Mục lục

Lời nói đầu

Bạn đang có trong tay tập I của một trong những sách bài tập giải tích (theo chúng tôi) hay nhất thế giới .

Trước đây, hầu hết những người làm toán của Việt Nam thường sử dụng hai cuốn sách nổi tiếng sau (bằng tiếng Nga và đã được dịch ra tiếng Việt):

1. **"BÀI TẬP GIẢI TÍCH TOÁN HỌC"** của Demidovich (Б. П. Демидович; 1969, Сборник Задач и Упражнений по Математическому Анализу, Издательство "Наука", Москва)

   và

2. **"GIẢI TÍCH TOÁN HỌC, CÁC VÍ DỤ VÀ BÀI TẬP"** của Ljaszko, Bojachuk, Gai, Golovach (И. И. Ляшко, А. К. Боячук, Я. Г. Гай, Г. П. Голобач; 1975, Математический Анализ в Примерах и Задачах, Том 1, 2, Издательство Вишая Школа).

để giảng dạy hoặc học giải tích.

Cần chú ý rằng, cuốn thứ nhất chỉ có bài tập và đáp số. Cuốn thứ hai cho lời giải chi tiết đối với phần lớn bài tập của cuốn thứ nhất và một số bài toán khác.

Lần này chúng tôi chọn cuốn sách (bằng tiếng Ba Lan và đã được dịch ra tiếng Anh):

3. **"BÀI TẬP GIẢI TÍCH. TẬP I: SỐ THỰC, DÃY SỐ VÀ CHUỖI SỐ"** (W. J. Kaczkor, M. T. Nowak, Zadania z Analizy Matematycznej, Cześć Pierwsza, Liczby Rzeczywiste, Ciagi i Szeregi Liczbowe, Wydawnictwo Universytetu Marii Curie - Sklodowskiej, Lublin, 1996),

4. **"BÀI TẬP GIẢI TÍCH. TẬP II: LIÊN TỤC VÀ VI PHÂN "** (W. J. Kaczkor, M. T. Nowak, Zadania z Analizy Matematycznej, Cześć Druga, Funkcje Jednej Zmiennej–Rachunek Rózniczowy, Wydawnictwo Universytetu Marii Curie - Sklodowskiej, Lublin, 1998).

để biên dịch nhằm cung cấp thêm một tài liệu tốt giúp bạn đọc học và dạy giải tích. Khi biên dịch, chúng tôi đã tham khảo bản tiếng Anh:

3*. W. J. Kaczkor, M. T. Nowak, **PROBLEMS IN MATHEMATICAL ANALYSIS I, REAL NUMBERS, SEQUENCES AND SERIES**, AMS, 2000.

4*. W. J. Kaczkor, M. T. Nowak, **PROBLEMS IN MATHEMATICAL ANALYSIS II, CONTINUITY AND DIFFERENTIATION**, AMS, 2001.

Sách này có các ưu điểm sau:

- Các bài tập được xắp xếp từ dễ cho tới khó và có nhiều bài tập hay.
- Lời giải khá đầy đủ và chi tiết.
- Kết hợp được những ý tưởng hay giữa toán học sơ cấp và toán học hiện đại. Nhiều bài tập được lấy từ các tạp chí nổi tiếng như, **American Mathematical Monthly (tiếng Anh), Mathematics Today (tiếng Nga), Delta (tiếng Balan)**. Vì thế, sách này có thể dùng làm tài liệu cho các học sinh phổ thông ở các lớp chuyên cũng như cho các sinh viên đại học ngành toán.

Các kiến thức cơ bản để giải các bài tập trong sách này có thể tìm trong

5. Nguyễn Duy Tiến, **BÀI GIẢNG GIẢI TÍCH, TẬP I**, NXB Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2000.

6. W. Rudin, **PRINCIPLES OF MATHEMATICAL ANALYSIS**, McGraw -Hil Book Company, New York, 1964.

Tuy vậy, trước mỗi chương chúng tôi trình bày tóm tắt lý thuyết để giúp bạn đọc nhớ lại các kiến thức cơ bản cần thiết khi giải bài tập trong chương tương ứng.

Tập I và II của sách chỉ bàn đến **HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ** (trừ phần không gian metric trong tập II). Kaczkor, Nowak chắc sẽ còn viết Bài Tập Giải Tích cho hàm nhiều biến và phép tính tích phân.

Chúng tôi đang biên dịch tập II, sắp tới sẽ xuất bản.

Chúng tôi rất biết ơn :

- Giáo sư Phạm Xuân Yêm (Pháp) đã gửi cho chúng tôi bản gốc tiếng Anh tập I của sách này,

- Giáo sư Nguyễn Hữu Việt Hưng (Việt Nam) đã gửi cho chúng tôi bản gốc tiếng Anh tập II của sách này,

- Giáo sư Spencer Shaw (Mỹ) đã gửi cho chúng tôi bản gốc tiếng Anh cuốn sách nổi tiếng của W. Rudin (nói trên), xuất bản lần thứ ba, 1976,

- TS Dương Tất Thắng đã cổ vũ và tạo điều kiện để chúng tôi biên dịch cuốn sách này.

Chúng tôi chân thành cám ơn tập thể sinh viên Toán - Lý K5 Hệ Đào Tạo Cử Nhân Khoa Học Tài Năng, Trường ĐHKHTN, ĐHQGHN, đã đọc kỹ bản thảo và sửa nhiều lỗi chế bản của bản đánh máy đầu tiên.

Chúng tôi hy vọng rằng cuốn sách này sẽ được đông đảo bạn đọc đón nhận và góp nhiều ý kiến quí báu về phần biên dịch và trình bày. Rất mong nhận được sự chỉ giáo của quý vị bạn đọc, những ý kiến góp ý xin gửi về: **CHI ĐOÀN CÁN BỘ, KHOA TOÁN CƠ TIN HỌC, TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN, ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI, 334 NGUYỄN TRÃI, THANH XUÂN, HÀ NỘI.**

Xin chân thành cảm ơn.

Hà Nội, Xuân 2002.
Nhóm biên dịch
Đoàn Chi

Các ký hiệu và khái niệm

- $\mathbb{R}$ - tập các số thực
- $\mathbb{R}_+$ - tập các số thực dương
- $\mathbb{Z}$ - tập các số nguyên
- $\mathbb{N}$ - tập các số nguyên dương hay các số tự nhiên
- $\mathbb{Q}$ - tập các số hữu tỷ
- (a, b) - khoảng mở có hai đầu mút là a và b
- $[a, b]$ - đoạn (khoảng đóng) có hai đầu mút là a và b
- $[x]$ - phần nguyên của số thực x
- Với $x \in \mathbb{R}$, hàm dấu của x là

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{với} \quad x > 0, \\ -1 & \text{với} \quad x < 0, \\ 0 & \text{với} \quad x = 0. \end{cases}$$

- Với $x \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} n! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n, \\ (2n)!! &= 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot (2n-2) \cdot (2n), \\ (2n-1)!! &= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-3) \cdot (2n-1). \end{aligned}$$

- Ký hiệu $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq k$, là hệ số của khai triển nhị thức Newton.

- Nếu $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ khác rỗng và bị chặn trên thì ta ký hiệu $\sup \mathbf{A}$ là cận trên đúng của nó, nếu nó không bị chặn trên thì ta quy ước rằng $\sup \mathbf{A} = +\infty$.

- Nếu $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ khác rỗng và bị chặn dưới thì ta ký hiệu $\inf \mathbf{A}$ là cận dưới đúng của nó, nếu nó không bị chặn dưới thì ta quy ước rằng $\inf \mathbf{A} = -\infty$.

- Dãy $\{a_n\}$ các số thực được gọi là đơn điệu tăng (tương ứng đơn điệu giảm) nếu $a_{n+1} \geq a_n$ (tương ứng nếu $a_{n+1} \leq a_n$) với mọi $n \in \mathbb{N}$. Lớp các dãy đơn điệu chứa các dãy tăng và giảm.

- Số thực c được gọi là điểm giới hạn của dãy $\{a_n\}$ nếu tồn tại một dãy con $\{a_{n_k}\}$ của $\{a_n\}$ hội tụ về c.

- Cho $\mathbf{S}$ là tập các điểm tụ của dãy $\{a_n\}$. Cận dưới đúng và cận trên đúng của dãy , ký hiệu lần lượt là $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$ và $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$ được xác định như sau

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } \{a_n\} \text{ không bị chặn trên,} \\ -\infty & \text{nếu } \{a_n\} \text{ bị chặn trên và } \mathbf{S} = \emptyset, \\ \sup \mathbf{S} & \text{nếu } \{a_n\} \text{ bị chặn trên và } \mathbf{S} \neq \emptyset, \end{cases}$$

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} -\infty & \text{nếu } \{a_n\} \text{ không bị chặn dưới,} \\ +\infty & \text{nếu } \{a_n\} \text{ bị chặn dưới và } \mathbf{S} = \emptyset, \\ \inf \mathbf{S} & \text{nếu } \{a_n\} \text{ bị chặn dưới và } \mathbf{S} \neq \emptyset, \end{cases}$$

- Tích vô hạn $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ nếu tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $a_n \neq 0$ với $n \geq n_0$ và dãy $\{a_{n_0} a_{n_0+1} \cdot \ldots \cdot a_{n_0+n}\}$ hội tụ khi $n \to \infty$ tới một giới hạn $P_0 \neq 0$. Số $P = a_{n_0} a_{n_0+1} \cdot \ldots \cdot a_{n_0+n} \cdot P_0$ được gọi là giá trị của tích vô hạn.

- Trong phần lớn các sách toán ở nước ta từ trước đến nay, các hàm tang và côtang cũng như các hàm ngược của chúng được ký hiệu là $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccotg} x$ theo cách ký hiệu của các sách có nguồn gốc từ Pháp và Nga, tuy nhiên trong các sách toán của Mỹ và phần lớn các nước châu Âu, chúng được ký hiệu tương tự là $\tan x$, $\cot x$, $\arctan x$, $\operatorname{arccot} x$. Trong cuốn sách này chúng tôi sẽ sử dụng những ký hiệu này để bạn đọc làm quen với những ký hiệu đã được chuẩn hoá trên thế giới.

Bài tập

Chương 1

Giới hạn và tính liên tục

1.1 Giới hạn của hàm số

Chúng ta dùng các định nghĩa sau.

Định nghĩa 1. Hàm f gọi là *tăng* (tương ứng, *tăng thực sự, giảm, giảm thực sự*) trên tập khác rỗng $A \in \mathbb{R}$ nếu $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in A$ kéo theo $f(x_1) \leq f(x_2)$ (tương ứng $f(x_1) < f(x_2)$, $f(x_1) \geq f(x_2)$, $f(x_1) > f(x_2)$). Hàm tăng hay giảm (tương ứng, tăng thực sự hay giảm thực sự) gọi là *hàm đơn điệu* (tương ứng, *đơn điệu thực sự*)

Định nghĩa 2. Tập $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \setminus \{a\}$, ở đây $\varepsilon > 0$ gọi là *lân cận khuyết* của điểm $a \in \mathbb{R}$

1.1.1. Tìm các giới hạn hoặc chứng minh chúng không tồn tại.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \cos\frac{1}{x}$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \left[\frac{1}{x}\right]$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right], \quad a, b > 0$,

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{[x]}{x}$,

(e) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} x(\sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^3+1})$,

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos x)}{\sin(\sin x)}$.

1.1.2. Giả sử $f : (-a, a) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$. Chứng minh rằng

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = l$ nếu và chỉ nếu $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(\sin x) = l$,

(b) $\lim_{x\to 0} f(x) = l$ thì $\lim_{x\to 0} f(|x|) = l$. Điều ngược lại có đúng không ?

1.1.3. Giả sử hàm $f : (-a, a) \setminus \{0\} \to (0, +\infty)$ thoả mãn $\lim_{x\to 0}(f(x) + \frac{1}{f(x)}) = 2$. Chứng minh rằng $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

1.1.4. Giả sử f được xác định trên lân cận khuyết của a và $\lim_{x\to a}(f(x)+\frac{1}{|f(x)|}) = 0$. Tìm $\lim_{x\to 0} f(x)$.

1.1.5. Chứng minh rằng nếu f là hàm bị chặn trên $[0, 1]$ thoả mãn $f(ax) = bf(x)$ với $0 \le x \le \frac{1}{a}$ và $a, b > 1$ thì $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$.

1.1.6. Tính

(a) $\lim_{x\to 0}(x^2(1 + 2 + 3 + \cdots + [\frac{1}{|x|}]))$,

(b) $\lim_{x\to 0^+}(x([\frac{1}{x}] + [\frac{2}{x}] + \cdots + [\frac{k}{x}]))$, $k \in \mathbb{N}$.

1.1.7. Tính $\lim_{x\to \infty} \frac{[P(x)]}{P(|x|)}$, ở đây $P(x)$ là đa thức với hệ số dương.

1.1.8. Chỉ ra bằng ví dụ rằng điều kiện

$$(*) \qquad \lim_{x\to 0}(f(x) + f(2x)) = 0$$

không suy ra f có giới hạn tại 0. Chứng minh rằng nếu tồn tại hàm φ sao cho bất đẳng thức $f(x) \ge \varphi(x)$ được thoả mãn trong một lân cận khuyết của 0 và $\lim_{x\to 0} \varphi(x) = 0$, thì $(*)$ suy ra $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

1.1.9.

(a) Cho ví dụ hàm f thoả mãn điều kiện

$$\lim_{x\to 0}(f(x)f(2x)) = 0$$

và $\lim_{x\to 0} f(x)$ không tồn tại.

(b) Chứng minh rằng nếu trong một lân cận khuyết của 0, các bất đẳng thức $f(x) \ge |x|^\alpha$, $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, và $f(x)f(2x) \ge |x|$ được thoả mãn, thì $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

1.1.10. Cho trước số thực α, giả sử $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(ax)}{x^\alpha} = g(a)$ với mỗi số dương a. Chứng minh rằng tồn tại c sao cho $g(a) = ca^\alpha$.

1.1.11. Giả sử $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm đơn điệu sao cho $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = 1$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(cx)}{f(x)} = 1$ với mọi $c > 0$.

1.1.12. Chứng minh rằng nếu $a > 1$ và $\alpha \in \mathbb{R}$ thì

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a^x}{x} = +\infty$, (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a^x}{x^\alpha} = +\infty$.

1.1.13. Chứng minh rằng nếu $\alpha > 0$, thì $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$.-

1.1.14. Cho $a > 0$, chứng minh $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$. Dùng đẳng thức này để chứng minh tính liên tục của hàm mũ.

1.1.15. Chứng minh rằng

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$, (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$,

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.

1.1.16. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1+x) = 0$. Dùng đẳng thức này, suy ra hàm logarit liên tục trên $(0, \infty)$.

1.1.17. Tính các giới hạn sau :

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$, $a > 0$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1.1.18. Tìm

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$, (d) $\lim\limits_{x\to\infty} (e^x - 1)^{\frac{1}{x}}$,

(e) $\lim\limits_{x\to 0} (\sin x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

1.1.19. Tìm các giới hạn sau:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x + 2\,\mathrm{arctg}\,3x + 3x^2}{\ln(1+3x+\sin^2 x) + xe^x}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\mathrm{tg}\,x^2}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1-e^{-x}} - \sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}$, (d) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\mathrm{cotg}\,x}$.

1.1.20. Tính

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}(\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi x}{2x+1})^{\frac{1}{x}}$, (b) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\ln(1+\dfrac{x}{2}) - \ln\dfrac{x}{2})$.

1.1.21. Giả sử rằng $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 0$ và tồn tại $\alpha \in \mathbb{R}$, các số dương m, M sao cho $m \le \frac{f(x)}{x^\alpha} \le M$ với những giá trị dương của x trong lân cận của 0. Chứng minh rằng nếu $\alpha \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)\ln x = \gamma$, thì $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)^{g(x)} = e^\gamma$. Trường hợp $\gamma = \infty$ hoặc $\gamma = -\infty$, ta giả sử $e^\infty = \infty$ và $e^{-\infty} = 0$.

1.1.22. Biết rằng $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ và $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \infty$. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x\to 0} g(x)(f(x)-1) = \gamma$, thì $\lim\limits_{x\to 0} f(x)^{g(x)} = e^\gamma$.

1.1.23. Tính

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(2\sin\sqrt{x} + \sqrt{x}\sin\frac{1}{x}\right)^x$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1 + xe^{-\frac{1}{x^2}}\sin\frac{1}{x^4}\right)^{e^{\frac{1}{x^2}}}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1 + e^{-\frac{1}{x^2}}\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x^2} + xe^{-\frac{1}{x^2}}\sin\frac{1}{x^4}\right)^{e^{\frac{1}{x^2}}}$.

1.1.24. Cho $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ là hàm sao cho mỗi dãy$f(a+n)$, $a \ge 0$, hội tụ tới không. Hỏi giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ có tồn tại không ?

1.1.25. Cho $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ là hàm sao cho với mọi số dương a, dãy$\{f(an)\}$, hội tụ tới không. Hỏi giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ có tồn tại không ?

1.1.26. Cho $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ là hàm sao cho với mọi $a \ge 0$ và mọi $b > 0$, dãy$\{f(a+bn)\}$, $a \ge 0$, hội tụ tới không. Hỏi giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ có tồn tại không ?

1.1.27. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ và $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(2x)-f(x)}{x} = 0$ thì $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.

1.1.28. Giả sử f xác định trên $(a, +\infty)$, bị chặn trên mỗi khoảng hữu hạn $(a, b)\,, a < b$. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x\to +\infty}(f(x+1) - f(x)) = l$, thì $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = l$.

1.1.29. Cho f xác định trên $(a, +\infty)$, bị chặn dưới trên mỗi khoảng hữu hạn $(a, b)\,, a < b$. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x\to +\infty}(f(x+1) - f(x)) = +\infty$, thì $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

1.1.30. Cho f xác định trên $(a, +\infty)$, bị chặn trên mỗi khoảng hữu hạn $(a, b)\,, a < b$. Nếu với số nguyên không âm k, $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x+1)-f(x)}{x^k}$ tồn tại, thì

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x^{k+1}} = \frac{1}{k+1} \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{x^k}.$$

1.1.31. Cho f xác định trên $(a, +\infty)$, bị chặn trên mỗi khoảng hữu hạn $(a, b)\,, a < b$ và giả sử $f(x) \geq c > 0$ với $x \in (a, +\infty)$. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)}$ tồn tại, thì $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)^{\frac{1}{x}}$ cũng tồn tại và

$$\lim_{x\to +\infty} (f(x))^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)}.$$

1.1.32. Giả thiết rằng $\lim\limits_{x\to 0} f\left(\left[\frac{1}{x}\right]^{-1}\right) = 0$. Từ đó có suy ra $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ tồn tại không ?

1.1.33. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho với mọi $a \in \mathbb{R}$, dãy $\left\{f(\frac{a}{n})\right\}$ hội tụ tới không. Hỏi f có giới hạn tại 0 không ?

1.1.34. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x\to 0} f\left(x\left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]\right)\right) = 0$, thì $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

1.1.35. Chứng minh rằng nếu f đơn điệu tăng (giảm) trên (a, b), thì với mọi $x_0 \in (a, b)$,

(a) $f(x_0^+) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \inf\limits_{x>x_0} f(x) \qquad (f(x_0^+) = \sup\limits_{x>x_0} f(x))$,

(b) $f(x_0^-) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \sup\limits_{x<x_0} f(x) \qquad (f(x_0^-) = \inf\limits_{x<x_0} f(x))$,

(c) $f(x_0^-) \le f(x_0) \le f(x_0^+) \qquad (f(x_0^-) \ge f(x_0) \ge f(x_0^+))$.

1.1.36. Chứng minh rằng nếu f đơn điệu tăng trên (a,b), thì với mọi $x_0 \in (a,b)$,

(a)
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x^-) = f(x_0^+),$$

(b)
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x^+) = f(x_0^-).$$

1.1.37. Chứng minh *định lí Cauchy* sau đây. Để f có giới hạn hữu hạn khi $x \to a$, điều kiện cần và đủ là với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ bất cứ khi nào $0 < |x-a| < \delta$ và $0 < |x'-a| < \delta$. Lập công thức và chứng minh điều kiện cần và đủ tương tự để $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ tồn tại.

1.1.38. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ và $\lim\limits_{y\to A} g(y) = B$, thì $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = B$ với giả thiết $(g\circ f)(x) = g(f(x))$ được xác định và f không nhận giá trị A trong lân cận khuyết của a.

1.1.39. Tìm các hàm f và g sao cho $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ và $\lim\limits_{y\to A} g(y) = B$, nhưng $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) \neq B$.

1.1.40. Giả sử $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm tăng và $x \mapsto f(x) - x$ có chu kì 1. Kí hiệu f^n là phép lặp thứ n của f; tức là, $f^1 = f$ và $f^n = f\circ f^{n-1}$ với $n \ge 2$. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f^n(0)}{n}$ tồn tại, thì với mọi $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f^n(x)}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f^n(0)}{n}$

1.1.41. Giả sử $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm tăng và $x \mapsto f(x) - x$ có chu kì 1. Ngoài ra, giả sử $f(0) > 0$ và p là số nguyên dương cố định. Kí hiệu f^n là phép lặp thứ n của f. Chứng minh rằng nếu m_p là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $f^{m_p}(0) > p$, thì
$$\frac{p}{m_p} \le \varliminf_{n\to\infty} \frac{f^n(0)}{n} \le \varlimsup_{n\to\infty} \frac{f^n(0)}{n} \le \frac{p}{m_p} + \frac{1+f(0)}{m_p}.$$

1.1.42. Giả sử $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm tăng và $x \mapsto f(x) - x$ có chu kì 1. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f^n(x)}{n}$ tồn tại và nhận cùng giá trị với mọi $x \in \mathbb{R}$, ở đây f^n kí hiệu phép lặp thứ n của f.

1.2 Các tính chất của hàm liên tục

1.2.1. Tìm tất cả các điểm liên tục của hàm f xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \text{ vô tỷ}, \\ \sin|x| & \text{nếu } x \text{ hữu tỷ}. \end{cases}$$

1.2.2. Xácđịnh tập các điểm liên tục của hàm f được cho bởi

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{nếu } x \text{ vô tỷ}, \\ 0 & \text{nếu } x \text{ hữu tỷ}. \end{cases}$$

1.2.3. Nghiên cứu tính liên tục của các hàm sau:

(a)
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \text{ vô tỷ hoặc } x = 0, \\ \frac{1}{q} & \text{nếu } x = p/q,\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}, \text{ và} \\ & p, q \text{ nguyên tố cùng nhau}, \end{cases}$$

(b)
$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{nếu } x \text{ vô tỷ hoặc } x = 0, \\ qx/(qx+1) & \text{nếu } x = p/q,\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}, \text{ và} \\ & p, q \text{ nguyên tố cùng nhau}, \end{cases}$$

(Hàm định nghĩa ở (a) được gọi là *hàm Riemann*.)

1.2.4. Chứng minh rằng nếu $f \in C([a, b])$, thì $|f| \in C([a, b])$. Chỉ ra bằng ví dụ rằng điều ngược lại không đúng.

1.2.5. Xác định tất cả các a_n và b_n sao cho hàm xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} a_n + \sin \pi x & \text{nếu } x \in [2n, 2n+1],\ n \in \mathbb{Z}\ , \\ b_n + \cos \pi x & \text{nếu } x \in (2n-1, 2n),\ n \in \mathbb{Z}\ , \end{cases}$$

liên tục trên $\mathbb{R}$.

1.2.6. Cho $f(x) = [x^2] \sin \pi x$ với $x \in \mathbb{R}$. Nghiên cứu tính liên tục của f.

1.2.7. Biết

$$f(x) = [x] + (x - [x])^{[x]} \text{ với } x \geq \frac{1}{2}.$$

Chứng minh rằng f liên tục và tăng thực sự trên $[1, \infty)$.

1.2.8. Nghiên cứu tính liên tục của các hàm sau đây và vẽ đồ thị của chúng

(a) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R},$

(b) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^2 e^{nx} + x}{e^{nx} + 1}, \quad x \in \mathbb{R},$

(c) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(e^n + x^n)}{n}, \quad x \geq 0,$

(d) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n + x^{2n} + \frac{1}{x^{2n}}}, \quad x \neq 0,$

(e) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}, \quad x \in \mathbb{R}.$

1.2.9. Chứng minh rằng nếu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục và tuần hoàn thì nó có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

1.2.10. Cho $P(x) = x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \cdot + a_1 x + a_0$, chứng minh rằng tồn tại $x_* \in \mathbb{R}$ sao cho $P(x_*) = \inf\{P(x) : x \in \mathbb{R}\}$. Cũng chứng minh rằng giá trị tuyệt đối của mọi đa thức P có giá trị nhỏ nhất; tức là, tồn tại $x^* \in \mathbb{R}$ sao cho $|P(x^*)| = \inf\{|P(x)| : x \in \mathbb{R}\}$.

1.2.11.

(a) Cho ví dụ về hàm bị chặn trên $[0, 1]$ nhưng không có giá trị nhỏ nhất, cũng không có giá trị lớn nhất.

(b) Cho ví dụ về hàm bị chặn trên $[0, 1]$ nhưng không có giá trị nhỏ nhất trên mọi đoạn $[a, b] \subset [0, 1]$, $a < b$.

1.2.12. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ và $\delta > 0$, đặt

$$\omega_f(x_0, \delta) = \sup\{|f(x) - f(x_0)| : x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta\}$$

và $\omega_f(x_0) = \lim\limits_{\delta\to 0^+} \omega_f(x_0, \delta)$. Chứng minh rằng f liên tục tại x_0 nếu và chỉ nếu $\omega_f(x_0) = 0$.

1.2.13.

(a) Cho $f, g \in C([a,b])$ và với $x \in [a,b]$, đặt $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ và $H(x) = \max\{f(x), g(x)\}$. Chứng minh rằng $h, H \in C([a,b])$.

(b) Cho $f_1, f_2, f_3 \in C([a,b])$ và với $x \in [a,b]$, đặt $f(x)$ là một trong ba giá trị $f_1(x), f_2(x)$ và $f_3(x)$ mà nằm giữa hai giá trị còn lại. Chứng minh rằng $f \in C([a,b])$.

1.2.14. Chứng minh rằng nếu $f \in C([a,b])$, thì các hàm được xác định bởi

$$m(x) = \inf\{f(\zeta) : \zeta \in [a,x]\} \text{ và } M(x) = \sup\{f(\zeta) : \zeta \in [a,x]\}$$

cũng liên tục trên $[a,b]$.

1.2.15. Gọi f là hàm bị chặn trên $[a,b]$. Chứng minh rằng các hàm được xác định bởi

$$m(x) = \inf\{f(\zeta) : \zeta \in [a,x)\} \text{ và } M(x) = \sup\{f(\zeta) : \zeta \in [a,x)\}$$

cũng liên tục trên (a,b).

1.2.16. Với các giả thiết của bài toán trước, kiểm tra các hàm

$$m^*(x) = \inf\{f(\zeta) : \zeta \in [a,x]\} \text{ và } M^*(x) = \sup\{f(\zeta) : \zeta \in [a,x]\}$$

có liên tục trái trên (a,b) hay không ?

1.2.17. Giả sử f liên tục trên $[a,\infty)$ và $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ hữu hạn. Chứng minh rằng f bị chặn trên $[a,\infty)$.

1.2.18. Cho f là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đặt $\{x_n\}$ là dãy bị chặn. Các bất đẳng thức sau

$$\varliminf_{n\to\infty} f(x_n) = f(\varliminf_{n\to\infty} x_n) \text{ và } \varlimsup_{n\to\infty} f(x_n) = f(\varlimsup_{n\to\infty} x_n)$$

có đúng không ?

1.2.19. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục, tăng và gọi $\{x_n\}$ là dãy bị chặn. Chứng minh rằng

(a) $$\varliminf_{n\to\infty} f(x_n) = f(\varliminf_{n\to\infty} x_n),$$

(b) $$\varlimsup_{n\to\infty} f(x_n) = f(\varlimsup_{n\to\infty} x_n).$$

1.2.20. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục, giảm và gọi $\{x_n\}$ là dãy bị chặn. Chứng minh rằng

(a) $$\varliminf_{n\to\infty} f(x_n) = f(\varliminf_{n\to\infty} x_n),$$

(b) $$\varlimsup_{n\to\infty} f(x_n) = f(\varlimsup_{n\to\infty} x_n).$$

1.2.21. Giả sử f liên tục trên $\mathbb{R}$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ và $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$. Xác định g bằng cách đặt

$$g(x) = \sup\{t : f(t) < x\} \text{ với } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Chứng minh rằng g liên tục trái.

(b) g có liên tục không ?

1.2.22. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm tuần hoàn liên tục với hai chu kì *không thông ước* T_1 và T_2; tức là $\frac{T_1}{T_2}$ vô tỷ. Chứng minh rằng f là hàm hằng. Cho ví dụ hàm tuần hoàn khác hàm hằng có hai chu kì không thông ước.

1.2.23.

(a) Chứng minh rằng nếu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục, tuần hoàn, khác hàm hằng, thì nó có chu kì dương nhỏ nhất, gọi là chu kì cơ bản.

(b) Cho ví dụ hàm tuàn hoàn khác hàm hằng mà không có chu kì cơ bản.

(c) Chứng minh rằng nếu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm tuần hoàn không có chu kì cơ bản, thì tập tất cả các chu kì của f trù mật trong $\mathbb{R}$.

1.2.24.

(a) Chứng minh rằng định lí trong mục (a) của bài toán trước vẫn còn đúng khi tính liên tục của f trên $\mathbb{R}$ được thay thế bởi tính liên tục tại một điểm.

(b) Chứng minh rằng nếu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm tuần hoàn không có chu kì cơ bản và nếu nó liên tục tại ít nhất một điểm, thì nó là hàm hằng.

1.2.25. Chứng minh rằng nếu $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục, tuần hoàn và $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - g(x)) = 0$ thì $f = g$.

1.2.26. Cho ví dụ hai hàm tuần hoàn f và g sao cho mọi chu kì của f không thông ước với mọi chu kì của g và sao cho $f + g$

(a) không tuần hoàn,

(b) tuần hoàn.

1.2.27. Cho $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là các hàm liên tục và tuần hoàn lần lượt với chu kì cơ bản dương T_1 và T_2. Chứng minh rằng nếu $\frac{T_1}{T_2} \notin \mathbb{Q}$, thì $h = f + g$ không là hàm tuần hoàn.

1.2.28. Cho $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là các hàm tuần hoàn .Giả sử f liên tục và không có chu kì nào của g thông ước với chu kì cơ bản của f. Chứng minh rằng $f + g$ không là hàm tuần hoàn.

1.2.29. Chứng minh rằng tập các điểm gián đoạn của hàm đơn điệu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ không quá đếm được.

1.2.30. Giả sử f liên tục trên $[0, 1]$. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k f(\frac{k}{n}) = 0.$$

1.2.31. Cho f liên tục trên $[0, 1]$. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} f(\frac{k}{n}) = 0.$$

1.2.32. Giả sử $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục sao cho $f(x) \leq f(nx)$ với mọi số dương x và mọi số tự nhiên n. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ tồn tại (hữu hạn hoặc vô hạn).

1.2.33. Hàm f xác định trên khoảng $I \subset \mathbb{R}$ được gọi là lồi trên I nếu

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

với mọi $x_1, x_2 \in I$ và $\lambda \in (0, 1)$. Chứng minh rằng nếu f lồi trên khoảng mở, thì nó liên tục. Hàm lồi trên khoảng bất kì có nhất thiết liên tục không ?

1.2.34. Chứng minh rằng nếu dãy $\{f_n\}$ các hàm liên tục trên A hội tụ đều tới f trên A, thì f liên tục trên A.

1.3 Tính chất giá trị trung gian

Ta nhắc lại định nghĩa sau:

Định nghĩa 3. Hàm thực f có *tính chất giá trị trung gian* trên khoảng I chứa $[a, b]$ nếu $f(a) < v < f(b)$ hoặc $f(b) < v < f(a)$; tức là, nếu v nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$, thì tồn tại c nằm giữa a và b sao cho $f(c) = v$.

1.3.1. Cho các ví dụ các hàm có tính chất giá trị trung gian trên khoảng I nhưng không liên tục trên khoảng này.

1.3.2. Chứng minh rằng hàm tăng thực sự $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ có tính chất giá trị trung gian thì liên tục trên $[a, b]$.

1.3.3. Cho $f : [0, 1] \to [0, 1]$ liên tục. Chứng minh rằng f có *điểm cố định* trong $[0, 1]$; tức là, tồn tại $x_0 \in [0, 1]$ sao cho $f(x_0) = x_0$.

1.3.4. Giả sử $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục sao cho $f(a) < g(a)$ và $f(b) > g(b)$. Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in (a, b)$ sao cho $f(x_0) = g(x_0)$.

1.3.5. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục và tuần hoàn với chu kì $T > 0$. Chứng minh rằng tồn tại x_0 sao cho
$$f\left(x_0 + \frac{T}{2}\right) = f(x_0).$$

1.3.6. Hàm $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ liên tục. Chứng minh rằng, với $x_1, x_2, \ldots, x_n$ cho trước trong (a, b), tồn tại $x_0 \in (a, b)$ sao cho
$$f(x_0) = \frac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \cdot + f(x_n)).$$

1.3.7.

(a) Chứng minh rằng phương trình $(1 - x)\cos x = \sin x$ có ít nhất một nghiệm trong $(0, 1)$.

(b) Với đa thức khác không P, chứng minh rằng phương trình $|P(x)| = e^x$ có ít nhất một nghiệm.

1.3.8. Với $a_0 < b_0 < a_1 < b_1 < \cdots < a_n < b_n$, chứng minh rằng mọi nghiệm của đa thức
$$P(x) = \prod_{k=0}^{n}(x + a_k) + 2\prod_{k=0}^{n}(x + b_k), \quad x \in \mathbb{R},$$
đều là thực.

1.3.9. Giả sử f và g có tính chất giá trị trung gian trên $[a, b]$. Hỏi $f + g$ có tính chất giá trị trung gian trên khoảng đó không ?

1.3.10. Giả sử $f \in C([0, 2])$ và $f(0) = f(2)$. Chứng minh rằng tồn tại x_1 và x_2 trong $[0, 2]$ sao cho
$$x_2 - x_1 = 1 \text{ và } f(x_2) = f(x_1).$$
Giải thích ý nghĩa hình học kết quả trên.

1.3.11. Cho $f \in C([0, 2])$. Chứng minh rằng tồn tại x_1 và x_2 trong $[0, 2]$ sao cho
$$x_2 - x_1 = 1 \text{ và } f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{2}(f(2) - f(0)).$$

1.3.12. Với $n \in \mathbb{N}$, gọi $f \in C([0,n])$ sao cho $f(0) = f(n)$. Chứng minh rằng tồn tại x_1 và x_2 trong $[0,n]$ thoả mãn

$$x_2 - x_1 = 1 \text{ và } f(x_2) = f(x_1).$$

1.3.13. Hàm liên tục f trên $[0,n]$, $n \in \mathbb{N}$, thoả mãn $f(0) = f(n)$. Chứng minh rằng với mọi $k \in \{1,2,\ldots,n-1\}$, tồn tại x_k và $x_k^{'}$ sao cho $f(x_k) = f(x_k^{'})$, ở đây $x_k - x_k^{'} = k$ hoặc $x_k - x_k^{'} = n-k$. Hỏi với mọi $k \in \{1,2,\ldots,n-1\}$, có tồn tại x_k và $x_k^{'}$ sao cho $f(x_k) = f(x_k^{'})$, ở đây $x_k - x_k^{'} = k$?

1.3.14. *6* Với $n \in \mathbb{N}$, gọi $f \in C([0,n])$ sao cho $f(0) = f(n)$. Chứng minh rằng phương trình $f(x) = f(y)$ có ít nhất n nghiệm với $x - y \in \mathbb{N}$.

1.3.15. Giả sử các hàm thực liên tục f và g xác định trên $\mathbb{R}$ giao hoán với nhau; tức là, $f(g(x)) = g(f(x))$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng nếu phương trình $f^2(x) = g^2(x)$ có nghiệm, thì phương trình $f(x) = g(x)$ cũng có nghiệm (ở đây $f^2(x) = f(f(x))$ và $g^2(x) = g(g(x))$).

Chỉ ra ví dụ rằng giả thiết về tính liên tục của f và g trong bài toán trên không thể bỏ qua.

1.3.16. Chứng minh rằng đơn ánh liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thì hoặc tăng thực sự, hoặc giảm thực sự.

1.3.17. Giả sử $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là dơn ánh liên tục. Chứng minh rằng nếu tồn tại n sao cho phép lặp thứ n của f là ánh xạ đồng nhất, tức là, $f^n(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, thì

(a) $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, nếu f tăng thực sự,

(b) $f^2(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, nếu f giảm thực sự.

1.3.18. Giả sử $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện $f(f(x)) = f^2(x) = -x$, $x \in \mathbb{R}$.Chứng minh rằng f không thể liên tục.

1.3.19. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ có tính chất giá trị trung gian và tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $f^n(x) = -x$, $x \in \mathbb{R}$, ở đây f^n kí hiệu phép lặp thứ n của f.

1.3.20. Chứng minh rằng nếu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ có tính chất giá trị trung gian và $f^{-1}(\{q\})$ đóng với mọi q hữu tỷ, thì f liên tục.

1.3.21. Giả sử $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ liên tục và bị chặn. Chứng minh rằng, với T cho trước, tồn tại dãy $\{x_n\}$ sao cho

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \text{ và } \lim_{n\to\infty} (f(x_n + T) - f(x_n)).$$

1.3.22. Cho ví dụ hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ đạt mỗi giá trị của nó đúng ba lần. Hỏi có tồn tại hay không hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ đạt mỗi giá trị của nó đúng hai lần ?

1.3.23. Cho $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ liên tục và *đơn điệu thực sự từng mảnh*. (Hàm f gọi là đơn điệu thực sự từng mảnh trên $[0, 1]$, nếu tồn tại phân hoạch của $[0, 1]$ thành hữu hạn khoảng con $[t_{i-1}, t_i]$, ở đây $i = 1, 2, \dots, n$ và $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$, sao cho f đơn điệu trên mỗi khoảng con đó.) Chứng minh rằng f nhận một trong các giá trị của nó một số lẻ lần.

1.3.24. Hàm liên tục $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ nhận mỗi giá trị của nó hữu hạn lần và $f(0) \neq f(1)$. Chứng minh rằng f nhận một trong các giá trị của nó một số lẻ lần.

1.3.25. Giả sử $f : K \to K$ liên tụctrên tập con compact $K \subset \mathbb{R}$. Ngoài ra, giả sử $x_0 \in K$ là số sao cho mọi điểm giới hạn của dãy lặp $\{f^n(x_0)\}$ là điểm cố định của f. Chứng minh rằng $\{f^n(x_0)\}$ hội tụ.

1.3.26. Hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục, tăng sao cho F xác định bởi $F(x) = f(x) - x$ tuần hoàn với chu kì 1. Chứng minh rằng nếu $\alpha(f) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f^n(0)}{n}$, thì tồn tại $x_0 \in [0, 1]$ sao cho $F(x_0) = \alpha(f)$. Chứng minh thêm rằng f có điểm bất động trong $[0, 1]$ nếu và chỉ nếu $\alpha(f) = 0$. (Xem các bài toán 1.1.40 - 1.1.42.)

1.3.27. Hàm $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ thoả mãn $f(0) < 0$ và $f(1) > 0$, và tồn tại hàm g liên tục trên $[0, 1]$ sao cho $f + g$ giảm. Chứng minh rằng phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong khoảng mở $(0, 1)$.

1.3.28. Chứng minh rằng mọi song ánh $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ có vô hạn điểm gián đoạn.

1.3.29. Nhắc lại rằng mỗi $x \in (0, 1)$ có thể được biểu diễn bởi số nhị phân (binary fraction) $.a_1 a_2 a_3 \ldots$, ở đây $a_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, \ldots$. Trong trường hợp x có hai khai triển nhị phân khác nhau, ta chọn khai triển có vô hạn chữ số 1. Tiếp đó, gọi hàm $f : (0, 1) \to [0, 1]$ được xác định bởi

$$f(x) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Chứng minh rằng f gián đoạn tại mọi $x \in (0, 1)$, tuy nhiên, nó có tính chất giá trị trung gian.

1.4 Hàm nửa liên tục

Định nghĩa 4. *Hệ thống số thực mở rộng* $\overline{\mathbb{R}}$ bao gồm hệ thống số thực và hai kí hiệu $+\infty, -\infty$ với các tính chất sau :

(i) Nếu x thực, thì $-\infty < x < +\infty$, và $x + \infty = +\infty$, $x - \infty = -\infty$, $\frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$.

(ii) Nếu $x > 0$, thì $x \cdot (+\infty) = +\infty$, $x \cdot (-\infty) = -\infty$.

(iii) Nếu $x < 0$, thì $x \cdot (+\infty) = -\infty$, $x \cdot (-\infty) = +\infty$.

Định nghĩa 5. Nếu $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ là tập khác rỗng, thì $\sup A$ (tương ứng $\inf A$) là số thực mở rộng nhỏ nhất (tương ứng, lớn nhất) mà lớn hơn (tương ứng, nhỏ hơn) hoặc bằng mọi phần tử của A.
Cho f là hàm thực xác định trên tập khác rỗng $A \subset \mathbb{R}$.

Định nghĩa 6. Nếu x_0 là điểm giới hạn của A, thì *giới hạn dưới* (tương ứng *giới hạn trên*) của $f(x)$ khi $x \to x_0$ được định nghĩa là inf (tương ứng sup) của tập tất cả các $y \in \overline{\mathbb{R}}$ sao cho tồn tại dãy $\{x_n\}$ các điểm trong A khác x_0, hội tụ tới x_0 và $y = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Giới hạn dưới và giới hạn trên của $f(x)$ khi $x \to x_0$ được kí hiệu tương ứng bởi $\underline{\lim}_{x\to x_0} f(x)$ và $\overline{\lim}_{x\to x_0} f(x)$.

Định nghĩa 7. Một hàm giá trị thực gọi là *nửa liên tục dưới* (tương ứng *trên*) tại $x_0 \in A$, x_0 là điểm giới hạn của A, nếu $\varliminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0)$ (tương ứng $\varlimsup_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0)$). Nếu x_0 là điểm cô lập của A, thì ta giả sử rằng f là nửa liên tục trên và dưới tại điểm này.

1.4.1. Chứng minh rằng nếu x_0 là điểm giới hạn của A và $f : A \to \mathbb{R}$, thì

(a) $\varliminf_{x \to x_0} f(x) = \sup_{\delta > 0} \inf\{f(x)\} \; : \; x \in A,\, 0 < |x - x_0| < \delta,$

(b) $\varlimsup_{x \to x_0} f(x) = \inf_{\delta > 0} \sup\{f(x)\} \; : \; x \in A,\, 0 < |x - x_0| < \delta.$

1.4.2. Chứng minh rằng nếu x_0 là điểm giới hạn của A và $f : A \to \mathbb{R}$, thì

(a) $\varliminf_{x \to x_0} f(x) = \sup_{\delta \to 0^+} \inf\{f(x)\} \; : \; x \in A,\, 0 < |x - x_0| < \delta,$

(b) $\varlimsup_{x \to x_0} f(x) = \inf_{\delta \to 0^+} \sup\{f(x)\} \; : \; x \in A,\, 0 < |x - x_0| < \delta.$

1.4.3. Chứng minh rằng $y_0 \in \mathbb{R}$ là giới hạn dưới của $f : A \to \mathbb{R}$ tại điểm giới hạn x_0 của A nếu và chỉ nếu với mọi $\varepsilon > 0$, hai điều kiện sau đây được thoả mãn :

(i) tồn tại $\delta > 0$ sao cho $f(x) > y_0 - \varepsilon$ với mọi $x \in A$ và $0 < |x - x_0| < \delta$,

(ii) với mọi $\delta > 0$, tồn tại $x' \in A$ sao cho $0 < |x' - x_0| < \delta$ và $f(x) < y_0 + \varepsilon$.

Thiết lập bài toán tương tự cho giới hạn trên của f tại x_0.

1.4.4. Cho $f : A \to \mathbb{R}$ và x_0 là điểm tới hạn của A. Chứng minh rằng

(a) $\varliminf_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ nếu và chỉ nếu với mọi y thực và với mọi $\delta > 0$, tồn tại $x' \in A$ sao cho $0 < |x' - x_0| < \delta$ và $f(x') < y$.

(b) $\varlimsup_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ nếu và chỉ nếu với mọi y thực và với mọi $\delta > 0$, tồn tại $x' \in A$ sao cho $0 < |x' - x_0| < \delta$ và $f(x') > y$.

1.4.5. Giả sử $f : A \to \mathbb{R}$ và x_0 là điểm giới hạn của A. Chứng minh rằng nếu $l = \varliminf\limits_{x \to x_0} f(x)$ (tương ứng $L = \varlimsup\limits_{x \to x_0} f(x)$), thì tồn tại dãy $\{x_n\}$, $x_n \in A$, $x_n \neq x_0$, hội tụ tới x_0 sao cho $l = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$ (tương ứng $L = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$).

1.4.6. Cho $f : A \to \mathbb{R}$ và x_0 là điểm giới hạn của A. Chứng minh rằng

$$\varliminf_{x \to x_0} (-f(x)) = -\varlimsup_{x \to x_0} f(x) \text{ và } \varlimsup_{x \to x_0} (-f(x)) = -\varliminf_{x \to x_0} f(x).$$

1.4.7. Cho $f : A \to (0, \infty)$ và x_0 là điểm giới hạn của A. Chứng minh rằng

$$\varliminf_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\varlimsup\limits_{x \to x_0} f(x)} \text{ và } \varlimsup_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\varliminf\limits_{x \to x_0} f(x)}.$$

(Ta giả sử rằng $\frac{1}{+\infty} = 0$ và $\frac{1}{0^+} = +\infty$.)

