$

Đặt $y = 9x^2 - 9x - 10$. Đa thức có dạng:

$$A = y(y+10x) + 24x^2$$

$$= y^2 + 10xy + 24y^2 = y^2 + 4xy + 6xy + 24y^2 = (y+4x)(y+6x)$$

Từ đó suy ra: $A = (9x^2 - 3x - 10)(9x^2 - 5x - 10)$

Nhận xét. Cách giải trên có thể dùng cho các đa thức có dạng:

$$P(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)(a_3x + b_3)(a_4x + b_4) + mx^2$$

trong đó $a_1a_2 = a_3a_4$; $b_1b_2 = b_3b_4$

Ví dụ 8: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $B = 2x^4 + 3x^3 - 9x^2 - 3x + 2$

Giải

Tìm cách giải. Những bài toán có dạng: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + kax + k^2b^2$ với $k=1$ hoặc $k=-1$.

Ta đặt $y = x^2 + k$, rồi biến đổi biểu thức về dạng $ax^2 + bxy + my^2$

Trình bày lời giải

Đặt $y = x^2 - 1 \Rightarrow y^2 = x^4 - 2x^2 + 1$. Biến đổi biểu thức, ta có:

$$B = 2(x^4 - 2x^2 + 1) + 3x^3 - 3x - 5x^2 = 2(x^2 - 1)^2 + 3x(x^2 - 1) - 5x^2$$

Từ đó, biểu thức có dạng:

$$B = 2y^2 + 3xy - 5x^2 = 2y^2 - 2xy + 5xy - 5x^2 = (y-x)(2y+5x)$$

Từ đó suy ra: $B = (x^2 - x - 1)(2x^2 + 5x - 2)$.

4. Phương pháp đồng nhất hệ số

Ví dụ 9: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3$

Giải

Tìm cách giải. Các số $\pm 1; \pm 3$ không phải là nghiệm của đa thức $f(x)$ nên $f(x)$ không có nghiệm nguyên, $f(x)$ cũng không có nghiệm hữu tỷ. Như vậy nếu $f(x)$ phân tích được thành nhân tử thì phải có dạng:

$(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$, với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

Khai triển dạng này ra, ta được đa thức: $x^4 + (a + c)x^3 + (ac + b + d)x^2 + (ad + bc)x + bd$. Đồng nhất đa thức

$$\text{này với } f(x) \text{ ta được hệ điều kiện: } \begin{cases} a + c = -6 \\ ac + b + d = 12 \\ ad + bc = -14 \\ bd = 3 \end{cases}.$$

Xét $bd = 3$, với $b, d \in \mathbb{Z}, b \in \{\pm 1; \pm 3\}$.

$$\text{Với } b = 3 \text{ thì } d = 1, \text{ hệ điều kiện trở thành: } \begin{cases} a + c = -6 \\ ac = 8 \\ a + 3c = -14 \end{cases}$$

Từ đó tìm được: $a = -2; c = -4$. Vậy $f(x) = (x^2 - 2x + 3)(x^2 - 4x + 1)$.

Trình bày lời giải

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3 \\ &= (x^4 - 4x^3 + x^2) - (2x^3 + 8x^2 - 2x) + (3x^2 - 12x + 3) \\ &= x^2(x^2 - 4x + 1) - 2x(x^2 - 4x + 1) + 3(x^2 - 4x + 1) \\ &= (x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2x + 3) \end{aligned}$$

5. Phương pháp xét giá trị riêng của các biến

Ví dụ 10: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $P = x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y)$

Giải

Nhận xét. Nếu thay x bởi y thì $P = 0$, nên P chia hết cho $x - y$.

Hơn nữa nếu thay x bởi y , y bởi z , z bởi x thì P không thay đổi (ta nói đa thức P có dạng hoán vị vòng quanh). Do đó: P chia hết cho $x - y$ thì P cũng chia hết cho $y - z, z - x$.

Từ đó: $P = a(x - y)(y - z)(z - x)$; trong đó a là hằng số, không chứa biến vì P có bậc 3 đối với tập hợp các biến, còn tích $(x - y)(y - z)(z - x)$ cũng có bậc 3 đối với tập hợp các biến.

Ta có: $P = x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y) = a(x - y)(y - z)(z - x)$ (*) đúng với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$ nên ta chọn các giá trị riêng cho x, y, z để tìm hằng số a là xong.

Chú ý. Các giá trị của x, y, z ta có thể chọn tùy ý, chỉ cần chúng đôi một khác nhau để tránh $P = 0$ là được.

Chẳng hạn, chọn $x=2; y=1; z=0$ thay vào đẳng thức (*), ta tìm được $a=-1$

$$\begin{aligned}\text{Vậy: } P &= x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) = -(x-y)(y-z)(z-x) \\ &= (x-y)(y-z)(x-z)\end{aligned}$$

Ví dụ 11: Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$Q = a(b+c-a)^2 + b(c+a-b)^2 + c(a+b-c)^2 + (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

Giải

Nhận xét. Với $a=0$ thì $Q=0$, cho nên a là một nhân tử của Q . Do vai trò bình đẳng của a, b, c nên b và c cũng là nhân tử của Q , mà Q có bậc 3 đối với tập hợp các biến nên $Q=k.abc$.

Chọn $a=b=c=1$ được $k=4$. Vậy $Q=4abc$.

