PHÒNG GD&ĐT

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Gồm có 01 trang)

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2018 – 2019
Môn thi: Toán - Lớp 8
Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)
Ngày thi

Câu 1. *(4 điểm)*

Cho biểu thức : $A = \left(\frac{2+x}{2-x} - \frac{4x^2}{x^2-4} - \frac{2-x}{2+x}\right) : \left(\frac{x^2-3x}{2x^2-x^3}\right)$

a) Tìm ĐKXĐ rồi rút gọn biểu thức A ?
b) Tìm giá trị của x để A > 0?
c) Tính giá trị của A trong trường hợp : |x - 7| = 4.

Câu 2. *(4 điểm)*

a) Chứng minh rằng

$f(x) = x^{99} + x^{88} + x^{77} + ... + x^{11} + 1$ chia hết cho $g(x) = x^9 + x^8 + x^7 + ...+ x + 1$

b) Tìm một số chính phương gồm 4 chữ số biết rằng số gồm 2 chữ số đầu lớn hơn số gồm 2 chữ số sau một đơn vị.

Câu 3. *(4 điểm)*

a) Giải phương trình nghiệm nguyên dương: $x^2 - 4xy + 5y^2 = 169$

b) Giải các phương trình sau: $\frac{1}{x^2+9x+20} + \frac{1}{x^2+11x+30} + \frac{1}{x^2+13x+42} = \frac{1}{18}$

Câu 4. *(6 điểm)*

Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AA’, BB’, CC’, H là trực tâm.

a) Tính tổng $\frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'}$

b) Gọi AI là phân giác của tam giác ABC; IM, IN thứ tự là phân giác của góc AIC và góc AIB. Chứng minh rằng: AN.BI.CM = BN.IC.AM.

c) Chứng minh rằng: $\frac{Ơ(AB+BC+CA)^2}{AA'^2 + BB'^2 + CC'^2} \geq 4$.

Câu 5. *(2 điểm)*

Cho a,b,c là ba số dương thoả mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

------------------------------ **HẾT** -------------------------------

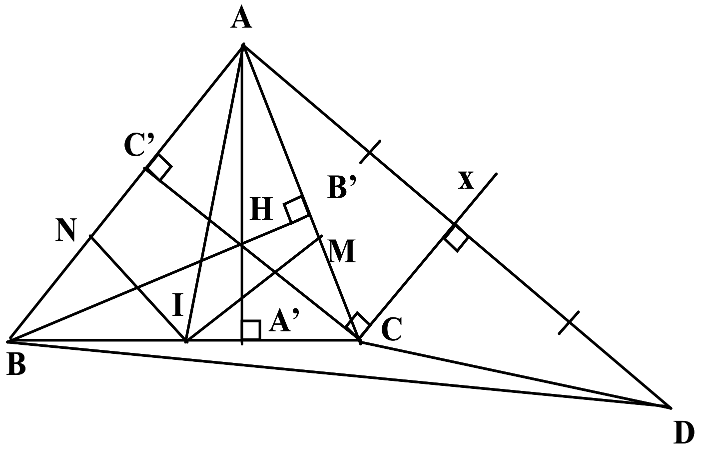
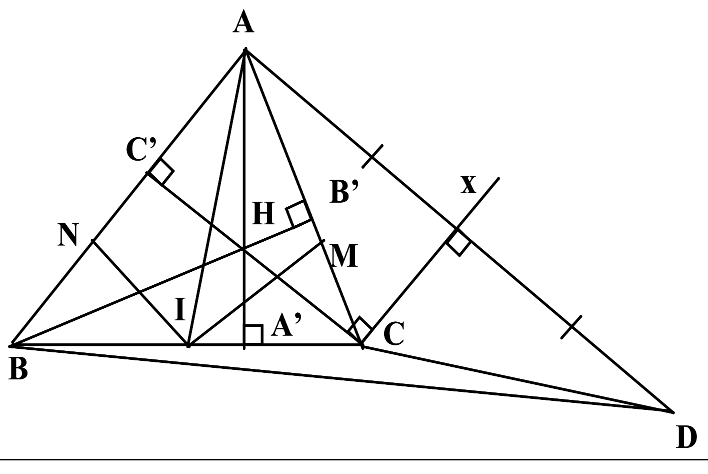
Họ và tên thí sinh: .... Số báo danh: ....

