

PHẦN A. LÝ THUYẾT

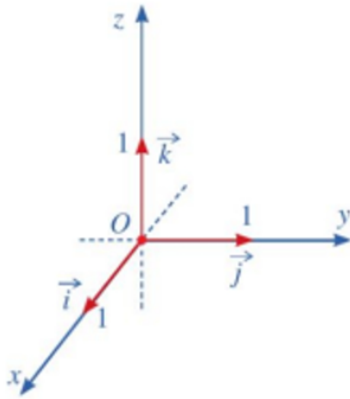
I. TỌA ĐỘ CỦA MỘT ĐIỂM

1. Hệ trục tọa độ trong không gian

Hệ gồm ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc được gọi là hệ trục tọa độ vuông góc $Oxyz$ trong không gian, hay đơn giản gọi là hệ tọa độ $Oxyz$.

Chú ý: Ta gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vector đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz .

Trong hệ tọa độ $Oxyz$ (Hình), ta gọi: điểm O là gốc tọa độ; Ox là trục hoành, Oy là trục tung, Oz là trục cao; các mặt phẳng $(Oxy), (Oyz), (Ozx)$ là các mặt phẳng tọa độ.



Không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ còn được gọi là không gian $Oxyz$.

Nhận xét: Các mặt phẳng tọa độ $(Oxy), (Oyz), (Ozx)$ đôi một vuông góc với nhau.

Ví dụ 1: Một sân tennis với hệ tọa độ $Oxyz$ được chọn như ở Hình.



a) Hỏi mặt sân nằm trong mặt phẳng tọa độ nào?

b) Trục Oz có vuông góc với mặt sân hay không?

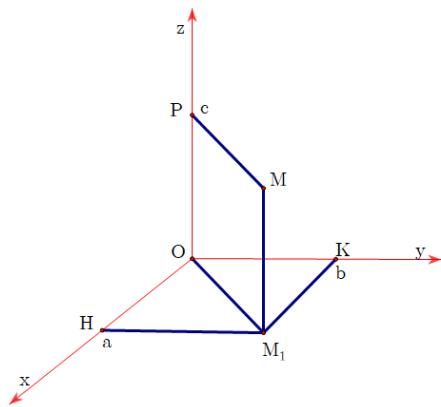
Giải

a) Mặt sân nằm trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) .

b) Trục Oz vuông góc với mặt phẳng tọa độ (Oxy) nên trục Oz vuông góc với mặt sân.

2. Tọa độ của một điểm

Ta có định nghĩa sau (Hình):



Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm M .

- Xác định hình chiếu M_1 của điểm M trên mặt phẳng Oxy . Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm hoành độ a , tung độ b của điểm M_1 .

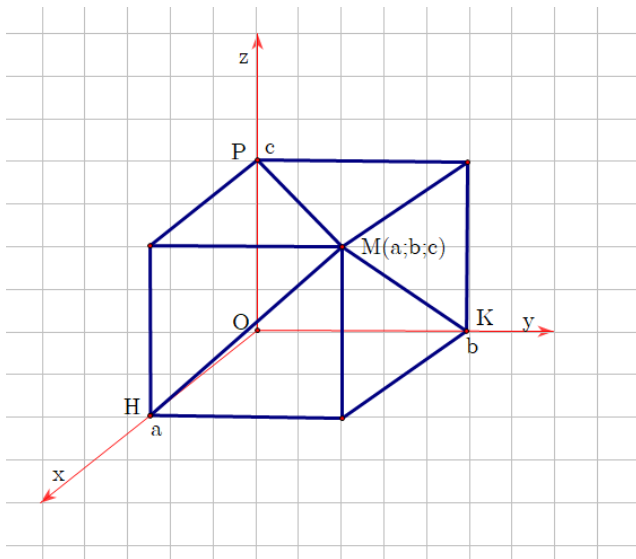
- Xác định hình chiếu P của điểm M trên trục cao Oz , điểm P ứng với số c trên trục Oz . Số c là cao độ của điểm M .