1.4.8. Giả sử $f, g : A \to \mathbb{R}$ và x_0 là điểm giới hạn của A. Chứng minh rằng các bất đẳng thức sau đây đúng (trừ trường hợp các dạng bất định $+\infty - \infty$ và $-\infty + \infty$):

$$\begin{aligned} \varliminf_{x \to x_0} f(x) + \varliminf_{x \to x_0} g(x) &\leq \varliminf_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) \leq \varliminf_{x \to x_0} f(x) + \varlimsup_{x \to x_0} g(x) \\ &\leq \varlimsup_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) \leq \varlimsup_{x \to x_0} f(x) + \varlimsup_{x \to x_0} g(x). \end{aligned}$$

Cho ví dụ các hàm sao cho $'' \leq ''$ trong các bất đẳng thức trên được thay bởi $'' <''$.

1.4.9. Giả sử $f, g : A \to [0, \infty)$ và x_0 là điểm giới hạn của A. Chứng minh rằng các bất đẳng thức sau đây đúng (trừ trường hợp các dạng bất định $0 \cdot (+\infty)$ và $(+\infty) \cdot 0$):

$$\begin{aligned} \varliminf_{x \to x_0} f(x) \cdot \varliminf_{x \to x_0} g(x) &\leq \varliminf_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) \leq \varliminf_{x \to x_0} f(x) \cdot \varlimsup_{x \to x_0} g(x) \\ &\leq \varlimsup_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) \leq \varlimsup_{x \to x_0} f(x) \cdot \varlimsup_{x \to x_0} g(x). \end{aligned}$$

Cho ví dụ các hàm sao cho $'' \leq ''$ trong các bất đẳng thức trên được thay bởi $'' <''$.

1.4.10. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ tồn tại, thì (trừ trường hợp các dạng bất định $+\infty - \infty$ và $-\infty + \infty$):

$$\begin{aligned} \varliminf_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) &= \lim_{x\to 0} f(x) + \varliminf_{x\to x_0} g(x), \\ \varlimsup_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) &= \lim_{x\to 0} f(x) + \varlimsup_{x\to x_0} g(x). \end{aligned}$$

Ngoài ra, nếu f và g là các hàm không âm, thì (trừ trường hợp các dạng bất định $0 \cdot (+\infty)$ và $(+\infty) \cdot 0$):

$$\begin{aligned} \varliminf_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) &= \lim_{x\to 0} f(x) \cdot \varliminf_{x\to x_0} g(x), \\ \varlimsup_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) &= \lim_{x\to 0} f(x) \cdot \varlimsup_{x\to x_0} g(x). \end{aligned}$$

1.4.11. Chứng minh rằng nếu f liên tục trên (a, b), $l = \varliminf\limits_{x\to a} f(x)$ và $L = \varlimsup\limits_{x\to a} f(x)$, thì với mọi $\lambda \in [l, L]$, tồn tại dãy $\{x_n\}$ gồm các điểm trong (a, b) hội tụ tới a sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lambda$.

1.4.12. Tìm tất cả các điểm tại đó $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \text{ vô tỷ}, \\ \sin x & \text{nếu } x \text{ hữu tỷ} \end{cases}$$

là nửa liên tục.

1.4.13. Xác định tất cả các điểm tại đó f xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{nếu } x \text{ vô tỷ}, \\ 0 & \text{nếu } x \text{ hữu tỷ} \end{cases}$$

là nửa liên tục.

1.4.14. Chứng minh rằng

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \text{ vô tỷ hoặc } x = 0, \\ \frac{1}{q} & \text{nếu } x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}, \\ & \text{và } p, q \text{ nguyên tố cùng nhau}, \end{cases}$$

là nửa liên tục trên.

1.4.15. Tìm tất cả các điểm tại đó hàm xác định bởi

$$\text{(a)} \qquad f(x) = \begin{cases} |x| & \text{nếu } x \text{ vô tỷ hoặc } x = 0, \\ \frac{qx}{qx+1} & \text{nếu } x = \frac{p}{q},\, p \in \mathbb{Z},\, q \in \mathbb{N}, \\ & \text{và } p, q \text{ nguyên tố cùng nhau} \end{cases}$$

$$\text{(b)} \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{(-1)^q}{q+1} & \text{nếu } x \in \mathbb{Q} \cap (0,1] \text{ và } x = \frac{p}{q},\, p, q \in \mathbb{N}, \\ & \text{và } p, q \text{ nguyên tố cùng nhau,} \\ 0 & \text{nếu } x \in (0,1) \text{ vô tỷ} \end{cases}$$

không nửa liên tục trên, cũng không nửa liên tục dưới.

1.4.16. Cho $f, g : A \to \mathbb{R}$ nửa liên tục trên (tương ứng, dưới) tại $x_0 \in A$. Chứng minh rằng

(a) nếu $a > 0$ thì af nửa liên tục dưới (tương ứng, trên) tại $x_0 \in A$. Nếu $a > 0$ thì af nửa liên tục trên (tương ứng, dưới) tại x_0.

(b) $f + g$ nửa liên tục dưới (tương ứng, trên) tại x_0.

1.4.17. Giả sử rằng $f_n : A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, nửa liên tục dưới (tương ứng, trên) tại $x_0 \in A$. Chứng minh rằng $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ (tương ứng, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$) nửa liên tục dưới (tương ứng, trên) tại x_0.

1.4.18. Chứng minh rằng giới hạn theo từng điểm của một dãy tăng (tương ứng, giảm) các hàm nửa liên tục dưới (tương ứng, trên) là nửa liên tục dưới (tương ứng, trên).

1.4.19. Với $f : A \to \mathbb{R}$ và x là điểm giới hạn của A, định nghĩa *dao độ của f tại x* bởi

$$o_f(x) = \lim_{\delta\to 0^+} \sup\{|f(z) - f(u)| \,:\, z, u \in A,\, |z - x| < \delta,\, |u - x| < \delta\}$$

Chứng minh rằng $o_f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, ở đây

$$f_1(x) = \max\{f(x), \varlimsup_{z\to x} f(z)\} \text{ và } f_2(x) = \min\{f(x), \varliminf_{z\to x} f(z)\}.$$

1.4.20. Gọi f_1, f_2, và o_f như trong bài toán trước. Chứng minh rằng f_1 và o_f là nửa liên tục trên, và f_2 là nửa liên tục dưới.

1.4.21. Chứng minh rằng để $f : A \to \mathbb{R}$ là nửa liên tục dưới (tương ứng, trên) tại $x_0 \in A$, điều kiện cần và đủ là với mọi $a < f(x_0)$ (tương ứng, $a > f(x_0)$), tồn tại $\delta > 0$ sao cho $f(x) > a$ (tương ứng, $f(x) < a$) bất cứ khi nào $|x - x_0| < \delta$, $x \in A$.

1.4.22. Chứng minh rằng để $f : A \to \mathbb{R}$ là nửa liên tục dưới (tương ứng, trên) tại $x_0 \in A$, điều kiện cần và đủ là với mọi $a \in \mathbb{R}$, tập $\{x \in A : f(x) > a\}$ (tương ứng, $\{x \in A : f(x) < a\}$) là mở trong A.

1.4.23. Chứng minh rằng $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là nửa liên tục dưới nếu và chỉ nếu tập $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq f(x)\}$ là đóng trong $\mathbb{R}^2$.

Lập công thức và chứng minh điều kiện cần và đủ cho tính nửa liên tục trên của f trên $\mathbb{R}$.

1.4.24. Chứng minh *định lí Baire* sau đây. Mọi hàm nửa liên tục dưới (tương ứng, trên) $f : A \to \mathbb{R}$ là giới hạn của dãy tăng (tương ứng, giảm) các hàm liên tục trên A.

1.4.25. Chứng minh rằng nếu $f : A \to \mathbb{R}$ nửa liên tục trên, $g : A \to \mathbb{R}$ nửa liên tục dưới và $f(x) \leq g(x)$ khắp nơi trên A, thì tồn tại hàm liên tục h trên A sao cho

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x), \quad x \in A.$$

1.5 Tính liên tục đều

Định nghĩa 8. Hàm thực f xác định trên tập $A \in \mathbb{R}$ được gọi là *liên tục đều* trên A nếu, với ε cho trước, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi x và y trong A mà $|x - y| < \delta$, ta có $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

1.5.1. Kiểm tra các hàm sau đây có liên tục đều trên $(0,1)$ hay không :

(a) $f(x) = e^x$,

(b) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$,

(c) $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$,

(d) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$,

(e) $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$,

(f) $f(x) = e^x \cos \frac{1}{x}$,

(g) $f(x) = \ln x$,

(h) $f(x) = \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{x}$,

(i) $f(x) = \operatorname{cotg} x$.

1.5.2. Hàm nào trong số các hàm sau đây liên tục đều trên $[0,\infty)$?

(a) $f(x) = \sqrt{x}$,

(b) $f(x) = x \sin x$,

(c) $f(x) = \sin^2 x$,

(d) $f(x) = \sin x^2$,

(e) $f(x) = e^x$,

(f) $f(x) = e^{\sin(x^2)}$,

(g) $f(x) = \sin \sin x$,

(h) $f(x) = \sin(x \sin x)$,

(i) $f(x) = \sin \sqrt{x}$.

1.5.3. Chứng minh rằng nếu f liên tục đều trên (a,b), $a, b \in \mathbb{R}$, thì $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ tồn tại như các giới hạn hữu hạn.

1.5.4. Giả sử f và g liên tục dều trên (a,b) $([a,\infty))$. Từ đó có suy ra tính liên tục đều trên (a,b) $([a,\infty))$ của các hàm

(a) $f+g$,

(b) fg,

(c) $x \mapsto f(x)\sin x$?

1.5.5.

(a) Chứng minh rằng nếu f là liên tục đều trên $(a,b]$ và trên $[b,c)$, thì nó cũng liên tục trên (a,c).

(b) Giả sử A và B là các tập đóng trong $\mathbb{R}$ và gọi $f : A \cup B \to \mathbb{R}$ là liên tục đều trên A và B. Hỏi f có nhất thiết liên tục đều trên $A \cup B$?

1.5.6. Chứng minh rằng mọi hàm liên tục và tuần hoàn trên $\mathbb{R}$ thì liên tục đều trên $\mathbb{R}$.

1.5.7.

(a) Chứng minh rằng nếu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục sao cho $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ là hữu hạn, thì f cũng liên tục đều trên $\mathbb{R}$.

(b) Chứng minh rằng nếu $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ liên tục và $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ là hữu hạn, thì f cũng liên tục đều trên $[a, \infty)$.

1.5.8. Kiểm tra tính liên tục đều của

(a) $f(x) = \operatorname{arctg} x$ trên $(-\infty, +\infty)$,

(b) $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ trên $(0, +\infty)$,

(c) $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ trên $(0, +\infty)$.

1.5.9. Giả sử f liên tục đều trên $(0, \infty)$. Hỏi các giới hạn $\lim\limits_{x\to+0} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ có tồn tại không ?

1.5.10. Chứng minh rằng mọi hàm bị chặn, đơn điệu và liên tục trên khoảng $I \subset \mathbb{R}$ là liên tục đều trên I.

1.5.11. Giả sử f liên tục đều và không bị chặn trên $[0, \infty)$. Phải chăng hoặc $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, hoặc $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$?

1.5.12. Hàm $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ liên tục đều và với mọi $x \geq 0$, dãy $\{f(x+n)\}$ hội tụ tới không. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

1.5.13. Giả sử $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ liên tục đều. Chứng minh rằng tồn tại số dương M sao cho $\frac{|f(x)|}{x} \leq M$ với $x \geq 1$.

1.5.14. Gọi $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ liên tục đều. Chứng minh rằng tồn tại số dương M với tính chất sau đây :

$$\sup_{u>0}\{|f(x+u) - f(u)|\} \leq M(x+1) \text{ với mọi } x \geq 0.$$

1.5.15. Cho $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, liên tục đều. Chứng minh rằng nếu $\{x_n\}$ là dãy Cauchy các phần tử trong A, thì $\{f(x_n)\}$ cũng là dãy Cauchy.

1.5.16. Giả sử $A \subset \mathbb{R}$ bị chặn. Chứng minh rằng nếu $f : A \to \mathbb{R}$ biến dãy Cauchy các phần tử của A thành dãy Cauchy, thì f liên tục đều trên A. Tính bị chặn củâ A có phải là giả thiết cốt yếu không ?

1.5.17. Chứng minh rằng f liên tục đều trên $A \in \mathbb{R}$ nếu và chỉ nếu với mọi dãy $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ các phần tử của A,

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0 \text{ suy ra } \lim_{n\to\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = 0.$$

1.5.18. Giả sử $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ liên tục đều. Từ đó có suy ra

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x + \frac{1}{x})}{f(x)} = 1\,?$$

1.5.19. Hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục tại 0 và thoả mãn các điều kiện sau đây

$$f(0) = 0 \text{ và } f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2) \text{ với mọi } x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng f liên tục đều trên $\mathbb{R}$.

1.5.20. Với $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, ta định nghĩa

$$\omega_f(\delta) = \sup\{|f(x_1 - f(x_2))| \,:\, x_1, x_2 \in A,\, |x_1 - x_2| < \delta\}$$

và gọi ω_f là *mô đun liên tục của* f. Chứng minh rằng f liên tục đều trên A nếu và chỉ nếu $\lim\limits_{\delta\to 0^+} \omega_f(\delta) = 0$.

1.5.21. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục đều. Chứng minh rằng các phát biểu sau tương đương.

(a) Với mọi hàm liên tục đều $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \cdot g$ liên tục đều trên $\mathbb{R}$

(b) Hàm $x \mapsto |x|f(x)$ liên tục đều trên $\mathbb{R}$.

1.5.22. Chứng minh điều kiện cần và đủ sau đây để f là hàm liên tục đều trên khoảng I. Với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại $N > 0$ sao cho với mọi $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$,

$$\left|\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x - 2}\right| > N \text{ suy ra } |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

1.6 Phương trình hàm

1.6.1. Chứng minh rằng hàm duy nhất liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn *phương trình hàm Cauchy*

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

là hàm tuyến tính dạng $f(x) = ax$.

1.6.2. Chứng minh rằng nếu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn phương trình hàm Cauchy

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

và một trong các điều kiện

(a) f liên tục tại $x_0 \in \mathbb{R}$,

(b) f bị chặn trên khoảng (a, b) nào đó,

(c) f đơn điệu trên $\mathbb{R}$,

thì $f(x) = ax$.

1.6.3. Xác định tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho $f(1) > 0$ và

$$f(x + y) = f(x)f(y).$$

1.6.4. Chứng minh rằng các nghiệm duy nhất mà không đồng nhất bằng không và liên tục trên $(0, \infty)$ của phương trình hàm

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

là các hàm logarit.

1.6.5. Chứng minh rằng các nghiệm duy nhất mà không đồng nhất bằng không và liên tục trên $(0, \infty)$ của phương trình hàm

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

là các hàm dạng $f(x) = x^a$.

1.6.6. Tìm tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho $f(x) - f(y)$ hữu tỷ với $x - y$ hữu tỷ.

1.6.7. Với $|q| < 1$, tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục tại không và thoả mãn phương trình hàm

$$f(x) + f(qx) = 0.$$

1.6.8. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục tại không và thoả mãn phương trình hàm

$$f(x) + f\left(\frac{2}{3}x\right) = x.$$

1.6.9. Xác định mọi nghiệm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục tại không của phương trình hàm

$$2f(2x) = f(x) + x.$$

1.6.10. Tìm tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn *phương trình Jensen*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

1.6.11. Tìm tất cả các hàm liên tục trên (a, b), $a, b \in \mathbb{R}$, thoả mãn phương trình Jensen

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

1.6.12. Xác định tất cả các nghiệm liên tục tại -1 của phương trình hàm

$$f(2x+1) = f(x).$$

1.6.13. Với a thực, chứng minh rằng nếu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là nghiệm liên tục của phương trình

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + axy,$$

thì $f(x) = \frac{a}{2}x^2 + bx$, ở đây $b = f(1) - \frac{a}{2}$.

1.6.14. Xác định mọi nghiệm liên tục tại 0 của phương trình hàm

$$f(x) = f\left(\frac{x}{1-x}\right), \quad x \neq 1.$$

1.6.15. Gọi $f : [0,1] \to [0,1]$ là hàm liên tục, đơn điệu giảm sao cho $f(f(x)) = x$ với $x \in [0,1]$. Hỏi $f(x) = 1 - x$ có phải là hàm duy nhất như vậy không ?

1.6.16. Giả sử rằng f và g thoả mãn phương trình

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng nếu f không đồng nhất bằng không và $|f(x)| \leq 1$ với $x \in \mathbb{R}$, thì ta cũng có $|g(x)| \leq 1$ với $x \in \mathbb{R}$.

1.6.17. Tìm tất cả các hàm liên tục thoả mãn phương trình hàm

$$f(x+y) = f(x)e^y + f(y)e^x.$$

1.6.18. Xác định mọi nghiệm liên tục tại không $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ của

$$f(x+y) - f(x-y) = f(x)f(y).$$

1.6.19. Giải phương trình hàm

$$f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1 + x \quad \text{với} \quad x \neq 0, 1.$$

1.6.20. Dãy $\{x_n\}$ ***hội tụ theo nghĩa Cesàro*** nếu

$$C - \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$$

tồn tại và hữu hạn. Tìm tất cả các hàm ***liên tục Cesàro***, tức là

$$f(C - \lim_{n\to\infty} x_n) = C - \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

với mọi dãy hội tụ Cesàro $\{x_n\}$.

1.6.21. Cho $f : [0,1] \to [0,1]$ là đơn ánh sao cho $f(2x - f(x)) = x$ với $x \in [0,1]$. Chứng minh rằng $f(x) = x$, $x \in [0,1]$.

1.6.22. Với m khác không, chứng minh rằng nếu hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn phương trình

$$f\left(2x - \frac{f(x)}{m}\right) = mx,$$

thì $f(x) = m(x - c)$.

1.6.23. Chứng minh rằng các nghiệm duy nhất của phương trình hàm

$$f(x + y) + f(y - x) = 2f(x)f(y)$$

liên tục trên $\mathbb{R}$ và không đồng nhất bằng không là $f(x) = \cos(ax)$ và $f(x) = \cosh(ax)$ với a thực.

1.6.24. Xác định mọi nghiệm liên tục trên $(-1, 1)$ của

$$f\left(\frac{x + y}{1 + xy}\right) = f(x) + f(y).$$

1.6.25. Tìm mọi đa thức P sao cho

$$P(2x - x^2) = (P(x))^2.$$

1.6.26. Cho $m, n \geq 2$ là các số nguyên. Tìm tất cả các hàm $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ liên tục tại ít nhất một điểm trong $[0, \infty)$ và sao cho

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^m\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(f(x_i))^m \text{ với } x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

1.6.27. Tìm tất cả các hàm không đồng nhất bằng không $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn phương trình

$$f(xy) = f(x)f(y) \text{ và } f(x + z) = f(x) + f(z)$$

với $z \neq 0$ nào đó.

1.6.28. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ sao cho

$$f(x) = -f\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \neq 0.$$

1.6.29. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ thoả mãn phương trình hàm

$$f(x) + f(x^2) = f\left(\frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \neq 0$$

1.6.30. Chứng minh rằng các hàm $f, g, \phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn phương trình

$$\frac{f(x) - g(y)}{x - y} = \phi\left(\frac{x + y}{2}\right), \quad y \neq x,$$

nếu và chỉ nếu tồn tại a, b và c sao cho

$$f(x) = g(x) = ax^2 + bx + c, \quad \phi(x) = 2ax + b.$$

1.6.31. Chứng minh rằng tồn tại hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ thoả mãn ba điều kiện sau đây :

(a) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ với $x, y \in \mathbb{R}$,

(b) $f(x) = x$ với $x \in \mathbb{Q}$,

(c) f không liên tục trên $\mathbb{R}$.

1.7 Hàm liên tục trong không gian metric

Trong mục này, $\mathbf{X}$ và $\mathbf{Y}$ lần lượt kí hiệu là các không gian metric $(\mathbf{X}, d_1)$ và $(\mathbf{Y}, d_2)$. Để đơn giản, ta nói rằng $\mathbf{X}$ là không gian metric thay cho $(\mathbf{X}, d_1)$ là không gian metric. $\mathbb{R}$ và $\mathbb{R}^n$ luôn giả sử được trang bị metric Euclide, nếu không phát biểu ngược lại.

1.7.1. Gọi $(\mathbf{X}, d_1)$ và $(\mathbf{Y}, d_2)$ là các không gian metric và $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$. Chứng minh rằng các điều kiện sau đây tương đương.

(a) Hàm f liên tục.

(b) Với mỗi tập đóng $\mathbf{F} \subset \mathbf{Y}$, tập $f^{-1}(\mathbf{F})$ đóng trong $\mathbf{X}$.

(c) Với mỗi tập mở $\mathbf{G} \subset \mathbf{Y}$, tập $f^{-1}(\mathbf{G})$ mở trong $\mathbf{X}$.

(d) Với mỗi tập con $\mathbf{A}$ của $\mathbf{X}$, $f(\overline{\mathbf{A}} \subset \overline{f(\mathbf{A})})$.

(e) Với mỗi tập con $\mathbf{B}$ của $\mathbf{Y}$, $\overline{f^{-1}(\mathbf{B})} \subset f^{-1}(\overline{\mathbf{B}})$.

1.7.2. Gọi $(\mathbf{X}, d_1)$ và $(\mathbf{Y}, d_2)$ là các không gian metric và $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ liên tục. Chứng minh rằng nghịch ảnh $f^{-1}(\mathbf{B})$ của tập Borel $\mathbf{B}$ trong $(\mathbf{Y}, d_2)$ là tập Borel trong $(\mathbf{X}, d_1)$.

1.7.3. Cho ví dụ hàm liên tục $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ sao cho ảnh $f(\mathbf{F})$ (tương ứng, $f(\mathbf{G})$) không đóng (tương ứng, mở) trong $\mathbf{Y}$ với $\mathbf{F}$ đóng (tương ứng, $\mathbf{G}$ mở) trong $\mathbf{X}$.

1.7.4. Gọi $(\mathbf{X}, d_1)$ và $(\mathbf{Y}, d_2)$ là các không gian metric và $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ liên tục. Chứng minh rằng ảnh của tập compact $\mathbf{F}$ trong $\mathbf{X}$ là tập compact trong $\mathbf{Y}$.

1.7.5. Cho f xác định trên hợp các tập đóng $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_m$. Chứng minh rằng nếu giới hạn của f trên mỗi $\mathbf{F}_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, là liên tục, thì f liên tục trên $\mathbf{F}_1 \cup \mathbf{F}_2 \cup \ldots \cup \mathbf{F}_m$. Chỉ ra ví dụ rằng phát biểu trên không đúng trong trường hợp vô hạn $\mathbf{F}_i$.

1.7.6. Cho f xác định trên hợp các tập mở $\mathbf{G}_t$, $t \in \mathbf{T}$. Chứng minh rằng nếu với mỗi $t \in \mathbf{T}$, giới hạn $f_{|\mathbf{G}_t}$ là liên tục, thì f liên tục trên $\bigcup\limits_{t \in \mathbf{T}} \mathbf{G}_t$.

1.7.7. Cho $(\mathbf{X}, d_1)$ và $(\mathbf{Y}, d_2)$ là các không gian metric. Chứng minh rằng $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ liên tục nếu và chỉ nếu với mỗi $\mathbf{A}$ trong $\mathbf{X}$, hàm $f_{|\mathbf{A}}$ liên tục.

1.7.8. Giả sử f là song ánh liên tục từ không gian metric compact $\mathbf{X}$ lên không gian metric $\mathbf{Y}$. Chứng minh rằng hàm ngược f^{-1} liên tục trên $\mathbf{Y}$. Cũng chứng minh rằng giả thiết compact không thể bị bỏ qua.

1.7.9. Gọi f là ánh xạ liên tục từ không gian metric compact $\mathbf{X}$ vào không gian metric $\mathbf{Y}$. Chứng minh rằng f liên tục đều trên $\mathbf{X}$.

1.7.10. Gọi $(\mathbf{X}, d)$ là không gian metric và $\mathbf{A}$ là tập con khác rỗng của $\mathbf{X}$. Chứng minh rằng hàm $f : \mathbf{X} \to [0, \infty)$ xác định bởi

$$f(x) = \operatorname{dist}(x, \mathbf{A}) = \inf\{d(x, y) \,:\, y \in \mathbf{A}\}$$

liên tục đều trên $\mathbf{X}$.

1.7.11. Giả sử f là ánh xạ liên tục của không gian metric liên thông $\mathbf{X}$ vào không gian metric $\mathbf{Y}$. Chứng minh rằng $f(\mathbf{X})$ liên thông trong $\mathbf{Y}$.

1.7.12. Cho $f : \mathbf{A} \to \mathbf{Y}, \emptyset \neq \mathbf{A} \subset \mathbf{X}$. Với $x \in \overline{\mathbf{A}}$ định nghĩa

$$o_f(x, \delta) = \operatorname{diam}\left(f(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}(x, \delta))\right).$$

Giao độ của f tại x được xác định bởi

$$o_f(x) = \lim_{\delta \to 0^+} o_f(x, \delta).$$

Chứng minh rằng f liên tục tại $x_0 \in \mathbf{A}$ nếu và chỉ nếu $o_f(x_0) = 0$ (so sánh với 1.4.19 và 1.4.20).

1.7.13. Giả sử $f : \mathbf{A} \to \mathbf{Y}$, $\emptyset \neq \mathbf{A} \subset \mathbf{X}$ và với $x \in \overline{\mathbf{A}}$, gọi $o_f(x)$ là giao độ của f tại x đựoc xác định như trong bài toán trước. Chứng minh rằng với mọi $\varepsilon > 0$, tập $\{x \in \overline{\mathbf{A}} \,:\, o_f(x) \geq \varepsilon\}$ là đóng trong $\mathbf{X}$.

1.7.14. Chứng minh rằng tập điểm liên tục của $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ là giao đếm được các tập mở, nói cách khác, là $\mathcal{G}_\delta$ trong $(\mathbf{X}, d_1)$. Cũng chứng minh rằng tập điểm gián đoạn của f là hợp đếm được các tập đóng, nói cách khác, là $\mathcal{F}_\sigma$ trong $(\mathbf{X}, d_1)$.

1.7.15. Cho ví dụ hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ có tập điểm gián đoạn là $\mathbb{Q}$.

1.7.16. Chứng minh rằng với mỗi tập con $\mathcal{F}_\sigma$ của $\mathbb{R}$ là tập điểm gián đoạn của hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1.7.17. Cho $\mathbf{A}$ là tập con $\mathcal{F}_\sigma$ của không gian metric $\mathbf{X}$. Có tồn tại hay không hàm $f : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ mà tập điểm gián đoạn là $\mathbf{A}$?

1.7.18. Gọi $\chi_\mathbf{A}$ là hàm đặc trưng của $\mathbf{A} \subset \mathbf{X}$. Chứng minh rằng $\{x \in \mathbf{X} : o_{\chi_\mathbf{A}}(x) > 0\} = \partial\mathbf{A}$, ở đây $\chi_f(x)$ là giao độ của f tại x được xác định như trong 1.7.12. Suy ra rằng $\chi_\mathbf{A}$ liên tục trên $\mathbf{X}$ nếu và chỉ nếu $\mathbf{A}$ vừa mở, vừa đóng trong $\mathbf{X}$.

1.7.19. Giả sử g_1 và g_2 là các ánh xạ liên tục của không gian metric $(\mathbf{X}, d_1)$ vào không gian metric $(\mathbf{X}, d_2)$, và tập $\mathbf{A}$ có phần trong rỗng, trù mật trong $\mathbf{X}$.Chứng minh rằng nếu

$$f(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{với } x \in \mathbf{A}, \\ g_2(x) & \text{với } x \in \mathbf{X} \setminus \mathbf{A}, \end{cases}$$

thì

$$o_f(x) = d_2(g_1(x), g_2(x)), \quad x \in \mathbf{X}.$$

ở đây $o_f(x)$ là giao độ của f tại x được xác định như trong 1.7.12.

1.7.20. Ta nói rằng hàm thực f xác định trên không gian metric $\mathbf{X}$ là thuộc *lớp Baire thứ nhất* nếu f là giới hạn điểm của dãy hàm liên tục trên $\mathbf{X}$. Chứng minh rằng nếu f thuộc lớp Baire thứ nhất, thì tập các điểm gián đoạn của f là tập thuộc phạm trù thứ nhất; tức là, nó là hợp của một số đếm được các tập không đâu trù mật.

1.7.21. Chứng minh rằng nếu $\mathbf{X}$ là không gian metric đầy đủ và f thuộc lớp Baire thứ nhất trên $\mathbf{X}$, thì tập các điểm liên tục của f trù mật trong $\mathbf{X}$.

1.7.22. Gọi $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ liên tục sao cho với mỗi số dương x, dãy $\{f\left(\frac{x}{n}\right)\}$ hội tụ tới không. Từ đó có suy ra $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ không ? (so sánh với 1.1.33.)

1.7.23. Kí hiệu $\mathcal{F}$ là họ các hàm liên tục trên không gian metric compact $\mathbf{X}$ sao cho với mọi $x \in \mathbf{X}$, tồn tại M_x thoả mãn

$$|f(x)| \leq M_x \text{ với mọi } f \in \mathcal{F}.$$

Chứng minh rằng tồn tại hằng số dương M và tập mở khác rỗng $\mathbf{G} \subset \mathbf{X}$ sâo cho

$$|f(x)| \leq M \text{ với mọi } f \in \mathcal{F} \text{ và với mọi } x \in \mathbf{G}.$$

1.7.24. Gọi $\mathbf{F}_1 \supset \mathbf{F}_2 \supset \mathbf{F}_3 \supset \dots$ là dãy các tập con khác rỗng lồng nhau của không gian metric đầy đủ $\mathbf{X}$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam} \mathbf{F}_n = 0$. Chứng minh rằng nếu f liên tục trên $\mathbf{X}$, thì

$$f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbf{F}_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(\mathbf{F}_n).$$

1.7.25. Gọi $(\mathbf{X}, d)$ là không gian metric và p là điểm cố định trong $\mathbf{X}$. Với $a \in \mathbf{X}$, xác định hàm f_u bởi $f_u(x) = d_1(u, x) - d_1(p, x)$, $x \in \mathbf{X}$. Chứng minh rằng $u \mapsto f_u$ là ánh xạ bảo toàn khoảng cách, nói cách khác, là đẳng cự của $(\mathbf{X}, d_1)$ vào không gian $C(\mathbf{X}, \mathbb{R})$ các hàm thực liên tục trên $\mathbf{X}$ được trang bị metric $d(f, g) = \sup\{f(x) - g(x) : x \in \mathbf{X}\}$.

1.7.26. Chứng minh rằng không gian metric $\mathbf{X}$ là compact nếu và chỉ nếu với mọi hàm liên tục $f : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ là bị chặn.

1.7.27. Cho $(\mathbf{X}, d_1)$ là không gian metric và với $x \in \mathbf{X}$, xác định $\rho(x) = \operatorname{dist}(x, \mathbf{X} \setminus \{x\})$. Chứng minh rằng hai điều kiện sau đây tươngđương.

(a) Mọi hàm $f : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ là liên tục đều.

(b) Mọi dãy $\{x_n\}$ các phần tử của $\mathbf{X}$ sao cho

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n) = 0$$

chứa dãy con hội tụ.

1.7.28. Chứng minh rằng không gian metric $\mathbf{X}$ là compact nếu và chỉ nếu mọi hàm thực liên tục trên $\mathbf{X}$ là liên tục đều và với mọi $\varepsilon > 0$, tập $\{x \in \mathbf{X} : \rho(x) > \varepsilon\}$, ở đây ρ được xác định như trong 1.7.27, là hữu hạn.

1.7.29. Cho ví dụ không gian metric không compact sao cho mọi hàm liên tục $f : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ là liên tục đều trên $\mathbf{X}$.

1.7.30. Xét hàm định nghĩa bởi (so sánh với 1.2.3 (a))

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad x\text{hữu tỷ.} \\ 0 & \text{nếu} \quad x = 0, \\ \frac{1}{q} & \text{nếu} \quad x = \frac{p}{q},\, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, \text{ và } p, q \text{ nguyên tố cùng nhau} \end{cases}$$

1.7.31.

1.7.32.

1.7.33.

1.7.34.

1.7.35.

1.7.36.

1.7.37.

1.7.38.

1.7.39.

1.7.40.

1.7.41.

1.7.42.

1.7.43.

1.7.44.

Chứng minh. Không có chi $a^2 = 1$ □

Chứng minh. Lời giải tiếp theo

□

Chương 2

Phép tính vi phân

2.1 Đạo hàm của hàm số thực

2.1.1. Tính đạo hàm (nếu có) của các hàm sau:

(a) $\quad f(x) = x|x|, \quad x \in \mathbb{R},$

(b) $\quad f(x) = \sqrt{|x|}, \quad x \in \mathbb{R},$

(c) $\quad f(x) = [x]\sin^2(\pi x), \quad x \in \mathbb{R},$

(d) $\quad f(x) = (x - [x])\sin^2(\pi x), \quad x \in \mathbb{R},$

(e) $\quad f(x) = \ln|x|, \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$

(f) $\quad f(x) = \arccos\frac{1}{|x|}, \quad |x| > 1.$

2.1.2. Đạo hàm các hàm số sau:

(a) $\quad f(x) = \log_x 2, \quad x > 0,\, x \neq 1,$

(b) $\quad f(x) = \log_x \cos x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\backslash\{1\}.$

2.1.3. Nghiên cứu tính khả vi của các hàm số sau:

(a) $$f(x) = \begin{cases} \arctan x & \text{với} \quad |x| \leq 1, \\ \frac{\pi}{4}\operatorname{sgn} x + \frac{x-1}{2} & \text{với} \quad |x| > 1, \end{cases}$$

(b) $$f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-x^2} & \text{với} \quad |x| \le 1, \\ \frac{1}{e} & \text{với} \quad |x| > 1, \end{cases}$$

(c) $$f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{|x|} & \text{với} \quad x \ne 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{với} \quad x = 0. \end{cases}$$

2.1.4. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left|\cos \frac{\pi}{x}\right| & \text{với} \quad x \ne 0, \\ 0 & \text{với} \quad x = 0. \end{cases}$$

không khả vi tại các điểm $x_n = \frac{2}{2n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$, nhưng khả vi tại 0 là điểm giới hạn của dãy $\{x_n\}$.

2.1.5. Xác định các giá trị a, b, c, d sao cho hàm f khả vi trên $\mathbb{R}$:

(a) $$f(x) = \begin{cases} 4x & x \le 0, \\ ax^2 + bx + c & 0 < x < 1, \\ 3 - 2x & x \ge 1 \end{cases}$$

(b) $$f(x) = \begin{cases} ax + b & x \le 0, \\ cx^2 + dx & 0 < x \le 1, \\ 1 - \frac{1}{x} & x > 1 \end{cases}$$

(c) $$f(x) = \begin{cases} ax + b & x \le 1, \\ ax^2 + c & 1 < x \le 2, \\ \frac{dx^2+1}{x} & x > 2. \end{cases}$$

2.1.6. Tính tổng:

(a) $$\sum_{k=0}^{n} k e^{kx}, \quad x \in \mathbb{R},$$

(b) $$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} k^n, \quad n \ge 1,$$

(c) $$\sum_{k=1}^{n} k \cos(kx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

2.1.7. Chứng minh rằng nếu $|a_1 \sin x + a|2\sin 2x + \cdots + a_n \sin nx| \leq |\sin x|$ với $x \in \mathbb{R}$ thì $|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1$.

2.1.8. Giả sử rằng f và g khả vi tại a, hãy xác định

(a) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x-a}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x-a}$

2.1.9. Giả sử rằng $f(a) > 0$ và f khả vi tại a. Hãy tính các giới hạn sau:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right)$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)}{f(a)}\right)^{\frac{1}{\ln x - \ln a}}$, $a > 0$.

2.1.10. Cho f khả vi tại a. Hãy tính các giới hạn sau:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{a^n f(x) - x^n f(a)}{x-a}, \quad n \in \mathbb{N},$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)e^x - f(a)}{f(x)\cos x - f(a)}, \quad a = 0,\ f'(0) \neq 0,$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(f\left(a+\frac{1}{n}\right) + f\left(a+\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(a+\frac{k}{n}\right) - kf(a)\right), k \in \mathbb{N},$

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(f\left(a+\frac{1}{n^2}\right) + f\left(a+\frac{2}{n^2}\right) + \cdots + f\left(a+\frac{n}{n^2}\right) - nf(a)\right).$

2.1.11. Với $a > 0$ và $m, k \in \mathbb{N}$ hãy tính

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^m + (n+2)^m + \cdots + (n+k)^m}{n^{m-1}} - kn\right),$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\left(a+\frac{1}{n}\right)^n \left(a+\frac{2}{n}\right)^n \cdots \left(a+\frac{k}{n}\right)^n}{a^{nk}},$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{a}{n^2}\right)\left(1+\frac{2a}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{na}{n^2}\right)\right).$

2.1.12. Giả sử rằng $f(0) = 0$ và f khả vi tại điểm 0. Hãy tính tổng

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(f(x) + f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x}{3}\right) + \cdots + f\left(\frac{x}{k}\right)\right),$$

với k là một số nguyên dương cho trước.

2.1.13. Cho f là hàm khả vi tại điểm a và $\{x_n\}$ và $\{z_n\}$ là các dãy hội tụ tới a sao cho $x_n \neq a$, $z_n \neq a$, $x_n \neq z_n$, $n \in \mathbb{N}$. Hãy chỉ ra hàm f sao cho giới hạn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(z_n)}{x_n - z_n}$$

(a) bằng $f'(a)$,

(b) không tồn tại hoặc có tồn tại nhưng khác $f'(a)$.

2.1.14. Cho f là hàm khả vi tại a và xét hai dãy $\{x_n\}$ và $\{z_n\}$ cùng hội tụ về a sao cho $x_n < a < z_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(z_n)}{x_n - z_n} = f'(a).$$

2.1.15.

(a) Chứng minh rằng hàm f xác định trong khoảng $(0, 2)$ theo công thức

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{với các giá trị } x \text{ hữu tỷ trong khoảng } (0,2), \\ 2x - 1 & \text{với các giá trị } x \text{ vô tỷ trong khoảng } (0,2) \end{cases}$$

chỉ khả vi tại duy nhất điểm $x = 1$ và $f'(1) \neq 0$. Hàm ngược của f có khả vi tại điểm $1 = y = f(1)$ không?

(b) Cho

$$\mathbf{A} = \{y \in (0,3) : y \in \mathbb{Q}, \sqrt{y} \notin \mathbb{Q}\},$$
$$\mathbf{B} = \left\{x : x = \frac{1}{2}(y+4), y \in \mathbf{A}\right\}.$$

Xét hàm

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{với } x \text{ hữu tỷ thuộc } (0,2), \\ 2x - 1 & \text{với } x \text{ vô tỷ thuộc } (0,2), \\ 2x - 4 & \text{với } \quad x \in \mathbf{B}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng khoảng $(0, 3)$ chứa trong miền giá trị của f và hàm ngược của f không khả vi tại điểm 1.

2.1.16. Xét hàm f xác định trên $\mathbb{R}$ sau

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \text{ vô tỉ hoặc bằng } 0, \\ a_q & \text{nếu } x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \text{ và } p, q \text{ nguyên tố cùng nhau,} \end{cases}$$

trong đó dãy $\{a_q\}$ thoả mãn điều kiện $\lim\limits_{n\to\infty} n^k a_n = 0$ với $k \geq 2$. Chứng minh rằng f khả vi tại mọi điều vô tỷ có bậc đại số nhỏ hơn hoặc bằng k, tức là...

2.1.17. Cho P là một đa thức bậc n với n nghiệm thực khác nhau $x_1, \dots, x_n$ và Q là đa thức bậc không quá $n-1$. Chứng minh rằng

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{Q(x_k)}{P'(x_k)(x - x_k)}$$

với $x \in \mathbb{R}\setminus\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Tìm tổng

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{P'(x_k)}, \quad n \geq 2.$$

2.1.18. Sử dụng kết quả bài trước hãy kiểm tra các đẳng thức sau:

(a) $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{x+k} = \frac{n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

với $x \in \mathbb{R}\setminus\{-n, -(n-1), \dots, -1, 0\}$,

(b) $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{x+2k} = \frac{n!2^n}{x(x+2)(x+4)\cdots(x+2n)}$$

với $x \in \mathbb{R}\setminus\{-2n, -2(n-1), \dots, -2, 0\}$.

2.1.19. Cho f khả vi trên $\mathbb{R}$. Hãy khảo sát tính khả vi của hàm $|f|$.

2.1.20. Giả sử $f_1, f_2, \dots, f_n$ xác định trong một lân cận của x, khác 0 và khả vi tại x. Chứng minh rằng

$$\frac{\left(\prod\limits_{k=1}^{n} f_k\right)'}{\prod\limits_{k=1}^{n} f_k}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k'(x)}{f_k(x)}.$$

2.1.21. Giả sử các hàm $f_1, f_2, \dots, f_n$; $g_1, g_2, \dots, g_n$ xác định trong lân cận của x, khác 0 va khả vi tại x. Chứng minh rằng

$$\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{f_k}{g_k}\right)'(x) = \prod_{k=1}^{n} \frac{f_k}{g_k}(x) \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f_k'(x)}{f_k(x)} - \frac{g_k'(x)}{g_k(x)}\right).$$

2.1.22. Nghiên cứu tính khả vi của f và $|f|$ với

(a) $$f(x) = \begin{cases} x & \text{nếu} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ \sin x & \text{nếu} \quad x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$$

(b) $$f(x) = \begin{cases} x - \frac{3}{2^k} & \text{nếu} \quad x \in \mathbb{Q} \cap \left[\frac{1}{2^{k-1}}, \frac{1}{2^{k-2}}\right), \quad k \geq 2, \\ \sin\left(x - \frac{3}{2^k}\right) & \text{nếu} \quad x \in (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \cap \left[\frac{1}{2^{k-1}}, \frac{1}{2^{k-2}}\right), \quad k \geq 2. \end{cases}$$

2.1.23. Chứng minh rằng nếu đạo hàm một phía $f'_-(x_0)$ và $f'_+(x_0)$ tồn tại thì f liên tục tại x_0.

2.1.24. Chứng minh rằng nếu $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ đạt cực đại tại $c \in (a, b)$, tức là $f(c) = \max\{f(x) : x \in (a, b)\}$ và tồn tại các đạo hàm trái và đạo hàm phải $f'_-(c)$ và $f'_+(c)$, thì $f'_-(x_0) \geq 0$ và $f'_+(x_0) \leq 0$. Hãy phát biểu bài toán tương ứng trường hợp f đạt cực tiểu.

2.1.25. Chứng minh rằng nếu $f \in C([a, b])$, $f(a) = f(b)$ và f'_- tồn tại trên (a, b) thì

$$\inf\{f'_-(x) : x \in (a, b)\} \leq 0 \leq \sup\{f'_-(x) : x \in (a, b)\}.$$

2.1.26. Chứng minh rằng nếu $f \in C([a, b])$ và f'_- tồn tại trên (a, b) thì

$$\inf\{f'_-(x) : x \in (a, b)\} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \sup\{f'_-(x) : x \in (a, b)\}.$$

2.1.27. Chứng minh rằng nếu f'_- tồn tại và liên tục trên (a, b) thì f khả vi trên (a, b) và $f'(x) = f'_-(x)$ với $x \in (a, b)$.

2.1.28. Tồn tại hay không hàm $f : (1, 2) \to \mathbb{R}$ sao cho $f'_-(x) = x$ và $f'_+(x) = 2x$ với $x \in (1, 2)$?

2.1.29. Cho f khả vi trên $[a, b]$ thoả mãn

(i) $$f(a) = f(b) = 0,$$

(ii) $$f'(a) = f'_+(a) > 0, \quad f'(b) = f'_-(b) > 0.$$

Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = 0$ và $f'(c) \leq 0$.

2.1.30. Chứng minh rằng $f(x) = \arctan x$ thoả mãn phương trình

$$(1 + x^2)f^{(n)}(x) + 2(n-1)f^{(n-1)}(x) + (n-2)(n-1)f^{(n-2)}(x) = 0$$

với $x \in \mathbb{R}$ và $n \geq 2$. Chứng minh rằng

$$f^{(2m)}(0) = 0, \quad f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m(2m)!.$$

2.1.31. Chứng minh rằng

(a) $$(e^x \sin x)^{(n)} = 2^{n/2}e^x \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right), \quad x \in \mathbb{R},\ n \geq 1,$$

(b) $$(x^n \ln x)^{(n)} = n!\left(\ln x + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right), \quad x > 0,\ n \geq 1,$$

(c) $$\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n n! x^{-n-1}\left(\ln x - 1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{n}\right), x > 0,\ n \geq 1,$$

(d) $$\left(x^{n-1}e^{1/x}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{e^{1/x}}{x^{n+1}}, \quad x \neq 0,\ n \geq 1.$$

2.1.32. Chứng minh các đồng nhất thức sau:

(a) $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) = 2^{n/2} \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right), \quad x \in \mathbb{R},\ n \geq 1$$

(b) $$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\frac{1}{k}\binom{n}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, \quad n \geq 1$$

2.1.33. Cho $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ với $x > 1$. Chứng minh rằng $f^{(n)}(x) > 0$ nếu n lẻ và $f^{(n)} < 0$ với n chẵn.

2.1.34. Cho $f_{2n} = \ln(1 + x^{2n}), \quad n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng

$$f_{2n}^{(2n)}(-1) = 0.$$

2.1.35. Cho P là một đa thức bậc n, chứng minh rằng

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{(k+1)!} x^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{P^{(k)}(x)}{(k+1)!} x^{k+1}.$$

2.1.36. Cho $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ là các giá trị thoả mãn điều kiện

$$\lambda_1^k + \lambda_2^k + \ldots + \lambda_n^k > 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Kho đó hàm

$$f(x) = \frac{1}{(1-\lambda_1 x)(1-\lambda_2 x)\cdots(1-\lambda_n x)}$$

sẽ được xác định trong lân cận 0. Chứng minh rằng với $k \in \mathbb{N}$ ta có $f^{(k)}(0) > 0$.

