

ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 02

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

(Mỗi câu trả lời đúng thí sinh được 0,25 điểm)

BẢNG ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Chọn	C	B	D	A	B	B	C	A	A	D	B	D

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.

Điểm tối đa của 01 câu hỏi là 1 điểm

- Thí sinh chỉ lựa chọn chính xác 01 ý trong 1 câu hỏi được 0,1 điểm.
- Thí sinh chỉ lựa chọn chính xác 02 ý trong 1 câu hỏi được 0,25 điểm.
- Thí sinh chỉ lựa chọn chính xác 03 ý trong 1 câu hỏi được 0,5 điểm.
- Thí sinh lựa chọn chính xác cả 04 ý trong 1 câu hỏi được 1,0 điểm.

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4
a) S	a) Đ	a) Đ	a) Đ
b) Đ	b) S	b) S	b) Đ
c) S	c) Đ	c) Đ	c) Đ
d) Đ	d) Đ	d) Đ	d) S

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

(Mỗi câu trả lời đúng thí sinh được 0,5 điểm)

Câu	1	2	3	4	5	6
Chọn	2	6,35	100	7,34	10,3	671

LỜI GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'		+	0	-	

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

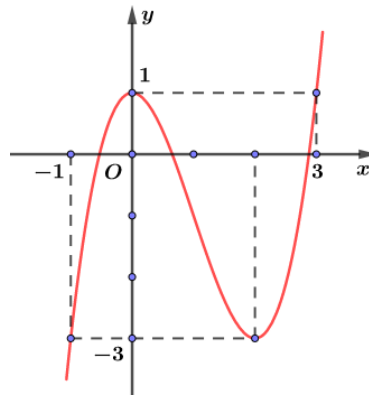
- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 2)$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2; 0)$; $(0; 2)$.
Và đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(2; +\infty)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên:



Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 3]$ bằng

A. 1.

B. -2.

C. 4.

D. 2

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f(x)$ ta thấy:

$$\underset{x \in [-1; 3]}{\text{Max}} y = 1 \text{ tại } x = 0, x = 3.$$

$$\underset{x \in [-1; 3]}{\text{Min}} y = -3 \text{ tại } x = -1, x = 2.$$

Vậy tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 3]$ bằng -2.

Câu 3: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2024}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình

A. $x = 0$.

B. $y = 2024$.

C. $x = 1$.

D. $y = 0$.

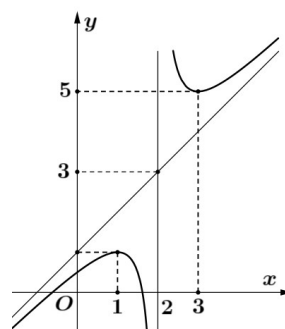
Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2024}{x-1} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2024}{x-1} = 0$$

Suy ra, đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang $y = 0$.

Câu 4: Đồ thị sau đây là của hàm số nào?



A. $y = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$.

B. $y = \frac{x - 2}{1 - 3x}$.

C. $y = \frac{x^2 - x - 1}{x - 1}$.

D. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên nên loại đáp án B và D

Vì đường tiệm cận đứng là $x = 2$ nên chọn A

Câu 5: Khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao (mét) của một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ

điểm cách mặt đất 2m với vận tốc ban đầu 24,5 m/s là $h(t) = 2 + 24,5t - 4,9t^2$. Tìm khẳng định đúng.

- A. Vận tốc của vật sau 2 giây là $h(2) = 31,4 \text{ m/s}$
 B. Vận tốc của vật sau 2 giây là $h'(2) = 4,9 \text{ m/s}$
 C. Vận tốc của vật sau 3 giây là $h'(3) = 4,9 \text{ m/s}$
 D. Vận tốc của vật sau 3 giây là $h(3) = 31,4 \text{ m/s}$

Lời giải

Chọn B

Theo ý nghĩa cơ học của đạo hàm, vận tốc của vật là $h'(t) = 24,5 - 9,8t$

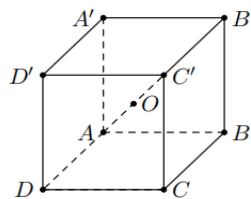
Do đó vận tốc của vật sau 2 giây là $h'(2) = 4,9 \text{ m/s}$

Câu 6: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\vec{AO} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'})$
 B. $\vec{AO} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'})$
 C. $\vec{AO} = \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'})$
 D. $\vec{AO} = \frac{2}{3}(\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'})$