C. Bài tập vận dụng

Phương pháp tách một hạng tử thành nhiều hạng tử

5.1. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$\text{a) } 4x^2 - 4x - 3; \quad \text{b) } 2x^2 - 5x - 3; \quad \text{c) } 3x^2 - 5x - 2;$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\begin{aligned}\text{a) } 4x^2 - 4x - 3 &= 4x^2 - 4x + 1 - 4 \\ &= (2x-1)^2 - 4 = (2x-1-2)(2x-1+2) = (2x-3)(2x+1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } 2x^2 - 5x - 3 &= 2x^2 + x - 6x - 3 \\ &= x(2x+1) - 3(2x+1) = (2x+1)(x-3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{c) } 3x^2 - 5x - 2 &= 3x^2 + x - 6x - 2 \\ &= x(3x+1) - 2(3x+1) = (3x+1)(x-2)\end{aligned}$$

5.2. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$\text{a) } x^3 + 2x - 3; \quad \text{b) } x^3 - 7x + 6; \quad \text{c) } x^3 + 5x^2 + 8x + 4;$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\begin{aligned}\text{a) } x^3 + 2x - 3 &= x^3 - 1 + 2x - 2 \\ &= (x-1)(x^2+x+1) + 2(x-1)\end{aligned}$$

$$= (x-1)(x^2+x+1+2)$$

$$= (x-1)(x^2+x+3)$$

$$\text{b) } x^3 - 7x + 6 = x^3 - 1 - 7x + 7$$

$$= (x-1)(x^2+x+1) - 7(x-1)$$

$$= (x-1)(x^2+x+1-7)$$

$$= (x-1)(x^2+x-6)$$

$$=(x-1)(x^2-2x+3x-6)$$

$$=(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$c) x^3+5x^2+8x+4=x^3+x^2+4x^2+4x+4x+4$$

$$=(x+1)(x^2+4x+4)=(x+1)(x+2)^2$$

5.3. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$a) P=(x^2-x+2)^2+(x-2)^2;$$

$$b) Q=6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1;$$

$$c) C=x^4-9x^3+28x^2-36x+16;$$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có:

$$P=(x^2-x+2)^2+(x-2)^2$$

$$=x^4+x^2+4-2x^3+4x^2-4x+x^2-4x+4$$

$$=x^4-2x^3+6x^2-8x+8$$

$$=x^4-2x^3+2x^2+4x^2-8x+8$$

$$=x^2(x^2-2x+2)+4(x^2-2x+2)=(x^2-2x+2)(x^2+4)$$

$$b) \text{ Ta có: } Q=6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1$$

$$=(6x^5+3x^4)+(12x^4+6x^3)+(14x^3+7x^2)+(8x^2+4x)+(2x+1)$$

$$=(2x+1)(3x^4+6x^3+7x^2+4x+1)$$

$$=(2x+1)(3x^4+3x^3+3x^2+3x^3+3x^2+3x+x^2+x+1)$$

$$=(2x+1)(x^2+x+1)(3x^2+3x+1)$$

$$c) C=(x^4-5x^3+4x^2)-(4x^3-20x^2+16x)+(4x^2-20x+16)$$

$$=(x^2-5x+4)(x^2-4x+4)$$

$$=(x-1)(x-4)(x-2)^2$$

5.4. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$a) A=10x^4-27x^3y-110x^2y^2-27xy^3+10y^4;$$

$$b) B=x^5-4x^4+3x^3+3x^2-4x+1$$

$$c) C=bc(a+d)(b-c)+ac(b+d)(c-a)+ab(c+d)(a-b)$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$a) A=10x^4+20x^2y^2+10y^4-27xy(x^2+y^2)-130x^2y^2$$

$$\begin{aligned}
&= 10(x^2 + y^2)^2 - 27xy(x^2 + y^2) - 130x^2y^2 \\
&= 10(x^2 + y^2)^2 + 25xy(x^2 + y^2) - 52xy(x^2 + y^2) - 130x^2y^2 \\
&= 5(x^2 + y^2)(2x^2 + 2y^2 + 5xy) - 26xy(2x^2 + 2y^2 + 5xy) \\
&= (2x^2 + 2y^2 + 4xy + 2y^2)(5x^2 - xy - 25xy + 5y^2) \\
&= (2x^2 + xy + 4xy + 2y^2)(5x^2 - xy - 25xy + 5y^2) \\
&= (2x + y)(x + 2y)(x - 5y)(5x - y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } B &= x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 4x + 1 \\
&= x^5 + x^4 - 5x^4 - 5x^3 + 8x^3 + 8x^2 - 5x^2 - 5x + x + 1 \\
&= (x + 1)(x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1) \\
&= (x + 1)(x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x^3 + 6x^2 - 3x + x^2 - 2x + 1) \\
&= (x + 1)(x^2(x^2 - 2x + 1) - 3x(x^2 - 2x + 1) + (x^2 - 2x + 1)) \\
&= (x + 1)(x - 1)^2(x^2 - 3x + 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c) } C &= bc(a + d)(b - c) + ac(b + d)(c - b + b - a) + ab(c + d)(a - b) \\
&= bc(a + d)(b - c) - ac(b + d)(b - c) - ac(b + d)(a - b) + ab(c + d)(a - b) \\
&= c(b - c)(ab + bd - ab - ad) - a(a - b)(bc + cd - bc - bd) \\
&= c(b - c)(bd - ad) - a(a - b)(cd - bd) \\
&= cd(b - c)(b - a) - ad(b - a)(b - c) \\
&= d(b - c)(b - a)(c - a)
\end{aligned}$$