2.1.37. Cho f là hàm khả vi đến cấp n trên $(0, +\infty)$. Chứng minh rằng với $x > 0$,

$$\frac{1}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^n \left(x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n)}.$$

2.1.38. Cho $\mathbf{I}, \mathbf{J}$ là hai khoảng mở và $f : \mathbf{J} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbf{I} \to \mathbf{J}$ là các hàm khả vi vô hạn trên $\mathbf{J}$ và $\mathbf{I}$. Chứng minh *công thức Faà di Bruno* cho đạo hàm cấp n của $h = f \circ g$ sau:

$$h^{(n)}(t) = \sum \frac{n!}{k_1! \cdots k_n!} f^{(k)}(g(t)) \left(\frac{g^{(1)}(t)}{1!}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{g^{(n)}(t)}{1!}\right)^{k_n},$$

trong đó $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ và tổng lấy trên tất cả các giá trị $k_1, k_2, \dots, k_n$ sao cho $k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n = n$.

2.1.39. Chứng minh rằng các hàm số sau :

(a)
$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{nếu} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{nếu} \quad x = 0, \end{cases}$$

(b)
$$g(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{nếu} \quad x > 0, \\ 0 & \text{nếu} \quad x \leq 0, \end{cases}$$

(c)
$$h(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b}} & \text{nếu} \quad x \in (a,b), \\ 0 & \text{nếu} \quad x \notin (a,b), \end{cases}$$

cùng thuộc $C^\infty(\mathbb{R})$.

2.1.40. Cho f khả vi trên (a, b) sao cho với $x \in (a, b)$ ta có $f'(x) = g(f(x))$, trong đó $g \in C^\infty(a, b)$. Chứng minh rằng $f \in C^\infty(a, b)$.

2.1.41. Cho f là hàm khả vi cấp hai trên (a, b) và với các số α, β, γ thực thoả mãn $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ ta có

$$\alpha f''(x) + \beta f'(x) + \gamma f(x) = 0, \quad x \in (a, b).$$

Chứng minh rằng $f \in C^\infty(a, b)$.

2.2 Các định lý giá trị trung bình

2.2.1. Chứng minh rằng nếu f liên tục trong khoảng đóng $[a, b]$, khả vi trên khoảng mở (a, b) và $f(a) = f(b) = 0$ thì với $\alpha \in \mathbb{R}$, tồn tại $x \in (a, b)$ sao cho

$$\alpha f(x) + f'(x) = 0.$$

2.2.2. Cho f và g là các hàm liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên khoảng mở (a, b) và giả sử $f(a) = f(b) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại $x \in (a, b)$ sao cho

$$g'(x)f(x) + f'(x) = 0.$$

2.2.3. Cho f là hàm liên tục trên $[a, b]$, $a > 0$ và khả vi trên khoảng mở (a, b). Chứng minh rằng nếu

$$\frac{f(a)}{a} = \frac{f(b)}{b},$$

thì tồn tại $x_0 \in (a, b)$ sao cho $x_0 f'(x_0) = f(x_0)$.

2.2.4. Giả sử f liên tục trên $[a, b]$ và khả vi trên (a, b). Chứng minh rằng nếu $f^2(b) - f^2(a) = b^2 - a^2$ thì phương trình

$$f'(x)f(x) = x$$

có ít nhất một nghiệm trong (a, b).

2.2.5. Giả sử f và g liên tục, khác 0 trong $[a, b]$ và khả vi trên (a, b). Chứng minh rằng nếu $f(a)g(b) = f(b)g(a)$ thì tồn tại $x_0 \in (a, b)$ sao cho

$$\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = \frac{g'(x_0)}{g(x_0)}.$$

2.2.6. Giả sử $a_0, a_1, \dots, a_n$ là các số thực thoả mãn

$$\frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2} + a_n = 0.$$

Chứng minh rằng đa thức $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ có ít nhất một nghiệm trong $(0, 1)$.

2.2.7. Xét các số thực $a_0, a_1, \dots, a_n$ thoả mãn

$$\frac{a_0}{1} + \frac{2a_1}{1} + \frac{2^2a_2}{3} \cdots + \frac{2^{n-1}a_{n-1}}{n} + \frac{2^na_n}{n+1} = 0.$$

Chứng minh rằng hàm số

$$f(x) = a_n \ln^n x + \cdots + a_2 \ln^2 x + a_1 \ln x + a_0$$

có ít nhất một nghiệm trong $(1, e^2)$.

2.2.8. Chứng minh rằng nếu mọi nghiệm của đa thức P có bậc $n \geq 2$ đều là thực thì mọi nghiệm của đa thức P' cũng đều là thực.

2.2.9. Cho f khả vi liên tục trên $[a, b]$ và khả vi cấp hai trên (a, b), giả sử $f(a) = f'(a) = f(b) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại $x_1 \in (a, b)$ sao cho $f''(x_1) = 0$.

2.2.10. Cho f khả vi liên tục trên $[a, b]$ và khả vi cấp hai trên (a, b), giả sử $f(a) = f(b)$ và $f'(a) = f'(b) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại hai số $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 \neq x_2$ sao cho

$$f''(x_1) = f''(x_2).$$

2.2.11. Chứng minh rằng các phương trình sau:

(a) $x^{13} + 7x^3 - 5 = 0,$

(b) $3^x + 4^x = 5^x$

có đúng một nghiệm thực .

2.2.12. Chứng minh rằng với các số $a_1, a_2, \dots, a_n$ khác 0 và với các số $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ thoả mãn $\alpha_i \neq \alpha_j$, $i \neq j$, phương trình

$$a_1 x^{\alpha_1} + a_2 x^{\alpha_2} + \cdots + a_n x^{\alpha_n} = 0$$

có nhiều nhất là $n - 1$ nghiệm trong $(0, +\infty)$.

2.2.13. Chứng minh rằng với các giả thiết của bài trên, phương trình

$$a_1 e^{\alpha_1 x} + a_2 e^{\alpha_2 x} + \cdots + a_n e^{\alpha_n x} = 0$$

có nhiều nhất là $n - 1$ nghiệm trong $(0, +\infty)$.

2.2.14. Cho các hàm f, g, h liên tục trên $[a, b]$ và khả vi trên (a, b), ta định nghĩa hàm

$$F(x) = \det \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix}, \quad x \in [a, b].$$

Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in (a, b)$ sao cho $F'(x_0) = 0$. Sử dụng kết quả vừa nhận được phát biểu định lý giá trị trung bình và định lý giá trị trung bình tổng quát.

2.2.15. Cho f liên tục trên $[0, 2]$ và khả vi cấp hai trên $(0, 2)$. Chứng minh rằng nếu $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ và $f(2) = 2$ thì tồn tại $x_0 \in (0, 2)$ sao cho $f''(x_0) = 0$.

2.2.16. Giả sử f liên tục trên $[a, b]$ và khả vi trên (a, b). Chứng minh rằng nếu f không là một hàm tuyến tính thì tồn tại x_1 và x_2 thuộc (a, b) sao cho

$$f'(x_1) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < f'(x_2).$$

2.2.17. Cho f là hàm liên tục trên $[0,1]$ và khả vi trên $(0,1)$. Giả sử rằng $f(0) = f(1) = 0$ và tồn tại $x_0 \in (0,1)$ sao cho $f(x_0) = 1$. Chứng minh rằng $|f'(c)| > 2$ với $c \in (0,1)$.

2.2.18. Cho f liên tục trên $[a,b]$, $a > 0$, khả vi trên (a,b). Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in (a,b)$ sao cho

$$\frac{bf(a) - af(b)}{b-a} = f(x_1) - x_1 f'(x_1).$$

2.2.19. Chứng minh rằng các hàm số $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \ln(1+x^2)$ và $x \mapsto \arctan x$ liên tục đều trên $[0,+\infty)$.

2.2.20. Giả sử f khả vi cấp hai trên (a,b) và tồn tại $M \geq 0$ sao cho $|f''(x)| \leq M$ với mọi $x \in (a,b)$. Chứng minh rằng f liên tục đều trên (a,b).

2.2.21. Giả sử $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $b - a \geq 4$ khả vi trên khoảng mở (a,b). Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in (a,b)$ sao cho

$$f'(x_0) < 1 + f^2(x_0).$$

2.2.22. Chứng minh rằng nếu f khả vi trên (a,b) và nếu

(i) $$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty,$$

(ii) $$f'(x) + f^2(x) + 1 \geq 0, \quad \text{với} \quad x \in (a,b),$$

thì $b - a \geq \pi$.

2.2.23. Cho f liên tục trên $[a,b]$ và khả vi trên (a,b). Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x\to b^-} f'(x) = A$ thì $f'_-(b) = A$.

2.2.24. Giả sử f khả vi trên $(0,\infty)$ và $f'(x) = O(x)$ khi $x \to \infty$. Chứng minh rằng $f(x) = O(x^2)$ khi $x \to \infty$.

2.2.25. Cho $f_1, f_2, \dots, f_n$ và $g_1, g_2, \dots, g_n$ là các hàm liên tục trên $[a,b]$ và khả vi trên (a,b). Giả sử rằng $g_k(a) \neq g_k(b)$ với mọi $k = 1, 2, \dots, n$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho

$$\sum_{k=1}^{n} f'_k(c) = \sum_{k=1}^{n} g'_k(c) \frac{f_k(b) - f_k(a)}{g_k(b) - g_k(a)}.$$

2.2.26. Cho hàm f khả vi trên khoảng mở $\mathbf{I}$ và giả sử $[a, b] \subset \mathbf{I}$. Ta nói rằng f ***khả vi đều trên*** $[a, b]$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| < \varepsilon$$

với mọi $x \in [a, b]$ và $|h| < \delta$, $x + h \in \mathbf{I}$. Chứng minh rằng f khả vi đều trên $[a, b]$ khi và chỉ khi f' liên tục trên $[a, b]$.

2.2.27. Cho f liên tục trên $[a, b]$, g khả vi trên $[a, b]$ và $g(a) = 0$. Chứng minh rằng nếu tồn tại $\lambda \neq 0$ sao cho

$$|g(x)f(x) + \lambda g'(x)| \leq |g(x)|, \quad \text{với} \quad x \in [a, b],$$

thì $g(x) \equiv 0$ trên $[a, b]$.

2.2.28. Cho f khả vi trên $(0, +\infty)$. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ thì $\lim\limits_{x \to +\infty} |f'(x)| = 0$.

2.2.29. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là thoả mãn phương trình hàm

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'\left(x + \frac{1}{2}h\right) \quad \text{với} \quad x, h \in \mathbb{R},\ h \neq 0.$$

(HD. Chứng minh rằng phương trình chỉ có duy nhất nghiệm là một đa thức bậc hai bất kỳ).

2.2.30. Cho các số dương p, q thoả mãn $p + q = 1$, hãy tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn phương trình

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(px + qy) \quad \text{với} \quad x, y \in \mathbb{R},\ x \neq y.$$

2.2.31. Chứng minh rằng nếu f khả vi trên khoảng mở $\mathbf{I}$ thì f' nhận mọi giá trị trung gian trong $\mathbf{I}$.

2.2.32. Cho f khả vi trên $(0, \infty)$. Chứng minh rằng

(a) nếu $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - f'(x)) = 0$ thì $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$,

(b) nếu $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - 2\sqrt{x}f'(x)) = 0$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2.2.33. Chứng minh rằng nếu $f \in C^2([a,b])$ có ít nhất ba nghiệm trong $[a,b]$ thì phương trình $f(x) + f''(x) = 2f'(x)$ có ít nhất một nghiệm trong $[a,b]$.

2.2.34. Chứng minh rằng nếu đa thứcP bậc n có n nghiệm phân biệt lớn hơn 1 thì đa thức

$$Q(x) = (x^2+1)P(x)P'(x) + xP^2(x) + (P'(x))^2$$

có ít nhất $2n-1$ nghiệm phân biệt.

2.2.35. Giả sử rằng đa thức $P(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ với $a_m > 0$ có m nghiệm thực phân biệt. Chứng minh rằng đa thức $Q(x) = (P(x))^2 - P'(x)$ có

(1) đúng $m+1$ nghiệm thực phân biệt nếu m lẻ,

(2) đúng m nghiệm thực phân biệt nếu m chẵn.

2.2.36. Giả sử đa thức $P(x)$ bậc $n \geq 3$ có các nghiệm đều thực, viết

$$P(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n),$$

trong đó $a_i \leq a_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ và

$$P'(x) = n(x-c_1)(x-c_2)\cdots(x-c_{n-1}),$$

trong đó $a_i \leq c_i \leq a_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Chứng minh rằng nếu

$$Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{n-1}),$$
$$Q'(x) = (n-1)(x-d_1)(x-d_2)\cdots(x-d_{n-2}),$$

thì $d_i \geq c_i$ với $i = 1, 2, \ldots, n-2$. Hơn nữa chứng minh rằng nếu

$$R(x) = (x-a_2)(x-a_3)\cdots(x-a_n),$$
$$R'(x) = (n-1)(x-e_1)(x-e_2)\cdots(x-e_{n-2}),$$

thì $e_i \leq c_{i+1}$ với $i = 1, 2, \ldots, n-2$.

2.2.37. Sử dụng giả thiết của bài trên hãy chứng minh rằng

(1) nếu $S(x) = (x - a_1 - \varepsilon)(x - a_2)\dots(x - a_n)$, trong đó $\varepsilon > 0$ thoả mãn $a_1 + \varepsilon \le a_{n-1}$ và nếu $S'(x) = n(x - f_1)(x - f_2)\dots(x - f_{n-1})$ thì $f_{n-1} \ge c_{n-1}$,

(2) nếu $T(x) = (x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n + \varepsilon)$, với $\varepsilon > 0$ thoả mãn $a_n - \varepsilon \le a_2$ và nếu $T'(x) = n(x - g_1)(x - g_2)\dots(x - g_{n-1})$ thì $g_1 \le c_1$.

2.2.38. Sử dụng giả thiết của bài 2.2.36 hãy chứng minh rằng

$$a_i + \frac{a_{i+1} - a_i}{n - i + 1} \le c_i \le a_{i+1} - \frac{a_{i+1} - a_i}{i + 1}, \quad i = 1, 2, \dots, n - 1.$$

2.2.39. Chứng minh rằng nếu f khả vi trên $[0, 1]$ và

(i) $f(0) = 0$,

(ii) tồn tại $K > 0$ sao cho $|f'(x)| \le K|f(x)|$ với $x \in [0, 1]$,

thì $f(x) \equiv 0$.

2.2.40. Cho f là một hàm khả vi vô hạn trên khoảng $(-1, 1)$, $\mathbf{J} \subset (-1, 1)$ là một khoảng có độ dài λ. Giả sử $\mathbf{J}$ được chia thành ba khoảng liên tiếp $\mathbf{J}_1$, $\mathbf{J}_2$, $\mathbf{J}_3$ có độ dài tương ứng là λ_1, λ_2, λ_3, tức là ta có $\mathbf{J}_1 \cup \mathbf{J}_2 \cup \mathbf{J}_3 = \mathbf{J}$ và $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda$. Chứng minh rằng nếu

$$m_k(\mathbf{J}) = \inf\left\{|f^{(k)}(x)| : x \in \mathbf{J}\right\}, \quad k \in \mathbb{N},$$

thì

$$m_k(\mathbf{J}) \le \frac{1}{\lambda_2}(m_{k-1}(\mathbf{J}_1) + m_{k-1}(\mathbf{J}_3)).$$

2.2.41. Chứng minh rằng với giả thiết của bài trước, nếu $|f(x)| \le 1$ với $x \in (-1, 1)$ thì

$$m_k(\mathbf{J}) \le \frac{2^{\frac{k(k+1)}{2}} k^k}{\lambda^k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

2.2.42. Giả sử rằng đa thức $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ có n nghiệm thực phân biệt. Chứng minh rằng nếu tồn tại $p, 1 \le p \le n - 1$ sao cho $a_p = 0$ và $a_i \ne 0$ với mọi $i \ne p$ thì $a_{p-1}a_{p+1} < 0$.

2.3 Công thức Taylor và quy tắc L'Hôpital

2.3.1. Giả sử $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ khả vi cấp $n-1$ trên $[a,b]$. Nếu $f^{(n)}(x_0)$ tồn tại thì với mọi $x \in [a,b]$,

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) &+ \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \\ &+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n). \end{aligned}$$

(Công thức này được gọi là *công thức Taylor với phần dư dạng Peano*).

2.3.2. Giả sử $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục cấp n trên $[a,b]$ và giả sử rằng $f^{(n+1)}$ tồn tại trong khoảng mở (a,b). Chứng minh rằng với mọi $x, x_0 \in [a,b]$ và mọi $p > 0$ tồn tại $\theta \in (0,1)$ sao cho ,

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) &+ \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \\ &+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x), \end{aligned}$$

trong đó

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!p}(1-\theta)^{n+1-p}(x-x_0)^{n+1}$$

được gọi là *phần dư dạng Schlomilch-Roche*.

2.3.3. Sử dụng kết quả trên hãy chứng minh các dạng phần dư sau:

(a) $$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

(dạng Lagrange),

(b) $$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}$$

(dạng Cauchy).

2.3.4. Cho $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi cấp $n+1$ trên $[a,b]$, $x, x_0 \in [a,b]$. Chứng minh *công thức Taylor với phần dư dạng tích phân* sau:

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) &+ \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \\ &+ \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt. \end{aligned}$$

2.3.5. Cho $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi cấp $n+1$ trên $[a,b]$, $x, x_0 \in [a,b]$. Chứng minh công thức Taylor sau:

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) &+ \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \\ &+ \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_{n+1}(x), \end{aligned}$$

trong đó

$$R_{n+1}(x) = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{t_{n+1}}\int_{x_0}^{t_n}\cdots\int_{x_0}^{t_2} f^{(n+1)}(t_1)dt_1\cdots dt_n dt_{n+1}.$$

2.3.6. Chứng minh công thức xấp xỉ sau

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}x^2$$

cho sai số kết quả không vượt quá $\frac{1}{2}|x|^3$ khi $|x| < \frac{1}{2}$.

2.3.7. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

(a) $(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x$ với $\alpha > 1$ hoặc $\alpha < 0$,

(b) $(1+x)^\alpha < 1 + \alpha x$ với $0 < \alpha < 1$,

giả thiết rằng $x > -1$, $x \neq 0$.

2.3.8. Cho các hàm $f, g \in C^2([0,1])$, $g'(x) \neq 0$ với $x \in (0,1)$ thoả mãn $f'(0)g''(0) \neq f''(0)g'(0)$. Với $x \in (0,1)$ xét hàm $\theta(x)$ là một số thoả mãn định lý giá trị trung bình tổng quát, tức là

$$\frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} = \frac{f'(\theta(x))}{g'(\theta(x))}.$$

Hãy tính giới hạn
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\theta(x)}{x}.$$

2.3.9. Cho $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ khả vi cấp $n+1$ trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng với mọi $x\in\mathbb{R}$ tồn tại $\theta\in(0,1)$ sao cho

(a)
$$\begin{aligned}f(x) &= f(0)+xf'(x)-\frac{x^2}{2}f''(x)+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(x)\\ &\quad+(-1)^{n+2}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x),\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}f\left(\frac{x}{1+x}\right) &= f(x)-\frac{x^2}{1+x}f'(x)+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(1+x)^n}\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\\ &\quad+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(1+x)^{n+1}}\frac{f^{(n+1)}\left(\frac{x+\theta x^2}{1+x}\right)}{(1+n)!},\quad x\neq -1.\end{aligned}$$

2.3.10. Cho $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ khả vi cấp $2n+1$ trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng với mọi $x\in\mathbb{R}$ tồn tại $\theta\in(0,1)$ sao cho

$$\begin{aligned}f(x) &= f(0)+\frac{2}{1!}f'\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{2}{3!}f^{(3)}\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^3\\ &\quad+\cdots+\frac{2}{(2n-1)!}f^{(2n-1)}\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1}\\ &\quad+\frac{2}{(2n+1)!}f^{(2n+1)}(\theta x)\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}.\end{aligned}$$

2.3.11. Sử dụng kết quả bài trên hãy chứng minh rằng

$$\ln(1+x)>2\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}\left(\frac{x}{2+x}\right)^{2k+1}$$

với $n=0,1,\ldots$ và $x>0$.

2.3.12. Chứng minh rằng nếu $f''(x)$ tồn tại thì

(a)
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}=f''(x),$$

(b)
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}=f''(x).$$

2.3.13. Chứng minh rằng nếu $f'''(x)$ tồn tại thì

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+3h)-3f(x+2h)+3f(x+h)-f(x)}{h^3}=f'''(x).$$

2.3.14. Cho $x>0$, hãy kiểm tra các bất đẳng thức sau:

(a) $$e^x>\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!},$$

(b) $$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3},$$

(c) $$1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2<\sqrt{1+x}<1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3.$$

2.3.15. Chứng minh rằng nếu tồn tại $f^{(n+1)}(x)$ khác 0 và $\theta(x)$ là giá trị được xác định qua công thức Taylor

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\cdots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta(h)h),$$

thì

$$\lim_{h\to 0}\theta(h)=\frac{1}{n+1}.$$

2.3.16. Giả sử f khả vi trên $[0,1]$ và $f(0)=f(1)=0$. Hơn nữa tồn tại f'' trong $(0,1)$ giới nội, tức là $|f''(x)|\le A$, với mọi $x\in(0,1)$, Chứng minh rằng

$$|f'(x)|\le\frac{A}{2},\quad \text{với}\quad x\in[0,1]$$

2.3.17. Giả sử $f:[-c,c]\to\mathbb{R}$ khả vi cấp hai trên $[-c,c]$ và đặt $M_k=\sup\{f^{(k)}(x):x\in[-c,c]\}$ với $k=0,1,2$. Chứng minh rằng

(a) $$|f'(x)|\le\frac{M_0}{c}+(x^2+c^2)\frac{M_2}{2c}\quad \text{với}\quad x\in[-c,c],$$

(b) $$M_1\le 2\sqrt{M_0M_2}\quad \text{với}\quad c\ge\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}.$$

2.3.18. Cho f khả vi cấp hai trên (a,∞), $a\in\mathbb{R}$, đặt

$$M_k=\sup\{f^{(k)}(x):x\in(0,\infty\}<\infty,\quad k=0,1,2.$$

Chứng minh rằng

$$M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

Hãy chỉ ra trường hợp hàm f làm cho bất đẳng thức trở thành đẳng thức.

2.3.19. Cho f khả vi cấp hai trên $\mathbb{R}$, đặt

$$M_k = \sup\{f^{(k)}(x) : x \in (0, \infty)\} < \infty, \quad k = 0, 1, 2.$$

Chứng minh rằng

$$M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

2.3.20. Cho f khả vi cấp hai trên $\mathbb{R}$, đặt

$$M_k = \sup\{f^{(k)}(x) : x \in (0, \infty)\} < \infty, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, p,\ p \geq 2.$$

Chứng minh rằng

$$M_k \leq 2^{k(p-k)/2} M_0^{1-(k/p)} M_2^{k/p}, \quad k = 1, 2, \ldots, p-1.$$

2.3.21. Giả sử f'' tồn tại và giới nội trong $(0, \infty)$. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ thì $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

2.3.22. Giả sử f khả vi liên tục cấp hai trên $(0, \infty)$, thoả mãn

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0 \quad \text{và} \quad \lim_{x\to+\infty} xf''(x) = 0.$$

Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to+\infty} xf'(x) = 0$.

2.3.23. Giả sử f khả vi liên tục cấp hai trên $(0,1)$ và thoả mãn

(i) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$,

(ii) tồn tại $M > 0$ sao cho $(1-x^2)|f''(x)| \le M$ với $x \in (0,1)$.

Chứng minh rằng $\lim_{x\to 1^-}(1-x)f'(x) = 0$.

2.3.24. Cho f khả vi trên $[a,b]$ và giả sử rằng $f'(a) = f'(b) = 0$. Chứng minh rằng nếu f'' tồn tại trong (a,b) thì tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho

$$|f''(c)| \ge \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

2.3.25. Giả sử $f[-1,1] \to \mathbb{R}$ khả vi cấp ba và biết rằng $f(-1) = f(0) = 0$, $f(1) = 1$ và $f'(0) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (-1,1)$ sao cho $f'''(c) \ge 3$.

2.3.26. Cho f khả vi liên tục cấp n trên $[a,b]$ và đặt

$$Q(t) = \frac{f(x)-f(t)}{x-t}, \quad x,t \in [a,b],\ x \ne t.$$

Chứng minh công thức Taylor dưới dạng sau:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x),$$

với

$$r_n(x) = \frac{Q^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{n+1}.$$

2.3.27. Giả sử rằng $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ khả vi tại 0, các dãy $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ thoả mãn $-1 < x_n < y_n < 1$, $n \in \mathbb{N}$ sao cho $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$. Xét thương

$$D_n = \frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}.$$

Chứng minh rằng

(a) nếu $x_n < 0 < y_n$ thì $\lim_{n\to\infty} D_n = f'(0)$.

(b) nếu $0 < x_n < y_n$ và dãy $\left\{\frac{y_n}{y_n - x_n}\right\}$ giới nội thì $\lim\limits_{n\to\infty} D_n = f'(0)$.

(c) nếu f' tồn tại trong $(-1, 1)$ và liên tục tại 0 thì $\lim\limits_{n\to\infty} D_n = f'(0)$.

(Hãy so sánh với 2.1.13 và 2.1.14.)

2.3.28. Cho $m \in \mathbb{N}$, xét đa thức P sau

$$P(x) = \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m+1}{k} (-1)^k (x-k)^m, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng $P(x) \equiv 0$.

2.3.29. Giả sử rằng $f^{(n+2)}$ liên tục trên $[0, 1]$. Chứng minh rằng tồn tại $\theta \in (0, 1)$ sao cho

$$\begin{aligned} f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}\left(\frac{x}{n+1}\right)}{n!}x^n \\ + \frac{n}{2(n+1)} f^{(n+2)}(\theta x) \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}. \end{aligned}$$

2.3.30. Giả sử rằng $f^{(n+p)}$ tồn tại trong $[a, b]$ và liên tục tại $x_0 \in [a, b]$. Chứng minh rằng nếu $f^{(n+j)}(x_0) = 0$ với $j = 1, 2, \ldots, p-1$, $f^{(n+p)}(x_0) \neq 0$ và

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} \\ + \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta(x)(x - x_0))}{n!}(x - x_0)^n. \end{aligned}$$

thì

$$\lim_{x\to x_0} \theta(x) = \binom{n+p}{n}^{-1/p}.$$

2.3.31. Cho f là hàm khả vi liên tục cấp hai trên $(-1, 1)$ và $f(0) = 0$. Hãy tính giới hạn

$$\lim_{x\to 0^+} \sum_{k=1}^{\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]} f(kx).$$

2.3.32. Cho f khả vi vô hạn trên (a,b). Chứng minh rằng nếu f bằng 0 tại vô hạn điểm trong khoảng đóng $[c,d] \subset (a,b)$ và

$$\sup\{|f^{(n)}(x)| : x \in (a,b)\} = O(n!) \quad \text{khi} \quad n \to \infty$$

thì f bằng không trên một khoảng mở nằm trong (a,b).

2.3.33. Giả sử rằng

(i) f khả vi vô hạn trên $\mathbb{R}$,

(ii) tồn tại $L > 0$ sao cho $|f^{(n)}(x)| \le L$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và mọi $n \in \mathbb{N}$,

(iii) $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ với $n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng $f(x) \equiv 0$ trên $\mathbb{R}$.

2.3.34. Sử dụng quy tắc l'Hôpital để tính các giới hạn sau:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\arctan \frac{x^2-1}{x^2+1}}{x-1}$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right)$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 5} (6-x)^{\frac{1}{x-5}}$,

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x}$,

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$.

2.3.35. Chứng minh rằng với f khả vi liên tục cấp hai trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ và $f''(0) = -1$ thì

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)\right)^x = e^{-a^2/2}, \quad \text{trong đó} \quad a \in \mathbb{R}.$$

2.3.36. Với $a > 0$ và $a \neq 1$ hãy tính

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{a^x - 1}{x(a-1)}\right)^{1/x}.$$

2.3.37. Có thể sử dụng quy tắc l'Hôpital trong những trường hợp sau được không ?

(a) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x-\sin x}{2x+\sin x},$$

(b) $$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+\sin 2+1}{(2x+\sin 2x)(\sin x+3)^2},$$

(c) $$\lim_{x\to 0^+} \left(2\sin\sqrt{x}+\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}\right)^x,$$

(d) $$\lim_{x\to 0} \left(1+xe^{-1/x^2}\sin\frac{1}{x^4}\right)^{e^{1/x^2}}.$$

2.3.38. Hàm
$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x\ln 2}-\frac{1}{2^x-1} & \text{nếu } x\neq 0,\\ \frac{1}{2} & \text{nếu } x=0\end{cases}$$
có khả vi tại điểm 0 không ?

2.3.39. Giả sử f khả vi liên tục cấp n trên $\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$. Chứng minh đẳng thức sau:
$$f^{(n)}(a)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^n}\sum_{k=0}^{n}\left((-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(a+kh)\right).$$

2.3.40. Chứng minh quy tắc l'Hôpital dưới dạng sau:

Giả sử $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$, $-\infty<a<b<+\infty$ là các hàm khả vi trên (a,b), đồng thời thoả mãn điều kiện

(i) $g'(x)\neq 0$ với $x\in(a,b)$,

(ii) $\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=+\infty(-\infty)$,

(iii) $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}=L, \quad -\infty\leq L\leq+\infty.$

Khi đó
$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=L.$$

2.3.41. Sử dụng quy tắc l'Hôpital vừa nêu ở trên hãy chứng minh kết quả tổng quát của 2.2.32 : Cho f khả vi trên $(0,\infty)$ và $a>0$.

(a) Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty}(af(x)+f'(x))=L$, thì $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{L}{a}$.

(b) Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty}(af(x)+2\sqrt{x}f'(x))=L$, thì $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{L}{a}$.

Các kết quả trên có còn đúng đối với trường hợp a âm không ?

2.3.42. Giả sử f khả vi cấp ba trên $(0,\infty)$ sao cho $f(x)>0$, $f'(x)>0$, $f''(x)>0$ với mọi $x>0$. Chứng minh rằng nếu

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)f'''(x)}{(f''(x))^2}=c, \quad c\neq 1,$$

thì

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}=\frac{1}{2-c}.$$

2.3.43. Giả sử rằng f là hàm khả vi vô hạn trên $(-1,1)$ và $f(0)=0$. Chứng minh rằng nếu g được xác định trên $(0,1)\backslash\{0\}$ theo công thức $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ thì tồn tại một mở rộng của g khả vi vô hạn trên $(-1,1)$.

2.4 Hàm lồi

Định nghĩa 1. Một hàm f được gọi là *lồi* trong khoảng $\mathbf{I}\subset\mathbb{R}$ nếu

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leq\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2) \tag{1}$$

trong đó $x_1,x_2\in\mathbf{I}$ và $\lambda\in(0,1)$. Một hàm lồi f được gọi là *lồi chặt* trong $\mathbf{I}$ nếu bất đẳng thức (1) là chặt với $x_1\neq x_2$. f là hàm *lõm* nếu $-f$ là hàm lồi.

Định nghĩa 2. Hàm $f(x)$ được gọi là thoả mãn điều kiện Lipschitz địa phương trên một khoảng mở $\mathbf{I}$ với hằng số Lipschitz $L>0$ nếu với mọi $x,y\in\mathbf{I}$, $x\neq y$ thì $|f(x)-f(y)|\leq L|x-y|$.

2.4.1. Chứng minh rằng f khả vi trên một khoảng mở $\mathbf{I}$ là lồi khi và chỉ khi f' tăng trong $\mathbf{I}$.

2.4.2. Chứng minh rằng f khả vi cấp hai trên một khoảng mở $\mathbf{I}$ là lồi khi và chỉ khi $f''(x)\geq 0$ với mọi $x\in\mathbf{I}$.

2.4.3. Chứng minh rằng nếu f lồi trong khoảng mở **I** thì *bất đẳng thức Jensen*

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) \le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n)$$

đúng với mọi $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{I}$ và mọi bộ số thực dương $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ thoả mãn $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$.

2.4.4. Cho $x, y > 0$ và $p, q > 0$ thoả mãn $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Chứng minh bất đẳng thức

$$xy \le \frac{x^p}{p} + \frac{x^q}{q}.$$

2.4.5. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \ge \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \quad \text{với} \quad x_1, x_2, \ldots, x_n > 0.$$

2.4.6. Chứng minh rằng với $a \ne b$ ta có bất đẳng thức

$$\frac{e^b - d^a}{b - a} < \frac{e^a + e^b}{2}.$$

2.4.7. Chứng minh bất đẳng thức

$$x \ln x + y \ln y \ge (x + y) \ln \frac{x + y}{2}, \quad x \ne y.$$

2.4.8. Cho $\alpha > 1$ và các số dương $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^{\alpha} \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^{\alpha}.$$

2.4.9. Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0, 1)$ và các số dương $p_1, p_2, \ldots, p_n$ thoả mãn $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = 1$. Chứng minh rằng

(a) $$1 + \left(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k\right)^{-1} \le \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1 + x_k}{x_k}\right)^{p_k},$$

(b) $$\frac{1 + \sum\limits_{k=1}^{n} p_k x_k}{1 - \sum\limits_{k=1}^{n} p_k x_k} \le \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1 + x_k}{1 - x_k}\right)^{p_k}.$$

2.4.10. Cho $x = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ với $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0, \pi)$. Chứng minh rằng

(a) $$\prod_{k=1}^{n} \sin x_k \leq (\sin x)^n,$$

(b) $$\prod_{k=1}^{n} \frac{\sin x_k}{x_k} \leq \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n.$$

2.4.11. Chứng minh rằng với $a > 0$ và $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0, 1)$ thoả mãn $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ thì

$$\sum_{k=1}^{n} \left(x_k + \frac{1}{x_k}\right)^a \geq \frac{(n^2+1)^a}{n^{a-1}}.$$

2.4.12. Cho $n \geq 2$, hãy kiểm tra khẳng định sau:

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2^k - 1}{2^{k-1}} \leq \left(2 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n \cdot 2^{n-1}}\right)^n.$$

2.4.13. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

(a) $$\frac{n^2}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} \leq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_1}, \quad x_1, x_2, \ldots, x_n > 0,$$

(b) $$\frac{1}{\frac{\alpha_1}{x_1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{x_n}} \leq x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \leq \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$$

với $\alpha_k, x_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$ thoả mãn $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$.

(c) $$x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} + y_1^{\alpha_1} \cdots y_n^{\alpha_n} \leq (x_1 + y_1)^{\alpha_1} \cdots (x_n + y_n)^{\alpha_n}$$

với $y_k, x_k \geq 0, \alpha_k > 0, k = 1, 2, \ldots, n$ sao cho $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$.

(d) $$\sum_{j=1}^{m} \prod_{i=1}^{n} x_{i,j}^{\alpha_i} \leq \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} x_{i,j}\right)^{\alpha_i}$$

với $, x_{i,j} \geq 0, \alpha_k > 0, i, j = 1, 2, \ldots, n$ sao cho $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$.

2.4.14. Chứng minh rằng nếu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lồi và bị chặn trên thì là hàm hằng trên $\mathbb{R}$.

2.4.15. Liệu một hàm lồi giới nội trên (a, ∞) hoặc trên $(-\infty, a)$ có luôn là hàm hằng không ?

2.4.16. Giả sử rằng $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ lồi trên (a, b) , trong đó $-\infty \leq a, b \leq \infty$. Chứng minh rằng hoặc f đơn điệu trên (a, b) hoặc tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$f(c) = \min\{f(x) : x \in (a, b)\}$$

đồng thời f giảm trong $(a, c]$ và tăng trong $[c, b)$.

2.4.17. Cho $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ lồi trên (a, b), trong đó $-\infty \leq a, b \leq \infty$. Chứng minh rằng các giới hạn

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \quad \text{và} \quad \lim_{x \to b^-} f(x)$$

tồn tại, hữu hạn hoặc vô hạn.

2.4.18. Giả sử $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ lồi và giới nội trên (a, b) , $-\infty \leq a, b \leq \infty$. Chứng minh rằng f liên tục đều trên (a, b). (So sánh với bài 2.4.14).

2.4.19. Giả sử $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ lồi trên (a, b), trong đó $-\infty \leq a, b \leq \infty$. Chứng minh rằng đạo hàm một phía của f tồn tại và đơn điệu trên (a, b). Hơn nữa đạo hàm phải và trái của nó bằng nhau bên ngoài một tập đếm được.

2.4.20. Giả sử f khả vi cấp hai trên $\mathbb{R}$ và f, f', f'' tăng chặt trên $\mathbb{R}$. Với a, b cho trước, $a \leq b$ cho $x \to \xi(x), x > 0$ xác định qua định lý giá trị trung bình, tức là

$$\frac{f(b + x) - f(a - x)}{b - a + 2x} = f'(\xi).$$

Chứng minh rằng hàm ξ tăng trên $(0, \infty)$.

2.4.21. Sử dụng kết quả bài 2.4.4 chứng minh *bất đẳng thức Holder*: Cho $p, q > 1$ thoả mãn $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q}.$$

2.4.22. Sử dụng bất đẳng thức Holder chứng minh *bất đẳng thức Mikowski* sau: Nếu $p > 1$ thì

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p}.$$

2.4.23. Chứng minh rằng nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^4$ hội tụ thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{4/5}}$ hội tụ.

2.4.24. Cho $x_i, y_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ và $p > 1$. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$((x_1 + \cdots + x_n)^p + (y_1 + \cdots + y_n)^p)^{1/p} \leq (x_1^p + y_1^p)^{1/p} + \cdots + (x_n^p + y_n^p)^{1/p}.$$

2.4.25. Chứng minh bất đẳng thức Minkowski tổng quát sau: Cho $x_{i,j} \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$ và $p > 1$, chứng minh rằng

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} x_{i,j}\right)^p\right)^{1/p} \leq \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{i,j}^p\right)^{1/p}.$$

2.4.26. Giả sử hàm liên tục f trên khoảng $\mathbf{I}$ là *lồi trung bình* tức là

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} \quad \text{với} \quad x, y \in \mathbf{I}.$$

Chứng minh rằng f lồi trên $\mathbf{I}$.

2.4.27. Chứng minh rằng điều kiện liên tục trong bài 2.4.26 là không thể bỏ được. (Hãy chỉ ra phản ví dụ).

2.4.28. Cho f liên tục trên $\mathbf{I}$ sao cho

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

với $x, y \in \mathbf{I}$, $x \neq y$. Chứng minh rằng f lồi chặt trên $\mathbf{I}$.

2.4.29. Giả sử f lồi trong khoảng mở $\mathbf{I}$. Chứng minh rằng f thoả mãn điều kiện Lipschitz địa phương trên $\mathbf{I}$.

2.4.30. Cho $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ lồi, đặt

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0.$$

Chứng minh rằng hàm $f \mapsto \frac{f(x)}{x}$ tăng trên $(0, \infty)$.

2.4.31. Ta nói rằng hàm f ***dưới cộng tính*** trên $(0, \infty)$ nếu với $x_1, x_2 \in (0, \infty)$,

$$f(x_1, x_2) \leq f(x_1) + f(x_2).$$

Chứng minh rằng

(a) nếu $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ giảm trên $(0, \infty)$ thì f dưới cộng tính.

(b) nếu f lồi và dưới cộng tính trên $(0, \infty)$ thì hàm $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ là hàm giảm trên khoảng đó.

2.4.32. Giả sử f khả vi trên (a, b) và với mọi $x, y \in (a, b)$, $x \neq y$, tồn tại duy nhất ζ sao cho

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\zeta).$$

Chứng minh rằng f lồi chặt hoặc lõm chặt trên (a, b).

2.4.33. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục và thoả mãn điều kiện với mỗi $d \in \mathbb{R}$, hàm $g_d(x) = f(x + d) - f(x)$ thuộc lớp $C^\infty(\mathbb{R})$. Chứng minh rằng f thuộc $C^\infty(\mathbb{R})$.

2.4.34. Giả sử $a_n \leq \ldots \leq a_2 \leq a_1$ và f lồi trên đoạn $[a_n, a_1]$. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^{n} f(a_{k+1})a_k \leq \sum_{k=1}^{n} f(a_k)a_{k+1},$$

trong đó $a_{n+1} = a_1$.

2.4.35. Giả sử rằng f lõm và tăng chặt trên một khoảng (a, b), $-\infty \leq a, b \leq \infty$. Chứng minh rằng nếu $a < f(x) < x$ với $x \in (a, b)$ và

$$\lim_{x \to a^+} f'_+(x) = 1,$$

thì với $x, y \in (a, b)$ ta có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{n+1}(x) - f^n(x)}{f^{n+1}(y) - f^n(y)} = 1,$$

trong đó f^n là thành phần lặp thứ n của f (xem 1.1.40).

2.5 Các ứng dụng của đạo hàm

2.5.1. Sử dụng định lý giá trị trung bình tổng quát hãy chứng minh

(a) $$1 - \frac{x^2}{2!} < \cos x, \quad \text{với} \quad x \neq 0,$$

(b) $$x - \frac{x^3}{3!} < \sin x, \quad \text{với} \quad x > 0,$$

(c) $$\cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}, \quad \text{với} \quad x \neq 0,$$

(d) $$\sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}, \quad \text{với} \quad x > 0.$$

2.5.2. Cho $n \in \mathbb{N}$ và $x > 0$ hãy kiểm tra các khẳng định sau:

(a) $$\begin{aligned} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{x^{4n-3}}{(4n-3)!} - \frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!} &< \sin x \\ &< x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{x^{4n-3}}{(4n-3)!} - \frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!} + \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}, \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{x^{4n-4}}{(4n-4)!} - \frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!} &< \cos x \\ &< 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{x^{4n-4}}{(4n-4)!} - \frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!} + \frac{x^{4n}}{(4n)!}. \end{aligned}$$

2.5.3. Cho f liên tục trên $[a, b]$ và khả vi trên khoảng mở (a, b). Chứng minh rằng nếu $a \geq 0$ thì tồn tại $x_1, x_2, x_3 \in (a, b)$ sao cho

$$f'(x_1) = (b + a)\frac{f'(x_2)}{2x_2} = (b^2 + ab + a^2)\frac{f'(x_3)}{3x_3^2}.$$

2.5.4. Chứng minh kết quả tổng quát của 2.2.32: Cho f là một hàm biến phức trên $(0,\infty)$ và α là một số phức có phần thực dương. Chứng minh rằng nếu f khả vi và $\lim\limits_{x\to+\infty}(\alpha f(x)+f'(x))=0$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

2.5.5. Cho f khả vi cấp hai trên $(0,\infty)$. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x)+f''(x))=L$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$.

2.5.6. Cho f khả vi cấp ba trên $(0,\infty)$. Liệu từ sự tồn tại của giới hạn

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x)+f''(x)+f'''(x))$$

có suy ra sự tồn tại của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ không ?

2.5.7.

(a) Giả sử f khả vi liên tục trên $(0,\infty)$ và cho $f(0)=1$. Chứng minh rằng nếu $|f(x)|\le e^{-x}$ với $x\ge 0$ thì tồn tại $x_0>0$ sao cho $f'(x_0)=-e^{-x_0}$.

(b) Giả sử f khả vi liên tục trên $(1,\infty)$ và cho $f(1)=1$. Chứng minh rằng nếu $|f(x)|\le \frac{1}{x}$ với $x\ge 1$ thì tồn tại $x_0>1$ sao cho $f'(x_0)=-\frac{1}{x_0^2}$.

2.5.8. Giả sử rằng f và g khả vi trên $[0,a]$ thoả mãn $f(0)=g(0)=0$, và $g(x)>0$, $g'(x)>0$ với mọi $x\in(0,a]$. Chứng minh rằng nếu $\frac{f'}{g'}$ tăng trong $(0,a]$ thì $\frac{f}{g}$ cũng tăng trong $(0,a]$.

2.5.9. Chứng minh rằng các phương trình

$$\sin(\cos x)=x \quad \text{và} \quad \cos(\sin x)=x$$

có duy nhất nghiệm trong $[0,\pi/2]$. Hơn nữa chứng minh rằng nếu x_1 và x_2 lần lượt là nghiệm của hai phương trình trên thì $x_1<x_2$.

2.5.10. Chứng minh rằng nếu f khả vi trên $[a,b]$, $f(a)=0$ và tồn tại hằng số $C\ge 0$ sao cho $|f'(x)|\le C|f(x)|$ với mọi $x\in[a,b]$ thì $f(x)\equiv 0$.

2.5.11. Sử dụng định lý giá trị trung bình chứng minh rằng với $0 < p < q$ ta có

$$\left(1+\frac{x}{p}\right)^p < \left(1+\frac{x}{q}\right)^q,$$

với $x > 0$.

2.5.12. Chứng minh rằng $e^x \geq 1 + x$ với $x \in \mathbb{R}$. Sử dụng kết quả đó chứng minh bất đẳng thức liên hệ giữa trung bình cộng và trung bình nhân.

2.5.13. Chứng minh rằng

$$xy \leq e^x + y(\ln y - 1)$$

với $x \in \mathbb{R}$ và $y > 0$. Chứng minh rằng dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $y = e^x$.

2.5.14. Giả sử $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ thuộc lớp $C^2(\mathbb{R})$ và $(f(0))^2 + (f'(0))^2 = 4$. Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_0) + f'(x_0) = 0$.