Lời giải

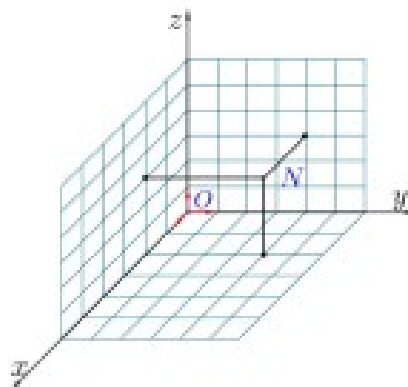
Chọn B



Ta có $\vec{AC'} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'}$

Mặt khác O là trung điểm $AC' \Rightarrow \vec{AO} = \frac{1}{2}\vec{AC'} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'})$

Câu 7: Hình minh họa một hệ tọa độ $Oxyz$ trong không gian cùng với các hình vuông có cạnh bằng 1 đơn vị. Tọa độ của điểm N là



- A. (3; 4; 2) B. (3; 2; 4) C. (2; 4; 3) D. (4; 2; 3)

Lời giải

Chọn C

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $a = (1; -2; 1)$ và $b = (2; -4; -2)$. Khi đó $a.b$ bằng

- A. 8. B. - 8. C. 12. D. - 12.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $a.b = 1.2 + (-2).(-4) + 1.(-2) = 8$

Câu 9: Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2x}$. Hàm số đồng biến trên khoảng nào sau đây.

- A.** $(2; +\infty)$ **B.** $(-\infty; 0)$ **C.** $(-\infty; 1)$ **D.** $(1; +\infty)$

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D = (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$. Ta có: $y' = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}} = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Bảng biến thiên (xét dấu y'):

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
y'	-		0		+

Do vậy hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty; 0)$.

Câu 10: Biết đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 3}$ có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = ax + b$. Tính $a^2 + 2b$.

- A.** 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Chia tử thức cho mẫu thức ta được $\begin{cases} y = x + 1 + \frac{5}{x-3} \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5}{x-3} = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là đường thẳng có phương trình $y = x + 1$ nên $a^2 + 2b = 3$.

Câu 11: Cho hai vectơ a, b thỏa mãn: $|a| = 26; |b| = 28; |a + b| = 48$. Độ dài vectơ $a - b$ bằng?

- A.** 25. **B.** $\sqrt{616}$ **C.** 9. **D.** $\sqrt{618}$

Lời giải

Chọn B

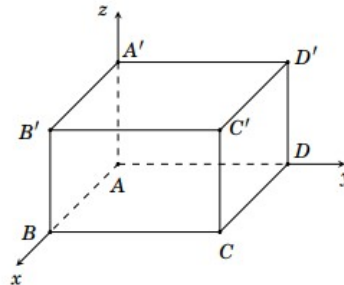
Ta có:

$$\begin{aligned} |a+b|^2 &= 48^2 \\ \Leftrightarrow (a+b)^2 &= 48^2 \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2a.b &= 48^2 \\ \Leftrightarrow |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|\cos(a, b) &= 48^2 \\ \Leftrightarrow |a||b|\cos(a, b) &= \frac{48^2 - 26^2 - 28^2}{2} = 422 \end{aligned}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned}
 |a-b|^2 &= (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos(a,b) \\
 &= 26^2 + 28^2 - 2.422 = 616 \\
 \Rightarrow |a-b| &= \sqrt{616}
 \end{aligned}$$

Câu 12: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ tọa độ O_{xyz} được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với điểm A), tọa độ điểm C' là



- A. $C'(2;2;0)$ B. $C'(2;2;2)$ C. $C'(2;0;0)$ D. $C'(2;0;2)$

Lời giải

Chọn D

Với A là gốc tọa độ thì $C'(2;2;2)$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng (Đ) hoặc sai (S).

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{mx^2 - x - 1}{x - 2}$ có đồ thị (C) . Các mệnh đề dưới đây là đúng hay sai?

- a) **[NB]** Với $m=0$, hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
b) **[TH]** Với $m=0$, hàm số đạt giá trị lớn nhất trên $[-2; 1]$ là 2.
c) **[TH]** Với $m=1$, đồ thị của hàm số đạt cực tiểu tại điểm $(1; 1)$ và đạt cực đại tại điểm $(3; 5)$.
d) **[VD]** Tổng tất cả các số nguyên dương của tham số m để đường tiệm cận xiên Δ của đồ thị tiếp xúc với đường tròn (C) tâm $I(-1; 1)$ bán kính $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$ bằng 8.