5.5. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$\begin{aligned}
\text{a) } & 4x(x + y) \cdot (x + z) \cdot (x + y + z) + y^2z^2; & \text{b) } & 3(x^4 + x^2 + 1) - (x^2 + x + 1)^2. \\
\text{c) } & x^4 - 2y^4 - x^2y^2 + x^2 + y^2. & \text{d) } & 2x^4 - x^3y + 3x^2y^2 - xy^2 + 2y^4.
\end{aligned}$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\begin{aligned}
\text{a) } & 4x(x^2 + xy + xz + yz) \cdot (x + y + z) + y^2z^2 \\
&= 4x[x(x + y + z) + yz](x + y + z) + y^2z^2 \\
&= 4x^2(x + y + z)^2 + 4xyz(x + y + z) + y^2z^2 \\
&= [2x(x + y + z) + yz]^2 + (2x^2 + 2xy + 2xz + yz)^2 \\
\text{b) } & 3(x^4 + 2x^2 + 1 - x^2) - (x^2 + x + 1)^2
\end{aligned}$$

$$=3\left[(x^2+1)^2-x^2\right]-(x^2+x+1)^2$$

$$=3(x^2+x+1)(x^2-x+1)-(x^2+x+1)^2$$

$$=(x^2+x+1)\left[3x^2-3x+3-x^2-x-1\right]$$

$$=(x^2+x+1)(2x^2-4x+2)=2(x^2+x+1)(x-1)^2$$

$$c) x^4-2y^4-x^2y^2+x^2+y^2=(x^4-y^4)-(y^4+x^2y^2)+(x^2+y^2)$$

$$=(x^2+y^2)(x^2-y^2)-y^2(x^2+y^2)+(x^2+y^2)$$

$$=(x^2+y^2)(x^2-2y^2+1)$$

$$d) 2x^4+4x^2y^2+2y^4-x^3y-xy^3-x^2y^2$$

$$=2(x^2+y^2)^2-xy(x^2+y^2)-x^2y^2$$

$$=2(x^2+y^2)^2-2xy(x^2+y^2)+xy(x^2+y^2)-x^2y^2$$

$$=2(x^2+y^2)(x^2+y^2-xy)+xy(x^2+y^2-xy)$$

$$=(x^2+y^2-xy)(2x^2+2y^2+xy)$$

5.6. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$a) M=3xyz+x(y^2+z^2)+y(x^2+z^2)+z(x^2+y^2)$$

$$b) x^8y^8+x^4y^4+1$$

$$c) N=x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2+2xyz$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$a) M=3xyz+xy^2+xz^2+yx^2+yz^2+zx^2+zy^2$$

$$=(xyz+xy^2+yz^2)+(xyz+xz^2+zx^2)+(xyz+yz^2+zy^2)$$

$$=xy(z+y+x)+xz(y+z+x)+yz(x+z+y)$$

$$=(x+y+z)(xy+xz+yz)$$

$$b) x^8y^8+x^4y^4+1$$

$$=(x^4y^4+1)^2-x^4y^4=(x^4y^4-x^2y^2+1)(x^4y^4+x^2y^2+1)$$

$$=(x^4y^4-x^2y^2+1)\left[(x^2y^2+1)^2-x^2y^2\right]$$

$$=(x^4y^4-x^2y^2+1)(x^2y^2-xy+1)(x^2y^2+xy+1)$$

$$c) N=(x^2y+xy^2)+(x^2z+xz^2+xyz)+(y^2z+yz^2+xyz)$$

$$=xy(x+y)+xz(x+z+y)+yz(y+z+x)$$

$$\begin{aligned}
 &= xy(x+y) + z(x+y+z)(x+y) = (x+y)[xy + z(x+y+z)] \\
 &= (x+y)(xy + xz + yz + z^2) = (x+y)(y+z)(z+x)
 \end{aligned}$$

5.7. Cho đa thức $P(x) = 2x^4 - 7x^3 - 2x^2 + 13x + 6$

a) Phân tích $P(x)$ thành nhân tử.

b) Chứng minh rằng $P(x)$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên x .

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $P(x) = 2x^4 + 2x^3 - 9x^3 - 9x^2 + 7x^2 + 7x + 6x + 6$

$$= 2x^3(x+1) - 9x^2(x+1) + 7x(x+1) + 6(x+1)$$

$$= (x+1)(2x^3 - 9x^2 + 7x + 6)$$

$$= (x+1)(2x^3 - 4x^2 - 5x^2 + 10x - 3x + 6)$$

$$= (x+1).(x-2).(2x^2 - 5x - 3) = (x+1).(x-2).(2x^2 - 6x + x - 3)$$

$$= (x+1).(x-2).(x-3).(2x+1)$$

b) Với x là số nguyên thì $x-3; x-2$ là hai số nguyên liên tiếp nên

$$(x-3)(x-2):2 \Rightarrow P(x):2$$

$$\text{Với } x:3 \Rightarrow x-3:3 \Rightarrow P(x):3$$

$$\text{Với } x:3 \text{ dư } 1 \text{ thì } 2x+1:3 \Rightarrow P(x):3$$

$$\text{Với } x:3 \text{ dư } 2 \text{ thì } x-2:3 \Rightarrow P(x):3$$

Với mọi x là số nguyên

$$\forall i \text{ } \ddot{O}CLN(2;3=1) \text{ nên } P(x):6$$

5.8. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

a) $2x^3 - 5x^2 + 8x - 3$

b) $a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 - a^3 - b^3 - c^3 + 4abc$