2.5.15. Kiểm tra các bất đẳng thức sau:

(a) $\left(x+\frac{1}{x}\right)\arctan x > 1$ với $x > 0$,

(b) $2\tan x - \sinh x > 0$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$,

(c) $\ln x < \frac{x}{e}$ với $x > 0$, $x \neq e$,

(d) $\frac{x\ln x}{x^2-1} < \frac{1}{2}$ với $x > 0$, $x \neq 1$.

2.5.16. So sánh các số sau:

(a) e^π hay π^e,

(b) $2^{\sqrt{2}}$ hay e,

(c) $\ln 8$ hay 2.

2.5.17. Kiểm tra các khẳng định sau:

(a) $$\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)\ln\left(1+\frac{b}{x}\right)<\frac{b}{a},\quad a,b,x>0,$$

(b) $$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m\left(1+\frac{x}{m}\right)^m<1,\quad x\in\mathbb{R}\backslash\{0\},m,n\in\mathbb{N},m,n\geq|x|,$$

(c) $$\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)<\frac{1}{x}+\ln x,\quad x>0.$$

2.5.18. Cho $x>0$ hãy kiểm tra các bất đẳng thức sau:

(a) $$\ln(1+x)<\frac{x}{\sqrt{1+x}},$$

(b) $$(1-x)^2\geq x\ln^2 x.$$

2.5.19. Chứng minh rằng

(a) $$x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}<(x+1)\ln(1+x)<x+\frac{x^2}{2},\quad \text{với}\quad x>0$$

(b) $$\ln(1+\cos x)<\ln 2-\frac{x^2}{4},\quad \text{với}\quad x\in(0,\pi).$$

2.5.20. Cho $x>0$, chứng minh các bất đẳng thức sau:

(a) $e^x<1+xe^x$, (b) $e^x-1-x<x^2e^x$,

(c) $xe^{x/2}<e^x-1$, (d) $e^x<(1+x)^{1+x}$,

(e) $$\left(\frac{x+1}{2}\right)^{x+1}\leq x^x.$$

2.5.21. Chứng minh rằng $(e+x)^{e-x}>(e-x)^{e+x}$ với $x\in(0,e)$.

2.5.22. Chứng minh rằng nếu $x>1$ thì $e^{x-1}+\ln x- +1>0$.

2.5.23. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

(a) $$\frac{1}{2}\tan x+\frac{2}{3}\sin x>x,\quad \text{với}\quad 0<x<\frac{\pi}{2},$$

(b) $$x(2+\cos x)>3\sin x,\quad \text{với}\quad x>0,$$

(c) $$\cos x<\frac{\sin^2 x}{x^2}\quad \text{với}\quad 0<x<\frac{\pi}{2}.$$

2.5.24. Chứng minh rằng nếu $\alpha > 1$ thì với $0 \le x \le 1$ ta có

$$\frac{1}{2^{\alpha-1}} \le x^\alpha + (1-x)^\alpha \le 1.$$

2.5.25. Chứng minh bất đẳng thức sau biết $0 < \alpha < 1$ và $x, y > 0$:

$$(x+y)^\alpha < x^\alpha + y^\alpha.$$

2.5.26. Cho $\alpha \in (0,1)$ và $x \in [-1,1]$, chứng minh rằng

$$(1+x)^\alpha \le 1 + \alpha x - \frac{\alpha(\alpha-1)}{8}x^2.$$

2.5.27. Chứng minh kết quả tổng quát của bài trên: Cho $B \ge 0$ và $x \in (-1, B]$, chứng minh rằng:

(a) $$(1+x)^\alpha \le 1 + \alpha x - \frac{\alpha(1-\alpha)}{2(1+B)^2}x^2 \quad \text{với} \quad 0 < \alpha < 1,$$

(b) $$(1+x)^\alpha \ge 1 + \alpha x - \frac{\alpha(1-\alpha)}{2(1+B)^2}x^2 \quad \text{với} \quad 1 < \alpha < 2.$$

2.5.28. Chứng minh rằng

(a) $$\sin x \ge \frac{2}{\pi}x, \quad \text{với} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

(b) $$\sin x \ge \frac{2}{\pi}x + \frac{x}{\pi^3}(\pi^2 - 4x^2), \quad \text{với} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

2.5.29. Chứng minh rằng với $x \in (0,1)$ ta có

$$\pi x(1-x) < \sin x \le 4x(1-x).$$

2.5.30. Chứng minh rằng với x dương và n nguyên dương ta có

$$e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} < \frac{x}{n}(e^x - 1).$$

2.5.31. Cho n nguyên dương. Hãy tìm các cực trị địa phương của hàm

$$f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x}.$$

2.5.32. Cho m và n nguyên dương, tìm các cực trị địa phương của

$$f(x) = x^m(1-x)^n.$$

2.5.33. Cho m, n nguyên dương, tìm giá trị lớn nhất của

$$f(x) = \sin^{2m} x \cdot \cos^{2n} x.$$

2.5.34. Tìm các cực trị địa phương của hàm $f(x) = x^{1/3}(1-x)^{2/3}$.

2.5.35. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm

$$f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

trên $[-1, 1]$.

2.5.36. Tìm giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$ của

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|1-x|}.$$

2.5.37. Cho các số không âm $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

(a) $$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k e^{-a_k} \le \frac{1}{e},$$

(b) $$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 e^{-a_k} \le \frac{4}{e^2},$$

(c) $$\prod_{k=1}^{n} a_k \le \left(\frac{3}{e}\right)^n \exp\left\{\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} a_k\right\}.$$

2.5.38. Tìm các cực trị địa phương của hàm

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/|x|}\left(\sqrt{2} + \sin \frac{1}{x}\right) & \text{với} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{với} \quad x = 0. \end{cases}$$

2.5.39. Cho

$$f(x) = \begin{cases} x^4\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right) & \text{với} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{với} \quad x = 0. \end{cases}$$

Chứng minh rằng f khả vi trên $\mathbb{R}$ và tại 0 f đạt giá trị lớn nhất tuyệt đối nhưng f không đơn điệu trong bất kỳ khoảng $(-\varepsilon, 0)$ hay $(0, \varepsilon)$ nào.

2.5.40. Cho $x > 0$, chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{\sinh x}{\sqrt{\sinh^2 x + \cosh^2 x}} < \tanh x < x < \sinh x < \frac{1}{2}\sinh 2x.$$

2.5.41. Sử dụng kết quả bài trên chứng minh rằng với a, b dương và $a \neq b$ thì

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} < \sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln b - \ln a} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Số $L(a,b) = \frac{b-a}{\ln b - \ln a}$ được gọi là ***trung bình lôga*** của a và b. (Quy ước rằng $L(a,a) = a$.)

2.5.42. Đại lượng ***trung bình mũ*** của hai số dương x và y là

$$M_p(x,y) = \left(\frac{x^p + y^p}{2}\right)^{1/p} \quad \text{với} \quad p \neq 0.$$

(a) Chứng minh rằng

$$\lim_{p \to 0} M_p(x,y) = \sqrt{xy}.$$

(Từ đó có thể quy ước $M_0(x,y) = \sqrt{xy}$.)

(b) Chứng minh rằng nếu $x \neq y$ và $p < q$ thì $M_p(x,y) < M_q(x,y)$.

2.5.43. Cho $\lambda \geq 1$, các số dương x, y và số n nguyên dương, chứng minh rằng

$$\sqrt{xy} \leq \sqrt[n]{\frac{x^n + y^n + \lambda((x+y)^n - x^n - y^n)}{2 + \lambda(2^n - 2)}} \leq \frac{x+y}{2}.$$

2.5.44. Chứng minh rằng

(a) $$\sin(\tan x) \geq x \quad \text{với} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right],$$

(b) $$\tan(\sin x) \geq x \quad \text{với} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right].$$

2.5.45. Chứng minh rằng với $x \in (0, \pi/2]$ ta có

$$\frac{1}{\sin^2 x} \leq \frac{1}{x^2} + 1 - \frac{4}{\pi^2}.$$

2.5.46. Cho $x > 0$ chứng minh rằng

$$\arctan x > \frac{3x}{1 + 2\sqrt{1 + x^2}}.$$

2.5.47. Cho$a_k, b_k, k = 1, 2, \ldots, n$ dương. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$\prod_{k=1}^{n}(xa_k + (1-x)b_k) \leq \max\left\{\prod_{k=1}^{n} a_k, \prod_{k=1}^{n} b_k\right\}$$

đúng với $x \in [0, 1]$ khi và chỉ khi

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k - b_k}{a_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k - b_k}{b_k}\right) \geq 0.$$

2.5.48. Sử dụng kết quả bài 2.5.1 chứng minh rằng

$$\cos x + \cos y \leq 1 + \cos(xy) \quad \text{với} \quad x^2 + y^2 \leq \pi.$$

2.5.49. Cho x, y dương, chứng minh rằng $\quad x^y + y^x > 1.$

2.5.50. Cho $n \geq 2$ nguyên dương, chứng minh rằng nếu $0 < x < \frac{n}{n+1}$ thì

$$(1 - 2x^n + x^{n+1})^n < (1 - x^n)^{n+1}.$$

2.5.51. Cho hàm

$$f(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\sin\frac{1}{x} \quad \text{với} \quad x > 0.$$

Chứng minh rằng với các giá trị $y, x > 0$ thoả mãn $y + z < 1$ ta có $f(y + z) < f(y) + f(z)$.

2.5.52. Chứng minh bất đẳng thức

$$\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leq\frac{n}{4}.$$

2.5.53. Giả sử $f\in C^2([a,b])$, $f(a)f(b)<0$ và f' và f'' không đổi dấu trên $[a,b]$. Chứng minh rằng dãy truy hồi

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\quad n=0,1,2,\dots,$$

trong đó đặt $x_0=b$ nếu f' và f'' cùng dấu, $x_0=a$ nếu f' và f'' trái dấu sẽ hội tụ về nghiệm duy nhất của phương trình $f(x)=0$ trên (a,b). (Phương pháp này được gọi là *phương pháp xấp xỉ nghiệm của Newton*.)

2.5.54. Sử dụng các giả thiết của bài toán trên chứng minh rằng nếu $M=\max\{|f''(x)|:x\in[a,b]\}$ và $m=\min\{|f'(x):x\in[a,b]\}$ thì

$$|x_{n+1}-\xi|\leq\frac{M}{2m}(x_n-\xi)^2,\quad n=0,1,2,\dots,$$

trong đó ξ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x)=0$.

2.5.55. Tìm $\sup\left\{2^{-x}+2^{-1/x}:x>0\right\}$.

2.5.56. Cho f khả vi vô hạn trên $(0,1)$, giả sử rằng với mỗi $x\in[0,1]$ tồn tại $n(x)$ sao cho $f^{(n(x))}(x)=0$. Chứng minh rằng trên đoạn $[0,1]$ f sẽ đồng nhất với một đa thức.

2.5.57. Chỉ ra ví dụ để chứng tỏ rằng giả thiết khả vi vô hạn trên $[0,1]$ trong bài tập trên là cần thiết. Chứng minh rằng nếu

$$\lim_{n\to\infty}f^{(n)}(x)=0$$

với mỗi $x\in[0,1]$ thì ta không thể suy ra kết luận trong bài 2.5.56.

2.6 Khả vi mạnh và khả vi theo nghĩa Schwarz

Định nghĩa 1. Một hàm thực xác định trên tập mở $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ được gọi là *khả vi mạnh* tại điểm $a \in \mathbf{A}$ nếu

$$\lim_{\substack{(x_1,x_2)\to(a,a)\\ x_1\neq x_2}} \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = f^*(a)$$

tồn tại hữu hạn. $f^*(a)$ được gọi là *đạo hàm mạnh* của f tại a.

Định nghĩa 2. Một hàm thực f xác định trên tập mở $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ được gọi là *khả vi theo nghĩa Schwarz* tại $a \in \mathbf{A}$ nếu giới hạn

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = f^s(a)$$

tồn tại hữu hạn, $f^s(a)$ được gọi là *đạo hàm theo nghĩa Schwarz* hay nói gọn lại là *đạo hàm Schwarz* của f tại điểm a.

Định nghĩa 3. *Đạo hàm mạnh trên (tương ứng dưới)* của f tại a được xác định bằng cách thay thế lim trong định nghĩa 1 bằng $\overline{\lim}$ (tương ứng $\underline{\lim}$), ký hiệu là $D^*f(a)$ (tương ứng $D_*f(a)$). *Đạo hàm Schwarz trên và dưới* của f tại a được xác định bằng cách thay thế tương tự. Ta ký hiệu chúng là $D^sf(a)$ và $D_sf(a)$.

2.6.1. Chứng minh rằng nếu f khả vi mạnh tại a thì nó khả vi tại a và $f^*(a) = f'(a)$. Hãy chỉ ra phản ví dụ để chứng tỏ điều ngược lại không đúng.

2.6.2. Cho $f : \mathbf{A} \to \mathbb{R}$ và ký hiệu $\mathbf{A}^1$, $\mathbf{A}^*$ là tập các điểm mà tại đó f khả vi và khả vi mạnh. Chứng minh rằng nếu $a \in \mathbf{A}^*$ là một điểm giới hạn của $\mathbf{A}^*$ thì

$$\lim_{\substack{x\to\mathbf{A}\\ x\in\mathbf{A}^*}} f^*(x) = \lim_{\substack{x\to\mathbf{A}\\ x\in\mathbf{A}^1}} f'(x) = f^*(a) = f'(a).$$

2.6.3. Chứng minh rằng mọi hàm khả vi liên tục tại a thì khả vi mạnh tại a.

2.6.4. Từ tính khả vi mạnh của f tại a có suy ra được tính liên tục của f' tại điểm đó không ?

2.6.5. Cho tập mở $\mathbf{G} \subset \mathbf{A}$. Chứng minh rằng f khả vi mạnh trên $\mathbf{G}$ khi và chỉ khi đạo hàm f' liên tục trên $\mathbf{G}$.

2.6.6. Chứng minh rằng nếu f khả vi trên $\mathbb{R}$ thì nó khả vi mạnh trong một tập *thặng dư*, tức là trong tập $\mathbb{R}\backslash\mathbf{B}$ trong đó $\mathbf{B}$ là một tập thuộc phạm trù thứ nhất trên $\mathbb{R}$. (xem 1.7.20)

2.6.7. Giả sử f liên tục trên $[a, b]$ và tồn tại đạo hàm Schwarz f^s trong một khoảng mở (a, b). Chứng minh rằng nếu $f(b) > f(a)$ thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f^s(c) \geq 0$.

2.6.8. Giả sử f liên tục trên $[a, b]$ và $f(a) = f(b) = 0$. Chứng minh rằng nếu f khả vi Schwarz trên một khoảng mở (a, b) thì tồn tại $x_1, x_2 \in (a, b)$ sao cho $f^s(x_1) \geq 0$ và $f^s(x_2) \leq 0$.

2.6.9. Cho f liên tục trên $[a, b]$ và khả vi Schwarz trên khoảng mở (a, b). Chứng minh rằng tồn tại $x_1, x_2 \in (a, b)$ sao cho

$$f^s(x_2) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f^s(x_1).$$

2.6.10. Giả sử rằng f liên tục và khả vi Schwarz trên (a, b). Chứng minh rằng nếu đạo hàm Schwarz f^s giới nội trên (a, b) thì f thoả mãn điều kiện Lipschitz trong khoảng này.

2.6.11. Giả sử f và f^s liên tục trên (a, b). Chứng minh rằng f khả vi và $f'(x) = f^s(x)$ với mọi $x \in (a, b)$.

2.6.12. Giả sử rằng f liên tục và khả vi Schwarz trên một khoảng mở $\mathbf{I}$. Chứng minh rằng nếu $f^s \geq 0$ tại điểm $x \in \mathbf{I}$ thì f tăng trên $\mathbf{I}$.

2.6.13. Giả sử rằng f liên tục và khả vi Schwarz trên một khoảng mở $\mathbf{I}$. Chứng minh rằng nếu $f^s(x) = 0$ tại $x \in \mathbf{I}$ thì f là hàm hằng trên $\mathbf{I}$.

2.6.14. Cho f khả vi Schwarz trên (a, b) , xét $x_0 \in (a, b)$ là cực trị địa phương của f, hỏi đạo hàm Schwarz của f có bằng 0 tại x_0 không ?

2.6.15. Ta nói hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ có ***tính chất Baire*** nếu tồn tại một tập thặng dư $\mathbf{S} \subset \mathbb{R}$ để f liên tục trên đó. Chứng minh rằng nếu f có tính chất Baire thì tồn tại một tập thặng dư $\mathbf{B}$ sao cho với mọi $x \in \mathbf{B}$,

$$D_s f(x) = D_* f(x) \quad \text{và} \quad D^s f(x) = D^* f(x).$$

2.6.16. Chứng minh rằng nếu f có tính chất Baire và khả vi Schwarz trên $\mathbb{R}$ thì f khả vi mạnh trên một tập thặng dư.

2.6.17. Cho f khả vi Schwarz trên một khoảng mở $\mathbf{I}$ và xét $[a, b] \subset \mathbf{I}$, ta nói rằng f ***khả vi Schwarz đều*** trên $[a, b]$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho với $|h| < \delta$,

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - f^s(x) \right| < \varepsilon,$$

với $x \in [a, b]$ và $x + h, x - h \in \mathbf{I}$. Giả sử f khả vi Schwarz trên $\mathbf{I}$ và $[a, b] \subset \mathbf{I}$. Chứng minh rằng nếu tồn tại $x_0 \in (a, b)$ sao cho $\lim\limits_{h \to 0} |f(x_0 + h)| = +\infty$ và tồn tại x_1 sao cho f bị chặn trong $[x_1, x_0)$, thì f không khả vi Schwarz đều trên $[a, b]$.

2.6.18. Giả sử f liên tục trên $\mathbf{I}$ chứa $[a, b]$. Chứng minh rằng f khả vi Schwarz đều trên $[a, b]$ khi và chỉ khi f^s liên tục trên $[a, b]$.

2.6.19. Hãy chỉ ra phản ví dụ để chứng tỏ rằng giả thiết liên tục của hàm f ở bài tập trên là cần thiết.

2.6.20. Chứng minh rằng một hàm bị chặn địa phương trên khoảng mở $\mathbf{I}$ f sẽ khả vi Schwarz đều trên mọi đoạn $[a, b] \subset \mathbf{I}$ khi và chỉ khi f' liên tục trên $\mathbf{I}$.

Chương 3

Dãy và chuỗi hàm

3.1 Dãy hàm và sự hội tụ đều

Chúng ta nhắc lại định nghĩa sau.

ĐỊNH NGHĨA. Chúng ta nói rằng dãy hàm $\{f_n\}$ *hội tụ đều* về hàm f trên $\mathbf{A}$ nếu với mỗi số $\varepsilon > 0$ có một số $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n \geq n_0$ bất đẳng thức $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ thoả mãn với mọi $x \in \mathbf{A}$. Chúng ta ký hiệu là $f_n \underset{\mathbf{A}}{\rightrightarrows} f$.

3.1.1. Chứng minh rằng dãy hàm $\{f_n\}$ xác định trên $\mathbf{A}$ là hội tụ đều trên $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ về hàm $f : \mathbf{B} \to \mathbb{R}$ nếu và chỉ nếu dãy số $\{d_n\}$, với

$$d_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in \mathbf{B}\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

hội tụ về 0.

3.1.2. Giả sử $f_n \underset{\mathbf{A}}{\rightrightarrows} f$ và $g_n \underset{\mathbf{A}}{\rightrightarrows} g$. Chứng minh rằng $f_n + g_n \underset{\mathbf{A}}{\rightrightarrows} f + g$. Khẳng định $f_n \cdot g_n \underset{\mathbf{A}}{\rightrightarrows} f \cdot g$ có đúng không?

3.1.3. Giả sử $f_n \underset{\mathbf{A}}{\rightrightarrows} f$, $g_n \underset{\mathbf{A}}{\rightrightarrows} g$, và tồn tại số $M > 0$ sao cho $|f(x)| < M$ và $|g(x)| < M$ với mọi $x \in \mathbf{A}$. Chứng minh rằng $f_n \cdot g_n \underset{\mathbf{A}}{\rightrightarrows} f \cdot g$.

3.1.4. Cho $\{a_n\}$ là dãy số thực hội tụ, và $\{f_n\}$ là dãy hàm thoả mãn

$$\sup\{|f_n(x) - f_m(x)| : x \in \mathbf{A}\} \leq |a_n - a_m|, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh rằng dãy hàm $\{f_n\}$ hội tụ đều trên $\mathbf{A}$.

3.1.5. Chứng minh rằng hàm giới hạn của một dãy hàm bị chặn hội tụ đều trên $\mathbf{A}$ là một hàm bị chặn. Khẳng định này có đúng trong trường hợp hội tụ điểm không?

3.1.6. Chứng minh rằng dãy hàm $\{f_n\}$, với

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x}{n} & \text{nếu } n \text{ chẵn}, \\ \frac{1}{n} & \text{nếu } n \text{ lẻ}. \end{cases}$$

hội tụ điểm nhưng không hội tụ đều trên $\mathbb{R}$. Hãy tìm dãy con hội tụ đều.

3.1.7. Chứng minh *tiêu chuẩn Cauchy cho sự hội tụ đều*.
Dãy hàm $\{f_n\}$, xác định trên $\mathbf{A}$, hội tụ đều trên $\mathbf{A}$ nếu và chỉ nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại số $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $m > n_0$ bất đẳng thức $|f_{n+m}(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ thoả mãn với mọi $n \in \mathbb{N}$ và với mọi $x \in \mathbf{A}$.

3.1.8. Xét sự hội tụ đều trên đoạn $[0, 1]$ của các dãy hàm cho bởi các công thức sau

(a) $$f_n(x) = \frac{1}{1 + (nx - 1)^2},$$

(b) $$f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (nx - 1)^2},$$

(c) $$f_n(x) = x^n(1 - x),$$

(d) $$f_n(x) = nx^n(1 - x),$$

(e) $$f_n(x) = n^3x^n(1 - x)^4,$$

(f) $$f_n(x) = \frac{nx^2}{1 + nx},$$

(g) $$f_n(x) = \frac{1}{1 + x^n}.$$

3.1.9. Xét sự hội tụ đều trên $\mathbf{A}$ và $\mathbf{B}$ của các dãy hàm khi

(a) $$f_n(x) = \cos^n x(1 - \cos^n x), \quad \mathbf{A} = [0, \pi/2], \mathbf{B} = [\pi/4, \pi/2],$$

(b) $$f_n(x) = \cos^n x \sin^{2n} x, \quad \mathbf{A} = \mathbb{R}, \mathbf{B} = [0, \pi/4].$$

3.1.10. Xác định dãy hàm $\{f_n\}$ hội tụ đều trên $\mathbf{A}$ hay không với

(a) $$f_n(x) = \arctan\frac{2x}{x^2+n^3}, \quad \mathbf{A} = \mathbb{R},$$

(b) $$f_n(x) = n\ln\left(1+\frac{x^2}{n}\right), \quad \mathbf{A} = \mathbb{R},$$

(c) $$f_n(x) = n\ln\frac{1+nx}{nx}, \quad \mathbf{A} = (0,\infty),$$

(d) $$f_n(x) = \sqrt[2n]{1+x^{2n}}, \quad \mathbf{A} = \mathbb{R},$$

(e) $$f_n(x) = \sqrt[n]{2^n+|x|^n}, \quad \mathbf{A} = \mathbb{R},$$

(f) $$f_n(x) = \sqrt{n+1}\sin^n x\cos x, \quad \mathbf{A} = \mathbb{R},$$

(g) $$f_n(x) = n(\sqrt[n]{x}-1), \quad \mathbf{A} = [1,a],\ a>1.$$

3.1.11. Với hàm f xác định trên đoạn $[a,b]$, đặt $f_n(x) = \frac{[nf(x)]}{n}, x\in[a,b], n\in\mathbb{N}$. Chứng minh rằng $f_n \underset{[\mathbf{a},\mathbf{b}]}{\rightrightarrows} f$.

3.1.12. Kiểm tra rằng dãy hàm $\{f_n\}$, với

$$f_n(x) = n\sin\sqrt{4\pi^2n^2+x^2},$$

hội tụ đều trên đoạn $[0,a]$, $a>0$. Dãy hàm $\{f_n\}$ có hội tụ đều trên $\mathbb{R}$ không?

3.1.13. Chứng minh rằng dãy đa thức $\{P_n\}$ xác định bởi công thức truy hồi

$$P_0(x) = 0, \quad P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x - P_n^2(x)), n = 0,1,2,\ldots,$$

hội tụ đều trên đoạn $[0,1]$ đến hàm $f(x) = \sqrt{x}$.

Suy ra rằng có dãy đa thức hội tụ đều trên đoạn $[-1,1]$ đến hàm $x\mapsto|x|$.

3.1.14. Giả sử hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ khả vi và hàm f' liên tục đều trên $\mathbb{R}$. Kiểm tra rằng

$$n\left(f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right)\to f'(x)$$

đều trên $\mathbb{R}$. Bằng ví dụ chỉ ra rằng giả thiết liên tục đều của hàm f' là không thể bỏ qua được.

3.1.15. Cho $\{f_n\}$ là dãy hàm liên tục đều hội tụ đều trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng hàm giới hạn cũng là hàm liên tục đều trên $\mathbb{R}$.

3.1.16. Chứng minh *định lý Dini*: Cho $\{f_n\}$ là dãy hàm liên tục trên tập compact $\mathbf{K}$ hội tụ điểm về hàm f cũng là hàm liên tục trên $\mathbf{K}$. Khi đó nếu $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ với $x \in \mathbf{K}$ và $n \in \mathbb{N}$ thì dãy hàm $\{f_n\}$ hội tụ về hàm f đều trên $\mathbf{K}$.

Bằng ví dụ hãy chỉ ra rằng mỗi điều kiện trong định lý Dini (tính compact, tính liên tục của hàm giới hạn, tính liên tục và đơn điệu của dãy hàm $\{f_n\}$) là cần thiết.

3.1.17. Dãy hàm $\{f_n\}$ xác định trên tập $\mathbf{A}$ được nói là liên tục đồng bậc trên $\mathbf{A}$ nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại số $\delta > 0$ sao cho $|f_n(x) - f_n(x')| < \varepsilon$ mỗi khi $|x - x'| < \delta, x, x' \in \mathbf{A}$, và $n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng nếu $\{f_n\}$ là dãy hàm hội tụ đều của dãy hàm liên tục trên tập compact $\mathbf{K}$ thì $\{f_n\}$ là liên tục đồng bậc trên $\mathbf{K}$.

3.1.18. Chúng ta nói rằng dãy hàm $\{f_n\}$ xác định trên $\mathbf{A}$ *hội tụ liên tục* trên $\mathbf{A}$ về hàm f nếu với mỗi $x \in \mathbf{A}$ và với mỗi dãy $\{x_n\}$ nằm trong $\mathbf{A}$ hội tụ về x thì dãy $\{f_n(x_n)\}$ hội tụ về f. Chứng minh rằng nếu dãy $\{f_n\}$ hội tụ liên tục trên $\mathbf{A}$ về hàm f thì

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_k) = f(x),$$

với mỗi dãy $\{x_n\}$ nằm trong $\mathbf{A}$ hội tụ về $x \in \mathbf{A}$ và với mỗi dãy con $\{f_{n_k}\}$.

3.1.19. Chứng minh rằng nếu $\{f_n\}$ hội tụ liên tục trên $\mathbf{A}$ về f thì f liên tục trên $\mathbf{A}$ (ngay cả khi f_n không liên tục).

3.1.20. Chứng minh rằng nếu $\{f_n\}$ hội tụ đều trên $\mathbf{A}$ về hàm liên tục f thì $\{f_n\}$ hội tụ liên tục trên $\mathbf{A}$. Điều ngược lại có đúng không?

3.1.21. Cho $\{f_n\}$ là dãy hàm xác định trên tập compact $\mathbf{K}$. Chứng minh các mệnh đề sau là tương đương.

(i) Dãy hàm $\{f_n\}$ hội tụ đều trên $\mathbf{K}$ về hàm $f \in C(\mathbf{K})$.

(ii) Dãy hàm $\{f_n\}$ hội tụ liên tục trên $\mathbf{K}$ về hàm f.

3.1.22. Giả sử $\{f_n\}$ là dãy hàm tăng hoặc giảm trên đoạn $[a,b]$ hội tụ điểm về một hàm liên tục trên $[a,b]$. Chứng minh rằng $\{f_n\}$ hội tụ đều trên $[a,b]$.

3.1.23. Cho $\{f_n\}$ là dãy hàm tăng hoặc giảm trên $\mathbb{R}$ và bị chặn đều trên $\mathbb{R}$. Chứng minh $\{f_n\}$ chứa một dãy con hội tụ điểm trên $\mathbb{R}$.

3.1.24. Dưới những giả thiết của bài toán trên (3.1.23) hãy chỉ ra rằng: Nếu hàm giới hạn f của một dãy hàm con $\{f_{n_k}\}$ hội tu điểm là liên tục thì $\{f_n\}$ hội tụ về f đều trên mỗi tập con compact của $\mathbb{R}$. Dãy hàm $\{f_n\}$ phải hội tụ đều trên $\mathbb{R}$ không?

3.1.25. Chứng minh rằng hàm giới hạn của dãy đa thức hội tụ đều trên $\mathbb{R}$ là một đa thức.

3.1.26. Giả sử rằng $\{P_n\}$ là một dãy đa thức có dạng

$$P_n(x) = a_{n,p}x^p + a_{n,p-1}x^{p-1} + \cdots + a_{n,1}x + a_{n,0}.$$

Chứng minh ba mệnh đề sau là tương đương:

(i) $\{P_n\}$ hội tụ đều trên mỗi tập con compact của $\mathbb{R}$,

(ii) Có $p+1$ số phân biệt $c_0, c_1, \ldots, c_p$ sao cho $\{P_n\}$ hội tụ trên $\{c_0, c_1, \ldots, c_p\}$,

(iii) Dãy các hệ số $\{a_{n,i}\}$ hội tụ với $i = 0, 1, \ldots, p$.

3.1.27. Chứng minh rằng nếu $\{f_n\}$ hội tụ điểm và liên tục đồng bậc trên tập compact $\mathbf{K}$ thì $\{f_n\}$ hội tụ đều trên $\mathbf{K}$.

3.1.28. Cho $\{f_n\}$ là dãy hàm liên tục trên đoạn $[a,b]$ và khả vi trên khoảng (a,b). Giả sử $\{f_n'\}$ bị chặn đều trên (a,b), tức là có số $M > 0$ sao cho $|f_n'(x)| \leq M$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ và $x \in (a,b)$. Chứng minh rằng nếu $\{f_n\}$ hội tụ điểm trên $[a,b]$ thì $\{f_n\}$ hội tụ đều trên đoạn đó.

3.1.29. Nghiên cứu sự hội tụ và sự hội tụ đều của $\{f_n\}$ và $\{f_n'\}$ trên $\mathbf{A}$, với

(a) $$f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}, \quad \mathbf{A} = \mathbb{R},$$

(b) $$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}, \quad \mathbf{A} = [-1,1].$$

3.1.30. Giả sử $\{f_n\}$ hội tụ đều trên $\mathbf{A}$ về hàm f. Hơn nữa giả sử rằng x_0 là điểm tụ của $\mathbf{A}$ và bắt đầu từ chỉ số n nào đó, $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)$ tồn tại. Chứng minh

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

Và nếu $\{f_n\}$ hội tụ đều trên (a,∞) về hàm f và bắt đầu từ chỉ số n nào đó, $\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x)$ tồn tại thì

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to\infty} f(x).$$

Những đẳng thức trên có ý nghĩa rằng nếu giới hạn một vế của chúng tồn tại thì giới hạn của vế kia cũng tồn tại và chúng bằng nhau.

3.1.31. Cho $\{f_n\}$ là dãy hàm khả vi trên đoạn $[a,b]$ sao cho $\{f_n(x_0)\}$ hội tụ với $x_0 \in [a,b]$. Chứng minh nếu dãy $\{f_n'\}$ hội tụ đều trên $[a,b]$ thì $\{f_n\}$ hội tụ đều trên $[a,b]$ về một hàm f khả vi trên $[a,b]$ và có đẳng thức

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \quad \text{với} \quad x\in[a,b].$$

3.1.32. Với hàm $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, đặt $B_n(f,x)$ là *đa thức Bernstein* bậc n của hàm f, được xác định bởi

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k}.$$

Chứng ming rằng nếu f liên tục trên $[0,1]$ thì $\{B_n(f)\}$ hội tụ đều trên $[0,1]$ về hàm f.

3.1.33. Dùng kết quả của bài toán trên (3.1.32) để chứng minh *định lý xấp xỉ của Weierstrass*. Nếu $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ liên tục trên $[a,b]$ thì với mỗi $\varepsilon>0$ tồn tại đa thức P sao cho

$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon \quad \text{với mọi } x\in[a,b].$$

3.2 Chuỗi hàm và sự hội tụ đều

3.2.1. Tìm những chuỗi hội tụ điểm:

(a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}, \quad x \neq -1,$$

(b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^n}, \quad x \neq -1,$$

(c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+x^n}{1+3^n x^n}, \quad x \neq -\frac{1}{3},$$

(d) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}, \quad x \neq -1, 1,$$

(e) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}}, \quad x \neq -1, 1,$$

(f) $$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\ln x}{n}\right)^x,$$

(g) $$\sum_{n=1}^{\infty} x^{\ln n}, \quad x > 0,$$

(h) $$\sum_{n=0}^{\infty} \sin^2\left(2\pi\sqrt{n^2+x^2}\right).$$

3.2.2. Nghiên cứu sự hội tụ đều của các chuỗi sau trên tập $\mathbf{A}$:

(a) $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan(n^2(1+x^2))\right), \quad \mathbf{A}=\mathbb{R},$$

(b) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+nx)}{nx^n}, \quad \mathbf{A}=[2,\infty),$$

(c) $$\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^2e^{-n^2|x|}, \quad \mathbf{A}=\mathbb{R},$$

(d) $$\sum_{n=1}^{\infty}x^2(1-x^2)^{n-1}, \quad \mathbf{A}=[-1,1],$$

(e) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n}), \quad \mathbf{A}=\{x\in\mathbb{R}:1/2\le|x|\le 2\},$$

(f) $$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^nx}, \quad \mathbf{A}=(0,\infty),$$

(g) $$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right), \quad \mathbf{A}=(-a,a), a>0.$$

3.2.3. Chỉ ra rằng chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, trong đó f_n được xác định bởi

$f_n(x)=0$ nếu $0\le x\le\frac{1}{2n+1}$ hoặc $\frac{1}{2n-1}\le x\le 1$,

$f_n(x)=\frac{1}{n}$ nếu $x=\frac{1}{2n}$,

$f_n(x)$ là hàm tuyến tính trên $[1/(2n+1),1/(2n)]$ và $[1/(2n),1/(2n-1)]$,

hội tụ đều trên đoạn $[0,1]$ mặc dù dấu hiệu M của Weierstrass không thể áp dụng được.

3.2.4. Xét tính liên tục trên $[0,\infty)$ của hàm f xác định bởi

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)}.$$

3.2.5. Nghiên cứu sự liên tục của tổng của chuỗi sau trên miền hội tụ điểm của nó:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n \sin(nx)}{n!}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n2^n x^n$, (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n(x+1)$.

3.2.6. Xác định miền hội tụ điểm của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x|^{\sqrt{n}}$, và xét tính liên tục của tổng.

3.2.7. Chứng minh rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x\sin(n^2x)}{n^2}$ hội tụ điểm về một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

3.2.8. Giả sử rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x), x \in \mathbf{A}$, hội tụ đều trên $\mathbf{A}$ và hàm $f : \mathbf{A} \to \mathbb{R}$ bị chặn. Chứng minh rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(x)f_n(x)$ hội tụ đều trên $\mathbf{A}$.

Bằng ví dụ chỉ ra rằng tính bị chặn của hàm f là cần thiết. Giả thiết nào được áp đặt lên hàm f để từ sự hội tụ đều của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(x)f_n(x)$ suy ra sự hội tụ đều của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ trên $\mathbf{A}$.

3.2.9. Giả sử $\{f_n\}$ là chuỗi hàm xác định trên $\mathbf{A}$ và thoả mãn

(1) $f_n(x) \geq 0$ với $x \in \mathbf{A}$ và $n \in \mathbb{N}$,

(2) $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ với $x \in \mathbf{A}$ và $n \in \mathbb{N}$,

(3) $\sup\limits_{x\in\mathbf{A}} f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Chứng minh rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} f_n(x)$ hội tụ đều trên $\mathbf{A}$.

3.2.10. Chứng minh các chuỗi sau hội tụ đều trên $\mathbb{R}$:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n+x^2}+x^2}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}+\cos x}$.

3.2.11. Chứng minh rằng nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^2(x)$ hội tụ điểm trên $\mathbf{A}$ và

$$\sup_{x\in\mathbf{A}}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(x)\right) < \infty,$$

và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2$ hội tụ thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$ hội tụ đều trên $\mathbf{A}$.

3.2.12. Xác định miền hội tụ điểm $\mathbf{A}$ và miền hội tụ tuyệt đối $\mathbf{B}$ của các chuỗi sau. Hơn nữa xét tính hội tụ đều trên các tập $\mathbf{C}$.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}2^n(3x-1)^n, \quad \mathbf{C} = \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right]$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x+1}{x}\right)^n, \quad \mathbf{C} = [-2,-1]$.

3.2.13. Giả sử các hàm $f_n, g_n : \mathbf{A} \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, thoả mãn các điều kiện sau:

(1) chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_{n+1}(x) - f_n(x)|$ hội tụ đều trên $\mathbf{A}$,

(2) $\sup\limits_{x\in\mathbf{A}}|f_n(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$,

(3) dãy hàm $\{G_n(x)\}$, ở đây $G_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} g_k(x)$ bị chặn đều trên $\mathbf{A}$.

Chứng minh rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ hội tụ đều trên $\mathbf{A}$.

Suy ra *dấu hiệu Dirichlet cho sự hội tụ đều*: Giả sử rằng $f_n, g_n : \mathbf{A} \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, thoả mãn các điều kiện sau:

(1’) với mỗi $x \in \mathbf{A}$ cố định dãy hàm $\{f_n(x)\}$ đơn điệu,

(2’) $\{f_n(x)\}$ hội tụ đều về 0 trên **A**,

(3’) dãy tổng riêng của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ bị chặn đều trên **A**.

Khi đó chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ hội tụ đều trên **A**.

3.2.14. Chứng minh các chuỗi sau hội tụ đều trên các tập **A**:

(a) $$\sum_{n=1}^{\infty}(1-)^{n+1}\frac{x^n}{n}, \quad \mathbf{A} = [0,1],$$

(b) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}, \quad \mathbf{A} = [\delta, 2\pi-\delta], 0<\delta<\pi,$$

(c) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n^2x)\sin(nx)}{n+x^2}, \quad \mathbf{A} = \mathbb{R},$$

(d) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)\arctan(nx)}{n}, \quad \mathbf{A} = [\delta, 2\pi-\delta], 0<\delta<\pi,$$

(e) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^x}, \quad \mathbf{A} = [a,\infty), a>0,$$

(f) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{e^{-nx}}{\sqrt{n+x^2}}, \quad \mathbf{A} = [0,\infty).$$

3.2.15. Giả sử rằng những hàm $f_n, g_n : \mathbf{A} \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ thoả mãn các điều kiện sau:

(1) hàm f_1 bị chặn trên **A**,

(2) chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_{n+1}(x) - f_n(x)|$ hội tụ điểm trên **A** và
$$\sup_{x\in\mathbf{A}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|f_{n+1}(x)-f_n(x)|\right) < \infty,$$

(3) chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ hội tụ đều trên **A**.

Chứng minh rằng $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ hội tụ đều trên $\mathbf{A}$.

Suy ra *dấu hiệu Abel cho sự hội tụ đều*: Giả sử rằng $f_n, g_n : \mathbf{A} \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, thoả mãn các điều kiện sau:

(1') với mỗi $x \in \mathbf{A}$ cố định dãy hàm $\{f_n(x)\}$ đơn điệu,

(2') $\{f_n(x)\}$ bị chặn đều trên $\mathbf{A}$,

(3') chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ hội tụ đều trên $\mathbf{A}$.

Khi đó chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ hội tụ đều trên $\mathbf{A}$.

3.2.16. Chỉ ra rằng các chuỗi sau hội tụ đều trên các tập $\mathbf{A}$:

(a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2} \arctan(nx), \quad \mathbf{A} = \mathbb{R},$$

(b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos \frac{x}{n}}{\sqrt{n} + \cos x}, \quad \mathbf{A} = [-R, R], R > 0,$$

(c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n(n+x)}}, \quad \mathbf{A} = [0, \infty).$$

3.2.17. Giả sử rằng $f_n, n \in \mathbb{N}$ liên tục trên $\mathbf{A}$ và chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ hội tụ đều trên $\mathbf{A}$. Chứng minh rằng nếu $x_0 \in \mathbf{A}$ là điểm tụ của $\mathbf{A}$ thì

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0).$$

3.2.18. Kiểm tra những khẳng định sau:

(a)
$$\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n=\ln 2,$$

(b)
$$\lim_{x\to 1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^x}=\ln 2,$$

(c)
$$\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=1}^{\infty}(x^n-x^{n+1})=1,$$

(d)
$$\lim_{x\to 0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^x}=1,$$

(e)
$$\lim_{x\to \infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{1+n^2x^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

3.2.19. Giả sử chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ. Tìm giới hạn

$$\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n.$$

3.2.20. Giả thiết hàm $f_n, n\in\mathbb{N}$ liên tục trên đoạn $[0,1]$ và chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ hội tụ đều trên $[0,1)$. Hãy chứng minh chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(1)$ hội tụ.

3.2.21. Tìm miền hội tụ điểm $\mathbf{A}$ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-nx}\cos(nx)$. Chuỗi này có hội tụ đều trên $\mathbf{A}$ không?

3.2.22. Giả sử rằng $f_n:[a,b]\to(0,\infty), n\in\mathbb{N}$ liên tục và $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$. Chứng minh rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ hội tụ đều trên đoạn $[a,b]$.

3.2.23. Giả sử $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ hội tụ tuyệt đối và đều trên $\mathbf{A}$. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ có hội tụ đều trên $\mathbf{A}$ không?

3.2.24. Giả thiết rằng $f_n, n \in \mathbb{N}$ đơn điệu trên $[a, b]$. Chứng minh rằng nếu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ hội tụ tuyệt đối ở điểm cuối của $[a, b]$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ hội tụ tuyệt đối và đều trên toàn bộ $[a, b]$.

3.2.25. Giả sử $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|}$ hội tụ. Chứng minh $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x-a_n}$ hội tụ tuyệt đối và đều trên mỗi tập **A** bị chặn không chứa $a_n, n \in \mathbb{N}$.

3.2.26. Với mỗi dãy số thực $\{a_n\}$, chỉ ra rằng nếu *chuỗi Dirichlet* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ hội tụ tại điểm $x = x_0$ thì chuỗi hội tụ đều trên $[x_0, \infty)$.

3.2.27. Nghiên cứu sự hội tụ đều trên $\mathbb{R}$ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} x\frac{\sin(n^2x)}{n^2}.$$

3.2.28. Giả thiết rằng $f_n, n \in \mathbb{N}$ khả vi trên $[a, b]$. Hơn nữa giả thiết rằng $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ hội tụ tại điểm $x_0 \in [a, b]$ và $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ hội tụ đều trên $[a, b]$. Chứng minh rằng $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ hội tụ đều trên $[a, b]$ về hàm khả vi, và

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \quad \text{với} \quad x \in [a, b].$$

3.2.29. Chứng minh rằng $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$ khả vi trên $\mathbb{R}$.

3.2.30. Chứng minh rằng hàm

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{1+n^2}$$

khả vi trên $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right]$.

3.2.31. Cho $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$ với $x \in [0, \infty)$. Chứng minh rằng f khả vi trên $[0, \infty)$ và hãy tính $f'(0), f'(1)$, và $\lim_{x\to\infty} f'(x)$.

3.2.32. Cho
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}\arctan\frac{x}{\sqrt{n}}, \quad x \in \mathbb{R},$$
Chứng minh rằng f khả vi liên tục trên $\mathbb{R}$.

3.2.33. Chứng minh hàm
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx^2)}{1+n^3}, \quad x \in \mathbb{R},$$
khả vi liên tục trên $\mathbb{R}$.

3.2.34. Cho
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}(\tan x)^n, \quad x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}).$$
Chứng minh f khả vi liên tục trên $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.

3.2.35. Định nghĩa
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{1+n^2}, \quad x \in [0, \infty).$$
Chứng minh rằng $f \in C([0,\infty))$, $f \in C^{\infty}(0,\infty)$ và $f'(0)$ không tồn tại.

3.2.36. Hãy chỉ ra rằng hàm
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|}{x^2+n^2}$$
liên tục trên $\mathbb{R}$. Nó có khả vi trên $\mathbb{R}$ không?

3.2.37. Chứng minh rằng *hàm ζ Riemann* xác định bởi
$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$$
thuộc $C^{\infty}(1,\infty)$.

3.2.38. Giả thiết rằng $f \in C^\infty([0,1])$ thoả mãn những điều kiện sau:

(1) $f \not\equiv 0$,

(2) $f^{(n)}(0) = 0$ với $n = 0, 1, 2, \ldots$,

(3) với mỗi dãy số thực $\{a_n\}$, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n f^{(n)}(x)$ hội tụ đều trên $[0,1]$.

Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} n! a_n = 0.$$

3.2.39. Với $x \in \mathbb{R}$ đặt $f_n(x)$ là khoảng cách từ x đến phân số gần nhất có mẫu số là n (tử số và mẫu số không nhất thiết phải là nguyên tố cùng nhau). Tìm tất cả $x \in \mathbb{R}$ để chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ hội tụ.