Lời giải

a) **(Sai).** Với $m=0$, ta có: $y = \frac{-x-1}{x-2}$

Hàm số không xác định tại $x=2$, mà $2 \in (0; +\infty)$.

Do vậy, hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

b) **(Đúng).** Với $m=0$, ta có: $y = \frac{-x-1}{x-2} \Rightarrow y' = \frac{3}{(x-2)^2}$

Khi đó, hàm số đồng biến trên $[-2; 1]$. Do vậy, $\max_{[-2; 1]} y = y(1) = 2$

c) **(Sai).** Với $m=1$, ta có: $y = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$$y' = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2}$$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$				
$f'(x)$		+	0	-		-	0	+	
$f(x)$									

Dựa vào bảng biến, đồ thị của hàm số đạt cực đại tại điểm $(1;1)$ và đạt cực tiểu tại điểm $(3;5)$.
 Vậy với $m = 1$, đồ thị của hàm số đạt cực tiểu tại điểm $(1;1)$ và đạt cực đại tại điểm $(3;5)$

d) (Đúng) Điều kiện để đồ thị của hàm số có đường tiệm cận xiên: $m \neq 0, m \neq \frac{3}{4}$.
 Đường tiệm cận xiên Δ của đồ thị hàm số là: $mx - y + 2m - 1 = 0$.

Để đường tiệm cận xiên Δ tiếp xúc với đường tròn (C) tâm $I(-1;1)$ bán kính $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$ thì

$$d(I, \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|-m - 1 + 2m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2(m - 2)^2 = m^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 8m + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 1 \in \mathbb{Z}^+ \\ m_2 = 7 \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$$

Vậy $m_1 + m_2 = 8$

Câu 2. Tại một cơ sở sản xuất nước tinh khiết, nhân viên phụ trách sản xuất cho biết, nếu mỗi ngày cơ sở này sản xuất x (m^3) nước tinh khiết thì phải chi phí các khoản sau: 5 triệu đồng chi phí cố định; 0,15 triệu đồng cho mỗi mét khối sản phẩm; $0,0005x^2$ chi phí bảo dưỡng máy móc. Biết công suất tối đa mỗi ngày của cơ sở này là $200m^3$. Gọi $C(x)$ là chi phí sản xuất x (m^3) sản phẩm mỗi ngày và $\bar{C}(x)$ là chi phí trung bình mỗi mét khối sản phẩm. Khi đó:

a) **[NB]** $C(x) = 0,0005x^2 + 0,15x + 5$.

b) **[TH]** Chi phí sản xuất $100m^3$ nước tinh khiết là 20 triệu đồng.

c) **[TH]** $\bar{C}(x) = 0,0005x + 0,15 + \frac{5}{x}$.

d) **[VD]** Chi phí trung bình giảm xuống khi sản lượng nước tinh khiết trong ngày không vượt quá $100 m^3$.

Lời giải

a) **Đúng:** Chi phí mỗi ngày là tổng các chi phí nên $C(x) = 0,0005x^2 + 0,15x + 5$ (triệu đồng).

b) Sai: Khi $x = 100$, ta có $C(100) = 0,0005 \times 100^2 + 0,15 \times 100 + 5 = 25$.

c) Đúng: Chi phí trung bình trên mỗi khối sản phẩm là:

$$\bar{C}(x) = \frac{0,0005x^2 + 0,15x + 5}{x} = 0,0005x + 0,15 + \frac{5}{x}$$

d) Đúng: Xét hàm số $\bar{C}(x) = 0,0005x + 0,15 + \frac{5}{x}, 0 < x \leq 200$.

Ta có $\bar{C}'(x) = \frac{5}{10^4} - \frac{5}{x^2}, \bar{C}'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 10^4 \Rightarrow x = 100$ (do $x \in (0; 200]$)

Bảng biến thiên:

x	0	100	200
$\bar{C}'(x)$		- 0 +	
$\bar{C}(x)$	$+\infty$	0,25	0,275

Vậy chi phí trung bình giảm khi hàm số $\bar{C}(x)$ nghịch biến, tức là $x \in (0; 100)$.