PHÒNG GD&ĐT

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2018 – 2019
Môn: Toán - Lớp 8

Câu	Nội dung	Điểm
1 (4,0đ)	a) ĐKXĐ : $\begin{cases}2-x\neq 0\\ x^2-4\neq 0\\ 2+x\neq 0\\ x^2-3x\neq 0\\ 2x^2-x^3\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ x\neq \pm 2\\ x\neq 3\end{cases}$	0.5đ
	$A=(\frac{2+x}{2-x}-\frac{4x^2}{x^2-4}-\frac{2-x}{2+x}):(\frac{x^2-3x}{2x^2-x^3})=\frac{(2+x)^2+4x^2-(2-x)^2}{(2-x)(2+x)}.\frac{x^2(2-x)}{x(x-3)}=$	0.5đ
	$\frac{4x^2+8x}{(2-x)(2+x)}.\frac{x(2-x)}{x-3}=$	0.25đ
	$=\frac{4x(x+2)x(2-x)}{(2-x)(2+x)(x-3)}=\frac{4x^2}{x-3}$	0.5đ
	Vậy với $x\neq 0, x\neq \pm 2, x\neq 3$ thì $A=\frac{4x^2}{x-3}$.	0.25đ
	b) Với $x\neq 0, x\neq 3, x\neq \pm 2: A>0\Leftrightarrow \frac{4x^2}{x-3}>0$ $\Leftrightarrow x-3>0$ $\Leftrightarrow x>3(TMDKXD)$ Vậy với x > 3 thì A > 0.	0.5đ 0.5đ
	c) $\lvert x-7\rvert=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-7=4\\ x-7=-4\end{array}\right.$	0.25đ
	$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=11(TMDKXD)\\ x=3(KTMDKXD)\end{array}\right.$	0.25đ
	Với x = 11 thì A = $\frac{121}{2}$	0.5đ
	a) Ta có: $f(x)-g(x)=x^{99}-x^9+x^{88}-x^8+x^{77}-x^7+\ldots+x^{11}-x+1-1=x^9(x^{90}-1)+x^8(x^{80}-1)+\ldots+x(x^{10}-1)$ chia hết cho $x^{10}-1$	0.5đ 0.5đ
	Mà $x^{10}-1=(x-1)(x^9+x^8+x^7+\ldots+x+1)$ chia hết cho x^9+x^8+	0.5đ

2 **(4,0đ)**	$x^7+...+x+1$ Suy ra f(x) – g(x) chia hết cho g(x) = $x^9+x^8+x^7+...+x+1$ Nên $f(x)=x^{99}+x^{88}+x^{77}+...+x^{11}+1$ chia hết cho g(x) = $x^9+x+x^7+....+x+1$ b) Đặt $\overline{abcd}=k^2$ ta có $\overline{ab}-\overline{cd}=1$ và k ∈ N, 32 ≤ k < 100 Suy ra : $101\overline{cd}=k^2-100=(k-10)(k+10)$ ⇒ k + 10 ⋮ 101 hoặc k – 10 ⋮ 101 Mà (k – 10; 101) = 1 ⇒ k + 10 ⋮ 101 Vì 32 ≤ k < 100 nên 42 ≤ k + 10 < 110 ⇒ k + 10 = 101 ⇒ k =91 ⇒ $\overline{abcd}=91^2=8281$	0.5đ 0.5đ 0.5đ 0.5đ 0.5đ
3 **(4,0đ)**	a) $x^2-4xy+5y^2=169 \Leftrightarrow (x-2y)^2+y^2=169=13^2+0^2=12^2+5^2$ Do $x,y\in Z^+ \Rightarrow y^2\neq 0 \Rightarrow y^2=0$ bị loại, xét ba khả năng: $\lvert x-2y\rvert=0;y=13\Rightarrow(x;y)=(26;13)$ $\lvert x-2y\rvert=5;y=12\Rightarrow(x;y)=(29;12)..va..(19;12)$ $\lvert x-2y\rvert=12;y=5\Rightarrow(x;y)=(22;5)..va..(-2;5)$ loại Vậy phương trình có 4 nghiệm. (26;13), (29;12), (19;12), (22;5)	0.75đ 0.25đ 0.25đ 0.25đ 0.25đ 0.25đ
	b) $x^2+9x+20=(x+4)(x+5)$; $x^2+11x+30=(x+6)(x+5)$; $x^2+13x+42=(x+6)(x+7)$; ĐKXĐ : $x\neq-4;x\neq-5;x\neq-6;x\neq-7$ Phương trình trở thành : $\frac{1}{(x+4)(x+5)}+\frac{1}{(x+5)(x+6)}+\frac{1}{(x+6)(x+7)}=\frac{1}{18}$ $\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+7}=\frac{1}{18}$ $\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+7}=\frac{1}{18}$ ⇒ 18(x+7)-18(x+4)=(x+7)(x+4) (x+13)(x-2)=0 ⇒ x=-13; x=2 (TM) Từ đó tìm được x=-13; x=2.	0.5đ 0.25đ 0.5đ 0.25đ 0.25đ 0.25đ