3.2.40. Cho $g(x) = |x|$ với $x \in [-1,1]$ và mở rộng định nghĩa g cho mọi số thực x bằng cách đặt $g(x+2) = g(x)$. Chứng minh rằng *hàm Weierstrass* f xác định bởi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n g(4^n x)$$

liên tục trên $\mathbb{R}$ và không khả vi tại mọi điểm.

3.3 Chuỗi luỹ thừa

3.3.1. Chứng minh rằng mỗi chuỗi luỹ thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ đều tồn tại $R \in [0, \infty]$ sao cho

(1) chuỗi luỹ thừa hội tụ tuyệt đối với $|x - x_0| < R$ và phân kỳ với $|x - x_0| > R$,

(2) R là cận trên đúng của tập hợp tất cả những $r \in [0, \infty)$ để $\{|a_n| r^n\}$ là dãy bị chặn,

(3) $1/R = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ (ở đây $\frac{1}{0} = +\infty$ và $\frac{1}{\infty} = 0$).

R được gọi là *bán kính hội tụ* của $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$.

3.3.2. Xác định miền hội tụ của các chuỗi luỹ thừa sau:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n$, (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (2+(-1)^n)^n x^n$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+(-1)^n}{5+(-1)^{n+1}}\right)^n x^n$, (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n^2}$,

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n^2} x^{n!}$, (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{(-1)^n n^2} x^n$.

3.3.3. Tìm miền hội tụ của các chuỗi sau:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{2^n n^3}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{2x+1}{x}\right)^n$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n4^n}{3^n} x^n (1-x)^n$, (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} (x-1)^n$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} (\tan x)^n$, (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctan\frac{1}{x}\right)^{n^2}$.

3.3.4. Chứng minh rằng nếu R_1 và R_2 lần lượt là bán kính hội tụ của $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ và $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ thì

(a) bán kính hội tụ R của $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n) x^n$ bằng $\min\{R_1, R_2\}$, nếu $R_1 \neq R_2$. Có thể nói gì về R nếu $R_1 = R_2$?

(b) bán kính hội tụ R của $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$ thoả mãn $R \geq R_1 R_2$. Bằng ví dụ chỉ ra rằng bất đẳng thức là chặt.

3.3.5. Cho R_1 và R_2 lần lượt là bán kính hội tụ của $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ và $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Chứng minh

(a) nếu R_1, $R_2 \in (0, \infty)$ thì bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} x^n, \quad b_n \neq 0, n = 0, 1, 2, \dots,$$

thoả mãn $R \le \frac{R_1}{R_2}$,

(b) bán kính hội tụ R của chuỗi tích Cauchy (xem I, 3.6.1) của những chuỗi đã cho thoả mãn $R \geq \min\{R_1, R_2\}$.

Bằng ví dụ chỉ ra rằng các bất đẳng thức (a) và (b) là chặt.

3.3.6. Tìm bán kính hội tụ R của $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, nếu

(a) có α và $L > 0$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n n^\alpha| = L$,

(b) tồn tại các số dương α và L sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n \alpha^n| = L$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n n!| = L, L \in (0, \infty)$.

3.3.7. Giả sử rằng bán kính hội tụ của $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ là R và $0 < R < \infty$. Ước lượng bán kính hội tụ của:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_n x^n$, (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^n a_n x^n$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} a_n x^n$, (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 x^n$.

3.3.8. Tìm tất cả các chuỗi luỹ thừa hội tụ đều trên $\mathbb{R}$.

3.3.9. Tìm bán kính hội tụ R của chuỗi luỹ thừa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}$$

và chỉ ra rằng hàm tổng f của nó thoả mãn phương trình $f'(x) = 1 + xf(x), x \in (-R, R)$.

3.3.10. Chứng minh rằng chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ hội tụ trên $\mathbb{R}$ và hàm tổng f thoả mãn phương trình $f"(x) + f'(x) + f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$.

3.3.11. Cho $R > 0$ là bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ và đặt $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, n = 0, 1, 2, \ldots$. Chứng minh rằng nếu f là hàm tổng của chuỗi và $x_0 \in (-R, R)$ sao cho $S_n(x_0) < f(x_0), n = 0, 1, 2, \ldots$, thì $f'(x_0) \neq 0$.

3.3.12. Cho $\{S_n\}$ là dãy tổng riêng của $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ và đặt $T_n = \frac{S_0+S_1+\cdots+S_n}{n+1}$. Chứng minh nếu $\{T_n\}$ bị chặn thì các chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) T_n x^n$ hội tụ với $|x| < 1$ và

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) T_n x^n.$$

3.3.13. Cho $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2^n}, |x| < 1$. Chứng minh rằng có số $M > 0$ sao cho

$$|f'(x)| < \frac{M}{1-|x|}, \quad |x| < 1.$$

3.3.14. Chứng minh *định lý Abel* sau. Nếu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ hội tụ về L thì

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ đều trên $[0, 1]$,

(2) $\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = L$.

3.3.15. Chứng minh định lý Abel tổng quát sau. Nếu $\{S_n\}$ là dãy các tổng riêng của $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ và chuỗi luỹ thừa $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ có bán kính hội tụ bằng 1 thì

$$\underline{\lim}_{n \to \infty} S_n \leq \underline{\lim}_{x \to 1^-} f(x) \leq \overline{\lim}_{x \to 1^-} f(x) \leq \overline{\lim}_{n \to \infty} S_n.$$

3.3.16. Chứng minh ***định lý Tauber***. Giả thiết rằng bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ bằng 1. Nếu $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$ và $\lim_{x\to 1^-} f(x) = L, L \in \mathbb{R}$ thì chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ hội tụ về L.

3.3.17. Bằng ví dụ chỉ ra rằng giả thiết $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$ trong định lý Tauber là không thể thiếu.

3.3.18. Giả sử rằng $\{a_n\}$ là dãy số dương và bán kính hội tụ của $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ là 1. Chứng minh $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ tồn tại và hữu hạn nếu và chỉ nếu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

3.3.19. Chứng minh sự tổng quát sau của định lý Tauber. Giả thiết rằng bán kính hội tụ của $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ bằng 1. Nếu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} = 0 \text{ và } \lim_{x\to 1^-} f(x) = L, L \in \mathbb{R},$$

thì chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ hội tụ về L.

3.3.20. Giả thiết rằng bán kính hội tụ của $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ bằng 1. Chứng minh nếu $\sum_{n=1}^{\infty} na_n^2$ hội tụ và $\lim_{x\to 1^-} f(x) = L, L \in \mathbb{R}$ thì $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ hội tụ và có tổng bằng L.

3.3.21. Giả thiết $a_n, b_n > 0, n = 0, 1, 2, \ldots,$ và các chuỗi luỹ thừa $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ có cùng bán kính hội tụ là 1. Hơn nữa giả thiết $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} g(x) = +\infty$. Chứng minh nếu có $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A \in [0, \infty)$ thì cũng có $\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

3.3.22. Chứng minh kết quả tổng quát sau của bài toán trên (3.3.21). Giả thiết cả hai chuỗi luỹ thừa $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ và $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ có cùng bán kính hội tụ bằng 1. Hơn nữa giả thiết rằng $S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ và $T_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n, n \in \mathbb{N}$ đều dương và hai chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} S_n$ và $\sum_{n=0}^{\infty} T_n$ phân kỳ. Nếu $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{T_n} = A \in [0, \infty)$ thì $\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

3.3.23. Bằng ví dụ chỉ ra rằng chiều ngược lại của định lý trên là sai. Nghĩa là, từ $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{gx)} = A$ không suy ra được sự tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{T_n}$.

3.3.24. Cho bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ với các hệ số không âm là 1 và đặt $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)(1-x) = A \in (0,\infty)$. Chứng minh có các số dương A_1 và A_2 sao cho

$$A_1 n \le S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \le A_2 n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

3.3.25. Chứng minh *định lý Hardy và Littlewood* sau. Cho bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ với các hệ số không âm là 1 và đặt $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)(1-x) = A \in (0,\infty)$. Khi đó

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = A,$$

ở đây $S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$.

3.3.26. Cho bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ bằng 1. Chứng minh nếu dãy số $\{na_n\}$ bị chặn và $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = L, L \in \mathbb{R}$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ hội tụ và có tổng bằng L.

3.3.27. Cho bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ bằng 1. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)(1-x)$ tồn tại và khác 0 thì $\{a_n\}$ không thể hội tụ về 0.

3.4 Chuỗi Taylor

3.4.1. Giả thiết hàm f thuộc $C^{\infty}([a,b])$. Chứng minh rằng nếu tất cả các đạo hàm $f^{(n)}$ bị chặn đều trên $[a,b]$ thì với mỗi x và x_0 thuộc $[a,b]$ ta đều có

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

3.4.2. Định nghĩa
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{nếu } x \neq 0, \\ 0 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$
Đẳng thức
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$
có thoả mãn với $x \neq 0$ không?

3.4.3. Định nghĩa $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n^2 x)}{e^n}, x \in \mathbb{R}$. Chứng minh f thuộc $C^\infty(\mathbb{R})$ và đẳng thức
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$
chỉ thoả mãn tại $x = 0$.

3.4.4. Chứng minh rằng nếu $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{N}$ và $|x| < 1$ thì
$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$
Và nó được gọi là *công thức nhị thức Newton*.

3.4.5. Chứng minh rằng với $|x| \leq 1$ ta luôn có
$$|x| = 1 - \frac{1}{2}(1-x^2) - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}(1-x^2)^n.$$

3.4.6. Chứng minh nếu chuỗi luỹ thừa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ có bán kính hội tụ R dương và $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ với $x \in (-R, R)$ thì hàm f thuộc $C^\infty(-R, R)$ và
$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

3.4.7. Chứng minh rằng nếu x_0 thuộc vào khoảng hội tụ $(-R, R), R > 0$ của chuỗi luỹ thừa $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ thì
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad \text{với} \quad |x - x_0| < R - |x_0|.$$

3.4.8. Giả thiết rằng các chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ và $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ cùng hội tụ trong khoảng $(-R, R)$. Đặt **A** là tập tất cả $x \in (-R, R)$ mà

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Chứng minh nếu **A** có điểm tụ thuộc khoảng $(-R, R)$ thì $a_n = b_n$ với $n = 0, 1, 2, \ldots$.

3.4.9. Tìm chuỗi Taylor của hàm f tại điểm 0 khi

(a) $f(x) = \sin x^3, \quad x \in \mathbb{R},$

(b) $f(x) = \sin^3 x, \quad x \in \mathbb{R},$

(c) $f(x) = \sin x \cos 3x, \quad x \in \mathbb{R},$

(d) $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x, \quad x \in \mathbb{R},$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x}, \quad x \in (-1, 1),$

(f) $f(x) = \ln(1 + x + x^2), \quad x \in (-1, 1),$

(g) $f(x) = \dfrac{1}{1 - 5x + 6x^2}, \quad x \in (-1/3, 1/3),$

(h) $f(x) = \dfrac{e^x}{1-x}, \quad x \in (-1, 1).$

3.4.10. Tìm chuỗi Taylor của các hàm f sau tại điểm x=1:

(a) $f(x) = (x+1)e^x, \quad x \in \mathbb{R},$

(b) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}, \quad x \neq 0,$

(c) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}, \quad x \neq 0,$

(d) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}, \quad x > 0.$

3.4.11. Với $|x| < 1$, thiết lập các đẳng thức sau:

(a) $$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} x^{2n+1},$$

(b) $$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Hãy dùng những đồng nhất thức trên để chỉ ra rằng

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^{2n+1}(2n)!!(2n+1)} \text{ và } \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}.$$

3.4.12. Tìm chuỗi Taylor của hàm f tại điểm 0 khi

(a) $$f(x) = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2), \quad x \in (-1,1),$$

(b) $$f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}, \quad x \in (-1,1).$$

3.4.13. Tìm tổng của những chuỗi sau:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n-2}$, (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!}$, (f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n(n+1)}{n!}$.

3.4.14. Tìm tổng của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{((n-1)!)^2}{(2n)!}(2x)^{2n}$ với $|x| \le 1$.

3.4.15. Dùng công thức Taylor với phần dư tích phân (xem 2.3.4) để chứng minh *định lý Bernstein* sau. Giả sử f khả vi vô hạn lần trên khoảng mở $\mathbf{I}$ và tất cả các đạo hàm cấp cao $f^{(n)}$ đều không âm trên $\mathbf{I}$. Khi đó hàm f là hàm giải tích thực trên $\mathbf{I}$, nghĩa là với mỗi $x_0 \in \mathbf{I}$ có lân cận $(x_0 - r, x_0 + r) \subset \mathbf{I}$ sao cho

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad \text{với} \quad |x - x_0| < r.$$

3.4.16. Giả sử f khả vi vô hạn lần trên khoảng mở $\mathbf{I}$. Chứng minh rằng nếu với mỗi $x_0 \in \mathbf{I}$ có khoảng mở $\mathbf{J} \subset \mathbf{I}$ với $x_0 \in \mathbf{J}$, và có những hằng số $C > 0$ và $\rho > 0$ sao cho

$$|f^{(n)}(x)| \leq C\frac{n!}{\rho^n} \quad \text{với} \quad x \in \mathbf{J},$$

thì

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad \text{với} \quad x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \cap \mathbf{J}.$$

3.4.17. Giả thiết rằng f là hàm giải tích thực trên khoảng mở $\mathbf{I}$. Chứng minh với mỗi $x_0 \in \mathbf{I}$ có khoảng mở $\mathbf{J}$, với $x_0 \in \mathbf{J} \subset \mathbf{I}$, và có những hằng số dương A, B sao cho

$$|f^{(n)}(x)| \leq A\frac{n!}{B^n} \quad \text{với} \quad x \in \mathbf{J}.$$

3.4.18. áp dụng công thức Faà di Bruno (xem 2.1.38) để chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n và mỗi $A > 0$ ta luôn có

$$\sum \frac{k!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}A^k = A(1+A)^{n-1},$$

ở đây $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ và tổng được lấy trên tất cả các $k_1, k_2, \ldots, k_n$ thoả mãn $k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n = n$.

3.4.19. Cho $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$ là những khoảng mở, và $f : \mathbf{I} \to \mathbf{J}$, $g : \mathbf{J} \to \mathbb{R}$ là các hàm giải tích thực trên các tập $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$ tương ứng. Chứng minh $h = g \circ f$ là hàm giải tích thực trên $\mathbf{I}$.

3.4.20. Cho hàm f thuộc C^∞ trên khoảng mở $\mathbf{I}$ và $(-1)^n f^{(n)}(x) \geq 0$ với $x \in \mathbf{I}$ và $n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng f là hàm giải tích thực trên $\mathbf{I}$.

3.4.21. áp dụng công thức Faà di Bruno để chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n ta đều có

$$\sum \frac{(-1)^k k!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}\binom{\frac{1}{2}}{1}^{k_1}\binom{\frac{1}{2}}{2}^{k_2}\cdots\binom{\frac{1}{2}}{n}^{k_n} = 2(n+1)\binom{\frac{1}{2}}{n+1},$$

ở đây $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ và tổng được lấy trên tất cả các $k_1, k_2, \ldots, k_n$ thoả mãn $k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n = n$, và $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$.

3.4.22. Giả thiết rằng f là hàm giải tích thực trên khoảng mở $\mathbf{I}$. Chứng minh nếu $f'(x_0) \neq 0$ với $x_0 \in \mathbf{I}$ thì có khoảng mở $\mathbf{J}$ chứa x_0 và hàm giải tích thực g xác định trên khoảng mở $\mathbf{K}$ chứa $f(x_0)$, hơn nữa $(g \circ f)(x) = x$ với $x \in \mathbf{J}$ và $(f \circ g)(x) = x$ với $x \in \mathbf{K}$.

3.4.23. Chứng minh nếu f khả vi trên $(0, \infty)$ và $f^{-1} = f'$ thì f là hàm giải tích thực trên $(0, \infty)$.

3.4.24. Chứng minh rằng chỉ có duy nhất một hàm f khả vi trên $(0, \infty)$ mà $f^{-1} = f'$.

3.4.25. Chứng minh rằng chỉ có duy nhất một hàm f thoả mãn giả thiết của bài toán trên (3.4.25) là $f(x) = ax^c$, ở đây $c = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ và $a = c^{1-c}$.

3.4.26. áp dụng kết quả của 2.3.10 để chỉ ra rằng với $x \in (0, 2)$ ta luôn có

$$\ln(1-x) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{x}{2+x}\right)^{2n+1}.$$

3.4.27. Cho $M_p(x, y)$ và $L(x, y)$ là trung bình luỹ thừa và trung bình logarith của những số dương x và y (xem định nghĩa này ở 2.5.41 và 2.5.42). Chứng minh rằng nếu $p \geq \frac{1}{3}$ thì

$$L(x, y) < M_p(x, y) \quad \text{với} \quad x, y > 0, x \neq y.$$

3.4.28. Với ký hiệu trong bài toán 3.4.27, chứng minh nếu $p < \frac{1}{3}$ thì tồn tại những số dương x và y để $L(x, y) > M_p(x, y)$.

3.4.29. Với ký hiệu trong bài toán 3.4.27, chứng minh nếu $p \leq 0$ thì

$$L(x, y) > M_p(x, y) \quad \text{với} \quad x, y > 0, x \neq y.$$

3.4.30. Với ký hiệu trong bài toán 3.4.27, chứng minh nếu $p > 0$ thì tồn tại những số dương x và y để $L(x, y) < M_p(x, y)$.

Lời giải

Chương 1

Giới hạn và tính liên tục

1.1 Giới hạn của hàm số

1.1.1.

(a) Vì $|x \cos \frac{1}{x}| \le |x|$, giới hạn bằng 0.

(b) Với $x > 0$, $1 - x < x\left[\frac{1}{x}\right] \le 1$ và với $x < 0$, $1 < x\left[\frac{1}{x}\right] \le 1 - x$. Vì vậy, $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1$.

(c) Như trong (b), có thể chỉ ra giới hạn bằng $\frac{b}{a}$

(d) Giới hạn không tồn tại vì các giới hạn một phía là khác nhau.

(e) Giới hạn bằng $\frac{1}{2}$ (so sánh với lời giải của I, 3.2.1).

(f) Ta có

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos x)}{\sin(\sin x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}(1+\cos x))}{\sin(\sin x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi\cos^2\frac{x}{2})}{\sin(\sin x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi\sin^2\frac{x}{2})}{\sin(\sin x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\pi\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}}\cdot\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2})}\cdot\frac{\sin(\pi\sin^2\frac{x}{2})}{\pi\sin^2\frac{x}{2}}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

1.1.2.

(a) Giả sử $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = l$. Khi đó, với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ sao cho

(1) $$|f(y) - l| < \varepsilon \text{ nếu } 0 < |y| < \delta$$

Cũng chú ý rằng nếu $0 < |x| < \delta$, thì $0 < |y| = |\sin x| < |x| < \delta$. Vì vậy, theo (1), $|f(\sin x) - l| < \varepsilon$. Từ đó, $\lim\limits_{x\to 0} f(\sin x) = l$. Bây giờ, giả sử $\lim\limits_{x\to 0} f(\sin x) = l$ .Với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ sao cho

(2) $$|f(\sin x) - l| < \varepsilon \text{ nếu } 0 < |x| < \delta$$

Bây giờ, nếu $0 < |y| < \sin\delta$, thì $0 < |x| = |\arcsin x| < \delta$ và theo (2), ta nhận được$|f(y) - l| = |f(\sin x) - l| < \varepsilon$. Điều này có nghĩa $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = l$.

(b) Suy ra trực tiếp từ định nghĩa của giới hạn. Để chỉ ra diều ngược lại không đúng, quan sát chẳng hạn rằng $\lim\limits_{x\to 0}[|x|] = 0$ nhưng $\lim\limits_{x\to 0}[x]$ không tồn tại.

1.1.3. Rõ ràng, $f(x) + \frac{1}{f(x)} \geq 2$. Từ đó, theo giả thiết, với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$0 \leq f(x) + \frac{1}{f(x)} - 2 < \varepsilon \text{ với } 0 < |x| < \delta.$$

Điều kiện này có thể viết lại tương đương như sau

(1) $$0 \le (f(x)-1) + \left(\frac{1}{f(x)} - 1\right) < \varepsilon$$

hoặc

(2) $$0 \le (f(x)-1)\left(1 - \frac{1}{f(x)}\right) < \varepsilon$$

Bình phương hai vế của (1) và dùng (2), ta có

$$(f(x)-1)^2 + \left(\frac{1}{f(x)} - 1\right)^2 \le \varepsilon^2 + 2\varepsilon.$$

Cuối cùng, $(f(x)-1)^2 \le \varepsilon^2 + 2\varepsilon$.

1.1.4. Giả sử $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ tồn tại và bằng l. Khi đó, theo điều kiện của bài toán, ta nhận được $l + \frac{1}{|l|} = 0$, suy ra $l = -1$. Bây giờ ta chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -1$. Ta chỉ cần chứng minh rằng tồn tại $\delta > 0$ sao cho $f(x) < 0$ với $x \in (a-\delta, a+\delta) \subset \{a\}$. Thực vậy, nếu trong mọi lân cận khuyết của a, tồn tại x_0 sao cho $f(x_0) > 0$, thì sẽ có $f(x_0) + \frac{1}{f(x_0)}| \ge 2$, mâu thuẫn giả thiết. Vì $f(x) < 0$, bất đẳng thức sau đây đúng :

$$|f(x+1)| \le \left| f(x) + \frac{1}{|f(x)|} \right|.$$

1.1.5. Tồn tại $M \ge 0$ sao cho $|f(x)| \ge M$ với $x \in (0,1)$. Từ $f(ax) = bf(x)$ với $x \in [0, \frac{1}{a}]$, $f(a^2x) = b^2 f(x)$ với $x \in [0, \frac{1}{a^2}]$. Dùng phép quy nạp, ta có

$$f(a^n x) = b^n f(x) \text{ với } x \in \left[0, \frac{1}{a^n}\right], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Vì vậy

(∗) $$|f(x)| \le M\frac{1}{b^n} \text{ với } x \in \left[0, \frac{1}{a^n}\right], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Mặt khác, đẳng thức $f(ax) = bf(x)$ suy ra $f(0) = 0$. Kết hợp điều này với $(*)$, có điều phải chứng minh.

1.1.6.

(a) Ta có

$$x^2\left(1+2+3+\cdots+\left[\frac{1}{|x|}\right]\right)=x^2\frac{1+\left[\frac{1}{|x|}\right]}{2}\left[\frac{1}{|x|}\right].$$

Từ định nghĩa của hàm phần nguyên, suy ra nếu $0<|x|<1$, thì

$$\frac{1}{2}(1-|x|)<x^2\left(1+2+3+\cdots+\left[\frac{1}{|x|}\right]\right)\leq\frac{1}{2}(1+|x|).$$

Cuối cùng, giới hạn là $\frac{1}{2}$.

(b) Như trong (a), có thể chứng minh giới hạn là $\frac{k(k+1)}{2}$.

1.1.7. Vì P là đa thức với hệ số dương, với $x>1$, ta có

$$\frac{P(x)-1}{P(x)}\leq\frac{[P(x)]}{P([x])}\leq\frac{P(x)}{P(x-1)}.$$

Vì vậy, $\lim\limits_{\to\infty}\frac{[P(x)]}{P([x])}=1$.

1.1.8. Xét $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x)=\begin{cases}(-1)^n & \text{nếu } x=\frac{1}{2^n},\ n=0,1,2,3,\dots,\\ 0 & \text{nếu ngược lại.}\end{cases}$$

Bây giờ, nếu $f(x)\geq\varphi(x)$, thì

$$\varphi(x)\leq f(x)=(f(x)+f(2x))-f(2x)\leq(f(x)+f(2x))-\varphi(2x),$$

suy ra $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$.

1.1.9.

(a) Xét, chẳng hạn, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định như sau:

$$f(x) = \begin{cases} (-1)^n & \text{nếu } x = \frac{1}{2^n},\ n = 0, 1, 2, 3, \dots, \\ = 0 & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$$

(b) Nếu $f(x) \geq |x|^\alpha$ và $f(x)f(2x) \leq |x|$, thì

$$|x|^\alpha \leq f(x) \leq \frac{|x|}{f(2x)} \leq \frac{|x|}{|2x|^\alpha}.$$

Do $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, ta có $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

1.1.10. Ta có $\frac{g(\alpha)}{a^\alpha} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(ax)}{a^\alpha x^\alpha} = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha} = g(1)$.

1.1.11. Suy ra từ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = 1$ rằng với mọi $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(2^n x)}{f(x)} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(2^n x)}{f(2^{n-1}x)} \frac{f(2^{n-1}x)}{f(2^z cn - 2x)} \cdots \frac{f(2x)}{f(x)} \right) = 1.$$

Giả sử rằng f tăng và $c \geq 1$. Rõ ràng, tồn tại $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sao cho $2^n \leq c < 2^{n+1}$. Vì vậy, theo tính đơn điệu cả f, ta có $f(2^n) \leq f(cx) \leq f(2^{n+1}x)$, từ đó

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(cx)}{f(x)} \text{ với } c \geq 1.$$

Theo trên, nếu $0 < c < 1$, thì

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(cx)}{f(x)} = \lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{f(\frac{1}{c}t)} = 1.$$

1.1.12.

(a) Chú ý rằng nếu $a > 1$, thì $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = +\infty$. Thực vậy, với $M > 0$ cho trước, $a^x > M$ nếu và chỉ nếu $x > \frac{\ln M}{\ln a}$. Để chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n+1} = +\infty$, ta viết $\frac{a^n}{n+1} = \frac{(1+(a-1))^n}{n+1}$ và quan sát rằng $(1 + (a-1))^n > \frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2$. Vậy, với N cho trước, tồn tại n_0 sao cho $\frac{a^n}{n+1} > N$ bất cứ khi nào $n > n_0$. Bây giờ, với $x > n_0 + 1$, dặt $n = [x]$. Khi đó, $\frac{a^x}{x} > \frac{a^n}{n+1} > N$. Từ đó, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a^x}{x} = +\infty$.

(b) Rõ ràng, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty$ với $\alpha \le 0$. Trong trường hợp $\alpha > 0$, ta có

$$\frac{a^x}{x^\alpha} = \left(\frac{a^{\frac{x}{\alpha}}}{x}\right)^\alpha = \left(\frac{b^x}{x}\right)^\alpha,$$

ở đây $b = a^{\frac{1}{\alpha}} > 1$. Theo (a), $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{b^x}{x} = +\infty$. Do đó,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{b^x}{x}\right)^\alpha = +\infty$$

với α dương.

1.1.13. Suy ra từ bài toán trước rằng $\lim\limits_{y\to\infty} \frac{\alpha y}{e^{\alpha y}} = 0$. Thế $y = \ln x$ được $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$.

1.1.14. Ta biết rằng $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}} = 1$. Trước hết giả sử $a > 1$. Cho trước $\varepsilon > 0$, khi đó tồn tại số nguyên n_0 sao cho $n > n_0$ suy ra

$$1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{n}} < a^x < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon \text{ với } |x| < \frac{1}{n}.$$

Vì vậy $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$ với $a > 1$. Nếu $0 < a < 1$, suy từ trên rằng

$$\lim_{x\to 0} a^x = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(1/a)^x} = 1.$$

Trường hợp $a = 1$ là rõ ràng. Để chứng minh tính liên tục của hàm mũ $x \mapsto a^x$, chọn $x_0 \in \mathbb{R}$ tuỳ ý. Khi đó

$$\lim_{x\to x_0} a^x = \lim_{x\to x_0} a^{x_0} a^{x-x_0} = a^{x_0} \lim_{y\to 0} a^y = a^{x_0}.$$

1.1.15.

(a) Do $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$, (xem, chẳng hạn, I,2.1.38), với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại n_0 sao cho nếu $x > n_0 + 1$, và nếu $n = [x]$, thì

$$e - \varepsilon < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < e + \varepsilon$$

(b) Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} &= \lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}\\ &= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right).\end{aligned}$$

Do đó, bất đẳng thức cần chứng minh suy ra từ (a).

(c) Theo (a) và (b), ta nhận được $\lim\limits_{x\to0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = e$ và $\lim\limits_{x\to0^-}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{y\to-\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = e$.

1.1.16. Ta biết rằng (xem, chẳng hạn, I, 2.1.38) $0 < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n} n \in \mathbb{N}$. Ngoài ra, với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại n_0 sao cho $\frac{1}{n_0-1} < \varepsilon$. Hệ quả là, nếu $|x| < \frac{1}{n_0}$, thì

$$-\varepsilon < -\frac{1}{n_0-1} < \ln\left(1-\frac{1}{n_0}\right) < \ln(1+x) < \ln\left(1+\frac{1}{n_0}\right) < \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Từ đó, $\lim\limits_{x\to0}\ln(1+x) = 0$. Để chứng minh tính liên tục của hàm logarit, lấy $x_0 \in (0,\infty)$. Khi đó

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\ln x &= \lim_{x\to x_0}\left(\ln x + \ln\frac{x}{x_0}\right) = \ln x_0 + \lim_{y\to1}\ln y\\ &= \ln x_0 + \lim_{t\to0}\ln(1+t) = \ln x_0.\end{aligned}$$

1.1.17.

(a) Theo kết quả của 1.1.15 và do tính liên tục của hàm logarit (xem 1.1.16),

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1.$$

(b) Trước hết, để ý tính liên tục của hàm logarit cơ số a, $a > 0$, $a \neq 1$, suy từ tính liên tục của hàm logarit tự nhiên và từ đẳng thức $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$. Vậy, theo (a),

$$\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$$

Đặt $y = a^x - 1$. Khi đó

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(y+1)} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a.$$

(c) Đặt $y = (1+x)^\alpha - 1$. Rõ ràng, x tiến tới không nếu và chỉ nếu y tiến tới không. Ngoài ra,

$$\frac{(1+x)^\alpha}{x} = \frac{y}{(1+y)} \cdot \frac{\ln(1+y)}{x} = \frac{y}{\ln(1+y)} \cdot \frac{\alpha \ln(1+x)}{x}.$$

Từ đây và (a), suy ra $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$.

1.1.18.

(a) Đặt $y = (\ln x)^{\frac{1}{x}}$. Khi đó, $\ln y = \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} \cdot \frac{\ln x}{x}$. Từ đó, theo 1.1.13 và do tính liên tục của hàm mũ, $\lim\limits_{x\to\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}} = 1$.

(b) Đặt $y = x^{\sin x}$. Khi đó, $\ln y = \frac{\sin x}{x} \cdot x \ln x$. Theo 1.1.13,

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{t\to\infty} \frac{-\ln t}{t} = 0.$$

Lại do tính liên tục của hàm mũ, ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x} = 1$.

(c) Đặt $y = (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$, ta thấy

$$\ln y = \frac{\ln(\cos x)}{\cos x - 1} \cdot \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x}.$$

Bây giờ, theo 1.1.17 (a), $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = e^{-\frac{1}{2}}$.

(d) Với x đủ lớn,

$$\frac{e}{2^{\frac{1}{x}}} \le (e^x - 1)^{\frac{1}{x}} \le e$$

Do $\lim\limits_{x\to\infty} 2^{\frac{1}{x}} = 1$ (xem 1.1.14), giới hạn là e

(e) Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^a$, ở đây

$$a = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\sin x}{\ln x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\frac{\sin x}{x} + \ln x}{\ln x} = 1.$$

Đẳng thức cuối cùng suy ra từ tính liên tục của hàm logarit (xem 1.1.16).

1.1.19.

(a) Ta có

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x + 2\arctan 3x + 3x^2}{\ln(1+3x+\sin^2 x) + xe^x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 2x+2\arctan 3x+3x^2}{x}}{\frac{\ln(1+3x+\sin^2 x)+xe^x}{x} + e^x} = 2,$$

vì, theo 1.1.17 (a), $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x+\sin^2 x)+xe^x}{x} = 3$.

(b) Theo 1.1.17 (a), ta có

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\ln\cos x}{-x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\ln(1-\sin^2 x)}{-x^2} = 1.$$

Từ đó $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\tan x^2} = -\frac{1}{2}$.

(c) Ta có

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-e^{-x}} - \sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sqrt{1-e^{-x}}-\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{x}}}{\sqrt{\frac{\sin x}{x}}} = 1.$$

(d) Ta có $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\cot x} = e^a$, ở đây

$$a = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{\tan x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x} = 0,$$

vì, theo 1.1.17 (a), $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = 1$.

1.1.20.

(a) Trước hết, quan sát rằng

$$(1) \qquad \frac{2\ln\tan\frac{\pi x}{2x+1}}{x} = \frac{\ln\left(\frac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{2x+1}} - 1\right)}{x}.$$

Do 1.1.16 và 1.1.18 (d),

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x-1)}{\ln x} = \lim_{x\to\infty}\ln(x-1)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{y\to\infty}\ln(e^y-1)^{frac1y} = 1.$$

Từ đó

$$(2) \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{2x+1}} - 1\right)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{2x+1}}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{-2\ln\cos\frac{\pi x}{2x+1}}{x}.$$

Tiếp đó, theo 1.1.18 (e),

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-2\ln\cos\frac{\pi x}{2x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{-2\ln\sin\frac{\pi x}{2x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2\ln\frac{2(2x+1)}{pi}}{x}.$$

Giới hạn cuối cùng là 0 (xem 1.1.13). Kết hợp điều này với (1) và (2), suy ra giới hạn là 1.

(b) Ta có

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\ln\left(1+\frac{x}{2}\right) - \ln\frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{x}{2})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+y)}{\frac{1}{2}y} = 2,$$

ở đây đẳng thức cuối là hệ qủa của 1.1.17 (a).

1.1.21. Đặt $b(x) = \frac{f(x)}{x^\alpha}$. Khi đó,

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)\ln f(x) = \lim_{x\to 0^+}(\alpha g(x)\ln x + g(x)\ln b(x)) = \lim_{x\to 0^+}\alpha g(x)\ln x = \gamma.$$

1.1.22. Theo 1.1.17 (a),

$$\lim_{x\to 0} g(x)\ln f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(f(x)-1+1)}{f(x)-1}(f(x)-1) = \gamma.$$

1.1.23.

(a) Áp dụng kết quả trong 1.1.21 với

$$g(x) = x, \quad \alpha = 1/2 \quad \text{và} \quad f(x) = 2\sin\sqrt{x} + \sqrt{x}\sin\frac{1}{x}$$

và dùng đẳng thức $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln\sqrt{x} = 0$ (xem, chẳng hạn, 1.1.13). Giới hạn là 1.

(b) Đặt

$$f(x) = 1 + xe^{-\frac{1}{x^2}}\sin\frac{1}{x^4} \quad \text{và} \quad g(x) = e^{\frac{1}{x^2}},$$

và chú ý rằng $\lim\limits_{x\to 0} g(x)(f(x)-1) = 0$. Vậy, theo 1.1.22, giới hạn là 1.

(c) Như trong (b), có thể chỉ ra rằng giới hạn bằng $e^{\frac{\pi}{2}}$.

1.1.24. Không. Với α hữu tỷ dương cố định, xét hàm xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x = n\alpha,\ n\in\mathbb{N}, \\ 0 & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$$

Hàm này thoả mãn giả thiết của bài toán. Thực vậy, nếu $a \le 0$ và $a+k = n\alpha$ với $k, n\in\mathbb{N}$, thì không tồn tại $k', n' \in \mathbb{N}$ khác sao cho $a + k' = n'\alpha$. Vì nếu vậy, ta có $k - k' = (n-n')\alpha$, mâu thuẫn. Rõ ràng, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ không tồn tại.

1.1.25. Không. Xét hàm xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x = n\sqrt[n]{2},\ n\in\mathbb{N}, \\ 0 & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$$

Giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ không tồn tại, mặc dầu f thoả mãn tính chất đã cho trong bài toán. Thực vậy, nếu $a > 0$, và với $k, n \in \mathbb{N}$ nào đó, lấy $ak = n\sqrt[n]{2}$, thì không tồn tại $k', n' \in \mathbb{N}$ sao cho $a'k' = n\sqrt[n]{2}$. Vì nếu vậy, ta có

$$\frac{k}{k'} = \frac{n}{n'}2^{\frac{n'-n}{nn'}},$$

mâu thuẫn.

1.1.26. Không. Xét hàm xác định như trong lời giải của bài toán trước. Để thấy rằng hàm này thoả mãn điều kiện đã cho, giả sử a, b là các số dương và $a + bn = m\sqrt[m]{2}$, $a + bk = l\sqrt[l]{2}$ với $n, m, k, l \in \mathbb{N}$ nào đó sao cho $n \neq k, m \neq l$. Khi đó

$$(1) \qquad a = \frac{nl\sqrt[l]{2} - mk\sqrt[m]{2}}{n-k}, \quad b = \frac{m\sqrt[m]{2} - l\sqrt[l]{2}}{n-k}$$

Nếu tồn tại $p, q \in \mathbb{N}$ sao cho $p \neq n, p \neq k$ và $q \neq m, q \neq l$ và $a + bp = q\sqrt[q]{2}$, thì theo (1), ta có

$$m(p-k)\sqrt[m]{2} + l(n-p)\sqrt[l]{2},$$

mâu thuẫn.

1.1.27. Cố định $\varepsilon > 0$ tuỳ ý. Theo giả thiết, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$\frac{\left|f(x) - f(\frac{1}{2}x)\right|}{|x|} \quad \text{bất cứ khi nào } 0 < |x| < \delta.$$

Vì vậy, với $0 < |x| < \delta$,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)}{x}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(x) - f(\frac{1}{2^{n+1}}x)}{x}\right| \\
&\leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\frac{1}{2^{k-1}}\left|f(\frac{x}{2^{k-1}}) - f(\frac{1}{2^k})\right|}{\frac{x}{2^{k-1}}|x|} \\
&\leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^{k-1}}\varepsilon = 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

1.1.28. Đặt $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x+1) - f(x)) = l$ và đặt

$$M_x = \sup_{x\in[n,n+1)} f(x) \quad \text{và} \quad m_x = \inf_{x\in[n,n+1)} f(x).$$

Các dãy $\{M_n\}$ và $\{m_n\}$ được định nghĩa đúng với $n \geq [a] + 1$. Theo định nghĩa của supremum, với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại $\{x_n\}$ sao cho $x_n \in [n, n+1)$ và $f(x_n) > M_n - \varepsilon$. Khi đó

$$f(x_n + 1) - f(x_n) - \varepsilon < M_{n+1} - M_n < f(x_{n+1}) - f(x_{n+1} - 1) + \varepsilon,$$

và từ đó

$$l - \varepsilon \leq \varliminf_{n\to\infty} (M_{n+1} - M_n) \leq \varlimsup_{n\to\infty} (M_{n+1} - M_n) \leq l + \varepsilon.$$

Vì $\varepsilon > 0$ được chọn tuỳ ý, $\lim\limits_{n\to\infty} (M_{n+1} - M_n) = l$. Theo cùng cách như vậy, có thể chỉ ra $\lim\limits_{n\to\infty} (m_{n+1} - m_n) = l$. Từ định lý Stolz suy ra (cũng xem, chẳng hạn, I,2.3.2)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{m_n}{n+1} = l.$$

Do đó, với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại n_0 sao cho vớimọi $n > n_0$,

$$(*) \qquad -\varepsilon < \frac{m_n}{n+1} - l < \varepsilon \quad \text{và} \quad -\varepsilon < \frac{m_n}{n} - l < \varepsilon$$

Suy ra từ trên rằng nếu $l > 0$ thì $f(x) > 0$ với x đủ lớn. Vì vậy, nếu $n_x = [x]$, thì

$$\frac{m_{n_x}}{n_x + 1} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{M_{n_x}}{n_x}$$

Bây giờ, theo $(*)$, ta thấy với $x > n_0 + 1$,

$$-\varepsilon < \frac{m_{n_x}}{n_x + 1} - l \leq \frac{f(x)}{x} - l \leq \frac{M_{n_x}}{n_x} - l < \varepsilon.$$

Với $l < 0$, có thể chỉ ra rằng

$$\frac{m_{n_x}}{n_x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{M_{n_x}}{n_x + 1}$$

và tiến hành tương tự. Theo cách đó, khẳng định được chứng minh cho $l \neq 0$. Để chứng minh khẳng định cũng đúng cho $l = 0$, đặt $M_n = \sup\limits_{x\in[n,n+1)} |f(x)|$. Như trên, có thể tìm dãy $\{x_n\}$ sao cho

$$|f(x_n + 1)| - |f(x_n)| - \varepsilon < M_{n+1} - M_n < |f(x_{n+1})| - |f(x_{n+1} - 1)| + \varepsilon$$

và chỉ ra rằng $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{M_n}{n} = 0$. Do $\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq \frac{M_n}{n}$ với $x \in [n, n+1)$, ta nhận được $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

1.1.29. Với $n \geq [a]+1$, đặt $m_n = \inf\limits_{x\in[n,n+1)} f(x)$. Theo định nghĩa của infimum, với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại dãy $\{x_n\}$ sao cho $x_n \in [n, n+1)$ và $m_n \leq f(x_n) < m_n + \varepsilon$. Khi đó

$$f(x_{n+1}) - f(x_{n+1} - 1) < m_{n+1} - m_n + \varepsilon.$$

Bất đẳng thức trên suy ra $\lim\limits_{n\to\infty}(m_{n+1} - m_n) = \infty$. Theo định lý Stolz (cũng xem I,2.3.4), $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{m_n}{n} = +\infty$. Nếu $x \in [n, n+1)$, thì $\frac{f(x)}{x} \geq \frac{m_n}{n+1}$, suy ra $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

1.1.30. Dùng kí hiệu được đưa ra trong lời giải của bài tập 1.1.28, có thể chỉ ra rằng

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_{n+1} - M_n}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{m_{n+1} - m_n}{n^k} = l.$$

Bây giờ, theo định lý Stolz (xem, chẳng hạn, I,2.3.11),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1} \lim_{n\to\infty} \frac{M_{n+1} - M_n}{n^k}$$

và

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m_n}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1} \lim_{n\to\infty} \frac{m_{n+1} - m_n}{n^k}.$$

Để chứng minh khẳng định của bài toán, chỉ cần áp dụng lí luận tương tự như đã được sử dụng trong hai bài toán trước.

1.1.31. Đặt $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = l$ và chú ý rằng hàm $x \mapsto \ln(f(x))$ thoả mãn các giả thiết của bài toán 1.1.28. Vì vậy, ta có $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(f(x))}{x} = \ln l$. Từ đó

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x))^{\frac{1}{x}} = e^{\ln n} = l.$$

1.1.32. Không. Xét hàm xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x = \frac{1}{n},\ n \in 1, 2 \dots, \\ 0 & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$$

1.1.33. Không. Ta xét hàm xác định như sau

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x = \frac{1}{n\sqrt[n]{2}},\ n \in 1, 2, \dots, \\ 0 & \text{nếu ngược lại,} \end{cases}$$

và tiến hành như trong lời giải của 1.1.25.

1.1.34. Với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại $0 < \delta < 1$ sao cho nếu $0 < |x| < \delta$, thì

$$\left| f\left(x \left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right] \right) \right) \right| < \varepsilon$$

Bây giờ, lấy $n \in \mathbb{N}$ đủ lớn sao cho $\frac{1}{n} < \delta$. Với $0 < s < \frac{1}{n+1}$, đặt $x = \frac{1-s}{n}$. Khi đó

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1 - \frac{1}{n+1}}{n} < \frac{1-s}{n} = x < \frac{1}{n}.$$

Vậy $n < \frac{1}{x} < n+1$ và $[\frac{1}{x}] = n$. Hệ quả là,

$$x\left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right] \right) = x\left(\frac{1}{x} - n \right) = 1 - \frac{1-s}{n} n = s.$$

Cuối cùng, nếu $0 < s < \frac{1}{n+1}$, thì $|f(s)| = |f(x(\frac{1}{x} - [\frac{1}{x}]))| < \varepsilon$. Với $s < 0$, chứng minh tương tự.

1.1.35.

(a) Giả sử f đơn điệu tăng trên (a, b). Nếu $\{x_n\}$ là dãy giảm hội tụ tới x_0, thì $\{f(x_n)\}$ cũng đơn điệu giảm và bị chặn dưới bởi $f(x_0)$. Vậy (xem, chẳng hạn, I,2.1.1), $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f(x_n)$. Rõ ràng,

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} f(x_n) \geq \inf_{x \geq x_0} f(x).$$

Ngoài ra, với $x > x_0$ cho trước, tồn tại n sao cho $x_n < x$, và do đó, $f(x_n) \leq f(x)$. Từ đó

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} f(x_n) \leq \inf_{x \geq x_0} f(x).$$

Như vậy, ta đã chứng minh rằng nếu $\{x_n\}$ là dãy đơn điệu giảm tới x_0 thì

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \inf_{x > x_0} f(x).$$

Bây giờ giả sử $\{x_n\}$ hội tụ tới x_0 sao cho $x_n > x_0$. Khi đó (xem, chẳng hạn, I,2.4.29) x_n chứa dãy con đơn điệu giảm x_{n_k}. Theo trên,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{n_k}) = \inf_{x>x_0} f(x).$$

Nếu dãy $\{x_n\}$ chứa dãy con x_{n_k} sao cho $\lim\limits_{k\to\infty} f(z_{n_k}) \neq \inf\limits_{x>x_0} f(x)$, thì ta có thể tìm dãy con đơn điệu của nó mà không hội tụ tới $\inf\limits_{x>x_0} f(x)$, mâu thuẫn. Từ đây, suy ra

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \inf_{x>x_0} f(x).$$

Đáng chú ý ở đây phân tích trên chỉ ra rằng để xác định các giới hạn một phía, chỉ cần xét các dãy đơn điệu.
Suy luận tương tự được áp dụng cho các đẳng thức khác trong (a) và (b).

(c) Giả sử f đơn điệu tăng. Do $f(x) \geq f(x_0)$ với $x \geq x_0$, $f(x_0^+) = \inf\limits_{x>x_0} f(x) \geq f(x_0)$. Cũng như vậy, có thể chứng minh $f(x_0^-) = \sup\limits_{x>x_0} f(x) \leq f(x_0)$.

1.1.36.