Câu 3: Cho tam giác ABC biết $\overrightarrow{AB} = (4; -2; -1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1; -4; 0)$ và tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(-1; 1; \frac{2}{3}\right)$.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (3; -6; -1)$$

a) [NB] Tọa độ của

b) [TH] Hoành độ của điểm A là $x_A = 4$.

c) [TH] Cao độ của điểm D là $z_D = 2$.

d) [VD] Gọi E là đỉnh thứ tư của hình thang $ABCE$ (với $AE \parallel BC$). Khi $S_{ABCE} = 3S_{ABC}$ thì tổng các tọa độ thành phần của E là -5 .

Lời giải

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (3; -6; -1)$$

a) Đúng. Tọa độ của

b) Sai. Do G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 3\overrightarrow{OA} = 3\overrightarrow{OG} - 3\overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{OG})$$

Ta lại có

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OG} - \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = (-2; 3; 1).$$

Suy ra $A(-2; 3; 1)$. Hoành độ của điểm A là $x_A = -2$. Vậy b) Sai.

c) Đúng. Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; -2; -1)$ và $A(-2; 3; 1)$ nên $B(2; 1; 0)$;

$\overrightarrow{AC} = (-1; -4; 0)$ và $A(-2; 3; 1)$ nên $C(-3; -1; 1)$.

$ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, từ đây ta suy ra $D(-7; 1; 2)$.

Suy ra, cao độ của điểm D là $z_D = 2$. Vậy c đúng.

d) **Đúng**. Theo giả thiết $ABCE$ là hình thang có $S_{ABCE} = 3S_{ABC}$ nên

$$S_{ACE} = 2S_{ABC} \Leftrightarrow \frac{1}{2}d(C; AE).AE = 2 \cdot \frac{1}{2}d(B; AC).AC$$

Mà $d(C; AE) = d(B; AC)$ nên $AE = 2BC$, suy ra $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{BC}$. Suy ra, $E(-7 - 1; 3)$.

Vậy d) đúng.

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$, $C(-4; 7; 5)$.

a) **[NB]** Tọa độ trung điểm của BC là $I(-1; 3; 4)$.

b) **[TH]** Tổng tung độ và cao độ của trọng tâm tam giác ABC bằng 5

c) **[TH]** Cho $A, B, M(0; y; z)$ thẳng hàng. Khi đó $y + z$ bằng 0

d) **[VD]** Tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là $D(\frac{2}{3}; -\frac{11}{3}; 1)$.

Lời giải

a) (**Đúng**) Tọa độ trung điểm của BC là $I(-1; 3; 4)$.

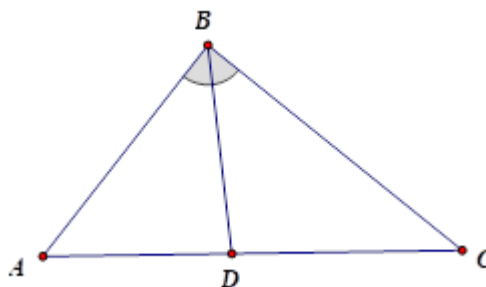
b) (**Đúng**) Tọa độ trọng tâm $G(\frac{1}{3}; \frac{8}{3}; \frac{7}{3})$. Tổng tung độ và cao độ của trọng tâm tam giác ABC bằng 5

c) (**Đúng**) $\overrightarrow{AB} = (1; -3; 4)$, $\overrightarrow{AM} = (-1; y-2; z+1)$

$A, B, M(0; y; z)$ thẳng hàng khi $\overrightarrow{AB} = (1; -3; 4)$ cùng phương $\overrightarrow{AM} = (-1; y-2; z+1)$

Nghĩa là $\frac{-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{4}$. Ta tính được $M(0; 5; -5)$. Khi đó $y + z$ bằng 0

d) (**sai**)



Ta có $AB = \sqrt{26}$, $BC = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$.

Gọi $D(x; y; z)$, khi đó $\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} = \frac{1}{2}$. Suy ra $\overrightarrow{DA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DC} (*)$.