c) $(x^2 - 3x - 1)^2 - 12x^2 + 36x + 39$;

d) $a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2a^2c^2$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $2x^3 - 5x^2 + 8x - 3$

$$= 2x^3 - x^2 - 4x^2 + 2x + 6x - 3 = (2x-1)(x^2 - 2x + 3)$$

b) $a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 - a^3 - b^3 - c^3 + 4abc$

$$= ab^2 - 2abc + ac^2 + bc^2 - 2abc + ba^2 + ca^2 - 2abc + cb^2 - a^3 - b^3 - c^3 + 4abc$$

$$=ab^2 + ac^2 + bc^2 + a^2b + a^2c + b^2c - a^3 - b^3 - c^3 - 2abc$$

$$=(-a^3 - a^2b + a^2c) + (2a^2b + 2ab^2 - 2abc) + (-ab^2 - b^3 + b^2c) + (ac^2 + bc^2 - c^3)$$

$$=-a^2(a+b-c) + 2ab(a+b-c) - b^2(a+b-c) + c^2(a+b-c)$$

$$=(a+b-c)(-a^2 + 2ab - b^2 + c^2)$$

$$=(a+b-c)[c^2 - (a-b)^2] = (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

$$c) (x^2 - 3x - 1)^2 - 12x^2 + 36x + 39$$

$$=(x^2 - 3x - 1)^2 - 12(x^2 - 3x - 1) + 27$$

$$=(x^2 - 3x - 1 - 3)(x^2 - 3x - 1 - 9) = (x^2 - 3x - 4)(x^2 - 3x - 10)$$

$$=(x+1)(x-4)(x+2)(x-5)$$

$$d) a^4 + 2a^2b^2 + b^4 + c^4 - 2b^2c^2 - 4a^2b^2$$

$$=(a^2 + b^2)^2 + c^2 - 2c^2(a^2 + b^2) - 4a^2b^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 4a^2b^2$$

$$=(a^2 + b^2 - c^2 + 2ab)(a^2 + b^2 - c^2 - 2ab)$$

$$=[(a+b)^2 - c^2][(a-b)^2 - c^2]$$

$$=(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)$$

Phương pháp thêm bớt cùng một hạng tử

5.9. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$a) a(b+c)(b^2 - c^2) + b(a+c)(c^2 - b^2) + c(a+b)(a^2 - b^2);$$

$$b) ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a);$$

$$c) a(b^2 - c^2) - b(a^2 - c^2) + c(a^2 - b^2);$$

$$d) a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b).$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$a) a(b+c)(b^2 - c^2) + b(a+c)(c^2 - b^2) + c(a+b)(a^2 - c^2)$$

$$=a(b+c)(b^2 - c^2) - b(a+c)(b^2 - c^2) - b(a+c)(a^2 - b^2) + c(a+b)(a^2 - b^2)$$

$$=(b^2 - c^2)[a(b+c) - b(a+c)] - (a^2 - b^2)[b(a+c) - c(a+b)]$$

$$=(b^2 - c^2)(ac - bc) - (a^2 - b^2)(ab - ac)$$

$$=c(b+c)(b-c)(a-b) - a(a+b)(a-b)(b-c)$$

$$=(a-b)(b-c)[c(b+c)-a(a+b)]$$

$$(a-b)(b-c)(bc+c^2-a^2-ab)$$

$$=(a-b)(b-c)(bc+c^2-a^2-ab)$$

$$=(a-b)(b-c)[(c-a)(c+a)+b(c-a)]$$

$$=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

$$\text{b) } ab(a-b)+bc(b-a+a-c)+ca(c-a)$$

$$=ab(a-b)-bc(a-b)-bc(c-a)+ca(c-a)$$

$$=b(a-b)(a-c)-c(a-c)(b-a)$$

$$=b(a-b)(a-c)-a(a-c)(a-b)$$

$$=(a-b)(a-c)(b-c)$$

$$\text{c) } a(b^2-c^2)-b(b^2-c^2+a^2-b^2)+c(a^2-b^2)$$

$$=a(b^2-c^2)-b(b^2-c^2)-b(a^2-b^2)+c(a^2-b^2)$$

$$=(b^2-c^2)(a-b)-(a^2-b^2)(b-c)$$

$$=(b+c)(b-c)(a-b)-(a+b)(a-b)(b-c)$$

$$=(b-c)(a-b)(b+c-a-b)$$

$$=(b-c)(a-b)(c-a)$$

$$\text{d) } a^3(b-c)+b^3(c-b+b-a)+c^3(a-b)$$

$$=a^3(b-c)-b^3(b-c)-b^3(a-b)+c^3(a-b)$$

$$=(b-c)(a^3-b^3)-(a-b)(b^3-c^3)$$

$$=(b-c)(a-b)(a^2+ab+b^2)-(a-b)(b-c)(b^2+bc+c^2)$$

$$=(b-c)(a-b)(a^2+ab+b^2-b^2-bc-c^2)$$

$$=(b-c)(a-b)((a-c)(a+c)+b(a-c))$$

$$=(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)$$

5.10. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$\text{a) } (a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$$