Bộ số $(a;b;c)$ là tọa độ của điểm M trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, kí hiệu là $M(a;b;c)$.

Chú ý

- Tọa độ của một điểm M trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ luôn tồn tại và duy nhất.

- Người ta còn có thể xác định tọa độ điểm M theo cách sau (Hình):



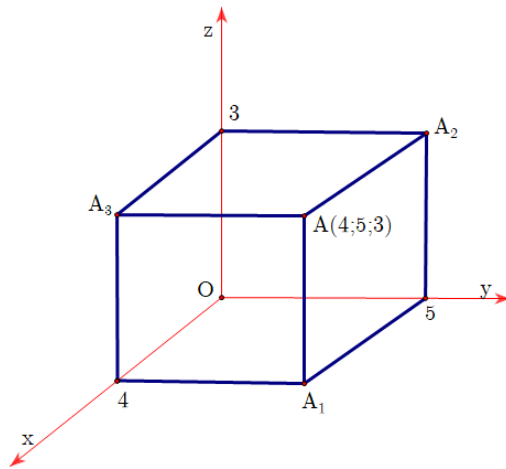
+ Xác định hình chiếu H của điểm M trên trục hoành Ox , điểm H ứng với số a trên trục Ox . Số a là hoành độ của điểm M .

+ Xác định hình chiếu K của điểm M trên trục tung Oy , điểm K ứng với số b trên trục Oy . Số b là tung độ của điểm M .

+ Xác định hình chiếu P của điểm M trên trục cao Oz , điểm P ứng với số c trên trục Oz . Số c là cao độ của điểm M .

Khi đó, bộ số $(a;b;c)$ là toạ độ của điểm M trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$.

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(4;5;3)$. Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các mặt phẳng toạ độ $(Oxy), (Oyz), (Ozx)$ (Hình). Tìm toạ độ của các điểm A_1, A_2, A_3 .



Giải

Gọi $A_1(x_1; y_1; z_1), A_2(x_2; y_2; z_2), A_3(x_3; y_3; z_3)$.

Với $A(4;5;3)$, đặt $x_A = 4, y_A = 5, z_A = 3$. Ta có:

$+x_1 = x_A = 4; y_1 = y_A = 5$ và $z_1 = 0$ (vì A_1 nằm trên mặt phẳng (Oxy)). Do đó $A_1(4;5;0)$.

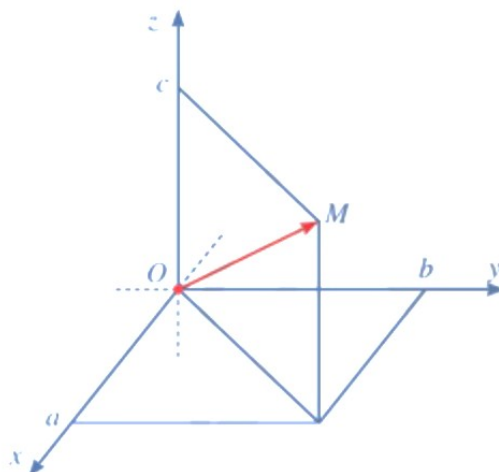
$+y_2 = y_A = 5; z_2 = z_A = 3$ và $x_2 = 0$ (vì A_2 nằm trên mặt phẳng (Oyz)). Do đó $A_2(0;5;3)$.

$+x_3 = x_A = 4; z_3 = z_A = 3$ và $y_3 = 0$ (vì A_3 nằm trên mặt phẳng (Ozx)). Do đó $A_3(4;0;3)$.

II. TỌA ĐỘ CỦA MỘT VECTOR

Toạ độ của điểm M được gọi là toạ độ của vector $\overrightarrow{OM}$.