(a) Suy ra từ lời giải của bài toán trước rằng

$$f(t) \leq f(x^-) \leq f(x) \quad \text{bất cứ khi nào} \quad a < x_0 < t < x.$$

Nếu $x \to x_0$, thì $t \to x_0^+$, và vì vậy

$$f(x_0^+) = \lim_{t\to x_0^+} f(t) \leq \varliminf_{x\to x_0^+} f(x^-)$$

và

$$\varlimsup_{x\to x_0^+} f(x^-) \leq f(x_0^+) = \lim_{x\to x_0^+} f(x).$$

Do đó, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x^-) = f(x_0^+)$.

(b) Lí luận tương tự như trong câu (a)

1.1.37. Điều kiện cần suy ra từ định nghĩa của giới hạn. Thật vậy, nếu $\lim_{x\to a} f(x) = l$, thì với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại $\delta > 0$ sao cho quan hệ $0 < |x-a| < \delta$ suy ra $|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$. Do đó,

$$|f(x) - f(x')| \leq |f(x-l)| + |f(x'-l)| < \varepsilon < \varepsilon.$$

Bây giờ ta chỉ ra điều kiện trên cũng là đủ. Giả sử điều kiện đó được thoả mãn và f không có giới hạn tại a. Lấy $\{x_n\}$ sao cho $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $x_n \neq a$ và $\{f(x_n)\}$ không hội tụ. Vì thế, $\{f(x_n)\}$ không là dãy Cauchy. Mặt khác, vì $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ nên tồn tại n_0 sao cho nếu $n, k \geq n_0$, thì $0 < |x_n - a| < \delta$ và $0 < |x_k - a| < \delta$. Từ giả thiết suy ra $|f(x_n) - f(x_k)| < \varepsilon$, mâu thuẫn.

Hoàn toàn tương tự, có thể chỉ ra rằng để giới hạn $\lim_{x\to\infty} f(x)$ tồn tại, điều kiện cần và đủ là : với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $M > 0$ sao cho $x, x' > M$ kéo theo $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

1.1.38. Gọi $\{x_n\}$ $x_n \neq a$, là dãy bất kì hội tụ tới a. Suy ra từ định nghĩa giới hạn của hàm tại a rằng $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Đặt $y_n = f(x_n)$. Vì $f(x) \neq A$ trong lân cận khuyết của a, $f(x_n) \neq A$ với n đủ lớn. Từ đó $\lim_{n\to\infty} g(y_n) = B$, hoặc tương đương, $\lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = B$. Điều này có nghĩa $\lim_{x\to a} g(f(x_n)) = B$.

1.1.39. Xét các hàm f và g được xác định như sau:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad x = \frac{1}{n},\ n = 1, 2, \dots, \\ \sin x & \text{nếu ngược lại,} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad y = 0, \\ \frac{\sin y}{y} & \text{nếu ngược lại,} \end{cases}$$

Khi đó

$$g(f(x)) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}, \quad \text{hoặc} \quad x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{\sin(\sin x)}{\sin x} & \text{nếu ngược lại,} \end{cases}$$

và $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ và $\lim_{x\to 0} g(y) = 1$, nhưng $\lim_{x\to 0} g(f(x))$ không tồn tại.

1.1.40. Do tính tuần hoàn của $x \mapsto f(x) - x$, $f(x+1) = f(x) + 1$. Vì vậy, với mọi số nguyên n, $f(x+n) = f(x) + n$, $x \in \mathbb{R}$. Vì mọi số thực x có thể được viết dưới dạng tổng phần nguyên và phần phân của nó (tức là $x = [x] + r$, ở đây $0 \le r < 1$), ta có

$$(*) \qquad f(x) = f(r) + [x].$$

Từ tính đơn điệu của f

$$f(0) \le f(r) \le f(1) = f(0) + 1 \quad \text{với} \quad 0 \le r < 1.$$

Ta có thể chứng minh bằng quy nạp rằng

$$f^n(0) \le f^n(r) \le f^n(0) + 1 \quad \text{với} \quad 0 \le r < 1 \quad \text{và} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Vì thế,

$$\frac{f^n(0)}{n} \le \frac{f^n(r)}{n} \le \frac{f^n(0)}{n} + \frac{1}{n}.$$

Các bất đẳng thức trên chứng minh khẳng định của ta trong trường hợp $0 \le x < 1$. Ngoài ra, theo $(*)$, $f^n(x) = f^n(r) + [x]$, nên khẳng định cũng đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

1.1.41. [6, trang 47]. Trước hết, quan sát rằng

$$\begin{aligned} x + f(0) &\le [x] + f(0) = f([x]) \le f(x) \\ &\le f(1 + [x]) = f(0) + [x] + 1 \\ &\le x + f(0) + 1. \end{aligned}$$

Bây giờ, ta chứng minh bằng quy nạp rằng với $n \in \mathbb{N}$,

$$(1) \qquad x + n(f(0) - 1) \le f^n(x) \le x + n(f(0) + 1).$$

Cố định n tuỳ ý và giả sử rằng (1) đúng. Khi đó, như trong lời giải của 1.1.40, ta nhận được

$$\begin{aligned} f^{n+1}(x) &= f(f^n(x)) = f([f^n(x)] + r) \\ &= [f^n(x)] + f(r) \le f^n(x) + f(1) \\ &\le x + n(f(0) + 1) + f(0) + 1 \\ &= x + (n+1)(f(0) + 1), \end{aligned}$$

ở đây $r = f^n(x) - [f^n(x)]$. Điều này chứng minh bất đẳng thức bên phải của (1). Theo cùng cách như vậy, ta có thể chứng minh bất đẳng thức bên trái. Lại dùng quy nạp, ta sẽ chứng minh rằng

(2) $$f^{n(m_p-1)}(0) \le np \le f^{nm_p}(0), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Với $n = 1$, bất đẳng thức suy ra từ định nghĩa của m_p. Giả sử bất đẳng thức cũng đúng cho số tự nhiên n cố định tuỳ ý. Khi đó

$$\begin{aligned} f^{(n+1)m_p}(0) &= f^{m_p}(f^{nm_p}(0)) \\ &\ge f^{m_p}(0 + n_p) = f^{m_p}(0) + n_p \\ &\ge p + n_p. \end{aligned}$$

Cũng như thế,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)(m_p-1)}(0) &= f^{m_p-1}(f^{n(m_p-1)}(0)) \le f^{m_p-1}(0 + n_p) \\ &= np + f^{m_p-1}(0) \\ &\le n_p + p. \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức (2) được chứng minh.

Mọi số nguyên dương n có thể được viết như $n = km_p + q$, ở đây $0 \le q < m_p$. Theo (1) và (2), ta có

$$\begin{aligned} kp = q(f(0) + 1) &\le f^q(kp) \le f^q(f^{km_p}(0)) \\ &= f^n(0) = f^{q+k}(f^{k(m_p-1)}(0)) \\ &\le f^{q+k}(kp) \le kp + (q + k)(1 + f(0)), \end{aligned}$$

Từ đó

(3) $$\frac{kp}{n} + \frac{q(f(0) - 1)}{n} \le \frac{f^n(0)}{n} \le \frac{kp}{n} + \frac{k + q}{n}(1 + f(0)).$$

Do $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k}{n} = \frac{1}{m_p}$ và $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q}{n} = 0$, bất đẳng thức cần chứng minh là hệ quả của (3).

1.1.42. [6, trang 47]. Chú ý rằng theo 1.1.40, chỉ cần chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f^n(0)}{n}$ tồn tại. Nếu $f(0) = 0$, thì giới hạn là 0. Bây giờ giả sử $f(0) > 0$. Thì hoặc với mọi p nguyên dương, tồn tại số nguyên n sao cho $f^n(0) > p$, hoặc tồn tại p nguyên dương sao cho $f^n(0) \le p$ với mọi $m \in \mathbb{N}$. Trong trường hợp sau, $\{f^n(0)\}$ là dãy bị chặn, do đó $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f^n(0)}{n} = 0$. Trường hợp đầu tiên, $\lim\limits_{p\to\infty} m_p = \infty$, ở đây m_p được xác định như trong 1.1.41. Chuyển qua giới hạn khi $p \to \infty$ trong các bất đẳng thức của 1.1.41, ta thấy $\lim\limits_{p\to\infty} \frac{p}{m_p}$ tồn tại, và do đó $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f^n(0)}{n}$ cũng tồn tại.

Trường hợp $f(0) < 0$, có thể chứng minh bất đẳng thức tương tự như (2) của bài toán trước, sau đó tiến hành tương tự.

1.2 Các tính chất của hàm liên tục

1.2.1. Hàm gián đoạn tại $x_0 \neq k\pi$, ở đây $k \in \mathbb{Z}$. Thực vậy, nếu $\{x_n\}$ là dãy các số vô tỷ hội tụ tới x_0, thì $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$. Mặt khác, nếu $\{z_n\}$ là dãy các số vô tỷ hội tụ tới x_0, thì do tính liên tục của hàm sin, $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin|z_n| = \sin|x_0| \neq 0$. Tương tự, có thể chỉ ra rằng f liên tục tại $k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

1.2.2. Như trong lời giải của bài toán trước, ta có thể chứng minh rằng f chỉ liên tục tại -1 và 1.

1.2.3.

(a) Trước hết quan sát rằng nếu $\{x_n\}$ hội tụ tới x, với $x_n = \frac{p_n}{q_n}$, ở đây $p_n \in \mathbb{Z}$ và $q_n \in \mathbb{N}$ nguyên tố cùng nhau, và $x_n \neq x$, $n \in \mathbb{N}$, thì $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{q_n} = 0 = f(x)$. Nếu $\{z_n\}$ là dãy các số vô tỷ hội tụ tới x, thì $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = 0 = f(x)$. Điều này có nghĩa f liên tục tại mọi điểm vô tỷ. Cũng như vậy, có thể chỉ ra rằng 0 là điểm liên tục của f. Giả sử bây giờ $x \neq 0$ và $x = \frac{p}{q}$, p và q nguyên tố cùng nhau. Nếu $\{x_n\}$ là dãy các số vô tỷ hội tụ tới x, thì $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \neq f(x)$. Do đó, f gián đoạn tại mọi điểm hữu tỷ khác 0.

(b) Giả sử $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ và gọi $\{z_n\}$ là dãy các số vô tỷ khác x tiến tới x. Thì $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = \lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |x|$. Nếu $\{x_n\}$ là dãy các số vô tỷ tiến tới x, thì theo chú ý ở đầu lời giải câu (a),

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n q_n}{q_n + 1} = x.$$

Điều này có nghĩa f liên tục tại mọi điểm vô tỷ dương và gián đoạn tại mọi điểm vô tỷ âm. Chứng minh tương tự, f liên tục tại 0.Bây giờ, gọi $0 \neq x = \frac{p}{q}$ (p, q nguyên tố cùng nhau). Khi đó

$$x_n = \frac{p}{q} \cdot \frac{(np+1)q+1}{(np+1)q}$$

hội tụ tới $\frac{p}{q}$. Chú ý rằng tử số và mẫu số của x_n là nguyên tố cùng nhau. Vì vậy

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{(np+1)pq+p}{(np+1)q^2+1} = \frac{p}{q} \neq \frac{p}{q+1}.$$

Vì vậy, hàm gián đoạn tại mọi điểm hữu tỷ khác không.

1.2.4. Gọi $f \in C([a,b])$ và gọi x_0 là điểm thuộc $[a,b]$.Với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại $\delta > 0$ sao cho nếu $x \in [a,b]$ và $0 < |x - x_0| < \delta$, thì $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Bây giờ, tính liên tục của $|f|$ tại x_0 suy ra từ bất đẳng thức hiển nhiên $||f(x)| - |f(x_0)|| \leq |f(x) - f(x_0)|$.
Hàm cho bởi

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{với} x \in \mathbb{Q} \cap [a,b], \\ -1 & \text{với} x \in [a,b] \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

gián đoạn tại mọi điểm thuộc $[a,b]$, mặc dầu $|f|$ là hàm hằng và vì vậy liên tục trên $[a,b]$.

1.2.5. Để f liên tục trên $\mathbb{R}$, điều kiện cần và đủ là

$$\lim_{x\to 2n^-} f(x) = \lim_{x\to 2n^+} f(x) \quad \text{và} \quad \lim_{x\to (2n-1)^-} f(x) = \lim_{x\to (2n-1)^+} f(x)$$

với mỗi $n \in \mathbb{Z}$. Từ đó

$$b_n + 1 = a_n \quad \text{và} \quad a_{n-1} = b_n - 1$$

Dùng quy nạp, $a_n = 2n + a_0$ và $b_n = 2n - 1 + a_0$, $a_0 \in \mathbb{R}$.

1.2.6. Do hàm lẻ, ta chỉ cần nghiên cứu tính liên tục của nó với $x \geq 0$. Rõ ràng, f liên tục tại $x \neq \sqrt{n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Bây giờ giả sử $n = k^2$ với k là số nguyên dương. Khi đó

$$\lim_{x \to k^+} f(x) = n \lim_{x \to k^+} \sin \pi x = 0$$

và

$$\lim_{x \to k^-} f(x) = (n-1) \lim_{x \to k^-} \sin \pi x = 0.$$

Từ đó, hàm cũng liên tục tại mọi $n = k^2$. Nếu $n \in \mathbb{N}$ không là bình phương của một số nguyên, thì

$$\lim_{x \to \sqrt{n}^+} f(x) = n \lim_{x \to \sqrt{n}^+} \sin \pi x = n \sin(\pi \sqrt{n})$$

và

$$\lim_{x \to \sqrt{n}^-} f(x) = (n-1) \sin(\pi \sqrt{n}).$$

Ta kết luận rằng f gián đoạn tại $x = \pm\sqrt{n}$ với $n \neq k^2$.

1.2.7. Ta có

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu} \quad x \in [\frac{1}{2}, 1), \\ n + (x-n)^n & \text{nếu} \quad x \in [n, n+1),\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Do đó, hàm liên tục tại $x \neq n$, $n \in \mathbb{N}$. Ngoài ra, $\lim\limits_{x \to n^+} f(x) = \lim\limits_{x \to n^-} f(x) = n = f(n)$. Vậy f liên tục trên $[\frac{1}{2}, \infty)$.

Bây giờ ta chỉ ra rằng f tăng thực sự trên $[1, \infty)$. Rõ ràng, f tăng thực sự trên mỗi khoảng $[n, n+1)$ Nếu $x_1 \in [n-1, n)$ và $x_2 \in [n, n+1)$ thì

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - n)^n + 1 - (x_1 - n + 1)^{n-1} > (x_2 - n)^n \geq 0.$$

Từ đó suy ra $f(x_2) - f(x_1) > 0$ với $x_2 \in [m, m+1)$ và $x_1 \in [n, n+1)$, nếu $m > n + 1$.

1.2.8.

(a) Ta có

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu} \quad x > 0, \\ 0 & \text{nếu} \quad x = 0, \\ -1 & \text{nếu} \quad x < 0. \end{cases}$$

Hàm này chỉ gián đoạn tại 0.

(b) Theo định nghĩa của f

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{nếu} \quad x \geq 0, \\ x & \text{nếu} \quad x < 0, \end{cases}$$

Hàm này liên tục trên $\mathbb{R}$.

(c) Ta có

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(e^n + x^n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n + \ln(1 + (x/e)^n)}{n}.$$

Do đó,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu} \quad 0 \leq x \leq e, \\ \ln x & \text{nếu} \quad x > e. \end{cases}$$

Hàm liên tục trên $[0, \infty)$.

(d) $f(x) = \max\{4, x^2, \frac{1}{x^2}\}$. Hàm liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(e) $f(x) = \max\{|\cos x|, |\sin x|\}$. Rõ ràng, f liên tục trên $\mathbb{R}$.

1.2.9. Gọi $T > 0$ là chu kỳ của f. Do tính liên tục của f trên $[0, T]$, tồn tại $x_* \in [0, T]$ và $x^* \in [0, T]$ sao cho $f(x_*) = \inf\limits_{x\in[0,T]} f(x)$ và $f(x^*) = \sup\limits_{x\in[0,T]} f(x)$. Điều cần chứng minh suy ra từ tính liên tục của f.

1.2.10. Vì P là đa thức bậc chẵn, ta có $\lim\limits_{x\to\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = +\infty$. Do vậy, với mọi $M > 0$, tồn tại $a > 0$ sao cho nếu $|x| > a$, thì $P(x) > M$. Gọi $x_0 \in [-a, , a]$ sao cho

$$P(x_0) = \inf_{x\in[-a,a]} P(x).$$

Nếu $P(x_0) \le M$, thì ta có thể đặt $x_* = x_0$. Nếu $P(x_0) > M$, lấy $b > 0$ sao cho $P(x) > P(x_0)$ với mọi $|x| > b$. Do tính liên tục, tồn tại $x_* \in [-b, b]$ sao cho $P(x_*) = \inf_{x\in[-b,b]} P(x)$.
Để chứng minh khẳng định thứ hai, quan sát rằng

$$\lim_{x\to-\infty} |P(x)| = \lim_{x\to\infty} |P(x)| = +\infty$$

và tiến hành tương tự.

1.2.11.

(a) Đặt
$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{nếu} \quad x \in (0,1), \\ 0 & \text{nếu} \quad x = 0 \text{ hoặc } x = 1, \end{cases}$$

(b) Với $n \in \mathbb{N}$, đặt
$$\mathbf{A}_n = \left\{0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \dots, \frac{2^n - 1}{2^n}\right\}$$

và $\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_1$, $\mathbf{B}_n = \mathbf{A}_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} \mathbf{A}_k = \mathbf{A}_n \setminus \mathbf{A}_{n-1}$. Rõ ràng, $\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbf{B}_k$. Xác định f như sau:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad x \in [0,1] \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}_k, \\ \frac{1}{2^n} - 1 & \text{nếu} \quad x \in \mathbf{B}_n,\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Với mọi a và b, $0 \le a < b \le 1$, $\inf_{x\in[a,b]} f(x) = -1$; f không nhận giá trị -1 trên $[a, b]$.

1.2.12. Trước hết quan sát rằng

(1) $$\omega_f(x_0, \delta_1) \le \omega_f(x_0, \delta_2) \quad \text{bất cứ khi nào} \quad 0 < \delta_1 < \delta_2.$$

Giả sử rằng $\lim_{\delta\to0^+} \omega_f(x_0, \delta) = 0$. Khi đó, với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại $\delta_0 > 0$ sao cho $\omega_f(x_0, \delta) < \varepsilon$ nếu $\delta < \delta_0$. Do đó, nếu $|x - x_0| < \delta < \delta_0$ thì $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, suy ra tính liên tục của f tại x_0.

Bây giờ, giả sử f liên tục tại x_0. Khi đó với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại

$\delta_0 > 0$ sao cho $|x - x_0| < \delta_0$ kéo theo $|f(x_0) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Từ đó, theo (1), nếu $0 < \delta < \delta_0$, thì

$$\omega_f(x_0, \delta) \leq \omega_f(x_0, \delta_0) < \varepsilon,$$

và do đó, $\lim\limits_{\delta \to 0^+} \omega_f(x_0, \delta) = 0$.

1.2.13.

(a) Gọi $x_0 \in [a, b]$ và $\varepsilon > 0$ được chọn tuỳ ý. Từ tính liên tục của hàm f và g rằng tồn tại $\delta > 0$ sao cho nếu $x \in [a, b]$ và $|x - x_0| < \delta$, thì

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon \quad \text{và} \quad g(x_0) - \varepsilon < g(x) < g(x_0) + \varepsilon.$$

Từ đó

$$\begin{aligned} (1) \qquad h(x) &< \min\{f(x_0) + \varepsilon, g(x_0) + \varepsilon\} \\ &= \min\{f(x_0), g(x_0)\} + \varepsilon = h(x_0) + \varepsilon \end{aligned}$$

và

$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon \geq h(x_0) - \varepsilon \quad \text{và} \quad g(x) > g(x_0) - \varepsilon \geq h(x_0) - \varepsilon.$$

Do đó,

$$(2) \qquad h(x) > h(x_0) - \varepsilon.$$

Tính liên tục của h tại x_0 suy ra từ (1) và (2). Cùng cách như vậy, có thể chứng minh H liên tục trên $[a, b]$.

(b) Như trong câu (a), ta có thể chỉ ra rằng $\max\{f_1, f_2, f_3\}$ và $\min\{f_1, f_2, f_3\}$ liên tục trên $[a, b]$. Tính liên tục của f suy ra từ

$$\begin{aligned} f(x) =& f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) - \max\{f_1(x), f_2(x), f_3(x)\} \\ & - \min\{f_1(x), f_2(x), f_3(x)\}. \end{aligned}$$

1.2.14. Vì f liên tục, các hàm m và M được xác định. Gọi x_0 là điểm thuộc $[a,b]$ và $\varepsilon > 0$. Do tính liên tục của f, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$\sup_{|h|<\delta} |f(x_0+h) - f(x)| < \varepsilon.$$

Từ định nghĩa của m suy ra

$$(1) \qquad m(x_0+h) - m(x_0) = \inf_{\zeta\in[a,x_0+h]} f(\zeta) - \inf_{\zeta\in[a,x_0]} f(\zeta) \le 0.$$

Quan sát rằng nếu cận dưới đúng thứ nhất đạt được tại một điểm trong $[a,x_0]$, thì đẳng thức ở (1) đúng. Vậy, giả sử $x_h \in [x_0, x_0+h]$ và

$$m(x_0+h) = \inf_{\zeta\in[a,x_0+h]} f(\zeta) = f(x_h).$$

Khi đó, với $|h| < \delta$,

$$m(x_0+h) - m(x_0) = f(x_h) - \inf_{\zeta\in[a,x_0]} f(\zeta) \ge f(x_h) - f(x_0) > -\varepsilon,$$

bởi vì $|x_h - x_0| \le |h| < \delta$. Vậy ta đã chỉ ra m liên tục tại mỗi $x_0 \in [a,b]$. Lí luận tương tự để chứng minh M liên tục trên $[a,b]$.

1.2.15. Do f bị chặn, các hàm m và M được xác định và bị chặn. Ngoài ra, m giảm trên $(a,b]$ và M tăng trên $[a,b)$. Với $x_0 \in (a,b)$, theo 1.1.35,

$$\lim_{x\to_0^-} m(x) = \inf_{\zeta\in(a,x_0)} m(\zeta) \ge m(x_0).$$

Nếu $\inf\limits_{\zeta\in(a,x_0)} m(\zeta) > m(x_0)$, thì tồn tại số dương d sao cho

$$\inf_{\zeta\in(a,x_0)} m(\zeta) = m(x_0) = d.$$

Vậy, với mọi $\zeta \in (a,x_0)$,

$$m(\zeta) = \inf_{a\le x<\zeta} f(x) \ge m(x_0) + d,$$

và do đó, $f(x) \ge m(x_0) + d$ với mọi $x \in [a,x_0)$, mâu thuẫn. Tóm lại, ta đã chứng minh $\lim\limits_{x\to x_0^-} m(x) = m(x_0)$. Tính liên tục trái của M chứng minh hoàn toàn tương tự.

1.2.16. Không. Xét hàm sau :

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{nếu} \quad x \in [0,1), \\ 1 & \text{nếu} \quad x \in [1,2), \\ 3 & \text{nếu} \quad x \in [2,3]. \end{cases}$$

Khi đó, m^* không liên tục trái tại $x_0 = 1$, và M^* không liên tục trái tại $x_1 = 2$.

1.2.17. Đặt $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$. Khi đó, cho trước $\varepsilon > 0$, tồn tại $M > a$ sao cho $|f(x) - l| < \varepsilon$ với $x > M$. Vậy nếu $x > M$ thì $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$. Rõ ràng, vì f liên tục nên nó bị chặn trên $[a, M]$.

1.2.18. Giả sử $\underline{\lim}\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Do tính liên tục của hàm f, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{với} \quad |x - a| < \varepsilon. \tag{1}$$

Từ định nghĩa giới hạn dưới, suy ra tồn tại $\{x_{n_k}\}$ sao cho $|x_{n_k} - a| < \delta$ bắt đầu từ giá trị k_0 nào đó của chỉ số k. Bây giờ, theo (1), ta có $|f(x_{n_k}) - f(a)| < \varepsilon$ với $k > k_0$. Vậy chúng ta đã chỉ ra rằng

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} f(x_n) \le f(\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n).$$

Ta chỉ ra ví dụ rằng bất đẳng thức này có thể ngặt. Lấy $f(x) = -x$, $x \in \mathbb{R}$ và $x_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Khi đó

$$-1 = \underline{\lim}_{n\to\infty} f(x_n) < f(\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n) = 1.$$

Hoàn toàn tương tự, có thể chỉ ra rằng

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} f(x_n) \ge f(\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n).$$

Ví dụ tương tự có thể dùng để chỉ ra bất đẳng thức này cũng ngặt.

1.2.19.

(a) Như đã chứng minh trong bài toán trước rằng với mọi dãy bị chặn $\{x_n\}$ và với mọi hàm liên tục f, bất đẳng thức sau đây đúng :

$$\varliminf_{n\to\infty} f(x_n) \le f(\varliminf_{n\to\infty} x_n)$$

và

$$\varlimsup_{n\to\infty} f(x_n) \ge f(\varlimsup_{n\to\infty} x_n).$$

Đặt $\varliminf_{n\to\infty} x_n = a$. Khi đó tồn tại dãy $\{x_{n_k}\}$ sao cho

$$(1) \qquad f(x_{n_k}) \le f(a) + \varepsilon$$

(xem lời giải của bài toán trước),. Rõ ràng, với n đủ lớn, ta có $x_n > a - \frac{\delta}{2}$. Từ đó, do tính đơn điệu và tính liên tục của f, ta nhận được

$$f(x_n) \ge f\left(a - \frac{\delta}{2}\right) > f(a) - \varepsilon.$$

Kết hợp với (1), được $\varliminf_{n\to\infty} f(x_n) = f(\varliminf_{n\to\infty} x_n)$.

(b) Chứng minh đẳng thức này tương tự (a).

1.2.20. Áp dụng 1.2.19 cho $-f$.

1.2.21. Chú ý rằng g được xác định và tăng trên $\mathbb{R}$.

(a) Theo bài 1.1.35,

$$(1) \qquad g(x_0^-) = \sup_{x<x_0} g(x) \le g(x_0).$$

Giả sử rằng $g(x_0^-) < g(x_0)$. Khi đó tồn tại số dương d sao cho $g(x_0^-) = g(x_0) - d$. Do đó, với mọi $x < x_0$,

$$\sup\{t : f(t) < x\} \le g(x_0) - d,$$

hoặc tương đương, $t \le g(x_0) - d$ nếu $f(t) < x$. Điều này suy ra $t \le g(x_0) - d$ nếu $f(t) < x_0$, tức là $g(x_0) = \sup\{t : f(t) < x_0\} \le g(x_0) - d$, mâu thuẫn.

(b) Hàm g có thể gián đoạn, như trong ví dụ sau đây. Nếu

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{với} \quad x < 1, \\ -x+2 & \text{với} \quad 1 \le x \le 2, \\ x-2 & \text{với} \quad x > 2, \end{cases}$$

thì

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{với} \quad x \le 0, \\ 2+x & \text{với} \quad x > 0. \end{cases}$$

1.2.22. Ta biết rằng tập $\left\{m + n\frac{T_1}{T_2} : m, n \in \mathbb{Z}\right\}$ là trù mật trong $\mathbb{R}$ (xem, chẳng hạn I, 1.1.15). Vậy, với $x \in \mathbb{R}$ cho trước, tồn tại dãy $\left\{m_k + n_k\frac{T_1}{T_2}\right\}$ hội tụ tới $\frac{x}{T_2}$. Dùng tính tuần hoàn và tính liên tục của f, ta nhận được

$$f(0) = \lim_{k\to\infty} f(m_kT_2 + n_kT_1) = f(x).$$

Gọi T_1 và T_2 là hai số không thông ước và đặt

$$\mathbb{W} = \{x \in \mathbb{R} : x = rT_1 + sT_2, \quad s, t \in \mathbb{Q}\}.$$

Xác định f bằng cách đặt

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{với} \quad x \in \mathbb{W}, \\ 0 & \text{với} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{W}. \end{cases}$$

Thì T_1 và T_2 là các chu kỳ của f.

1.2.23.

(a) Giả sử T_n, $n \in \mathbb{N}$, là các chu kỳ dương của f sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = 0$. Do f liên tục, với $x_0 \in \mathbb{R}$ và $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại $\delta > 0$ để

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{bất cứ khi nào} \quad |x - x_0| < \delta.$$

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = 0$, tồn tại n_0 sao cho $0 < T_{n_0} < \frac{\delta}{2}$. Khi đó, ít nhất một trong các số kT_{n_0} với $k \in \mathbb{Z}$ thuộc khoảng $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Từ đó

$$|f(x_0) - f(0)| = |f(x_0) - f(kT_{n_0})| < \varepsilon.$$

Suy ra từ tính tuỳ ý của $\varepsilon > 0$ và $x_0 \in \mathbb{R}$ rằng f là hằng, trái giả thiết.

(b) Hàm Dirchlet được xác định bằng cách đặt

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{với} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{với} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

là tuần hoàn. Mọi số hữu tỷ đều là chu kỳ của nó. Vì vậy, chu kỳ cơ bản không tồn tại.

(c) Giả sử tập tất cả các chu kỳ của f không trù mật trong $\mathbb{R}$. Khi đó tồn tại khoảng (a, b) không chứa bất cứ chu kỳ nào của f. Như trong câu (a), có thể chứng minh được rằng tồn tại chu kỳ T và một số nguyên k sao cho $kT \in (a, b)$. Mâu thuẫn.

1.2.24.

(a) Goi $x_0 \in \mathbb{R}$ là điểm liên tục của f. Vì f không là hàm hằng nên tồn tại $x_1 \neq x_0$ sao cho $f(x_1) \neq f(x_0)$. Nếu không tồn tại chu kỳ dương nhỏ nhất của f, thì sẽ có dãy $\{T_n\}$ các chu kỳ dương của f hội tụ tới không. Lấy $0 < \varepsilon < |f(x_1) - f(x_0)|$. Vì f liên tục tại x_0, nên tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$(1) \qquad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{bất cứ khi nào} \quad |x - x_0| < \delta.$$

Do $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = 0$, tồn tại chỉ số n_0 để $0 < T_{n_0} < \frac{\delta}{2}$. Vậy, ít nhất một trong các số kT_{n_0}, $k \in \mathbb{Z}$, thuộc vào khoảng $(x_0 - x_1 - \delta, x_0 - x_1 + \delta)$. Vì thế, $x_1 + kT_{n_0} \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ và theo (1),

$$|f(x_1) - f(x_0)| = |f(x_1 + kT_{n_0}) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Mâu thuẫn.

(b) Là hệ quả trực tiếp của (a).

1.2.25. Gọi T_1 và T_2 lần lượt là các chu kỳ dương của f và g. Giả sử $f \neq g$. Khi đó tồn tại x_0 sao cho $f(x_0) \neq g(x_0)$, hay nói cách khác,

$$(1) \qquad |f(x_0) - g(x_0)| = M > 0.$$

Với $0 < \varepsilon < \frac{M}{2}$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

(2) $$|f(x_0+h) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{bất cứ khi nào} \quad |h| < \delta.$$

Theo giả thiết, $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - g(x)) = 0$, tồn tại số ngguyên dương k sao cho, nếu $x \geq +kT_2$, thì

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Do đó, với mọi số nguyên dương m,

(3) $$|f(x_0 + kmT_2) - g(x_0 + kmT_2)| < \varepsilon.$$

Theo (2), (3) và tính tuần hoàn của f và g, ta có

(4) $$\begin{aligned}
&|f(x_0) - g(x_0)| \\
&= |f(x_0) - f(x_0 + kmT_2) + f(x_0 + kmT_2) - g(x_0 + kmT_2)| \\
&\leq |f(x_0) - f(x_0 + kmT_2)| + |f(x_0 + kmT_2) - g(x_0 + kmT_2)| \\
&= |f(x_0) - f(x_0 + kmT_2 - nT_1)| \\
&\quad + |f(x_0 + kmT_2) - g(x_0 + kmT_2)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

bất cứ khi nào

(5) $$|mkT_2 - nT_1| < \delta.$$

Tuy nhiên, vì $2\varepsilon < M$, (4) mâu thuẫn với (1) nếu tồn tại $m \in \mathbb{N}$ và $n \in \mathbb{Z}$ thoả mãn (5). Mặt khác, nếu $\frac{T_1}{T_2}$ là hữu tỷ, (5) rõ ràng được thoả mãn với số nguyên m và n nào đó. Nếu $\frac{T_1}{T_2}$ là vô tỷ, thì (5) cũng được thoả mãn (xem, chẳng hạn, I, 1.1.14).

1.2.26.

(a) Đặt $f(x) = \sin x$ và $g(x) = x - [x]$ với $x \in \mathbb{R}$. Khi đó, f và g tuần hoàn với các chu kỳ cơ bản lần lượt là 2π và 1. Vì vậy, không có chu kỳ nào của f thông ước với bất kỳ chu kỳ nào của g. Đặt $h = f + g$, thì ta sẽ có

$$\sin T + T - [T] = 0, \quad \sin(-T) - T - [-T] = 0.$$

Do đó, $(T - [T]) + (-T - [-T]) = 0$, suy ra $T - [T] = 0$. Điều này có nghĩa T là số nguyên, mâu thuẫn với $\sin T = 0$.

(b) [A.D.Kudriašov, A.S. Mešeriakov, Mathematics in School, 6(1969), 19-21 (Russian)]. Gọi α, β và γ là các số thực sao cho đẳng thức $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$ với $a, b, c \in \mathbb{Q}$ thoả mãn nếu và chỉ nếu $a = b = c = 0$. Tồn tại những số như vậy, chẳng hạn $\alpha = 1, \beta = \sqrt{2}$ và $\gamma = \sqrt{3}$. Định nghĩa

$$\mathbb{W} = \{a\alpha + b\beta + c\gamma : a, b, c \in \mathbb{Q}\}.$$

Xét hai hàm f và g cho bởi :

$$f(x) = \begin{cases} -b - c - b^2 + c^2 & \text{nếu} \quad x = a\alpha + b\beta + c\gamma \in \mathbb{W}, \\ 0 & \text{nếu} \quad x \notin \mathbb{W}, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} a + c + a^2 - c^2 & \text{nếu} \quad x = a\alpha + b\beta + c\gamma \in \mathbb{W}, \\ 0 & \text{nếu} \quad x \notin \mathbb{W}, \end{cases}$$

Chú ý rằng mọi số $r\alpha$, $r \in \setminus\{0\}$, là chu kỳ của f và mọi số $s\beta$, $s \in \setminus\{0\}$, là chu kỳ của g. ta sẽ chỉ ra rằng những hàm này không có chu kỳ nào khác. Nếu T là chu kỳ của f, thì $f(\beta + T) = f(\beta)$, và vì $f(\beta) = -2$, ta nhận được $\beta + T \in \mathbb{W}$. Do đó, $T \in \mathbb{W}$. Vì vậy, $T = r\alpha + s\beta + t\gamma$ với $r, s, t \in \mathbb{Q}$ nào đó. Vì rằng $f(T) = f(0)$, ta có $-s - t - s^2 + t^2 = 0$, hay tương đương, $(s + t)(1 + s - t) = 0$. Bây giờ ta chỉ ra rằng $1 + s - t \neq 0$. Thực vậy, nếu $1 + s - t = 0$, thì $T = r\alpha + s\beta + (1 + s)\gamma$. Sử dụng

$$f(x + T) = f(x), \tag{1}$$

với $x = -\gamma$, ta thu được $-s - s - s^2 + s^2 = 1 + 1$, hay $s = -1$. Vì vậy $T = r\alpha - \beta$. Bây giờ, thế $x = \beta$ vào (1) có $f(r\alpha) = f(\beta)$, và do đó, $0 = -1 - 1$, mâu thuẫn. Vậy ta đã chứng minh $1 + s - t \neq 0$. Từ đó suy ra $s + t = 0$. Do vậy, $T = r\alpha + s\beta - s\gamma$. Bây giờ, ta cần chỉ ra $s = 0$. Để làm vậy, ta lấy $x = \gamma$ trong (1), và có

$$-s + s - 1 - s^2 + (s - 1)^2 = -1 + 1,$$

suy ra $s = 0$. Hoàn toàn tương tự, có thể chứng minh các chu kỳ của g chỉ là các chu kỳ đã nói ở trên. Vậy, không có chu kỳ nào của f thông ước với bất kỳ chu kỳ nào của g. Bây giờ, chú ý rằng $h = g + f$ được cho bởi công thức

$$f(x) = \begin{cases} a - b + a^2 - b^2 & \text{nếu} \quad x = a\alpha + b\beta + c\gamma \in \mathbb{W}, \\ 0 & \text{nếu} \quad x \notin \mathbb{W}. \end{cases}$$

Như trên, có thể chứng minh rằng mọi chu kỳ của h là những số $t\gamma$, ở đây $t \in \mathbb{Q}$ và $t \neq 0$.

1.2.27. Giả sử rằng $h = f + g$ tuần hoàn với chu kỳ T. Vì $\frac{T_1}{T_2} \notin \mathbb{Q}$, ta thấy rằng hoặc $\frac{T}{T_2} \notin \mathbb{Q}$, hoặc $\frac{T}{T_2} \notin \mathbb{Q}$. Giả sử, chẳng hạn $\frac{T}{T_2} \notin \mathbb{Q}$. Do tính tuần hoàn của h, ta nhận được $f(x + T) + g(x + T) = h(x + T) = h(x) = f(x) + g(x)$ với $x \in \mathbb{R}$. Vì vậy, hàm H được xác định bằng cách đặt $H(x) = f(x+T) - f(x) = g(x) - g(x + T)$ liên tục và tuần hoàn với các chu kỳ không thông ước T_1 và T_2. Theo kết quả của bài 1.2.22, H là hàm hằng. Điều này có nghĩa tồn tại hằng số $c \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x + T) = f(x) + c$ với $x \in \mathbb{R}$. Giả sử $c \neq 0$. Thế $x = 0$ và sau đó $x = T$ vào đẳng thức cuối cùng, ta có

$$f(2T) = f(T) + c = f(0) + 2c.$$

Bằng quy nạp, có thể chứng minh $f(nT) = f(0) + nc$, mâu thuẫn với tính bị chặn của f (xem, chẳng hạn 1.2.9). Từ đó $c = 0$ và T là chu kỳ của f. Do đó, $T = nT_1$ với $n \in \mathbb{Z}$ nào đó, mâu thuẫn.

1.2.28. Chứng minh của kết quả này là cải biên của kết quả được cho trong lời giải của bài toán trước. Giả sử T_1 là chu kỳ cơ bản của f. Như trong bài toán trước, có thể chỉ ra rằng hàm H được cho bởi công thức

$$H(x) = f(x + T) - f(x) = g(x) - g(x + T)$$

đồng nhất bằng không. Vì vậy, T là chu kỳ chung của f và g, mâu thuẫn.

1.2.29. Giả sử, chẳng hạn, f đơn điệu tăng. Gọi x_0 là điểm gián đoạn của f. Theo kết quả của bài 1.1.35, $f(x_0^+) - f(x_0^-) > 0$. Điều này có nghĩa f gián đoạn đơn giản tại x_0. Với mỗi điểm x_0 như vậy, ta có thể kết hợp một khoảng $(f(x_0^-), f(x_0^+))$. Từ tính đơn điệu của f và từ kết quả trong 1.1.35, suy ra các khoảng kết hợp với các điểm gián đoạn khác nhau của f là rời nhau. Lấy một số hữu tỷ trên mỗi khoảng, ta có tương ứng một-một giữa tập các điểm gián đoạn của f và một tập con của $\mathbb{Q}$.

1.2.30. Vì f liên tục đều trên $[0,1]$, với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $2n > n_0$ và với $k = 1, 2, \ldots, 2n$ ta có

$$\left| f\left(\frac{k}{2n}\right) - f\left(\frac{k-1}{2n}\right) \right| < \varepsilon.$$

Vậy nếu $2n > n_0$. thì

$$|S_{2n}| = \left| \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k f\left(\frac{k}{2n}\right) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ngoài ra,

$$|S_{2n-1}| = \left| \frac{1}{2n+1} \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k f\left(\frac{k}{2n+1}\right) \right| \leq \frac{n}{2n+1}\varepsilon + \frac{1}{2n+1}|f(1)|.$$

Suy ra rằng

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right) = 0.$$

1.2.31. Như trong lời giải của bài toán trước, chú ý trước hết rằng f liên tục đều trên $[0,1]$. Từ đó, với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho nếu $n > n_0$ và $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, thì

$$\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k+1}{n}\right) \right| < \varepsilon.$$

Do đó, với $n > n_0$,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k+1}{n}\right) \right). \end{aligned}$$

Vì vậy

$$|S_n| < \frac{\varepsilon}{2^n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

1.2.32. Đặt $M = \lim_{r\to\infty} \sup_{x\geq r} f(x)$ và $m = \lim_{r\to\infty} \inf_{x\geq r} f(x)$. Giả sử $M > m$. Khi đó tồn tại số thực k sao cho $M > k > m$, và tồn tại a sao cho $f(a) > k$. Do tính liên tục của f, tồn tại $b > a$ sao cho $f(t) > k$ với mọi $t \in [a, b]$.

Lấy $p = \frac{ab}{b-a}$. Khi đó $\frac{x}{a} \geq \frac{x}{b} + 1$ bất cứ khi nào $x \geq p$. thực vậy,

$$\frac{x}{a} - \frac{x}{b} = x\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{x}{p} \geq 1.$$

Vì vậy, tồn tại số nguyên n_0 giữa $\frac{x}{b}$ và $\frac{x}{a}$; tức là, $\frac{x}{a} \geq n_0 \geq \frac{x}{b}$, hoặc tương đương $a \leq \frac{x}{n_0} \leq b$. Theo giả thiết,

$$f(x) = f\left(n_0 \frac{x}{n_0}\right) \geq f\left(\frac{x}{n_0}\right) \geq k$$

với mọi $x \geq p$, mâu thuẫn với định nghĩa của m. Do đó $m = M$, tức là $\lim_{x\to\infty} f(x)$ tồn tại và hữu hạn hoặc vô hạn.

1.2.33. Cho f lồi trên (a, b) và $a < s < u < v < t < b$. Từ giải thích hình học của tính lồi, suy ra rằng điểm $(u, f(u))$ nằm dưới đường thẳng qua $(s, f(s))$ và $(v, f(v))$. Điều này có nghĩa

$$f(u) \leq f(s) + \frac{f(v) - f(s)}{v - s}(u - s). \tag{1}$$

Tương tự, điểm $(v, f(v))$ nằm dưới đường thẳng qua $(u, f(u))$ và $(t, f(t))$. Vậy

$$f(v) \leq f(u) + \frac{f(t) - f(u)}{t - u}(v - u). \tag{2}$$

Các bất đẳng thức (1) và (2) suy ra

$$f(s) + \frac{f(u) - f(s)}{u - s}(v - s) \leq f(v) \leq f(u) + \frac{f(t) - f(u)}{t - u}(v - u).$$

Từ các bất đẳng thức trên và luật squeeze suy ra rằng, nếu $\{v_n\}$ là dãy hội tụ tới u từ bên phải, thì $\lim\limits_{n\to\infty} f(v_n) = f(u)$, tức là $\lim\limits_{x\to u^+} f(x) = f(u)$. Cũng như vậy, $\lim\limits_{x\to u^+} f(x) = f(u)$. Vậy tính liên tục của f tại mọi u trong (a,b) được chứng minh.

Ví dụ sau chỉ ra khảng định không đúng nếu khoảng không mở :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{nếu} \quad x \in [0,1), \\ 2 & \text{nếu} \quad x = 1. \end{cases}$$

1.2.34. Suy ra từ tính hội tụ đều của $\{f_n\}$ rằng, với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại n_0 sao cho

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{3}\varepsilon \quad \text{với} \quad n \geq n_0,\ x \in \mathbf{A}.$$

Cố định $a \in \mathbf{A}$. Do tính liên tục của f_{n_0} tại a, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| < \frac{1}{3}\varepsilon \quad \text{bất cứ khi nào} \quad |x - a| < \delta.$$

Vậy

$$|f(x) - f(a)| \leq |f_{n_0}(x) - f(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| + |f_{n_0}(a) - f(a)| < \varepsilon.$$

1.3 Tính chất giá trị trung gian

1.3.1. Lấy f xác định trên $[a,b]$ bằng cách đặt

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x-a} & \text{nếu} \quad a < x \leq b, \\ 0 & \text{nếu} \quad x = a. \end{cases}$$

Rõ ràng, f có tính chất giá trị trung gian trên $[a,b]$ nhưng nó gián đoạn tại a.

Bây giờ, ta xây dựng một hàm có tính chất giá trị trung gian và có vô hạn điểm gián đoạn. Kí hiệu $\mathbf{C}$ là *tập Cantor*. Nhắc lại rằng tập Cantor được xác định như sau. Chia đoạn $[0,1]$ thành ba phần bằng nhau, bỏ khoảng

$(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, và kí hiệu $\mathbf{E}_1$ là hợp các khoảng $[0, \frac{1}{3}]$ và $[\frac{2}{3}, 1]$. Bước thứ hai, ta bỏ các khoảng mở một phần ba ở giữa của hai khoảng còn lại và đặt

$$\mathbf{E}_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Tiến hành tương tự, ở bước thứ n, ta bỏ hợp tất cả các khoảng mở một phần ba ở giữa của 2^{n-1} khoảng còn lại và kí hiệu $\mathbf{E}_n$ là hợp của 2^n khoảng đóng, mỗi khoảng có độ dài 3^{-n}. Khi đó

$$\mathbf{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_n.$$

Chú ý rằng nếu (a_i, b_i), $i = 1, 2, \ldots$, là dãy các khoảng đã loại bỏ thì

$$\mathbf{C} = [0, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_i, b_i).$$

Xác định hàm g bằng cách đặt

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad x \in \mathbf{C}, \\ \frac{2(x-a_i)}{b_i - a_i} - 1 & \text{nếu} \quad x \in (a_i, b_i),\ i = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

Từ cách xây dựng tập Cantor, suy ra rằng mỗi khoảng $[a, b] \subset [0, 1]$ chứa một khoảng con mơ không giao với $\mathbf{C}$. Thực vậy, nếu (a, b) không có các điểm của $\mathbf{C}$, thì (a, b) là một trong các khoảng bị loại bỏ (a_i, b_i) hoặc khoảng con của nó. Nếu tồn tại $x \in (a, b) \cap \mathbf{C}$, thì có $n \in \mathbb{N}$ và $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 3^n - 1\}$ sao cho $x \in \left[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}\right] \subset (a, b)$. Khi đó, khoảng mở một phần ba ở giữa của $\left[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}\right]$, mà thực ra là một trong các khoảng (a_i, b_i), là một khoảng con mở không chứa các điểm của $\mathbf{C}$.