$$\text{b) } (x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3;$$

$$a) (a - b)^3 + (b - c)^3 - (a - c)^3$$

$$= (a - b)^3 + (b - c)^3 - [(a - b) + (b - c)]^3$$

$$= (a - b)^3 + (b - c)^3 - (a - b)^3 - 3(a - b)^2(b - c) - 3(a - b)(b - c)^2 - (b - c)^3$$

$$= -3(a - b)(b - c)(a - b + b - c)$$

$$= 3(a - b)(b - c)(c - a)$$

$$b) (x + y)^3 + 3(x + y)^2 z + 3(x + y)z^2 + z^3 - x^3 - y^3 - z^3$$

$$= x^3 + y^3 + 3xy(x + y) + 3(x + y)^2 z + 3(x + y)z^2 - x^3 - y^3$$

$$= 3(x + y)(xy + xz + yz + z^2)$$

$$= 3(x + y)(x + z)(y + z)$$

5.11. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$a) x^7 + x^2 + 1; \quad b) x^8 + x + 1; \quad c) x^8 + x^7 + 1; \quad d) x^5 + x + 1;$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$a) x^7 + x^2 + 1 = x^7 - x + x + 1 = x(x^6 - 1) + (x^2 + x + 1)$$

$$= x(x^3 + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$$

$$= (x^2 + x + 1)[x(x^3 + 1)(x - 1) + 1]$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^2 - x + 1)$$

$$b) x^8 + x + 1 = x^8 - x^2 + x + 1$$

$$= x^2(x^6 - 1) + (x^2 + x + 1)$$

$$= x^2(x^3 + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$$

$$= (x^2 + x + 1)[x^2(x^3 + 1)(x - 1) + 1]$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^6 - x^5 + x^3 - x^2 + 1)$$

$$c) x^8 + x^7 + 1 = x^8 + x^7 + x^6 - x^6 + 1$$

$$= x^6(x^2 + x + 1) - (x^3 + 1)(x^3 - 1)$$

$$= x^6(x^2 + x + 1) - (x^3 + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^6 - (x^3 + 1)(x - 1))$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^6 - x^4 + x^3 - x + 1)$$

$$d) x^5 + x + 1$$

$$=x^5 - x^2 + (x^2 + x + 1) = x^2(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$$

$$=(x^3 - x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$$

Phương pháp đổi biến

5.12. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

a) $M = (4x + 1)(12x - 1)(3x + 2)(x + 1) - 4$;

b) $N = (x + 2)(x + 3)^2(x + 4) - 12$;

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có:

$$M = (4x + 1)(12x - 1)(3x + 2)(x + 1) - 4$$

$$= (12x^2 + 11x + 2)(12x^2 + 11x - 1) - 4$$

Đặt $12x^2 + 11x - 1 = y$, đa thức có dạng:

$$M = (y + 3)y - 4 = y^2 + 3y - 4 = y^2 - y + 4y - 4 = (y - 1)(y + 4)$$

Từ đó suy ra $M = (12x^2 + 11x - 2)(12x^2 + 11x + 3)$

b) Ta có $N = (x + 3)^2(x + 2)(x + 4) - 12$

$$= (x^2 + 6x + 9)(x^2 + 6x + 8) - 12$$

Đặt $x^2 + 6x + 8 = y$, đa thức có dạng:

$$N = (y + 1)y - 12 = y^2 + y - 12 = y^2 - 3y + 4y - 12 = (y - 3)(y + 4)$$

Từ đó suy ra $N = (x^2 + 6x + 5)(x^2 + 6x + 12)$

$$N = (x^2 + x + 5x + 9)(x^2 + 6x + 12)$$

$$= (x + 1)(x + 5)(x^2 + 6x + 12)$$

5.13. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

a) $A = (48x^2 + 8x - 1)(3x^2 + 5x + 2) - 4$;

b) $B = 4(x^2 + 11x + 30)(4x^2 + 22x + 120) - 23x^2$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có: $A = (48x^2 + 12x - 4x - 1)(3x^2 + 3x + 2x + 2) - 4$

$$= (4x + 1)(12x - 1)(3x + 2)(x + 1) - 4$$

Đến đây, giải giống bài **5.12a**

b) $B = (4x^2 + 44x + 120)(4x^2 + 22x + 120) - 23x^2$

Đặt $4x^2 + 44x + 120 = y$, suy ra: $B = (y + 11x)(y - 11x) - 23x^2$

$$B = y^2 - 121x^2 - 23x^2 = y^2 - 144x^2$$

$$= (y - 12x)(y + 12x)$$

$$\text{Từ đó suy ra } B = (4x^2 + 11x + 120)(4x^2 + 45x + 120)$$

5.14. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

a) $M = (7 - x)^4 (5 - x)^4 - 2;$

b) $N = (x - 3)^4 + (9x - 1)^4 - 16;$

c) $P = x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 3x + 1;$

d) $Q = x^4 - x^3 - 10x^2 + 2x + 4.$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Đặt $y = 6 - x$, khi đó đa thức có dạng:

$$M = (1 + y)^4 + (y - 1)^4 - 2 = 2y^4 + 12y^2 \Rightarrow M = 2y^2(y^2 + 6)$$

$$\text{Từ đó suy ra: } M = 2(6 - x)^2(x^2 - 12x + 42)$$

b) Đặt $y = x - 2$, khi đó đa thức có dạng:

$$N = (y - 1)^4 + (y + 1)^4 - 16 = 2y^4 + 12y^2 - 14$$

$$= 2(y^4 + 6y^2 - 7) = 2(y^2 + 7)(y^2 - 1) = 2(y^2 + 7)(y - 1)(y + 1)$$

$$\text{Từ đó suy ra: } N = 2(x^2 - 4x + 11)(x - 3)(x - 1)$$

c) Đặt $y = x^2 - 1 \Rightarrow y^2 = x^4 - 2x^2 + 1$. Biến đổi biểu thức, ta có:

$$P = (x^4 - 2x^2 + 1) - 3x^3 + 3x - 4x^2 = (x^2 - 1)^2 - 3x(x^2 - 1) - 4x^2$$

Từ đó, biểu thức có dạng:

$$P = y^2 - 3xy - 4x^2 = y^2 + xy - 4xy - 4x^2 = (y + x)(y - 4x)$$

$$\text{Từ đó suy ra: } P = (x^2 + x - 1)(x^2 - 4x - 1)$$

d) Đặt $y = x^2 - 2 \Rightarrow y^2 = x^4 - 4x^2 + 4$. Biến đổi biểu thức, ta có:

$$Q = (x^4 - 4x^2 + 4) - x^3 + 2x - 6x^2 = (x^2 - 2)^2 - x(x^2 - 1) - 6x^2$$

Từ đó, biểu thức có dạng:

$$Q = y^2 - xy - 6x^2 = y^2 + 2xy - 3xy - 6x^2 = (y + 2x)(y - 3x)$$

$$\text{Từ đó suy ra: } Q = (x^2 + 2x - 2)(x^2 - 3x - 2)$$

5.15. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

a) $A = x(x + 4)(x + 6)(x + 10) + 128;$

b) $(x - y)^5 + (y - z)^5 + (z - x)^5.$

c) $P = 2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 8;$

d) $(x + a)(x + 2a)(x + 3a)(x + 4a) + a^4.$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có: $A = (x^2 + 10x)(x^2 + 10x + 24) + 128$

Đặt $y = x^2 + 10x + 12$, đa thức có dạng:

$$\begin{aligned} A &= (y - 12)(y + 12) + 128 = y^2 - 144 + 128 \\ &= y^2 - 16 = (y + 4)(y - 4) \end{aligned}$$

Từ đó suy ra: $A = (x^2 + 10x + 16)(x^2 + 10x + 8) = (x + 2)(x + 8)(x^2 + 10x + 8)$

b) Đặt $x - y = a; y - z = b$. Đa thức có dạng:

$$\begin{aligned} a^5 + b^5 - (a + b)^5 &= a^5 + b^5 - a^5 - 5a^4b - 10a^3b^2 - 10a^2b^3 - 5ab^4 - b^5 \\ &= -5ab(a^2 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3) \\ &= -5ab(a^3 + a^2b + a^2b + ab^3 + ab^3 + b^3) \\ &= -5ab(a + b)(a^2 + ab + b^2) \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} &-5(x - y)(y - z) \left[(x - y)^2 + (x - y)(y - z) + (y - z)^2 \right] \\ &= 5(x - y)(y - z)(z - x)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) \end{aligned}$$

c) $P = (2x^4 - 8x^2 + 8) - (3x^3 - 6x) + x^2$

$$\begin{aligned} &= 2(x^4 - 4x^2 + 4) - 3x(x^2 - 2) + x^2 \\ &= 2(x^2 - 2)^2 - 3x(x^2 - 2) + x^2 \end{aligned}$$

Đặt $x^2 - 2 = a$, đa thức có dạng:

$$P = 2a^2 - 3ax + x^2 = 2a^2 - 2ax - ax + x^2 = (a - x)(2a - x)$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} P &= (x^2 - 2 - x)(2x^2 - 4 - x) = (x^2 + x - 2x - 2)(2x^2 - x - 4) \\ &= (x + 1)(x - 2)(2x^2 - x - 4) \end{aligned}$$

d) $(x + a)(x + 4a)(x + 3a)(x + 2a) + a^4$

$$= (x^2 + 5ax + 4a^2)(x^2 + 5ax + 6a^2) + a^4$$

Đặt $x^2 + 5ax + 5a^2 = y$ đa thức có dạng

$$(y - a^2)(y + a^2) + a^4 = y^2 - a^4 + a^4 = y^2$$

Từ đó suy ra: $(x^2 + 5ax + 5a^2)^2$

5.16. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

a) $M = (a + b + c)^3 - (a + b - c)^3 - (b + c - a)^3 - (c + a - b)^3$.