Nếu $\overrightarrow{OM}$ có toạ độ $(a;b;c)$ thì ta viết $\overrightarrow{OM} = (a;b;c)$, trong đó a gọi là hoành độ của vector $\overrightarrow{OM}$, b gọi là tung độ của vector $\overrightarrow{OM}$ và c gọi là cao độ của vector $\overrightarrow{OM}$ (Hình).



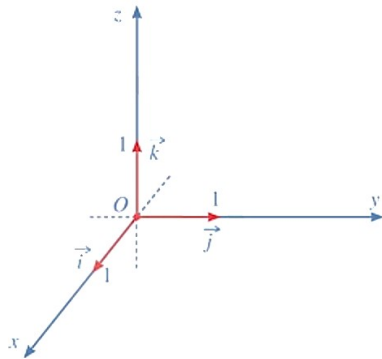
Chú ý: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, ta có:

$$\vec{OM} = (a; b; c) \Leftrightarrow M(a; b; c);$$

- Vector đơn vị $\vec{i}$ trên trục Ox có toạ độ là $\vec{i} = (1; 0; 0)$;

Vector đơn vị $\vec{j}$ trên trục Oy có toạ độ là $\vec{j} = (0; 1; 0)$;

Vector đơn vị $\vec{k}$ trên trục Oz có toạ độ là $\vec{k} = (0; 0; 1)$ (Hình).



Ví dụ 3: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(-4; 3; -1)$ và $N(2; -1; -3)$. Tìm toạ độ của các vector $\vec{OM}, \vec{ON}$.

Giải

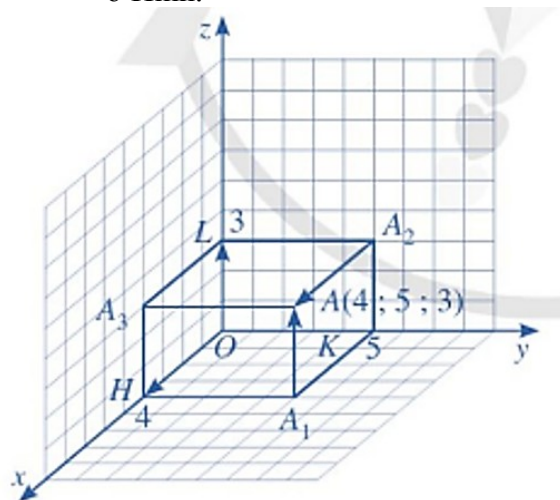
Ta có: $M(-4; 3; -1)$ và $N(2; -1; -3)$.

Do đó, $\vec{OM} = (-4; 3; -1), \vec{ON} = (2; -1; -3)$.

Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, toạ độ của một vector $\vec{u}$ là toạ độ của điểm A , trong đó A là điểm sao cho $\vec{OA} = \vec{u}$.

Nếu $\vec{u}$ có toạ độ $(a; b; c)$ thì ta viết $\vec{u} = (a; b; c)$, trong đó a gọi là hoành độ, b gọi là tung độ và c gọi là cao độ của vector $\vec{u}$.

Ví dụ 4: Tìm toạ độ của các vector $\vec{A_1A}, \vec{A_2A}$ ở Hình.



Giải

Trong Hình, ta có: $\overrightarrow{A_1A} = \overrightarrow{OL}$, $\overrightarrow{A_2A} = \overrightarrow{OH}$ mà $L(0;0;3)$ và $H(4;0;0)$.

Do đó, $\overrightarrow{A_1A} = (0;0;3)$ và $\overrightarrow{A_2A} = (4;0;0)$.

Ta có định lí sau:

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, nếu $u = (a;b;c)$ thì $u = ai + bj + ck$.

Ngược lại, nếu $u = ai + bj + ck$ thì $u = (a;b;c)$.

Chú ý: Với $u = (x_1; y_1; z_1)$ và $v = (x_2; y_2; z_2)$, ta có:

$$u = v \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{cases}.$$

Như vậy, mỗi vectơ hoàn toàn được xác định khi biết tọa độ của nó.