Hàm g gián đoạn tại mỗi điểm của $x \in \mathbf{C}$, và suy ra từ trên rằng g có tính chất giá trị trung gian.

1.3.2. Gọi $x_0 \in (a, b)$ tuỳ ý cố định. Từ tính đơn điệu của f, suy ra rằng

$$\sup_{a \le x < x_0} f(x) = f(x_0^-) \le f(x_0) \le f(x_0^+) = \inf_{x_0 < x \le b} f(x)$$

(xem, chẳng hạn, 1.1.35). Bây giờ giả sử rằng

$$f(x_0) < f(x_0^+).$$

Khi đó, tồn tại dãy giảm thực sự $\{x_n\}$, $x_n \in (x_0, b]$, hội tụ tới x_0 sao cho $\underset{n\to\infty}{f}(x_n) = f(x_0^+)$. Vì f tăng thực sự, $f(x_n) > f(x_0^+) > f(x_0)$. Theo tính chất giá trị trung gian, tồn tại $x' \in (x_0, x_n)$ sao cho $f(x') = f(x_0^+)$. Khi đó

$$\inf_{x_0<x<x'} f(x) \geq \inf_{x_0<x\leq b} f(x) = f(x').$$

Mặt khác, do tính đơn điệu thực sự của f, $\inf_{x_0<x<x'} f(x) < f(x')$, mâu thuẫn. Vậy ta đã chứng minh rằng $f(x_0) = f(x_0^+)$. Các đẳng thức $f(x_0^-) = f(x_0)$,$f(a) = f(a^+)$, và $f(b) = f(b^-)$ có thể được chứng minh theo cach hàn toàn tương tự.

1.3.3. Hàm g được xác định bởi $g(x) = f(x) - x$, $x \in [0, 1]$, là liên tục, và $f(0) = g(0) \geq 0$, và $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Vì g có tính chất giá trị trung gian, tồn tại $x_0 \in [0, 1]$ sao cho $g(x_0) = 0$.

1.3.4. Xét hàm $h(x) = f(x) - g(x)$, $x \in [a, b]$, và quan sát rằng $h(a) < 0$ và $h(b) > 0$. Theo tính chất giá trị trung gian, tồn tại $x_0 \in (a, b)$ sao cho $h(x_0) = 0$.

1.3.5. Xác định hàm g bằng cách đặt

$$g(x) = f\left(x + \frac{T}{2}\right) - f(x).$$

Khi đó g liên tục trên $\mathbb{R}$, $g(0) = f(\frac{T}{2}) - f(0)$, và $g(\frac{T}{2}) = f(0) - f(\frac{T}{2})$. Vậy tồn tại $x_0 \in [0, \frac{T}{2}]$ mà $g(x_0) = 0$.

1.3.6. Đặt

$$m = \min\{f(x_1, \dots, f(x_n)\} \quad \text{và} \quad M = \max\{f(x_1, \dots, f(x_n)\}.$$

Khi đó

$$m \leq \frac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)) \leq M.$$

Do đó, tồn tại $x_0 \in (a, b)$ sao cho

$$f(x_0) = \frac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)).$$

1.3.7.

(a) Đặt $f(x) = (1-x)\cos x - \sin x$. Khi đó $f(0) = 1$ và $f(1) = -\sin 1 < 0$. Vì vậy tồn tại $x_0 \in (0, 1)$ thoả mãn $f(x_0) = 0$.

(b) Ta biết rằng (xem, chẳng hạn, 1.1.12)

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}|P(x)| = 0 \quad \text{và} \quad \lim_{x\to-\infty} e^{-x}|P(x)| = +\infty.$$

Do đó, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $e^{-x}|P(x_0)| = 1$.

1.3.8. Ta hãy quan sát rằng

$$\operatorname{sgn} P(-a_l) = (-1)^l \quad \text{và} \quad \operatorname{sgn} P(-b_l) = (-1)^{l+1}, \quad l = 0, 1, \ldots, n.$$

Theo tính chất giá trị trung gian, tồn tại một nghiệm của đa thức P trong mọi khoảng $(-b_l, -a_l)$, $l = 0, 1, \ldots, n$.

1.3.9. Không. Xét, chẳng hạn, f và g được xác định như sau :

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x-a} & \text{nếu} \quad a < x \le b, \\ 0 & \text{nếu} \quad x = a, \end{cases}$$

và

$$g(x) = \begin{cases} -\sin\frac{1}{x-a} & \text{nếu} \quad a < x \le b, \\ 1 & \text{nếu} \quad x = a. \end{cases}$$

1.3.10. Đặt

$$g(x) = f(x+1) - f(x), \quad x \in [0, 1].$$

Khi đó, $g(1) = f(2) - f(1) = -g(0)$. Vì thế tồn tại $x_0 \in [0, 1]$ sao cho $f(x_0+1) = f(x_0)$. Vậy, ta có thể lấy $x_2 = x_0 + 1$ và $x_1 = x_0$.

1.3.11. Xét hàm

$$g(x) = f(x+1) - f(x) - \frac{1}{2}(f(2) - f(0)), \quad x \in [0,1],$$

và dùng lí luận tương tự như trong lời giải của bài toán trước.

1.3.12. Xác định hàm g theo công thức

$$g(x) = f(x+1) - f(x) \quad \text{với} \quad x \in [0, n-1].$$

Nếu $g(0) = 0$, thì $f(1) = f(0)$. Vậy giả sử, chẳng hạn, rằng $g(0) > 0$. Khi đó $f(1) > f(0)$. Nếu cũng thế $f(k+1) > f(k)$ với $k = 1, 2, \dots, n-1$, thì ta sẽ có

$$f(0) < f(1) < f(2) < \cdots < f(n) = f(0).$$

Mâu thuẫn. Suy ra tồn tại k_0 sao cho $g(k_0) > 0$ và $g(k_0 + 1) \leq 0$. Do g liên tục, tồn tại $x_0 \in (k_0, k_0 + 1]$ để $g(x_0) = 0$. Do đó, $f(x_0 + 1) = f(x_0)$. Lí luận tương tự khi $g(0) < 0$.

1.3.13. Hàm f có thể được thác triển trên $[0, \infty)$ để có chu kỳ n. Ta vẫn kí hiệu hàm được thác triển là f. Với $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ tuỳ ý cố định, xác định

$$g(x) = f(x+k) - f(x), \quad x \geq 0.$$

Bây giờ, ta chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in [0, kn]$ sao cho $g(0) > 0$. Nếu $g(j) > 0$ với mọi $j = 0, 1, 2, \dots, kn - k$, thì ta nhận được

$$f(0) < f(k) < f(2k) < \cdots < f(kn) = f(0).$$

Mâu thuẫn. Suy ra tồn tại j_0 sao cho $g(j_0) > 0$ và $g(j_0 + 1) \leq 0$. Do g liên tục, tồn tại $x_0 \in (j_0, j_0 + 1]$ để $g(x_0) = 0$. Do đó, $f(x_0 + k) = f(x_0)$. Trước hết giả sử $x_0 \in [(l-1)n, ln - k]$ với $1 \leq l \leq k$ nào đó. Từ tính tuần hoàn của f, suy ra $f(x_0) = f(x_0 - (l-1)n)$ và $f(x_0 + k) = f(x_0 - (l-1)n + k)$. Vì vậy, ta có thể lấy $x_k = x_0 - (l-1)n$ và $x'_k = x_0 - (l-1)n + k$. Nếu $x_0 \in [ln - k, ln]$, thì $x_0 + k \in [ln, (l+1)n]$. Ta có $f(x_0 - (l-1)n) = f(x_0) = f(x_0 + k) = f(x_0 - ln + k)$. Có thể lấy $x_k = x_0 - (l-1)n$ và $x'_k = x_0 - ln + k$.

Không đúng rằng với mọi $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, đều tồn tại x_k và x'_k sao cho $x_k - x'_k = k$ sao cho $f(x_k) = f(x'_k)$. Thực vậy, chỉ cần xét hàm

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \quad \text{với} \quad x \in [0, 4].$$

Dễ thấy rằng $f(x+3) \neq f(x)$ với mọi $x \in [0, 1]$.

1.3.14. Lời giải sau đây là của sinh viên của tôi egor Michalak.

Không mất tổng quát, có thể giả sử $f(0) = f(n) = 0$. Trường hợp $n = 1$ là rõ ràng. Vì giả sử $n > 1$. Ta sẽ xét trường hợp mà $f(1) > 0, f(2) > 0, \cdots, f(n-1) > 0$. Với $k =, \ldots, n-1$, ta đặt $g(x_k) = f(x+k) - f(x)$. Hàm g_k liên tục trên $[0, n-k]$, và theo giả thiết $g_k(0) > 0$ và $g_k(n-k) <$. Do đó, tồn tại $x_k \in [0, n-k]$ saoa cho $g_k(x_k) = 0$, hay nói cách khác, $f(x_k + k) = f(x_k)$. Điều này chứng minh khẳng định của ta trong trường hợp này. Theo cách hoàn toàn tương tự, ta có thể thấy khẳng định của ta cũng đúng nếu $f(1) < 0, f(2) < 0, \cdots, f(n-1) < 0$. Bây giờ giả sử $f(1) > 0$ (tương ứng $f() < 0$), các số $f(1), f(2), \cdots, f(n-1)$ khác nhau và khác không, và tồn tại m, $2 \leq m \leq n-1$, với $f(m) < 0$ (tương ứng $f(m) > 0$). Khi đó, tồn tại các số nguyên $k_1, k_2, \cdots, k_s$ giữa 1 và $n-2$ sao cho

$$\begin{aligned}
&f(1) > 0, f(2) > 0, \ldots, f(k_1) > 0,\\
&f(k_1+1) < 0, f(k_1+2) < 0, \ldots, f(k_2) > 0.\\
&\ldots\\
&f(k_s+1) < 0, f(k_s+2) < 0, \ldots, f(n-1) < 0\\
&(\text{hoặc}\, f(k_s+1) > 0, f(k_s+2) > 0, \ldots, f(n-1) < 0)
\end{aligned}$$

(tương ứng $f(1) < 0, f(2) < 0, \ldots, f(k_1) < 0, \ldots$). Bây giờ, lí luận tương tự như trong chứng minh của trường hợp thứ nhất, tồn tại k_1 nghiệm trong $[0, k_1+1]$, k_2 nghiệm trong $[k_1, k_2+1]$, vân vân. Rõ ràng trong trường hợp này, tất cả các nghiệm đó phải khác nhau và vì vậy khẳng định được chứng minh. Cuối cùng, xét trường hợp khi tồn tại số nguyên k và m ,$0 \leq k < m \leq n$, với

$f(k) = f(m)$. Cũng giả sử các số $f(k), f(k+1), \cdots, f(m-1)$ khác nhau. Từ trên suy ra có $m-k$ nghiệm trong khoảng $[k, m]$. Tiếp đó, xác định

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu} \quad 0 \le x \le k, \\ f(x+m-k) & \text{nếu} \quad k < x \le n-(m-k). \end{cases}$$

Rõ ràng, f_1 liên tục trên $[0, n-(m-k)]$ và $f_1(n-(m-k)) = f_1(0) = 0$. Nếu $f_1(0), f_1(1), \ldots, f_1(n-(m-k)-1)$ khác nhau, thì theo phần thứ nhất của chứng minh, ta nhận được $n-(m-k)$ nghiệm, và cùng với $m-k$ nghiệm ở trên, ta có điều phải chứng minh. Nếu một vài số trong các số $f_1(0), f_1(1), \ldots, f_1(n-(m-k)-1)$ trùng nhau, thủ tục trên có thể lặp lại.

1.3.15. Giả sử ngược lại, tức là phương trình $f(x) = g(x)$ không có nghiệm. Khi đó hàm $h(x) = f(x) - g(x)$ hoặc dương, hoặc âm. Từ đó

$$\begin{aligned} 0 &= h(f(x)) + h(g(x)) \\ &= f(f(x)) - g(f(x)) + f(g(x)) - g(g(x)) \\ &= f^2(x) - g^2(x). \end{aligned}$$

Mâu thuẫn.

Ví dụ sau chỉ ra giả sử liên tục là cốt yếu:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{nếu} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{nếu} \quad x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ \sqrt{2} & \text{nếu} \quad x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

1.3.16. Giả sử ngược lại rằng tồn tại x_1, x_2 và x_3 sao cho $x_1 < x_2 < x_3$ và, chẳng hạn, $f(x_1) > f(x_2)$ và $f(x_2) > f(x_3)$. Theo tính chất giá trị trung gian, với mọi u sao cho $f(x_2) < u < \min\{f(x_1), f(x_3)\}$, tồn tại $s \in (x_1, x_2)$ và $t \in (x_2, x_3)$ thoả mãn $f(s) = u = f(t)$. Do f là đơn ánh, $s = t$, mâu thuẫn với $x_1 < s < x_2 < t < x_3$.

1.3.17. Từ kết quả của bài toán trước, suy ra f hoặc giảm thực sự, hoặc tăng thực sự.

(a) Giả sử rằng f tăng thực sự và tồn tại x_0 sao cho $f(x_0) \neq 0$. Giả sử, chẳng hạn, $f(x_0) > x_0$. Khi đó $f^n(x_0) > x_0$, trái giả thiết. Lí luận tương tự cho trường hợp $f(x_0) < x_0$.

(b) Nếu f giảm thực sự, thì f^2 giảm thực sự. Do $f^n(x) = x$, ta nhận được $f^{2n}(x) = x$, tức là phép lặp thứ n của f^2 là phép đồng nhất. Vì vậy, theo (a), $f^2(x) = x$.

1.3.18. Chú ý rằng f là đơn ánh. Thực vậy, nếu $f(x_1) = f(x_2)$, thì $-x_1 = f^2(x_1) = f^2(x_2) = -x_2$. Từ đó, $x_1 = x_2$. Suy ra từ 1.3.16 rằng nếu f liên tục, thì nó hoặc tăng ngặt, hoặc giảm ngặt. Trong cả hai trường hợp, f^2 sẽ tăng ngặt. Mâu thuẫn.

1.3.19. Như trong lời giải của bài toán trước, có thể chỉ ra f là đơn ánh trên $\mathbb{R}$. Lí luận tương tự như trong lời giải của bài 1.3.16 rằng f hoặc tăng ngặt, hoặc giảm ngặt. Trong cả hai trường hợp, f^{2k}, $k \in \mathbb{N}$ tăng ngặt. Do đó, số nguyên n trong điều kiện $f^n(x) = -x$ phải lẻ. Nếu f tăng ngặt, thì f^n cũng tăng ngặt, mâu thuẫn với điều kiện của ta. Vậy, f giảm ngặt. Ngoài ra, do

$$f(-x) = f(f^n(x)) = f^n(f(x)) = -f(x),$$

ta thấy rằng f là hàm lẻ (và mọi phép lặp của f cũng vậy).

Bây giờ, ta sẽ chỉ ra rằng $f(x) = -x$, $x \in \mathbb{R}$. Giả sử rằng tồn tại x_0 sao cho $x_1 = f(x_0) > -x_0$, hay nói cách khác, $-x_1 < x_0$. Suy ra rằng $x_2 = f(x_1) < f(-x_0) = -x_1 < x_0$. Có thể chỉ ra bằng quy nạp rằng nếu $x_k = f(x_{k-1})$, thì $(-1)^n x_n < x_0$, mâu thuẫn với giả thiết $x_n = f^n(x_0) = -x_0$. Lí luận tương tự cho trường hợp $f(x_0) < -x_0$. Từ đó $f(x) = -x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

1.3.20. Giả sử f gián đoạn tại x. Khi đó tồn tại dãy $\{x_n\}$ hội tụ tới x sao cho $\{f(x_n)\}$ không hội tụ tới $f(x)$. Điều này có nghĩa tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho với mọi $k \in \mathbb{N}$, tồn tại $n_k > k$ để

$$|f(x_{n_k}) - f(x)| \geq \varepsilon.$$

Vậy $f(x_{n_k}) \geq f(x)+\varepsilon > f(x)$ hoặc $f(x_{n_k}) \leq f(x)-\varepsilon < f(x)$. Giả sử, chẳng hạn, bất đẳng thức thứ nhất đúng. Tồn tại số hữu tỷ q sao cho $f(x)+\varepsilon > q > f(x)$. Vậy $f(x_{n_k}) > q > f(x)$ với $k \in \mathbb{N}$. Do tính chất giá trị trung gian của f, tồn tại z_k giữa x và x_{n_k} sao cho $f(z_k) = q$, tức là $z_k \in f^{-1}(\{q\})$. Rõ ràng, $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = x$. Từ đó, $f^{-1}(\{q\})$ đóng, $x \in f^{-1}(\{q\})$, và vì vậy $f(x) = q$. Mâu thuẫn.

1.3.21. Để chứng minh định lí, chỉ cần xét trường hợp $T > 0$. Đặt $g(x) = f(x+T) - f(x)$. Khi đó, có hai khả năng.

(a) Tồn tại $x_0 > a$ sao cho $g(x)$ dương hoặc âm với mọi $x > x_0$.

(b) Không tồn tại x_0 như vậy.

Trong trường hợp (1), nếu chẳng hạn, g là dương trên (x_0, ∞), thì dãy $\{f(x_0+nT)\}$ đơn điệu tăng. Vì f bị chặn, giới hạn sau tồn tại và hữu hạn :

$$\lim_{n\to\infty} f(x_0+nT) = \lim_{n\to\infty} f(x_0+(n+1)T).$$

Vì vậy có thể lấy $x_n = x_0 + nT$. Trong trường hợp (2), do tính chất giá trị trung gian của g, với mọi số nguyên dương $n > a$, tồn tại $x_n > n$ sao cho $g(x_n) = 0$.

1.3.22. Đặt

$$g(x) = \begin{cases} x+2 & \text{nếu} \quad -3 \leq x \leq -1, \\ -x & \text{nếu} \quad -1 < x \leq 1, \\ x-2 & \text{nếu} \quad 1 < x \leq 3, \end{cases}$$

và xác định f bởi công thức

$$f(x) = g(x-6n) + 2n \quad \text{với} \quad 6n-3 \leq x \leq 6n+3,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Hàm f có tính chất cần tìm.

Không tồn tại hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ mà đạt mỗi giá trị của nó đúng hai lần. Giả sử ngược lại rằng f là hàm như vậy. Gọi x_1, x_2 sao cho $f(x_1) = f(x_2) = b$. Khi đó $f(x) \neq b$ với $x \neq x_1, x_2$. Vậy hoặc $f(x) > b$ với mọi $x \in (x_1, x_2)$ hoặc $f(x) < b$ với mọi $x \in (x_1, x_2)$. Trường hợp trước, tồn tại chỉ một $x_0 \in (x_1, x_2)$

sao cho $f(x_0) = \max\{f(x) : x \in [x_1, x_2]\}$. Thực vậy, nếu có hơn một điểm mà tại đó f đạt cực đại của nó trên $[x_1, x_2]$, thì f nhận giá trị của nó hơn hai lần trên $[x_1, x_2]$. Do đó, tồn tại chỉ một điểm x'_0 (bên ngoài khoảng $[x_1, x_2]$) sao cho $c = f(x_0) = f(x'_0) > b$. Khi đó, do tính chất giá trị trung gian của f, mọi giá trị trong (b, c) đạt được ít nhất ba lần. Mâu thuẫn. Lí luận tương tự cho trường hợp $f(x) < b$ với $x \in (x_1, x_2)$.

1.3.23. Giả sử rằng f đơn điệu ngặt trên mỗi khoảng $[t_{i-1}, t_i]$, ở đây $i = 1, 2, \dots, n$ và $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$. Tập $\mathbf{Y} = \{f(t_i) : 0 \le i \le n\}$ gồm nhiều nhất $n + 1$ đoạn $y_0, y_1, \dots, y_m$. Ta giả sử rằng $y_0 < y_1 < \ldots < y_m$. Đặt $z_{2i} = y_i, 0 \le i \le m$, và chọn $z_1, z_3, \dots, z_{2m-1}$ sao cho $z_0 < z_1 < z_2 < z_3 < \ldots < z_{2m-1} < z_{2m}$. Đặt

$$\mathbf{X}_k = \{x \in [0, 1] : f(x) = z_k\},$$
$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 \cup \mathbf{X}_1 \cup \cdots \cup \mathbf{X}_{2m} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\},$$

và đặt $0 = x - 1 < x_2 < \ldots < x_N = 1$. Với $1 \le j \le N$, kí hiệu k_j là phần tử duy nhất của tập hợp $\{0, 1, 2, \dots, 2m\}$ sao cho $f(x_j) = z_{k_j}$. Khi đó k_1 và k_N chẵn và $k_j - k_{j+1} = \pm 1$, $1 \le j < N$. Suy ra N, số các phần tử của tập $\mathbf{X}$, là lẻ. Do đó, một trong các tập $\mathbf{X}_k = f^{-1}(z_k)$ gồm một số lẻ phần tử.

1.3.24. Trước hết, ta chỉ ra rằng có không quá đếm được cực trị địa phương của f. Thực vậy, nếu $x_0 \in (0, 1)$ và $f(x_0)$ là cực đại (cực tiểu) thực sự của f, thì tồn tại khoảng $(p, q) \subset [0, 1]$ với các đầu mút hữu tỷ sao cho $f(x) < f(x_0)\,(f(x) < f(x_0))$với $x \neq x_0$ và $x \in (p, q)$. Do đó, khẳng định của ta được suy ra từ sự kiện chỉ có đếm được khoảng với đầu mút hữu tỷ.

Vì có không quá đếm dược cực trị địa phương thực sự của f, tồn tại y giữa $f(0)$ và $f(1)$ mà không là giá trị cực trị của f. Giả sử $f(0) < f(1)$ và đặt $f^{-1}(y) = \{x_1, x - 2, \dots, x_n\}$, ở đây $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Ngoài ra, đặt $x_0 = 0$ và $x_{n-1} = 1$. Khi đó, hàm $x \mapsto f(x) - y$ hoặc dương , hoặc âm trên mỗi khoảng (x_i, x_{i+1}), và có dấu khác nhau trong các khoảng kề nhau. Chú ý rằng hàm amm trong khoảng thú nhất và dương trong khoảng cuối cùng. Vì vậy, số các khoảng là lẻ. Do đó, n là lẻ.

1.3.25. Xác định dãy $\{x_n\}$ bằng cách đặt $x_n = f^n(x_0)$. Nếu có một số hạng của dãy là điểm cố định của f, thì $\{x_n\}$ là hằng số bắt đầu từ giá trị nào đó của chỉ số n. Vậy nó hội tụ. Nếu có một số hạng của dãy này là điểm giới hạn của nó, thì theo giả thiết, dãy cũng hội tụ như trên. Vì vậy, chỉ cần xét trường hợp không có số hạn nào của dãy $\{x_n\}$ là điểm giới hạn của nó. Giả sử ngược lại, dãy không hội tụ. Khi đó

$$a = \varliminf_{n\to\infty} x_n < b = \varlimsup_{n\to\infty} x_n.$$

Lấy $x_0 \in (a, b)$. Do x_{k_0} không là điểm giới hạn của $\{x_n\}$, tồn tại khoảng $(c, d) \subset (a, b)$ mà không chứa bất kì số hạng nào của dãy. Ngoài ra, có vô hạn số hạng của dãy trong mỗi khoảng $(-\infty, c)$ và (d, ∞). Nếu không có số hạng nào của dãy trong (a, b), thì ta có thể lấy $c = a$ và $d = b$. Bây giờ, ta xác định dãy con $\{x_{n_k}\}$ của $\{x_n\}$ sao cho $x_{n_k} < c$ và $x_{n_{k+1}} > d$ với $k \in \mathbb{N}$. Vì vậy, nếu g là điểm giới hạn của x_{n_k}, thì $g \le c$ và $f(g) \ge d$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết rằng mội điểm giới hạn của dãy là điểm cố định của f.

1.3.26. [6]. Theo kết qủa của 1.1.42, ta biết rằng $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f^n(0)}{n} = \alpha(f)$ tồn tại. Ta sẽ chỉ ra rằng tồn tại $x_0 \in [0, 1]$ sao cho $f(x_0) = x_0 + \alpha(f)$. Nếu $f(x) \ge x+\alpha(f)+\varepsilon$ với mọi $x \in [0, 1]$ và với $\varepsilon > 0$ nào đó, thì, nói riêng, $f(0) \ge \alpha(f)+\varepsilon$. Ta sẽ chỉ ra bằng quy nạp rằng với $n \in \mathbb{N}$, $f^n(0) \ge n(\alpha(f) + \varepsilon)$. Thực vậy, đặt $r = f(0) - [f(0)]$, ta có

$$\begin{aligned} f^2(0) &= f(f(0)) = f([f(0)] + r) = [f(0)] + f(r) \\ &\ge [f(0)] + r + \alpha(f) + \varepsilon = f(0) + \alpha(f) + \varepsilon \\ &\ge 2(\alpha(f) + \varepsilon). \end{aligned}$$

Lí luận tương tự để chứng minh rằng $f^n(0) \ge n(\alpha(f)+\varepsilon)$ kéo theo $f^{n+1}(0) \ge (n+1)(\alpha(f)+\varepsilon)$. Bây giờ, quan sát rằng nếu $f^n(0) \ge n(\alpha(f)+\varepsilon)$, thì $\alpha(f) \ge \alpha(f) + \varepsilon$, mâu thuẫn. Hoàn toàn tương tự, có thể chứng minh rằng nếu $f(x) \le x + \alpha(f) - \varepsilon$ với mọi $x \in [0, 1]$ và với $\varepsilon > 0$ nào đó, thì $\alpha(f) \le \alpha(f) - \varepsilon$. Lại mâu thuẫn. Do đó theo tính chất giá trị trung gian, tồn tại $x_0 \in [0, 1]$

sao cho $F(x_0) = f(x_0) - x_0 = \alpha(f)$. Nói riêng, nếu $\alpha(f) = 0$, thì x_0 là điểm cố định của f. Mặt khác, nếu x_0 là điểm cố định của f, thì $\alpha(f) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f^n(0)}{n} = 0$.

1.3.27. Gọi $\mathbf{A} = \{x \in [0,1] : f(x) \geq 0\}$, $s = \inf \mathbf{A}$, và $h = f + g$. Vì h giảm, ta có $h(s) \geq h(x) \geq g(x)$ với $x \in \mathbf{A}$. Do g liên tục, điều này suy ra $h(s) \geq g(s)$. Do đó, $f(s) \geq 0$. Từ giả thiết, suy ra $g(0) > h(0) \geq h(s) \geq g(s)$. Do tính chất giá trị trung gian của g, tồn tại $t \in (0, s]$ sao cho $g(t) = h(s)$. Khi đó $h(t) \geq h(s) = g(t)$, suy ra $f(t) \geq 0$. Theo định nghĩa của s, ta có $t = s$, suy ra $g(s) = h(s)$, hay tương đương $f(s) = 0$.

1.3.28. Chú ý rằng f không liên tục trên $\mathbb{R}$. Nếu f liên tục trên $\mathbb{R}$, thì theo kết quả trong 1.3.16, nó sẽ đơn điệu thực sự, chẳng hạn, tăng thực sự. Trong trường hợp đó, nếu $f(x_0) = 0$, ta có $f(x) > 0$ với $x > x_0$, và $f(x) < 0$ với $x < x_0$, mâu thuẫn với giả thiết f ánh xạ $\mathbb{R}$ lên $[0, \infty)$. Lí luận tương tự chỉ ra f không thể giảm thực sự. Do đó, f không liên tục trên $\mathbb{R}$.

Giả sử ngược lại rằng f có hữu hạn điểm gián đoạn, chẳng hạn, $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Khi đó f đơn điệu ngặt trên mỗi khoảng $(-\infty, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_n, \infty)$. Do đó, theo tính chất giá trị trung gian của f.

$$f((-\infty, x_1)), f((x_1, x_2)), \ldots, f((x_n, \infty))$$

là các khoảng mở đôi một rời nhau. Từ đó

$$[0, \infty) \setminus \left(f((-\infty, x_1)) \cup \bigcup_{k=1}^{n-1} f((x_k, x_{k+1})) \cup f((x_n, \infty)) \right)$$

có ít nhất $n + 1$ phần tử. Mặt khác, các phần tử duy nhất của

$$\mathbb{R} \setminus \left((-\infty, x_1)) \cup \bigcup_{k=1}^{n-1} (x_k, x_{k+1}) \cup (x_n, \infty) \right)$$

là $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Vì vậy, f không là song ánh, mâu thuẫn. Vậy, ta đã chứng minh f có vô hạn điểm gián đoạn.

1.3.29. Ta chỉ ra rằng nếu $\mathbf{I}$ là khoảng con của $(0, 1)$ với phần trong khác rỗng, thì $f(\mathbf{I}) = [0, 1]$. Để làm vậy, chú ý rằng khoảng $\mathbf{I}$ như thế chứa một khoảng con $(\frac{k}{2^{n_0}}, \frac{k+1}{2^{n_0}})$. Vậy chỉ cần chứng minh rằng $f(\frac{k}{2^{n_0}}, \frac{k+1}{2^{n_0}}) = [0,1]$. Bây giờ, quan sát rằng nếu $x \in (0,1)$, thì hoặc $x = \frac{m}{2^{n_0}}$ với m và n_0 nào đó, hoặc $x \in (\frac{j}{2^{n_0}}, \frac{j+1}{2^{n_0}})$ với j nào đó, $j = 0, 1, \ldots, 2^{n_0} - 1$. Nếu $x = \frac{m}{2^{n_0}}$, thì $f(x) = 1$ và giá trị của f tại điểm giữa của $(\frac{k}{2^{n_0}}, \frac{k+1}{2^{n_0}})$ cũng là 1. Tiếp đó, nếu $x \in (\frac{j}{2^{n_0}}, \frac{j+1}{2^{n_0}})$ với j nào đó, thì tồn tại $x' \in (\frac{k}{2^{n_0}}, \frac{k+1}{2^{n_0}})$ sao cho $f(x) = f(x')$. Thực vậy, mọi số trong $(\frac{k}{2^{n_0}}, \frac{k+1}{2^{n_0}})$ có cùng n_0 chữ số đầu tiên, và ta có thể tìm x' trong khoảng này để tất cả các chữ số còn lại như trong khai triển nhị phân của x. Vì

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sum\limits_{i=n_0+1}^{n} a_i}{n - n_0},$$

ta nhận được $f(x) = f(x')$. Do đó, chỉ cần chứng minh rằng $f((0,1)) = [0,1]$, hay nói cách khác, với mọi $y \in [0,1]$ tồn tại $x \in (0,1)$ sao cho $f(x) - y$. Suy từ trên rằng giá trị 1 đạt được, chẳng hạn, tại $x\frac{1}{2}$. Để chứng minh giá trị 0 cũng đạt được, lấy $x = .a_1, a_2, \ldots,$ ở đây

$$a_i = \begin{cases} 1 & \text{nếu} \quad i = 2^k,\ k = 1, 2, \ldots, \\ 0 & \text{ngược lại.} \end{cases}$$

Khi đó

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{2^k} = 0.$$

Để đạt được giá trị $y = \frac{p}{q}$, ở đây p và q là các số nguyên dương nguyên nguyeen tố cùng nhau, lấy

$$x = .\underbrace{00\ldots0}_{q-p}\underbrace{11\ldots1}_{p}\underbrace{00\ldots0}_{q-p}\ldots,$$

ở đây các cụm $q - p$ số không xen kẽ với các cụm p số 1. Khi đó $f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{kp}{kq} = \frac{p}{q}$. Bây giờ, ta phải chỉ ra rằng mọi số vô tỷ $y \in [0,1]$ cũng là những giá trị đạt được. Ta đã biết (xem, chẳng hạn, I, 1.1.14) rằng tồn tại dãy số hữu tỷ $\frac{p_n}{q_n}$, ở đây mỗi cặp số nguyên p_n và q_n là nguyên tố cùng nhau, hội tụ tới y. Đặt

$$x = .\underbrace{00\ldots0}_{q_1-p_1}\underbrace{11\ldots1}_{p_1}\underbrace{00\ldots0}_{q_2-p_2}\ldots,$$

ở đây cụm p_1 số 1 tiếp sau $q_1 - p_1$ số không, cụm p_2 số 1 tiếp sau $q_2 - p_2$ số không, và tiếp tục. Khi đó

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}{q_1 + q_2 + \cdots + q_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = y.$$

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = +\infty$, dẳng thức thứ hai suy trực tiếp từ kết quả trong I, 2.3.9 hoặc từ định lí Stolz (xem, chẳng hạn, I, 2.3.11).

1.4 Hàm nửa liên tục

1.4.1.

(a) Đặt $\sup\limits_{\delta>0} \inf\{f(x) : x \in \mathbf{A},\, 0 < |x - x_0| < \delta\} = a$. Trước hết, giả sử a là số thực. Chúng ta sẽ chỉ ra rằng $a = \varliminf\limits_{x\to x_0} f(x)$. Theo định nghĩa của suppremum, với mọi $\delta > 0$

(i) $$\inf\{f(x) : x \in \mathbf{A},\, 0 < |x - x_0| < \delta\} \le a,$$

và với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại δ^* sao cho

(ii) $$\inf\{f(x) : x \in \mathbf{A},\, 0 < |x - x_0| < \delta^*\} \ge a - \varepsilon.$$

Theo (ii),

(iii) $$f(x) - a > a - \varepsilon \quad \text{nếu} \quad 0 < |x - x_0| < \delta^*.$$

Bây giờ, gọi $\{x_n\}$ là dãy điểm của $\mathbf{A}$ khác x_0. Nếu dãy hội tụ tới x_0, thì bắt đầu từ giá trị nào đó của chỉ số n, $0 < |x_n - x_0| < \delta^*$. Vì vậy, $f(x_n) > a - \varepsilon$. Nếu $\{f(x_n)\}$ hội tụ, chẳng hạn tới y, thì ta nhận được $y \ge a - \varepsilon$, và do đó, $\varliminf\limits_{x\to x_0} f(x) \ge a$. Để chứng minh rằng $\varliminf\limits_{x\to x_0} f(x) \le a$, ta sẽ dùng (i). Suy ra từ định nghĩacủa infimum rằng, với $\varepsilon_1 > 0$ cho trước, tồn tại $x^* \in \mathbf{A}$ sao cho $0 < |x - x_0| < \delta^*$ và $f(x^*) < a + \varepsilon_1$. Lấy $\delta = \frac{1}{n}$, ta nhận được dãy $\{x_n^*\}$ sao cho

$$0 < |x_n^*| < \frac{1}{4} \quad \text{và} \quad f(x_n^*) < a + \varepsilon_1.$$

Kết hợp với (iii), thu được $a-\varepsilon < f(x_n^*) < a+\varepsilon_1$. Không mất tổng quát, có thể giả sử rằng $\{f(x_n^*)\}$ hội tụ. Khi đó, giới hạn nhỏ hơn hoặc bằng $a+\varepsilon$. Từ tính tuỳ ý của $\varepsilon_1 > 0$ suy ra

$$\varliminf_{x\to x_0} f(x) \le a.$$

Nếu $a = +\infty$, thì với $M > 0$ cho trước, tồn tại $\delta^* > 0$ sao cho

$$\inf\{f(x) : x \in \mathbf{A},\ 0 < |x-x_0| < \delta^*\} > M.$$

Từ đó, nếu $0 < |x-x_0| < \delta^*$, thì $f(x) > M$. Do đó, nếu $\{x_n\}$ hội tụ tới x_0, thì bắt đầu từ một chỉ số nào đó của n, $f(x_n) > M$. Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = +\infty$, tức là $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = \varliminf\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$. Cuối cùng, nếu $a = -\infty$, thì với mọi $\delta > 0$,

$$\inf\{f(x) : x \in \mathbf{A},\ 0 < |x-x_0| < \delta\} = -\infty.$$

Vì vậy, tồn tại dãy $\{x_n^*\}$ hội tụ tới x_0 sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n^*) = -\infty$, suy ra $\varliminf\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

(b) Chứng minh tương tự như trong (a).

1.4.2. Kết quả là hệ quả trực tiếp của 1.1.35 và bài toán trước.

1.4.3. Suy ra từ kết quả của bài toán trước rằng với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$0 \le y_0 - \inf\{f(x) : x \in \mathbf{A},\ 0 < |x-x_0| < \delta\} < \varepsilon.$$

Theo định nghĩa của infimum, điều này tương đương với điều kiện (i) và (ii).

Theo 1.4.2(b), $\tilde{y} = \varlimsup\limits_{x\to x_0} f(x)$ nếu và chỉ nếu với mọi $\varepsilon > 0$, các điều kiện sau được thoả mãn :

(1) Tồn tại $\delta > 0$ sao cho $f(x) < \tilde{y} + \varepsilon$ với mọi $x \in \mathbf{A}$ trong lân cận khuyết $0 < |x-x_0| < \delta$.

(2) Với mọi $\delta > 0$, tồn tại $x' \in \mathbf{A}$ trong lân cận khuyết $0 < |x' - x_0| < \delta$ để $f(x') > \tilde{y} - \varepsilon$.

1.4.4.

(a) Theo 1.4.2(a), $\underline{\lim}_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ nếu và chỉ nếu với mọi $\delta > 0$

$$\inf\{f(x) : x \in \mathbf{A},\, 0 < |x - x_0| < \delta\} = -\infty.$$

Điều này có nghĩa với mọi $\delta > 0$, tập

$$\{f(x) : x \in \mathbf{A},\, 0 < |x - x_0| < \delta\}$$

không bị chặn dưới, suy ra điều phải chứng minh.

(b) Chứng minh tương tự như (a).

1.4.5. Gọi $\{\delta_n\}$ là dãy các số dương đơn điệu giảm, hội tụ tới không. Suy từ 1.4.2(a) rằng

$$l = \lim_{n \to \infty} \inf\{f(x) : x \in \mathbf{A},\, 0 < |x - x_0| < \delta_n\}.$$

với số thực l, điều này tương đương với hai điều kiện sau

(1) Với $n \in \mathbb{N}$, tồn tại $k_n \in \mathbb{N}$ sao cho $0 < |x - x_0| < \delta_k$ kéo theo $f(x) > l - \frac{1}{n}$ với $k > k_n$.

(2) Với $n \in \mathbb{N}$, tồn tại $k_n > n$ và $x_{k_n} \in \mathbf{A}$ sao cho $0 < |x_{k_n} - x_0| < \delta_{k_n}$ và $f(x_{k_N}) < l + \frac{1}{n}$.

Do đó, tồn tại dãy $\{x_{k_n}\}$ hội tụ tới x_0 sao cho $\lim_{n \to \infty} f(x_{k_n}) = l$.

Nếu $\underline{\lim}_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, thì theo 1.4.4(a), với mọi $n \in \mathbb{N}$ và $\delta > 0$, tồn tại $x_n \in \mathbf{A}$ sao cho $0 < |x_n - x_0| < \delta$ và $f(x_n) < -n$. Vì vậy, $\lim_{x \to x_0} x_n = +\infty$ và $\lim_{x \to x_0} f(x_n) = -\infty$.

Nếu $\underline{\lim}_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, thì sự tồn tại của $\{x_n\}$ suy ra trực tiếp từ định nghĩa.

1.4.6. Kết qủa suy ra trực tiếp từ I, 1.1.2 và từ 1.4.1.

1.4.7. Chỉ cần áp dụng I, 1.1.4 và 1.4.1.

1.4.8. Chú ý rằng

$$\inf_{x\in\mathbf{A}}(f(x)+g(x)) \geq \inf_{x\in\mathbf{A}} f(x) + \inf_{x\in\mathbf{A}} g(x), \tag{1}$$

$$\sup_{x\in\mathbf{A}}(f(x)+g(x)) \geq \sup_{x\in\mathbf{A}} f(x) + \sup_{x\in\mathbf{A}} g(x). \tag{2}$$

Thật vậy, với $x \in \mathbf{A}$,

$$f(x)+g(x) \geq \inf_{x\in\mathbf{A}} f(x) + \inf_{x\in\mathbf{A}} g(x),$$

suy ra (1). Bất đẳng thức (2) được chứng minh tương tự.

Trước hết, ta chỉ ra rằng

$$\underline{\lim}_{x\to x_0} f(x) + \underline{\lim}_{x\to x_0} g(x) \leq \underline{\lim}_{x\to x_0} (f(x)+g(x)). \tag{3}$$

Theo (1), ta có

$$\begin{aligned} &\inf\{f(x)+g(x) : x\in\mathbf{A},\, 0<|x-x_0|<\delta\} \\ &\quad\geq \inf\{f(x) : x\in\mathbf{A},\, 0<|x-x_0|<\delta\} \\ &\quad+ \inf\{g(x) : x\in\mathbf{A},\, 0<|x-x_0|<\delta\} \end{aligned}$$

Chuyển qua giới hạn khi $\delta \to 0^+$ và kết quả của 1.4.2(a) sẽ có (3). Bất đẳng thức

$$\overline{\lim}_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) \leq \overline{\lim}_{x\to x_0} f(x) + \overline{\lim}_{x\to x_0} g(x) \tag{4}$$

có thể được chứng minh tương tự. Hơn nữa, suy ra từ bài 1.4.6 và (3) rằng

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{x\to x_0} f(x) &= \underline{\lim}_{x\to x_0} (f(x)+g(x)-g(x)) \\ &\geq \underline{\lim}_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) + \underline{\lim}_{x\to x_0} (-g(x)) \\ &= \underline{\lim}_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) - \overline{\lim}_{x\to x_0} g(x). \end{aligned}$$

Có thể chứng minh theo cùng cách như vậy rằng

$$\varliminf_{x\to x_0} f(x) + \varlimsup_{x\to x_0} g(x) \le \varlimsup_{x\to x_0} (f(x) + g(x)).$$

Để chứng minh các bất đẳng thức có thể ngặt, xét các hàm xác định như sau
:

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{nếu} \quad x > 0, \\ 0 & \text{nếu} \quad x \le 0, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad x \ge 0, \\ \sin\frac{1}{x} & \text{nếu} \quad x < 0. \end{cases}$$

Với $x_0 = 0$, các đẳng thức đã cho có dạng $-2 < -1 < 0 < 1 < 2$.

1.4.9. Quan sát rằng nếu f và g không âm trên $\mathbf{A}$, thì

$$\text{(1)} \qquad \inf_{x\in\mathbf{A}} (f(x)\cdot g(x)) \ge \inf_{x\in\mathbf{A}} f(x) \cdot \inf_{x\in\mathbf{A}} g(x),$$

$$\text{(2)} \qquad \sup_{x\in\mathbf{A}} (f(x)\cdot g(x)) \ge \sup_{x\in\mathbf{A}} f(x) \cdot \sup_{x\in\mathbf{A}} g(x)$$

Phần còn lại của chứng minh tương tự như trong lời giải của bài toán trước. Để thấy rằng bất đẳng thức có thể ngặt, xét các hàm được cho bởi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sin^2\frac{1}{x}+1} & \text{nếu} \quad x > 0, \\ 2 & \text{nếu} \quad x \le 0, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 3 & \text{nếu} \quad x \ge 0, \\ \frac{1}{\sin^2\frac{1}{x}+1} & \text{nếu} \quad x < 0. \end{cases}$$

Với $x_0 = 0$, các đẳng thức đã cho có dạng $\frac{1}{4} < 1 < \frac{3}{2} < 3 < 6$.

1.4.10. Ta có $\varliminf_{x\to x_0} f(x) = \varlimsup_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)$. Vậy, theo 1.4.8,

$$\varliminf_{x\to x_0} f(x) + \varliminf_{x\to x_0} g(x) \le \varliminf_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) \le \varlimsup_{x\to x_0} f(x) + \varliminf_{x\to x_0} g(x).$$

Vì vậy,

$$\varliminf_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \varliminf_{x\to x_0} g(x).$$

Các bất đẳng thức khác có thể được chứng minh tương tự.

1.4.11. Nếu $\lambda = l$ hoặc $\lambda = L$, thì khẳng định được suy ra trực tiếp từ 1.4.5. Vậy giả sử rằng $\lambda \in (l, L)$. Khi đó, theo 1.4.5, tồn tại dãy $\{x'_n\}$ và $\{x''_n\}$ đều hội tụ đến a sao cho

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = l \quad \text{và} \quad \lim_{n\to\infty} f(x''_n) = L.$$

Suy ra rằng $f(x'_n) < \lambda < f(x''_n)$ bắt đầu từ giá trị nào đó của chỉ số n. Vì f liên tục, nó có tính chất giá trị trung gian. Từ đó, tồn tại x_n trong khoảng với các điểm mút x'_n và x''_n sao cho $f(x_n) = \lambda$. Vì $\{x'_n\}$ và $\{x''_n\}$ hội tụ tới a, dãy $\{x_n\}$ cũng vậy.