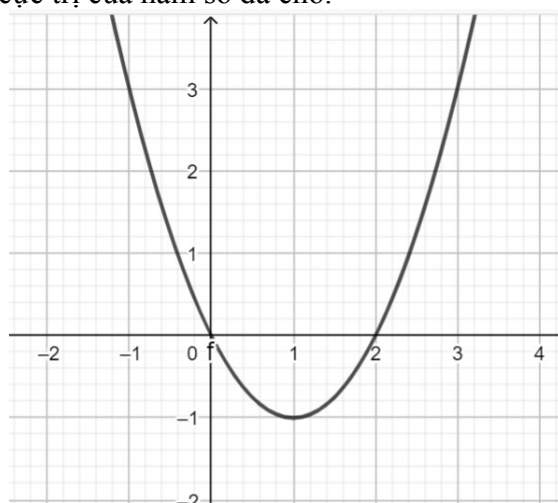
Mà $\overrightarrow{DA} = (1-x; 2-y; -1-z)$, $\overrightarrow{DC} = (-4-x; 7-y; 5-z)$.

$$(*) \Rightarrow \begin{cases} 1-x = -\frac{1}{2}(-4-x) \\ 2-y = -\frac{1}{2}(7-y) \\ -1-z = -\frac{1}{2}(5-z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = \frac{11}{3} \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow D\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right)$$

Từ

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đường cong trong hình vẽ sau là đồ thị hàm số $y = f'(x)$. Tính số cực trị của hàm số đã cho.



Lời giải

Đáp án: 2

Từ đồ thị, ta có $f'(x) > 0, \forall x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ và $f'(x) < 0, \forall x \in (0; 2)$

Do đó ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$y = f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$y = f(x)$					

Vậy hàm số đã cho có 2 cực trị.

Câu 2. Anh Kiên muốn xây dựng một bể chứa nước lắng cặn không có nắp đậy dạng hình hộp chữ nhật có thể tích chứa được $8m^3$, tỉ số giữa chiều dài và chiều cao của bể chứa bằng 2. Xác định diện tích đáy (m^2) của bể chứa để khi xây bể tiết kiệm được nguyên liệu nhất.

Lời giải

Đáp án: 6,35

Gọi chiều dài và chiều rộng của bể chứa lần lượt là $2x \text{ (cm)}$ và $y \text{ (cm)}$, $x, y > 0$. Khi đó chiều cao của bể chứa là $x \text{ (cm)}$.

$$V = x \cdot y \cdot 2x = 8 \Rightarrow y = \frac{4}{x^2}$$

Theo bài có

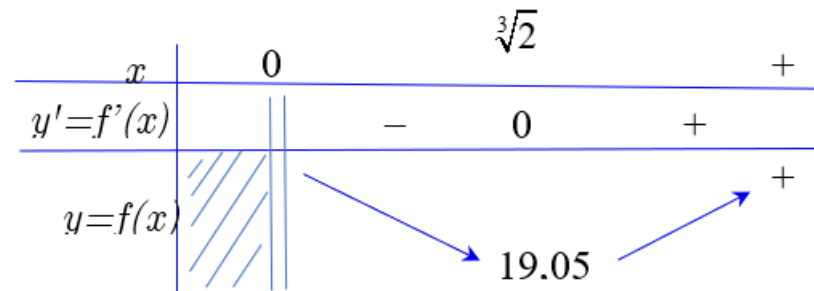
Diện tích các mặt của bể chứa phải xây dựng là :

$$s(x) = 2x \cdot y + 2 \cdot 2x \cdot x + 2 \cdot y \cdot x = 2x \cdot \frac{4}{x^2} + 4x^2 + 2x \cdot \frac{4}{x^2} = 4x^2 + \frac{16}{x}$$

$$f(x) = 4x^2 + \frac{16}{x} \Rightarrow f'(x) = 8x - \frac{16}{x^2} = 0 \Rightarrow x^3 = 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2}$$

Xét hàm số

Bảng biến thiên



Vậy diện tích đáy của bể chứa cần xây dựng để xây dựng tiết kiệm nhất là: $2\sqrt[3]{2} \cdot \frac{4}{\sqrt[3]{4}} \gg 6,35 \text{ m}^2$

Câu 3.

Ở một bể chứa nước có chứa 1000 lít nước ngọt. Người ta bơm nước biển có nồng độ muối là 30 gam/lít vào bể nước với tốc độ là 25 lít/phút. Để biết nồng độ muối của nước trong bể sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm, người ta sẽ lấy khối lượng muối bơm vào sau t phút chia cho tổng dung tích bể sau thời điểm t phút. Như vậy hàm số biểu thị nồng độ muối của nước trong

bể sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm có dạng $C(t) = \frac{at}{b+t}$ (gam/lít). Khi thời gian t càng lớn, nồng độ muối trong bể tiến dần về giá trị c (gam/lít). Tính giá trị $a+b+c$.