4 (6,0đ)	 a) $\dfrac{S_{HBC}}{S_{ABC}}=\dfrac{\frac{1}{2}.HA'.BC}{\frac{1}{2}.AA'.BC}=\dfrac{HA'}{AA'}$; Tương tự: $\dfrac{S_{HAB}}{S_{ABC}}=\dfrac{HC'}{CC'}$; $\dfrac{S_{HAC}}{S_{ABC}}=\dfrac{HB'}{BB'}$ $\Rightarrow \dfrac{HA'}{AA'}+\dfrac{HB'}{BB'}+\dfrac{HC'}{CC'}=\dfrac{S_{HBC}}{S_{ABC}}+\dfrac{S_{HAB}}{S_{ABC}}+\dfrac{S_{HAC}}{S_{ABC}}=1$	0.5đ 0.5đ 0.5đ 0.5đ 0.5đ
	b) Áp dụng tính chất phân giác vào các tam giác ABC, ABI, AIC: $\dfrac{BI}{IC}=\dfrac{AB}{AC};\ \dfrac{AN}{NB}=\dfrac{AI}{BI};\ \dfrac{CM}{MA}=\dfrac{IC}{AI}$ $\dfrac{BI}{IC}.\dfrac{AN}{NB}.\dfrac{CM}{MA}=\dfrac{AB}{AC}.\dfrac{AI}{BI}.\dfrac{IC}{AI}=\dfrac{AB}{AC}.\dfrac{IC}{BI}=1$ $\Rightarrow BI.AN.CM=BN.IC.AM$	0.5đ 0.5đ 0.5đ
	c)Vẽ Cx ¿ CC'. Gọi D là điểm đối xứng của A qua Cx -Chứng minh được góc BAD vuông, CD = AC, AD = 2CC'  	0.5đ

	- Xét 3 điểm B, C, D ta có: BD¿ BC + CD -ΔBAD vuông tại A nên: $AB^2+AD^2 = BD^2$ $\Rightarrow$ $AB^2 + AD^2$ ¿ $(BC+CD)^2$ $AB^2 + 4CC'^2$ ¿ $(BC+AC)^2$ $4CC'^2$ ¿ $(BC+AC)^2 - AB^2$ Tương tự: $4AA'^2$ ¿ $(AB+AC)^2 - BC^2$ $4BB'^2$ ¿ $(AB+BC)^2 - AC^2$ -Chứng minh được : $4(AA'^2 + BB'^2 + CC'^2)$ ¿ $(AB+BC+AC)^2$ $\frac{Ơ(AB+BC+CA)^2}{AA'^2+BB'^2+CC'^2} \geq 4$ (Đẳng thức xảy ra $\Longleftrightarrow$ BC = AC, AC = AB, AB = BC $\Longleftrightarrow$ AB = AC =BC $\Longleftrightarrow$ ΔABC đều)	0.25đ 0.5đ 0.5đ 0.25đ
5 (2,0đ)	Trước tiên ta chứng minh BĐT: Với $\forall$a, b, c $\in$ R và x, y, z > 0 ta có $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$ (*) Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$ Thật vậy, với a, b $\in$ R và x, y > 0 ta có $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$ (**) $\Leftrightarrow (a^2y+b^2x)(x+y) \geq xy(a+b)^2$ $\Leftrightarrow (bx-ay)^2 \geq 0$ (luôn đúng) Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$ Áp dụng bất đẳng thức (**) ta có $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}+\frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$ Ta có: $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}=\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac}+\frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab}+\frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}$ Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có	0.5đ 0.5đ 0.5đ

	$$\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac}+\frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab}+\frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}\geq\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ac)}=\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}$$ (Vì $abc=1$) Hay $\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac}+\frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab}+\frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}\geq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ Mà $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 3$ nên $\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac}+\frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab}+\frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}\geq\frac{3}{2}$ Vậy $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}$ Dấu bằng xảy ra khi a=b=c=1 (đpcm)	0.5đ

Chú ý:

1. *Thí sinh có thể làm bài bằng cách khác, nếu đúng vẫn được điểm tối đa.*

2. *Nếu thí sinh chứng minh bài hình mà không vẽ hình thì không chấm điểm bài hình.*

3. *Chấm và cho điểm từng phần, điểm của toàn bài là tổng các điểm thành phần không làm tròn.*