Ví dụ 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$ và vectơ $u = (3;-4;2)$. Hãy biểu diễn theo các vectơ i, j và k mỗi vectơ sau:

a) $\overrightarrow{OA}$;

b) u .

Giải

a) Vì điểm A có tọa độ là $(1;2;-3)$ nên $\overrightarrow{OA} = (1;2;-3)$.

Do đó, $\overrightarrow{OA} = 1i + 2j + (-3)k = i + 2j - 3k$.

b) Vì $u = (3;-4;2)$ nên $u = 3i + (-4)j + 2k = 3i - 4j + 2k$.

Ta có định lí sau:

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(x_A; y_A; z_A)$ và $B(x_B; y_B; z_B)$. Khi đó, ta có: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

Ví dụ 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình bình hành có ba đỉnh $A(1;1;-2)$, $B(4;3;1)$ và $C(-1;-2;2)$.

a) Tìm tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$.

b) Tìm tọa độ của điểm D .

Giải

a) Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = (4 - 1; 3 - 1; 1 - (-2)) = (3; 2; 3).$$

b) Gọi tọa độ của điểm D là $(x_D; y_D; z_D)$, ta có:

$$\overrightarrow{DC} = (-1 - x_D; -2 - y_D; 2 - z_D).$$

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi

$$\vec{DC} = \vec{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 - x_D = 3 \\ -2 - y_D = 2 \\ 2 - z_D = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -4 \\ y_D = -4 \\ z_D = -1 \end{cases}$$

Vậy $D(-4; -4; -1)$.

III. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA PHÉP CỘNG HAI VECTƠ, PHÉP TRỪ HAI VECTƠ, PHÉP NHÂN MỘT SỐ VỚI MỘT VECTƠ

Nếu $u = (x_1; y_1; z_1)$ và $v = (x_2; y_2; z_2)$ thì

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2);$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2);$$

$$mu = (mx_1; my_1; mz_1), m \in \mathbb{R}.$$

Nhận xét: Hai vector $u = (x_1; y_1; z_1), v = (x_2; y_2; z_2) (v \neq 0)$ cùng phương khi và chỉ khi có một số

$$\text{thực } m \text{ sao cho } \begin{cases} x_1 = mx_2 \\ y_1 = my_2 \\ z_1 = mz_2 \end{cases}.$$

Ví dụ 7: Cho $a = (-2; 3; 2), b = (2; 1; -1), c = (1; 2; 3)$. Tính tọa độ của mỗi vector sau:

a) $3a$;

b) $2a - b$;

c) $\vec{a} + 2\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{c}$.

Giải

Ta có:

a) $3a = (3 \cdot (-2); 3 \cdot 3; 3 \cdot 2)$. Vậy $3a = (-6; 9; 6)$.

b) Ta có $2a = (-4; 6; 4)$ và $b = (2; 1; -1)$. Do đó, $2a - b = (-4 - 2; 6 - 1; 4 - (-1))$.

Vậy $2a - b = (-6; 5; 5)$.

c) Do $a = (-2; 3; 2)$ và $2b = (4; 2; -2)$ nên $a + 2b = (2; 5; 0)$. Ngoài ra, vì $-\frac{3}{2}\vec{c} = \left(-\frac{3}{2}; -3; -\frac{9}{2}\right)$ nên $\vec{a} + 2\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{c} = \left(\frac{1}{2}; 2; -\frac{9}{2}\right)$.

IV. TỌA ĐỘ TRUNG ĐIỂM ĐOẠN THẲNG. TỌA ĐỘ TRỌNG TÂM TAM GIÁC

- Cho hai điểm $A(x_A; y_A; z_A)$ và $B(x_B; y_B; z_B)$. Nếu $M(x_M; y_M; z_M)$ là trung điểm đoạn thẳng AB thì

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}; y_M = \frac{y_A + y_B}{2}; z_M = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

- Cho tam giác ABC có $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B), C(x_C; y_C; z_C)$. Nếu $G(x_G; y_G; z_G)$ là trọng tâm tam giác ABC thì

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}.$$

Ví dụ 8: Cho tam giác ABC có $A(-2; 1; 0), B(0; 2; 5), C(5; 0; 2)$. Tìm tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB và trọng tâm G của tam giác ABC .