Lời giải

Trả lời: 100

Ta có:

Tại thời điểm t phút, tổng dung tích của bể sẽ là $1000 + 25t$ lít.

Khối lượng muối bơm vào sau t phút ta được $30 \cdot 25t$ gam.

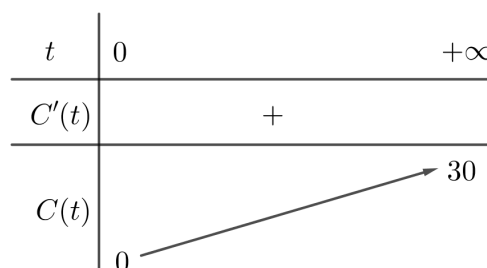
Do đó nồng độ muối của nước trong bể sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm là $C(t) = \frac{30t}{40+t}$ (gam/lít). Vậy $a=30$, $b=40$.

Khảo sát hàm số $C(t) = \frac{30t}{40+t}$ trên cơ sở đó nhận xét về nồng độ muối trong bể khi t càng lớn.

Ta có $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30t}{40+t} = 30$.

Suy ra đường thẳng $C(t) = 30$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

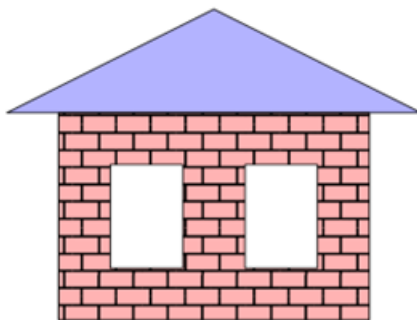
Ta có bảng biến thiên:



Ta thấy, khi t càng lớn thì nồng độ muối trong bể sẽ tiến gần đến mức 30 (gam/lít) nên $c = 30$.

Vậy $a + b + c = 30 + 40 + 30 = 100$.

- Câu 4.** Khi làm nhà kho, bác An muốn cửa sổ có dạng hình chữ nhật với diện tích bằng $3,4\text{m}^2$ (tham khảo hình vẽ bên). Tìm chu vi nhỏ nhất của khung cửa sổ (để tiết kiệm vật liệu nhất, làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



Lời giải

Trả lời: 7,34

Gọi chiều dài, chiều rộng lần lượt của khung cửa sổ là x, y (mét). Điều kiện $x, y > 0$.

Diện tích của khung cửa sổ là $x \cdot y = 3,4 \Rightarrow y = \frac{3,4}{x}$.

Khi đó chu vi của khung cửa sổ là $C = 2x + 2y = 2x + \frac{6,8}{x}$.

Xét hàm số $f(x) = 2x + \frac{6,8}{x}$ trên $(0; +\infty)$.

Ta có $f'(x) = 2 - \frac{6,8}{x^2}$.

Cho $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{85}}{5} \in (0; +\infty)$.

Cho

Ta có bảng biến thiên như sau:

x	0	$\frac{\sqrt{85}}{5}$	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{4\sqrt{85}}{5}$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy được chu vi khung cửa sổ nhỏ nhất bằng $\frac{4\sqrt{85}}{5} \approx 7,34$ m.

- Câu 5.** Một công ty viễn thông đang lên kế hoạch xây dựng một tháp viễn thông tại một thành phố để cung cấp dịch vụ tốt hơn. Công ty cần xác định vị trí của tháp sao cho có thể phủ sóng hiệu quả đến ba toà nhà quan trọng trong thành phố. Giả sử các toà nhà này được đặt tại các vị trí có toạ

độ như sau: Toà nhà $A(0;0;0)$; toà nhà $B(6;0;0)$; toà nhà $C(3;\sqrt{3};2\sqrt{6})$. Tháp viễn thông phải đặt ở vị trí sao cho tổng khoảng cách từ tháp đến 3 toà nhà là nhỏ nhất. Khi đó tổng khoảng cách từ vị trí của tháp đến ba toà nhà bằng bao nhiêu (số liệu làm tròn đến hàng phần chục)?