$$b) N = (a^2 + b^2)^3 + (c^2 - a^2)^3 - (b^2 + c^2)^3.$$

$$c) P = (x - 2y + 3z)^3 - x^3 + 8y^3 - 27z^3.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$a) \text{Đặt } a + b - c = x; b + c - a = y; c + a - b = z$$

$$\text{Đa thức có dạng: } M = (x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$$

$$M = (x + y)^3 + 3(x + y)^2 z + 3(x + y)z^2 + z^3 - x^3 - y^3 - z^3$$

$$= x^3 + y^3 + 3xy(x + y) + 3(x + y)^2 z + 3(x + y)z^2 - x^3 - y^3 - z^3$$

$$= 3(x + y)(xy + xz + yz + z^2) = 3(x + y)(x + z)(y + z)$$

$$\Rightarrow M = 3 \cdot 2c \cdot 2a \cdot 2b = 24abc$$

$$b) \text{Đặt } a^2 + b^2 = x; c^2 - a^2 = y \Rightarrow b^2 + c^2 = x + y$$

$$\text{Đa thức có dạng:}$$

$$N = x^3 + y^3 - (x + y)^3 = x^3 + y^3 - x^3 - y^3 - 3xy(x + y) = -3xy(x + y)$$

$$\Rightarrow N = -3(a^2 + b^2)(c^2 - a^2)(b^2 + c^2)$$

$$\text{hay } N = 3(a^2 + b^2)(a^2 - c^2)(b^2 + c^2)$$

$$c) \text{Đặt } x = a; -2y = b; 3z = c. \text{ Đa thức có dạng:}$$

$$P = (a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a + b)(b + c)(c + a)$$

$$\Rightarrow P = 3(x - 2y)(3z - 2y)(x + 3z)$$

5.17. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$a) A = 2x^4 - x^3y + 3x^2y^2 - xy^3 + 2y^4.$$

$$b) B = (x - 18)(x - 7)(x + 35)(x + 90) - 67x^2.$$

$$c) C = (4x - 2)(10x + 4)(5x + 7)(2x + 1) + 17.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$a) A = 2x^4 + 4x^2y^2 + 2y^4 - xy(x^2 + y^2) - x^2y^2$$

$$= 2(x^2 + y^2)^2 - xy(x^2 + y^2) - x^2y^2$$

$$\text{Đặt } x^2 + y^2 = a; xy = b \text{ đa thức có dạng:}$$

$$A = 2a^2 - ab - b^2 = 2a^2 - 2ab + ab - b^2 = (a - b)(2a + b)$$

$$\Rightarrow A = (x^2 + y^2 - xy)(2x^2 + 2y^2 + xy)$$

$$b) B = (x - 18)(x + 35)(x - 7)(x + 90) - 67x^2$$

$$= (x^2 - 17x - 630)(x^2 - 83x - 630) - 67x^2$$

Đặt $x^2 - 50x - 630 = y$. Đa thức có dạng:

$$B = (y + 33x)(y - 33x) - 67x^2$$

$$= y^2 - 1089x^2 - 67x^2$$

$$= y^2 - 1156x^2 = (y - 34)(y + 34)$$

$$\Rightarrow B = (x^2 - 50x - 630 - 34x)(x^2 - 50x - 630 + 34x)$$

$$B = (x^2 - 84x - 630)(x^2 - 16x - 630)$$

$$c) C = (4x - 2)(5x + 7)(10x + 4)(2x + 1) + 17$$

$$= (20x^2 + 18x - 14)(20x^2 + 18x + 4) + 17$$

Đặt $20x^2 + 18x - 5 = y$. Đa thức có dạng:

$$C = (y - 9)(y + 9) + 17 = y^2 - 81 + 17 = y^2 - 64 = (y - 8)(y + 8)$$

$$\Rightarrow B = (20x^2 + 18x - 5 - 8)(20x^2 + 18x - 5 + 8)$$

$$\Rightarrow B = (20x^2 + 18x - 13)(20x^2 + 18x + 3)$$

Phương pháp đồng nhất hệ số

5.18. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$a) Q = x^4 - 8x^2 - x + 12$$

$$b) R = x^4 + x^3 + x^2 + x + 12$$

$$c) S = x^4 - 8x + 63$$

$$d) F = x^2 + 2xy - 8y^2 + 2x + 14y - 3$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$a) Q = x^4 - 8x^2 - x + 12$$

Các số $\pm 1; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 12$ không phải là nghiệm của đa thức R nên R không có nghiệm nguyên, R cũng không có nghiệm hữu tỷ. Như vậy nếu R phân tích được thành nhân tử thì phải có dạng:

$$(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d), \text{ với } a, b, c, d \in \mathbb{Z}.$$

Khai triển dạng này ra, ta được đa thức: $x^4 + (a + c)x^3 + (ac + b + d)x^2 + (ad + bc)x + bd$. Đồng nhất đa thức này với $f(x)$ ta được hệ điều kiện:

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ ac + b + d = -8 \\ ad + bc = -1 \\ bd = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -4 \\ c = 1 \\ d = -3 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } Q = (x^2 - x - 4)(x^2 + x - 3)$$

b) Các số $\pm 1; \pm 3, \pm 4; \pm 6; \pm 12$ không phải là nghiệm của đa thức R nên R không có nghiệm nguyên, R cũng không có nghiệm hữu tỷ. Như vậy nếu R phân tích được thành nhân tử thì phải có dạng:

$$(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d), \text{ với } a, b, c, d \in \mathbb{Z}.$$

Khai triển dạng này ra, ta được đa thức: $x^4 + (a + c)x^3 + (ac + b + d)x^2 + (ad + bc)x + bd$. Đồng nhất đa thức này với $f(x)$ ta được hệ điều kiện:

$$\begin{cases} a + c = 1 \\ ac + b + d = 1 \\ ad + bc = 1 \\ bd = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \\ c = 3 \\ d = 4 \end{cases}$$

$$\text{Vậy: } R = (x^2 - 2x + 3)(x^2 + 3x + 4)$$

c) Các số $\pm 1; \pm 3, \pm 7; \pm 9; \pm 21; \pm 63$ không phải là nghiệm của đa thức S nên S không có nghiệm nguyên, S cũng không có nghiệm hữu tỷ. Như vậy nếu S phân tích được thành nhân tử thì phải có dạng:

$$(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d), \text{ với } a, b, c, d \in \mathbb{Z}.$$