Giải

Do $M(x_M; y_M; z_M)$ là trung điểm đoạn thẳng AB nên

$$x_M = \frac{-2+0}{2} = -1; y_M = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}; z_M = \frac{0+5}{2} = \frac{5}{2}.$$

Vậy $M\left(-1; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

Do $G(x_G; y_G; z_G)$ là trọng tâm tam giác ABC nên

$$x_G = \frac{-2+0+5}{3} = 1;$$

$$y_G = \frac{1+2+0}{3} = 1;$$

$$z_G = \frac{0+5+2}{3} = \frac{7}{3}.$$

Vậy $G\left(1; 1; \frac{7}{3}\right)$.

V. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

Nếu $u = (x_1; y_1; z_1)$ và $v = (x_2; y_2; z_2)$ thì $u \cdot v = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Nhận xét

a) Nếu $a = (x; y; z)$ thì $|\vec{a}| = \sqrt{a \cdot a} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

b) Nếu $A(x_1; y_1; z_1)$ và $B(x_2; y_2; z_2)$ thì $|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

c) Với hai vector $u = (x_1; y_1; z_1)$ và $v = (x_2; y_2; z_2)$ khác vector 0 , ta có:

- u và v vuông góc với nhau khi và chỉ khi $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Ví dụ 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1; 0; 0), B(0; 0; 1)$ và $C(2; 1; 1)$.

a) Chứng minh rằng A, B, C không thẳng hàng.

b) Tính chu vi của tam giác ABC .

c) Tính $\cos \angle ABC$.

Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{BA} = (1; 0; -1), \overrightarrow{BC} = (2; 1; 0)$. Suy ra $\overrightarrow{BA} = (1; 0; -1) \neq k \overrightarrow{BC} = (2k; k; 0)$ với mọi $k \in \mathbb{R}$.

Vậy ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Ta thấy:

$$BA = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$

$$BC = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5},$$

$$AC = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$$

Vậy chu vi của tam giác ABC bằng $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

c) Ta có:

$$\cos \angle ABC = \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

VI. CÁCH TÌM TOẠ ĐỘ CỦA MỘT VECTƠ VUÔNG GÓC VỚI HAI VECTƠ CHO TRƯỚC

Ta có định lý sau:

Cho hai vectơ $u = (x_1; y_1; z_1)$ và $v = (x_2; y_2; z_2)$ không cùng phương.

Khi đó, vectơ $w = (y_1 z_2 - y_2 z_1; z_1 x_2 - z_2 x_1; x_1 y_2 - x_2 y_1)$ vuông góc với cả hai vectơ u và v .

Nhận xét

- Vectơ w trong định lý trên còn được gọi là **tích có hướng** của hai vectơ u và v , kí hiệu là $w = [u, v]$.

- Để thuận tiện trong cách viết, ta quy ước: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, với a, b, c, d là các số thực.

Khi đó, với hai vectơ $u = (x_1; y_1; z_1)$ và $v = (x_2; y_2; z_2)$, ta có:

$$[u, v] = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right) = (y_1 z_2 - y_2 z_1; z_1 x_2 - z_2 x_1; x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

- Hai vectơ u, v không cùng phương khi và chỉ khi vectơ $w = [u, v] \neq 0$.

Ví dụ 10: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai vectơ $u = (1; -2; 3)$ và $v = (2; 0; -3)$. Hãy chỉ ra toạ độ của một vectơ w khác 0 vuông góc với cả hai vectơ u và v .

Giải

Ta có:

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \right) = (6; 9; 4).$$

Chọn $\vec{w} = (6; 9; 4)$. Theo định lí trên, vector $\vec{w}$ vuông góc với cả hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$.