Lời giải

Trả lời: 10,3

Gọi vị trí tháp là $T(x; y; z)$. Vì $AB = AC = BC = 6$ nên tam giác ABC đều. Khi đó vị trí của tháp là trọng tâm của tam giác ABC .

$$\begin{cases} x = \frac{0+6+3}{3} = \frac{9}{3} \\ y = \frac{0+0+\frac{\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6} \\ z = \frac{0+0+2\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \end{cases} \Rightarrow T\left(\frac{9}{3}; \frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$$

Ta có:

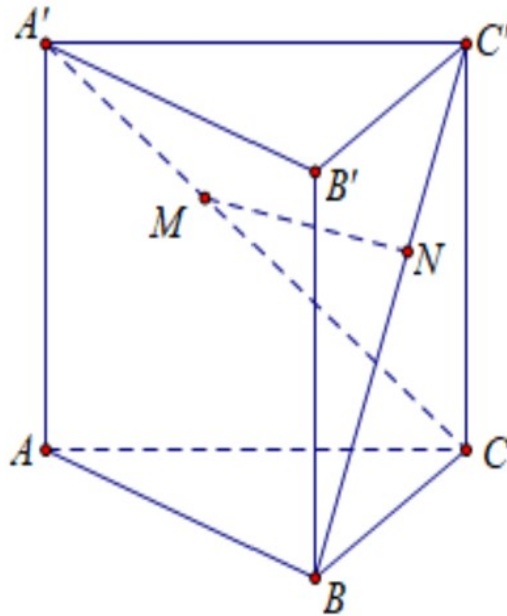
Khi đó khoảng cách từ tháp đến các toà nhà là:

$$TA = TB = TC = \frac{\sqrt{47}}{2}$$

$$S = TA + TB + TC = \frac{3\sqrt{47}}{2} \approx 10,3$$

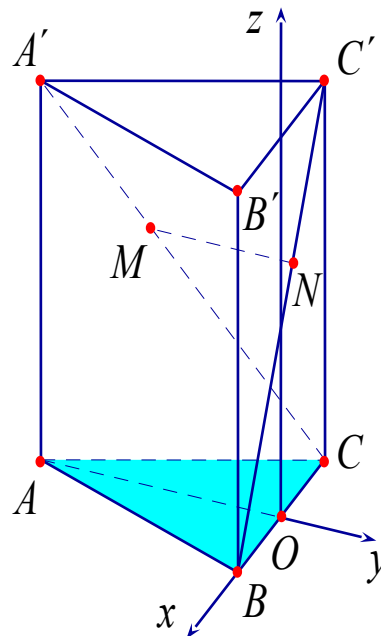
Vậy tổng khoảng cách cần tìm là:

Câu 6. Một kiến trúc sư muốn xây dựng 1 tòa nhà biểu tượng độc lạ cho thành phố. Trên bản thiết kế tòa nhà có hình dạng là một khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$, có cạnh bên bằng cạnh đáy và dài 300 mét. Kiến trúc sư muốn xây dựng một cây cầu MN bắc xuyên tòa nhà (điểm đầu thuộc cạnh $A'C'$, điểm cuối thuộc cạnh BC') và cây cầu này sẽ được dát vàng với đơn giá 5 tỷ đồng trên 1 mét dài. Vì vậy để đáp ứng bài toán kinh tế, kiến trúc sư phải chọn vị trí cây cầu sao cho MN ngắn nhất. Khi đó giá xây cây cầu này hết bao nhiêu tỷ đồng?



Lời giải

Trả lời: 671



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ (O là trung điểm của BC). Ta có: $A'(0; -150\sqrt{3}; 300)$, $B(150; 0; 0)$, $C(-150; 0; 0)$, $C'(-150; 0; 300)$, $\overrightarrow{CA'} = (150; -150\sqrt{3}; 300)$, $\overrightarrow{BC'} = (-300; 0; 300)$,

Gọi m, n thỏa mãn $\begin{cases} \overrightarrow{CM} = m\overrightarrow{CA'} \\ \overrightarrow{BN} = n\overrightarrow{BC'} \end{cases}$ ta có $M(-150 + 150m; -150\sqrt{3}m; 300m)$, $N(150 - 300n; 0; 300n)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (-150m - 300n + 300; 150\sqrt{3}m; 300n - 300m)$$

Đường thẳng MN là đường vuông góc chung của $A'C'$ và BC' nên:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{CA'} = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC'} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4m + n = -1 \\ -m + 4n = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{5} \\ n = \frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (60; 60\sqrt{3}; 60) \Rightarrow MN = 60\sqrt{5}$$

Số tiền xây cầu là: $T = 60\sqrt{5} \cdot 5 \approx 671$ tỷ đồng.