Khai triển dạng này ra, ta được đa thức: $x^4 + (a + c)x^3 + (ac + b + d)x^2 + (ad + bc)x + bd$. Đồng nhất đa thức này với $f(x)$ ta được hệ điều kiện:

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ ac + b + d = 0 \\ ad + bc = -8 \\ bd = 63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 7 \\ c = 4 \\ d = 9 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } S = (x^2 - 4x + 7)(x^2 + 4x + 9)$$

$$\text{d) Ta có: } F = x^2 + 2xy - 8y^2 + 2x + 14y - 3 = (x + 4y)(x - 2y) + 2x + 14y - 3$$

Giả sử:

$$F = (x + 4y)(x - 2y) + 2x + 14y - 3 = (x + 4y + a)(x - 2y + b) \text{ với mọi } x, y$$

$$\Leftrightarrow a(x - 2y) + b(x + 4y) + ab = 2x + 14y - 3 \text{ đúng với mọi } x, y$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ 4b - 2a = 14 \\ ab = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases}$$

$$F = (x + 4y - 1)(x - 2y + 3)$$

Phương pháp xét giá trị riêng của biến

5.19. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$\text{a) } A = (x + y + z)^5 - x^5 - y^5 - z^5$$

$$\text{b) } B = x(y - z)^3 + y(z - x)^3 + z(x - y)^3$$

$$c) C = (b+c)(a-b)(a-c) + (c+a)(b-c)(b-a) + (a+b)(c-a)(c-b) + 8abc$$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Sử dụng phương pháp xét giá trị riêng, ta nhận được đa thức có nhân tử là $x+y, y+z, z+x$. Do vậy khi phân tích ta định hướng có nhân tử trên.

$$\begin{aligned} A &= (x+y+z)^5 - x^5 - y^5 - z^5 \\ &= (x+y)^5 + 5(x+y)^4 z + 10(x+y)^3 z^2 + 10(x+y)^2 z^3 + 5(x+y)z^4 + z^5 - x^5 - y^5 - z^5 \\ &= (x+y)^5 + 5(x+y)^4 z + 10(x+y)^3 z^2 + 10(x+y)^2 z^3 + 5(x+y)z^4 - \\ &\quad (x+y)(x^4 - x^3 y + x^2 y^2 - xy^3 + y^4) \\ &= (x+y)[(x+y)^4 + 5(x+y)^3 z + 10(x+y)^2 z^2 + 10(x+y)z^3 + 5z^4 - x^4 + x^3 y - x^2 y^2 + xy^3 - y^4] \\ &= (x+y)[x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4xy^3 + y^4 + 5(x+y)^3 z + 10(x+y)^2 z^2 + \\ &\quad 10(x+y)z^3 + 5z^4 - x^4 + x^3 y - x^2 y^2 + xy^3 - y^4] \\ &= (x+y)[5x^3 y + 5x^2 y^2 + 5xy^3 + 5(x+y)^3 z + 10(x+y)^2 z^2 + 10(x+y)z^3 + 5z^4] \\ &= 5(x+y)[x^3 y + x^2 y^2 + xy^3 + x^3 z + 3x^2 yz + 3xy^2 z + y^3 z + 2x^2 z^2 + 4xyz^2 + \\ &\quad 2y^2 z^2 + 2xz^3 + 2yz^3 + z^4] \\ &= 5(x+y)[(x^3 y + x^3 z) + (x^2 y^2 + x^2 yz) + (2x^2 yz + 2x^2 z^2) + (xy^3 z + xy^2 z) + \\ &\quad (2xy^2 z + 2xyz^2) + (2xyz^2 + 2xz^3) + (y^3 z + y^2 z^2) + (y^2 z^2 + yz^3) + (yz^3 + z^4)] \\ &= 5(x+y)(y+z)[x^3 + x^2 y + 2x^2 z + xy^2 + 2xyz + 2xz^2 + y^2 z + yz^2 + z^3] \\ &= 5(x+y)(y+z)[(x^3 + x^2 z) + (x^2 z + 2xz^2 + z^3) + (x^2 y + 2xyz + yz^2) + (xy^2 + y^2 z)] \\ &= 5(x+y)(y+z)(x+z)(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx) \end{aligned}$$

b) *Nhận xét.* Với $x=y$ thì $B=0$, cho nên $x-y$ là một nhân tử của B. Do vai trò bình đẳng của x, y, z nên $y-z$ và $z-x$ cũng là nhân tử của B, mà B có bậc 4 đối với tập hợp các biến nên

$$B = k.(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z).$$

Chọn $x=0, y=1, z=2$ được $k=1$. Vậy $B = (x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$.

c) *Nhận xét.* Với $a=-b$ thì $c=0$, cho nên $a+b$ là một nhân tử của C. Do vai trò bình đẳng của a, b, c nên $b+c$ và $c+a$ cũng là nhân tử của C, mà C có bậc 3 đối với tập hợp các biến nên $C = k(a+b)(b+c)(c+a)$

Chọn $a=b=c=1$ được $k=1$. Vậy $C = (a+b)(b+c)(c+a)$.