1.4.12. Hàm liên tục tại $k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$ (xem, chẳng hạn, 1.2.1). Rõ ràng,

$$\overline{\lim_{x\to x_0}} f(x) = \begin{cases} \sin x_0 & \text{nếu} \quad \sin x_0 > 0, \\ 0 & \text{nếu} \quad \sin x_0 \le 0, \end{cases}$$

và

$$\underline{\lim_{x\to x_0}} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad \sin x_0 > 0, \\ \sin x_0 & \text{nếu} \quad \sin x_0 \le 0, \end{cases}$$

Do đó, f nửa liên tục trên trên tập

$$\left(\mathbb{Q} \cap \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (2k\pi, (2k+1)\pi)\right) \cup \left((\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \cap \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [(2k-1)\pi, 2k\pi]\right)$$

và nửa liên tục dưới trên

$$\left(\mathbb{Q} \cap \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} ((2k-1)\pi, 2k\pi)\right) \cup \left((\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \cap \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi]\right).$$

1.4.13. Ta có

$$\overline{\lim_{x\to x_0}} f(x) = \begin{cases} x_0^2 - 1 & \text{nếu} \quad x_0 < -1 \text{hoặc} x_0 > 1, \\ 0 & \text{nếu} \quad x_0 \in [-1, 1], \end{cases}$$

và

$$\underline{\lim_{x\to x_0}} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad x_0 < -1 \text{hoặc} x_0 > 1, \\ x_0^2 - 1 & \text{nếu} \quad x_0 \in [-1, 1]. \end{cases}$$

Vậy f nửa liên tục trên tại mỗi điểm hữu tỷ trong $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ và tại mỗi điểm hữu tỷ trong khoảng $[-1,1]$; f nửa liên tục dưới tại mỗi điểm hữu tỷ trong $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$ và tại mỗi điểm hữu tỷ trong $(-1,1)$.

1.4.14. Hàm f liên tục tại 0 và tại mỗi điểm vô tỷ (xem, chẳng hạn, 1.2.3). Giả sử rằng $0\neq x_0=\frac{p}{q}$, ở đay $p\in\mathbb{Z}$ và $q\in\mathbb{N}$ nguyên tố cùng nhau. Khi đó, $f(x_0)=\frac{1}{q}$ và $\varlimsup\limits_{x\to x_0} f(x)=0<\frac{1}{q}$. Từ đó, f nửa liên tục trên trên $\mathbb{R}$

1.4.15.

(a) Hàm f liên tục tại 0 và tại mỗi điểm vô tỷ dương (xem, chẳng hạn, 1.2.3). Giả sử rằng x_0 là số vô tỷ âm. Khi đó $\varlimsup\limits_{x\to x_0} f(x)=|x|=f(x_0)$. Vì vậy, f nửa liên tục trên tại 0 và tại mỗi điểm vô tỷ. Nếu $x_0=\frac{p}{q}>0$, thì $\varliminf\limits_{x\to x_0} f(x)=\frac{p}{q}>\frac{p}{q+1}=f(x_0)$. Điều này có nghĩa f nửa liên tục dưới tại mỗi điểm hữu tỷ dương. Nếu $x_0=\frac{p}{q}$, thì

$$\varlimsup_{x\to x_0} f(x)=-\frac{p}{q}>\frac{p}{q+1}=f(x_0)$$

và

$$\varliminf_{x\to x_0} f(x)=\frac{p}{q}>\frac{p}{q+1}=f(x_0).$$

Vậy f không nửa liên tục trên, cũng không nửa liên tục dưới tại các điểm hữu tỷ âm.

(b) Chú ý rằng với $x\in(0,1]$,

$$\varliminf_{t\to x} f(t)=-x<f(x)<x=\varlimsup_{t\to x} f(t).$$

Vậy f không nửa liên tục dưới, cũng không nửa liên tục trên trên $(0,1]$.

1.4.16.

(a) Nếu $x_0\in\mathbf{A}$ là điểm cô lập trong $\mathbf{A}$, thì khẳng định hiển nhiên đúng. Nếu $x_0\in\mathbf{A}$ là điểm giới hạn của $\mathbf{A}$, thì khẳng định suy ra từ

$$\varlimsup_{x\to x_0} af(x)=\begin{cases} a\varlimsup\limits_{x\to x_0} f(x) & \text{nếu}\quad a>0,\\ a\varliminf\limits_{x\to x_0} f(x) & \text{nếu}\quad a<0,\end{cases}$$

(b) Giả x_0 là điểm giới hạn của $\mathbf{A}$ và, chẳng hạn, f và g nửa liên tục dướitại x_0. Khi đó, theo 1.4.8,

$$\varliminf_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) \geq \varliminf_{x\to x_0} f(x) + \varliminf_{x\to x_0} g(x) \geq f(x_0)+g(x_0).$$

1.4.17. Giả sử, chẳng hạn, rằng f_n nửa liên tục dưới tại x_0. Vì $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n \geq f_n$ với $n\in\mathbb{N}$, ta nhận được

$$\varliminf_{x\to x_0} \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \geq \varliminf_{x\to x_0} f_n(x) \geq f_n(x_0) \quad \text{với} \quad n\in\mathbb{N}.$$

Do đó,

$$\varliminf_{x\to x_0} \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x_0).$$

1.4.18. Chỉ cần quan sát rằng nếu $\{f_n\}$ là dãy tăng (tương ứng, giảm), thì $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ (tương ứng, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$) (xem, chẳng hạn, I,2.1.1) và dùng kết quả trong bài toán trước.

1.4.19. Theo 1.4.1. ta có

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \max\{f(x), \varlimsup_{z\to x} f(z)\} \\ &= \inf_{\delta>0} \sup\{f(z) : z\in\mathbf{A},\ |z-x|<\delta\} \\ &= \lim_{\delta\to 0^+} \sup\{f(z) : z\in\mathbf{A},\ |z-x|<\delta\}. \end{aligned}$$

Tương tự,

$$f_2(x) = \lim_{\delta\to 0^+} \inf\{f(z) : z\in\mathbf{A},\ |z-x|<\delta\}.$$

Từ đó,

$$\begin{aligned} f_1(x)-f_2(x) &= \lim_{\delta\to 0^+} \sup\{f(z) : z\in\mathbf{A},\ |z-x|<\delta\} \\ &\quad - \lim_{\delta\to 0^+} \inf\{f(u) : u\in\mathbf{A},\ |u-x|<\delta\} \\ &= \lim_{\delta\to 0^+} \sup\{f(z)-f(u) : z,u\in\mathbf{A},\ |z-x|<\delta, |u-x|<\delta\} \\ &= \lim_{\delta\to 0^+} \sup\{|f(z)-f(u)| : z,u\in\mathbf{A},\ |z-x|<\delta, |u-x|<\delta\} \\ &= o_f(x). \end{aligned}$$

1.4.20. Gọi x là điểm giới hạn của **A**, và gọi $\{x_n\}$ là dãy các điểm của **A** hội tụ tới x. Đặt $\delta_n = |x_n - x| + \frac{1}{n}$. Khi đó, $|z - x_n| < \delta_n$ kéo theo $|z - x| < 2\delta_n$. Do đó, từ lời giải của bài toán trước,

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \lim_{n\to\infty} \inf\{f(z) : z \in \mathbf{A},\, |z - x_k| < \delta_n\} \\ &\geq \inf\{f(z) : z \in \mathbf{A},\, |z - x_k| < \delta_k\} \\ &\geq \inf\{f(z) : z \in \mathbf{A},\, |z - x| < 2\delta_k\} \end{aligned}$$

Chuyển qua giới hạn khi $k \to \infty$ có $\lim_{k\to\infty} f_2(x_k) \geq f_2(x)$. Suy ra rằng $\underline{\lim}_{z\to x} f_2(z) \geq f_2(x)$, và vì vậy tính nửa liên tục dưới của f_2 được chứng minh. Hoàn toàn tương tự có thể chứng minh f_1 nửa liên tục trên. Bây giờ, theo kết quả của bài toán trước $o_f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, điều này cùng với 1.4.16 chứng minh tính nửa liên tục trên của o_f.

1.4.21. Chúng ta sẽ chứng minh khẳng định cho hàm nửa liên tục dưới. Trước hết giả sử rằng điều kiện đã cho được thoả mãn. Khi đó, với $a < f(x_0)$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho $f(x) > a$ bất cứ khi nào $|x - x_0| < \delta$. Nếu $\{x_n\}$ là dãy các điểm của **A** hội tụ tới x_0, thì $|x_n - x_0| < \delta$ với n đủ lớn.Từ đó $f(x_n) > a$, suy ra $\underline{\lim}_{x\to x_0} f(x_n) \geq a$. Do tính tuỳ ý của a, ta có $\underline{\lim}_{x\to x_0} f(x_n) \geq f(x_0)$. Bây giờ, giả sử rằng f nửa liên tục dưới tại x_0 và với trái với điều kiện của ta, điều kiện đã cho không được thoả mãn. Khi đó tồn tại $a < f(x_0)$ sao cho với mọi $n \in \mathbb{N}$, tồn tại $x_n \in \mathbf{A}$ để $|x_n - x_0| < \delta_n = \frac{1}{n}$ và $f(x_n) \leq a$. Vậy dãy $\{x_n\}$ hội tụ tới x_0 và $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \leq f(x_0)$, mâu thuẫn.

1.4.22. Giả sử rằngvới mọi $a \in \mathbb{R}$, tập $\{x \in \mathbf{A} : f(x) > a\}$ mở. Gọi x_0 là phần tử của **A** và lấy $a < f(x_0)$. Khi đó, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset \{x \in \mathbf{A} : f(x) > a\}$. Theo kết quả của bài toán trước, suy ra f nửa liên tục dưới.

Giả sử f nửa liên tục dưới trên **A**. Ta sẽ chỉ ra rằng tập $x \in \mathbf{A}, : f(x) \leq a$ đóng trong **A**. Gọi $\{x_n\}$ là dãy các điểm của tập hợp này hội tụ tới a. Khi đó $f(x_n) \leq a$, và do đó, $f(x) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} f(x_n) \leq a$, suy ra x cũng là phần tử của $x \in \mathbf{A} : f(x) \leq a$. Vậy, ta đã chứng minh rằng tập này là đóng, hay tương đương, phần bù của nó mở trong **A**.

1.4.23. Giả sử f nửa liên tục dưới trên $\mathbb{R}$, và đặt $\mathbf{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq f(x)\}$. Ta phải chỉ ra rằng $\mathbf{B}$ đóng trong $\mathbb{R}^2$. Gọi (x_n, y_n) là dãy điểm trong $\mathbf{B}$ hội tụ tới (x_0, y_0). Khi đó

$$y_o = \lim_{nto\infty} y_n \geq \varliminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq \varliminf_{x\to x_0} f(x) \geq f(x_0).$$

Từ đó, $(x_0, y_0) \in \mathbf{B}$.

Bây giờ, giả sử rằng $\mathbf{B}$ đóng và f không nửa liên tục dưới tại $x_0 \in \mathbb{R}$. Khi đó, tập $\mathbf{B}^c = \{(x, y) \in \mathbb{R} : y < f(x)\}$ mở trong $\mathbb{R}^2$ và tồn tại dãy $\{x_n\}, x_n \neq x_0$, hội tụ tới x_0 và sao cho $y = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) < f(x_0)$. Lấy g sao cho $y < g < f(x_0)$. Khi đó (x_0, g) thuộc $\mathbf{B}^c$. Từ đó, tồn tại hình cầu tâm tại (x_0, g) chứa trong $\mathbf{B}^c$. Điều này có nghĩa với n đủ lớn, (x_0, g) thuộc $\mathbf{B}^c$, hay tương đương, $g < f(x_n)$. Vì vậy, $g \leq y$, mâu thuẫn.

Nhắc lại rằng f nửa liên tục trên trên $\mathbb{R}$ nếu và chỉ nếu $-f$ nửa liên tục dưới trên $\mathbb{R}$. Vậy f nửa liên tục trên trên $\mathbb{R}$ nếu và chỉ nếu tập $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq f(x)\}$ đóng trong $\mathbb{R}^2$.

1.4.24. [21]. Ta trước hết chỉ ra rằng f nửa liên tục dưới nếu và chỉ nếu hàm $g(x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} f(x)$ nửa liên tục dưới. Để làm vậy, ta dùng đặc chưng được cho trong 1.4.20. Giả sử rằng f nửa liên tục dưới. Để chứng minh g cũng nửa liên tục dưới, chỉ cần chỉ ra với mọi số thực a, tập $\mathbf{B} = \{x \in \mathbf{A}, \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} f(x) > a\}$ mở trong $\mathbf{A}$. Rõ ràng, nếu $a \leq -1$, thì $\mathbf{B} = \mathbf{A}$, và nếu $a \geq 1$, thì $\mathbf{B} = \emptyset$. Nếu $|a| < 1$, thì $\mathbf{B} = \{x \in \mathbf{A}, f(x) > \operatorname{tg}(\frac{2}{\pi} a)\}$; vậy nó mở theo giả thiết. Bây giờ giả sử rằng g nửa liên tục dưới. Khi đó $\{x \in \mathbf{A} : g(x) > \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} a\}$ mở với mọi số thực a. Do đó, tập $\{x \in \mathbf{A} : f(x) > a$ mở.

Với $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbf{A}$, xác định $\varphi_{a,n}$ bởi

$$\varphi_{a,n} = g(a) + n|x - a|, \quad x \in \mathbb{R},$$

và đặt

$$g_n(x) = \inf_{a\in\mathbf{A}} \varphi_{a,n}(x).$$

Rõ ràng,

$$g_n(x) \leq g_{n+1}(x) \quad \text{với} \quad x \in \mathbb{R}$$

và

$$g_n(x) \le \varphi_{x,n}(x) = g(x) \qquad x \in \mathbf{A}.$$

Từ đó, với mỗi $x \in \mathbf{A}$, dãy $\{g_n(x)\}$ hội tụ. Bây giờ, ta chứng minh rằng hàm g_n liên tục trên $\mathbb{R}$. Thực vậy, với $x, x' \in \mathbb{R}$,

$$|\varphi_{a,n}(x) - \varphi_{a,n}(x')| \le n|x - x'|.$$

Suy rằng

$$\varphi_{a,n}(x') - n|x - x'| \le \varphi_{a,n}(x) \le \varphi_{a,n}(x') + n|x - x'|.$$

Do đó

$$g_n(x') - n|x - x'| \le g_n(x) \le g_n(x') + n|x - x'|,$$

và vì vậy tính liên tục của g_n được chứng minh. Suy ra từ trên rằng với $x \in \mathbf{A}$, $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) \le g(x)$. Ta phải chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) \ge g(x)$. Gọi $x \in \mathbf{A}$ và gọi $\alpha << g(x)$. Vì g nửa liên tục dưới tại x, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $g(a) > \alpha$ nếu $|x - a| < \delta$. Từ đó

(1) $$\varphi_{a,n}(x) \ge g(a) > \alpha \quad \text{với} \quad |x - a| < \delta.$$

Mặt khác,

(2) $$\varphi_{a,n}(x) > -1 + n\delta \quad \text{với} \quad |x - a| < \delta,$$

kết hợp với (1) có

$$g_n(x) = \inf_{a\in\mathbf{A}} \varphi_{a,n}(x) \ge \min\{\alpha, -1 + n\delta\}.$$

Vì vậy, $g_n(x) \ge \alpha$ với n đủ lớn, và do đó ta nhận được $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) \ge \alpha$. Cuối cùng,, chuyển qua giới hạn khi $\alpha \to g(x)$, ta có $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) \le g(x)$.

1.4.25. Suy ra từ định lý Baire (xem bài toán trước) rằng tồn tại dãy giảm $\{f_n\}$ và dãy tăng $\{g_n\}$ các hàm liên tục hội tụ trên $\mathbf{A}$ tới f và g,tương ứng.

Đặt

$$\begin{aligned} &\varphi_1(x) = f_1(x), && \psi_1(x) = \inf\{\varphi_1(x), g_1(x)\}, \\ &\dots && \dots \\ &\varphi_n(x) = \max\{\psi_{n-1}(x), f_n(x)\}, && \psi_n(x) = \inf\{\varphi_n(x), g_n(x)\}. \end{aligned}$$

Khi đó $\{\varphi_n\}$ giảm, bởi vì các bất dẳng thức $\psi_n \le \varphi_n$ và $f_n \le \varphi_n$ suy ra

$$\varphi_{n+1} = \max\{\psi_n, f_{n+1}\} \le \max\{\psi_n, f_n\} \le \max\{\varphi_n, f_n\} = \varphi_n.$$

Tương tự, có thể chỉ ra rằng ψ_n tăng. Bây giờ quan sát rằng dãy các hàm liên tục $\{\varphi_n\}$ và ψ_n ddeeuf hội tụ, chẳng hạn tới φ và ψ, tương ứng. Có thể chỉ ra rằng $\varphi(x) = \max\{\psi(x), f(x)\}$ và $\psi(x) = \min\{\varphi(x), g(x)\}$ (xem, chẳng hạn, I, 2.4.28). Vậy nếu $\varphi(x) \neq \psi(x)$ với x nào đó, thì $\varphi(x) = f(x)$; và từ đó $f(x) \le g(x)$, ta cũng có $\psi(x) = f(x)$, mâu thuẫn. Vì vậy, các dãy $\{\varphi_n\}$ và ψ_n có cùng giới hạn, chẳng hạn f, sao cho $f(x) \le h(x) \le g(x)$. Theo 1.4.18, h nửa liên tục trên và nửa liên tục dưới, do đó liên tục.

1.5 Tính liên tục đều

1.5.1.

(a) Hàm có thể thác triển liên tục trên $[0,1]$. Vì vậy, f liên tục đều trên $(0,1)$. Vì vậy, f liên tục đều trên $(0,1)$.

(b) Chú ý rằng với $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| f\left(\frac{1}{2n\pi}\right) - f\left(\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}\right) \right| = 1$$

mặc dù $\left|\frac{1}{2n\pi} - \frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\right|$ có thể nhỏ tuỳ ý. Do đó, hàm liên tục không đều trên $(0,1)$.

(c) Vì tồn tại thác triển liên tục của f trên $[0,1]$, hàm f liên tục đều trên $(0,1)$.

(d) Ta có

$$\left|f\left(\frac{1}{\ln n}\right)-f\left(\frac{1}{\ln(n+1)}\right)\right|=|n-(n+1)|=1$$

và $\left|\frac{1}{\ln n}-\frac{1}{\ln(n+1)}\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow}$. Từ đó, f không liên tục đều trên $(0,1)$.

(e) Vì $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}}=0$, hàm có thể thác triển liên tục trên $[0,1]$. Vậy f liên tục đều trên $(0,1)$.

(f) Hàm không liên tục đều trên $(0,1)$ bởi vì

$$\left|f\left(\frac{1}{2\pi n}\right)-f\left(\frac{1}{2\pi n+\pi}\right)\right|=e^{\frac{1}{2n\pi}}+e^{\frac{1}{2n\pi+\pi}}>2,\quad n\in\mathbb{N}.$$

(g) Để thấy rằng hàm không liên tục đều trên $(0,1)$, chú ý rằng

$$\left|f\left(\frac{1}{e^n}\right)-f\left(\frac{1}{e^{n+1}}\right)\right|=1.$$

(h) Quan sát rằng

$$\left|f\left(\frac{1}{2n}\right)-f\left(\frac{1}{2n+1}\right)\right|=|\cos\frac{1}{2n}+\cos\frac{1}{2n+1}|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}2.$$

Vậy hàm không liên tục đều trên $(0,1)$.

(i) Như trên, có thể chỉ ra rằng hàm không liên tục đều trên $(0,1)$.

1.5.2.

(a) Chúng ta sẽ chỉ ra rằng f liên tục đều trên $[0,+\infty)$. Thực vậy, theo bất đẳng thức

$$|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|\le\sqrt{|x_1-x_2|}\quad\text{với}\quad x_1,x_2\in[0,\infty)$$

ta có

$$|x_1-x_2|<\delta\quad\text{kéo theo}\quad|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|<\varepsilon.$$

(b) Chú ý rằng
$$\left|f(2n\pi) - f\left(2n\pi + \frac{1}{n}\right)\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2\pi.$$
Vậy f không liên tục đều trên $[0, \infty)$.

(c) Vì
$$|\sin^2 x_1 - \sin^2 x_2| = |\sin x_1 - \sin x_2| \cdot |\sin x_1 + \sin x_2| \leq 2|x_1 - x_2|,$$
hàm liên tục đều trên $[0, \infty)$.

(d) Hàm không liên tục đều trên $[0, \infty)$ bởi vì
$$\left|f(\sqrt{2n\pi}) - f\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right| = 1$$
mặc dù $\left|\sqrt{2n\pi} - \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

(e) Hàm không liên tục đều trên $[0, \infty)$. Thực vậy, suy ra từ tính liên tục của hàm logorit rằng
$$|\ln n - \ln(n+1)| = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Ngoài ra,
$$|f(\ln n) - f(\ln(n+1))| = 1.$$

(f) Có thể chứng minh, như trong (d), rằng hàm không liên tục đều trên $[0, \infty)$.

(g) Vì
$$|\sin(\sin x_1) - \sin(\sin x_2)| \leq 2\left|\sin\frac{\sin x_1 - \sin x_2}{2}\right| \leq |x_1 - x_2|,$$
f liên tục đều trên $[0, \infty)$.

(h) Chú ý rằng
$$\begin{aligned}&\left|f\left(2n\pi + \frac{1}{2n\pi}\right) - f(2n\pi)\right| \\ &= \left|\sin\left(2n\pi\sin\frac{1}{2n\pi} + \frac{1}{2n\pi}\sin\frac{1}{2n\pi}\right)\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sin 1.\end{aligned}$$

Do đó, hàm không liên tục đều trên $[0,\infty)$.

(i) Quan sát rằng

$$\begin{aligned}&|\sin\sqrt{x_1}-\sin\sqrt{x_2}|\\ &=\left|2\sin\frac{\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}}{2}\cos\frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}{2}\right|\le|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|.\end{aligned}$$

Bây giờ lí luận như trong (a), ta chứng minh được tính liên tục đều của f.

1.5.3. Chúng ta sẽ chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ tồn tại. Do tính liên tục đều, với $\varepsilon>0$ cho trước, tồn tại $\delta>0$ sao cho $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ bất cứ khi nào $|x_1-x_2|<\delta$. Rõ ràng, nếu $a<x_1<a+\delta$ và $a<x_2<a+\delta$, thì $|x_1-x_2|<\delta$. Suy ra rừ định lí Cauchy (xem, chẳng hạn, 1.1.37) rằng giới hạn trái của f tại a tồn tại. Hoàn toàn tương tự, có thể chứng minh rằng giới hạn phải của f tại b tồn tại.

1.5.4.

(a) Suy ra trực tiếp từ định nghĩa của tính liên tục đều rằng tổng của hai hàm liên tục đều cũng là hàm liên tục đều.

(b) Nếu f và g liên tục đều trên khoảng hữu hạn (a,b), thì theo kết quả của bài toán trước, các hàm trên có thể thác triển liên tục trên $[a,b)$. Vì vậy, f và g bị chặn trên (a,b). Do đó, tính liên tục đều của fg trên $[a,b]$ suy ra từ bất đẳng thức

$$\begin{aligned}&|f(x_1)g(x_1)-f(x_2)g(x_2)|\\ &|f(x_1)||g(x_1)-g(x_2)|+|g(x_2)||f(x_1)-f()x_2|.\end{aligned}$$

Mặt khác, các hàm $f(x)=g(x)=x$ liên tục đều trên $[a,\infty)$ nhưng $f(x)g(x)=x^2$ không liên tục đều trên khoảng vô hạn.

(c) Theo (b), $x\mapsto f(x)\sin x$ liên tục đều trên (a,b). Hàm không nhất thiết liên tục đều trên $[a,\infty)$, như ví dụ trong 1.5.2(b) đã chỉ ra.

1.5.5.

(a) Với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại $\delta_1 > 0$ và $\delta_2 > 0$ sao cho $|f(x_1) - f(b)| < \frac{\varepsilon}{2}$ nếu $0 \le b - x_1 < \frac{\delta_1}{2}$ và $|f(x_2) - f(b)| < \frac{\varepsilon}{2}$ nếu $0 \le x_2 - b < \frac{\delta_2}{2}$. Đặt $\delta_2 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, ta có

$$(1) \qquad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \quad \text{nếu} \quad |x_1 - x_2| < \delta.$$

Với $x_1, x_2 \in (a, b]$ hoặc $x_1, x_2 \in [b, c)$, (1) được thoả mãn với số dương $\delta > 0$ nào đó.

(b) Không. Cho $\mathbf{A} = \mathbb{N}$ và $\mathbf{B} = \{n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, và xét hàm f xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu} \quad x \in \mathbf{A}, \\ 2 & \text{nếu} \quad x \in \mathbf{B}. \end{cases}$$

1.5.6. Nếu f là hàm hằng, thì nó liên tục đều trên $\mathbb{R}$. Nếu f là hàm tuần hoàn khác hàm hằng, thì chu kỳ cơ bản T của nó tồn tại (xem 1.2.23). Rõ ràng, f liên tục đều trên mỗi khoảng $[kT, (k+1)T], k \in \mathbb{Z}$. Vậy, như trong lời giải của 1.5.5(a), có thể chứng minh rằng f liên tục đều trên $\mathbb{R}$.

1.5.7.

(a) Đặt $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$. Khi đó, với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại $A > 0$ sao cho $|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ với $x \in A$ và $|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ với $x \le -A$. Từ đây, suy ra rằng nếu $x_1, x_2 \in [A, \infty)$ hoặc $x_1, x_2 \in (-\infty, -A]$, thì $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Rõ ràng, f liên tục đều trên $[-A, A]$. Cuối cùng, như trong lời giải của1.5.5(a), có thể chỉ ra rằng f liên tục đều trên $\mathbb{R}$.

(b) Chứng minh tương tự như trong (a).

1.5.8. Chỉ cần áp dụng kết quả trong bài toán trước.

1.5.9. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ không nhất thiết tồn tại. Để thấy điều này, xét hàm trong 1.5.2(c). Giới hạn $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ tồn tại (xem 1.5.3).

1.5.10. Giả sử rằng $\mathbf{I} = (a, b)$ là khoảng bị chặn và, chẳng hạn, f đơn điệu tăng. Khi đó, như trong 1.1.35, có thể chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \inf\limits_{x\in(a,b)} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \sup\limits_{x\in(a,b)} f(x)$. Do đó, f có thể thác triển liên tục trên $[a, b]$. Vậy nó liên tục đều trên (a, b). Nếu khoảng $\mathbf{I}$ không bị chặn, thì các giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ và/hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ tồn tại và hữu hạn. Theo 1.5.7, f liên tục đều trên $\mathbf{I}$.

1.5.11. Không. Hàm sau đây liên tục đều trên $[0, +\infty)$ nhưng giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ không tồn tại :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{với} \quad x \in [0, 1], \\ -x + 2 & \text{với} \quad x \in [1, 2], \\ \dots & \\ x - n(n+1) & \text{với} \quad x \in [n(n+1), (n+1)^2], \\ -x + (n+1)(n+2) & \text{với} \quad x \in [n(n+1), (n+1)^2], \\ \dots & \end{cases}$$

1.5.12. Gọi $\varepsilon > 0$ tuỳ ý cố định. Chọn $\delta > 0$ sao cho với $x, x' \le 0$

$$|x - x'| < \delta \quad \text{kéo theo} \quad |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Gọi $x_1, x_2, \dots, x_k$ là các điểm trong khoảng $[0, 1]$ sao cho với mọi $x \in [0, 1]$, tồn tại x_i để $|x - x_i| < \delta$. Vì $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_i + n) = 0$ với $i = 1, 2, \dots, k$. Giả sử $x \ge n_0 + 1$ và đặt $n = [x]$. Khi đó, tồn tại x_i sao cho $|x - (n + x_i)| < \delta$. Suy ra rằng

$$|f(x)| \le |f(x) - f(x_i + n)| + |f(x_i + n)| < \varepsilon.$$

1.5.13. Do tính liên tục đều của f trên $[1, \infty)$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $|f(x) - f(x')| < 1$ nếu $|x - x'| < \delta$. Mọi $x \ge 1$ có thể viết dưới dạng $x = 1 + n\delta + r$, ở đây $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ và $0 \le r < \delta$. Từ đó

$$|f(x)| \le |f(1)| + |f(x) - f(1)| \le |f(1)| + (n+1).$$

Chia cho x, có

$$frac|f(x)|x \le \frac{|f(1)| + (n+1)}{x} \le \frac{|f(1) + 2|}{\delta} = M.$$

1.5.14. Như trong lời giải của bài toán trước, ta tìm $\delta > 0$ sao cho nếu $x = n\delta + r$, thì với mọi $u \geq 0$

$$|f(x+u) - f(u)| \leq n+1.$$

Vì vậy,

$$\frac{f(x+u) - f(u)}{x+1} \leq \frac{n+1}{1+n\delta+r} \leq \frac{2}{\delta} = M.$$

1.5.15. Giả sử $\{x_n\}$ là dãy Cauchy gồm các phần tử trong **A**; tức là, với $\delta > 0$ cho trước, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $|x_n - x_m| < \delta$ với $n, m \geq n_0$. Do tính liên tục đều của f, với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại $\delta_\varepsilon > 0$ sao cho $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$ nếu $|x_n - x_m| < \delta_\varepsilon$. Vậy $\{f(x_n)\}$ là dãy Cauchy.

1.5.16. Giả sử ngược lại, rằng f không liên tục đều trên **A**. Vậy, có $\varepsilon > 0$ sao cho với mọi số nguyên dương n, tồn tại x_n và x'_n trong **A** sao cho $|x_n - x'_n| < \frac{1}{n}$ và $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$. Vì **A** bị chặn, tồn tại dãy con hội tụ $\{x_{n_k}\}$ của $\{x_n\}$. Suy từ trên rằng dãy $\{x'_{n_k}\}$ hội tụ tới cùng giới hạn. Vì vậy, dãy $\{z_k\}$ với các số hạng $x_{n_1}, x'_{n_1}, x_{n_2}, x'_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, x'_{n_k}, \ldots$ hội tụ, và vì vậy, nó là dãy Cauchy. Nhưng $|f(x_{n_k} - f(x'_{n_k})| \geq \varepsilon$, và như vậy $\{f(z_k)\}$ không là dãy Cauchy. Mâu thuẫn.

Tính bị chặn của **A** là không bỏ được. Để thấy điều này, xét hàm $f(x) = x^2$ trên $(0, \infty)$.

1.5.17. Điều kiện cần suy trực tiếp từ định nghĩa của tính liên tục đều. Bây giờ, giả sử rằng điều kiện đã cho được thoả mãn và f không liên tục đều trên **A**. Khi đó, tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho với mọi số nguyên dương n, tồn tại x_n và y_n trong **A** sao cho $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ và $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$, mâu thuẫn.

1.5.18. Không. Xác định hàm f bằng cách đặt

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{với} \quad x \in [0,2], \\ \frac{1}{n} & \text{với} \quad x = n,\ n \geq 2, \\ \frac{2}{n} & \text{với} \quad x = n + \frac{1}{n},\ n \geq 2 \\ x - n + \frac{1}{n} & \text{với} \quad x \in (n, n+\frac{1}{n}),\ n \geq 2, \\ -\frac{n+2}{(n+1)(n-1)}\left(x - n - \frac{1}{n}\right) + \frac{2}{n} & \text{với} \quad x \in (n+\frac{1}{n}, n+1),\ n \geq 2. \end{cases}$$

Hàm f liên tục trên $(0, \infty)$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ và $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{2}$. Suy từ 1.5.7 rằng f liên tục đều trên $(0, \infty)$. Tuy nhiên,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n+\frac{1}{n})}{f(n)} = 2.$$

1.5.19. Do tính liên tục của f tại 0, với $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $|f(x)| < \varepsilon$ với $|x| < \delta$. Từ đó, tính cộng tính dưới của f suy ra rằng, với $x \in \mathbb{R}$ và $|t| < \delta$,

$$f(x+t) - f(x) \le f(t) < \varepsilon \qquad f(x) - f(x+t) \le f(-t) < \varepsilon.$$

Do đó, $|f(x+t) - f(x)| < \varepsilon$, suy ra tính liên tục đều của f trên $\mathbb{R}$.

1.5.20. Quan sát rằng ω_f đơn điệu tăng trên $(0, \infty)$. Vậy (xem 1.1.35)

$$\lim_{\delta\to 0^+} \omega_f(\delta) = \inf_{\delta>0} \omega_f(\delta) \ge 0.$$

Nếu $\lim_{\delta\to 0^+} \omega_f(\delta) = 0$, thì với $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $\omega_f(\delta) < \varepsilon$. Do đó, nếu $|x_1 - x_2| < \delta$, thì $|f(x_1) - f(x_2)| \le \omega_f(\delta) < \varepsilon$. Điều này có nghĩa f liên tục đều trên $\mathbf{A}$.

Bây giờ giả sử rằng f liên tục đều trên $\mathbf{A}$. Khi đó, với $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta_0 > 0$ sao cho $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ với $|x_1 - x_2| < \delta_0$. Từ đó, $\lim\limits_{\delta\to 0^+} \omega_f(\delta_0) \le \varepsilon$. Do tính tuỳ ý của $\varepsilon > 0$, ta có $\lim\limits_{\delta\to 0^+} \omega_f(\delta) = 0$.

1.5.21. Rõ ràng, chỉ cần chứng minh (b) suy ra (a). Lấy $\varepsilon > 0$ cố định tuỳ ý. Vì fg liên tục tại 0, tồn tại $\delta_1 > 0$ sao cho

$$|x| < \delta_1 \quad \text{kéo theo} \quad |f(x)g(x) - f(0)g(0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Vậy, nếu $|x_1| < \delta_1$ và $|x_2| < \delta_2$, thì $|f(x_1)g(x_1) - f(x_2)g(x_2)| < \varepsilon$. Với $|x_1| \ge \delta_1$, ta có

$$\begin{aligned}&|f(x_1)g(x_1) - f(x_2)g(x_2)|\\ &\le \frac{|g(x_1)|}{|x_1|}|x_1||f(x_1) - f(x_2)| + |f(x_2)||g(x_1) - g(x_2)|.\end{aligned}$$

Do đó,

$$\begin{aligned}
&|f(x_1)g(x_1) - f(x_2)g(x_2)| \\
&\leq \frac{|g(x_1)|}{|x_1|}(||x_1|f(x_1) - |x_2|f(x_2)| + |f(x_2)||x_2) - x_1|) \\
&\quad + |f(x_2)||g(x_1) - g(x_2)|.
\end{aligned}$$

Kết hợp với kết quả trong 1.5.13, có

$$\begin{aligned}
|f(x_1)g(x_1) - f(x_2)g(x_2)| \ \leq \ & M||x_1|f(x_1) - |x_2|f(x_2)| \\
& + ML|x_1 - x_2| + L|g(x_1) - g(x_2)|,
\end{aligned}$$

ở đây

$$\begin{aligned}
&M = \sup\left\{\frac{|g(x)|}{|x|} : |x| \geq \delta_1\right\}, \\
&L = \max\left\{\sup\left\{|f(x)| : |x| \leq \delta_1\right\}, \sup\left\{\frac{|x||f(x)|}{|x|} : |x| \geq \delta_1\right\}, \right\}.
\end{aligned}$$

Vậy kết quả cần chứng minh suy ra từ tính liên tục đều của $g(x)$ và $|x|f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

1.5.22. Giả sử rằng f liên tục đều trên $\mathbf{I}$. Khi đó, với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

(i) $$|x_1 - x_2| < \delta \quad \text{kéo theo} \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Ta sẽ chứng minh rằng với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại $N > 0$ sao cho với mọi $x_1, x_2 \in \mathbf{I}$, $x_1 \neq x_2$,

(ii) $$\left|\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\right| > N \quad \text{kéo theo} \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Rõ ràng, phép kéo theo này tương đương với

$$|f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon \quad \text{kéo theo} \quad \left|\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\right| \leq N.$$

Theo (i), nếu $|f(x_1)-f(x_2)| \geq \varepsilon$, thì $|x_1-x_2| \geq \delta$. Không mất tổng quát, có thể giả sử rằng $x_1 < x_2$ và $f(x_1) < f(x_2)$. Vì $f(x_2)-f(x_1) \geq \varepsilon$, tồn tại $\eta \in [\varepsilon, 2\varepsilon]$ và một số dương k sao cho $f(x_2) = f(x_1)+k\eta$. Bây giờ, từ tính chất giá trị trung gian của f trên khoảng $[x_1, x_2]$, suy ra tồn tại $x_1 = z_0 < z_1 < \cdots < z_k = x_2$ sao cho $f(z_i) = f(x_1) + i\eta$, $i = 1, 2, \dots, k$. Ta có $|f(z_i) - f(z_{i-1})| = \eta \geq \varepsilon$, vậy $|z_i - z_{i-1}| \geq \delta$. Đặt $N = \frac{2\varepsilon}{\delta}$, ta nhận được

$$\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right| \geq \frac{k\eta}{k\delta} = \frac{\eta}{\delta} \leq \frac{2\varepsilon}{\delta} = N.$$

Bây giờ giả sử (ii) được thoả mãn. Khi đó, với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại $N > 0$ sao cho

$$|f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon \quad \text{kéo theo} \quad \left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right| \leq N.$$

Do đó,

$$|f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon \quad \text{kéo theo} \quad |x_1 - x_2| \geq \frac{\varepsilon}{N}.$$

Điều này có nghĩa rằng (i) được thoả mãn với $\delta = \frac{\varepsilon}{N}$.

1.6 Phương trình hàm

1.6.1. Rõ ràng, hàm $f(x) = x$ liên tục và thoả mãn phương trình hàm Cauchy. Ta chứng minh rằng phương trình này không có nghiệm nào khác. Trước hết quan sát rằng nếu f thoả mãn

(1) $$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{với} \quad x, y \in \mathbb{R},$$

thì $f(2x) = 2f(x)$ với $x \in \mathbb{R}$. Có thể chứng minh bằng quy nạp rằng với $n \in \mathbb{N}$,

(2) $$f(nx) = nf(x).$$

Nếu trong (2), thay x bởi $\frac{x}{n}$, ta nhận được

(3) $$f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n}f(x).$$

Nếu $r = \frac{p}{q}$, ở đây $p, q \in \mathbb{N}$, thì (2) và (3) suy ra

(4)
$$f(rx) = f\left(\frac{p}{q}x\right) = pf\left(\frac{1}{q}x\right) = \frac{p}{q}f(x) = rf(x).$$

Suy ra từ (2) rằng $f(0) = 0$. Kết hợp với (1), ta được $0 = f(0) = f(x) + f(-x)$, hay nói cách khác, $f(-x) = -f(x)$. Vậy, theo (4), ta có $-rf(x) = f(-rx) = -f(rx)$ với mọi số hữu tỷ âm r. Từ đó, với mọi số thực α, tồn tại dãy $\{r_n\}$ các số hữu tỷ hội tụ tới α, và vì f liên tục, theo (4) ta có

$$f(\alpha x) = f(\lim_{n\to\infty} r_n x) = \lim_{n\in\infty} f(r_n x) = \lim_{n\to\infty} r_n f(x) = \alpha f(x).$$

Đặt $x = 1$, được $f(\alpha) = \alpha f(1)$. Do đó, $f(x) = ax$, ở đây $a = f(1)$.

1.6.2.

(a) Ta sẽ chứng minh rằng nếu f liên tục tại ít nhất một điểm và thoả mãn phương trình hàm Cauchy, thì nó liên tục trên $\mathbb{R}$. Vậy, khẳng định suy ra từ bài toán trước. Rõ ràng, nếu f thoả mãn phương trình hàm Cauchy các đẳng thức (2)-(4) trong lời giải của 1.6.1 đúng. ta trước hết chỉ ra rằng tính liên tục của f tại một điểm x_0 kéo theo ttính liên tục tại 0. Thực vậy, nếu $\{z_n\}$ là dãy hội tụ tới 0, thì $\{z_n + x_0\}$ hội tụ tới x_0. Ngoài ra, suy ra từ đẳng thức

$$f(z_n + x_0) = f(z_n) + f(x_0)$$

và từ tính liên tục của f tại x_0 rằng $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = 0 = f(0)$. Bây giờ, nếu x là số thực tuỳ ý và $\{x_n\}$ hội tụ tới x thì $\{x_n - x\}$ hội tụ tới 0. Đẳng thức $f(x_n - x) = f(x_n) - f(x)$ và tính liên tục của f tại 0 suy ra $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

(b) Ta trước hết chỉ ra rằng nếu f thoả mãn phương trình hàm Cauchy và bị chặn trên trong khoảng (a, b), thì nó bị chặn trong mọi khoảng $(-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Để làm vậy, xết hàm

$$g(x) = f(x) - f(1)x, \; x \in \mathbb{R}.$$

Rõ ràng, g thoả mãn phương trình hàm Cauchy, và suy từ lời giải của 1.6.1 rằng $g(r) = 0$ với $r \in \mathbb{Q}$. Với $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, có thể tìm được số hữu tỷ r sao cho $x + r \in (a, b)$. Khi đó, $g(x) = g(x) + g(r) = g(x + r) = f(x + r) - f(1)(x + r)$, suy ra bị chặn trong khoảng $(-\varepsilon, \varepsilon)$, và do đó, f cũng vậy. Vì $f(-x) = -f(x)$, f bị chặn dưới trong $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Bây giờ, ta phải chỉ ra f liên tục tại 0. Gọi $\{x_n\}$ là dãy hội tụ tới không, và chọn dãy $\{r_n\}$ các số hữu tỷ phân kỳ tới $+\infty$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} x_n r_n = 0$. Khi đó, dãy $\{|f(r_n x_n)|\}$ bị chặn trên, chẳng hạn bởi M, và

$$|f(x_n)| = \left| f\left(\frac{1}{r_n} r_n x_n\right)\right| = \frac{1}{r_n}|f(r_n x_n)| \leq \frac{M}{r_n}.$$

Từ đó, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0 = f(0)$. Vậy khẳng định của ta suy từ (a).

(c) Giả sử, chẳng hạn, rằng f đơn điệu tăng. Suy từ (2)−(4) trong lời giải của 1.6.1 rằng với $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$,

$$-\frac{1}{n} f(1) \leq f(x) \leq \frac{1}{n} f(1).$$

Vậy f liên tục tại 0, và đòi hỏi của ta suy từ (a).

1.6.3. Quan sát rằng $f(x) = f^2(\frac{x}{2}) \geq 0$. Nếu f nhận giá trị 0 tại x_0, thì do $f(x + y) = f(x)f(y)$, f sẽ đồng nhất bằng 0, mâu thuẫn với $f(1) > 0$. Vậy f dương trên $\mathbb{R}$ và hàm $g(x) = \ln f(x)$ liên tục và thoả mãn phương trình hàm Cauchy. Suy ra từ 1.6.1 rằng $g(x) = ax$, ở đây $a = g(1) = \ln f(1)$. Từ đó, $f(x) = b^x$, $x \in \mathbb{R}$, với $b = f(1)$.

1.6.4. Với $x, y \in (0, \infty)$, chọn $t, s \in \mathbb{R}$ sao cho $x = e^t$ và $y = e^s$. Định nghĩa g theo công thức $g(t) = f(e^t)$. Khi đó, $g(t + s) = g(t) + g(s)$ với $t, s \in \mathbb{R}$, và theo 1.6.1, $g(t) = at$. Vậy, $f(x) = a \ln x = \log_b x$, ở đây $b = e^{\frac{1}{a}}$.

1.6.5. Như trong lời giải của bài toán trước, với $x, y \in (0, \infty)$, ta chọn $t, s \in \mathbb{R}$ sao cho $x = e^t, y = e^s$. Tiếp theo, ta xác định hàm g bằng cách đặt $g(t) = f(e^t)$. Khi đó f thoả mãn phương trình đã cho nếu và chỉ nếu $g(t + s) = g(t) + g(s)$ với $t, s \in \mathbb{R}$. Suy ra từ 1.6.3 rằng $g(t) = a^t$. Từ đó, $f(x) = a^{\ln x} = x^b$, ở đây $b = \ln a$.

1.6.6. Nếu f liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x) - f(y)$ hữu tỷ với mọi $x - y$ hữu tỷ, thì $g(x) = f(x+1) - f(x)$ liên tục và giả sử cjỉ nhận giá trị hữu tỷ. Suy ra từ tính chất giá trị trung gian rằng g là hàm hằng. Đặt $f(x+1) - f(x) = q$, $q \in \mathbb{Q}$. Nếu $f(0) = r$, thì $f(1) = r + q$, và theo quy nạp, $f(n) = nq + r$, $n \in \mathbb{N}$. Do $f(x) = f(x+1) - q$, ta nhận được $f(-1) = -q + r$, và theo quy nạp, $f(-n) = -nq + r$, $n \in \mathbb{N}$. Với số hữu tỷ $p = \frac{n}{m}$, hàm $f(x+p) - f(x)$ cũng là hàm hằng. Gọi $f(x+p) = f(x) + \tilde{q}$. Như trên, có thể chứng minh rằng $f(kp) = k\tilde{q} + r$ với $k \in \mathbb{N}$. Nói riêng, $f(n) = f(mq) = m\tilde{q} + r$. Mặt khác, $f(n) = nq + r$. Từ đó, $\tilde{q} = \frac{n}{m}q$ và $f\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{n}{m}q + r$. Vì p có thể chọn tuỳ ý, $f(x) = qx + r$ với $x \in \mathbb{Q}$. Tính liên tục của f suy ra rằng f được xác định bởi công thức này với mọi $x \in \mathbb{R}$.

1.6.7. Quan sát rằng $f(0) = 0$. Ngoài ra, với $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$f(x) = -f(qx) = f(q^2x) = -f(q^3x).$$

Có thể chứng minh bằng quy nạp rằng $f(x) = (-1)^n f(q^n x)$. Cho $n \to \infty$ và sử dụng tính liên tục của f tại 0, ta có $f(x) = 0$. Vậy chỉ có duy nhất hàm đồng nhất bằng 0 thoả mãn phương trình đã cho.

1.6.8. Ta có $f(0) = 0$ và

$$f(x) = -f\left(\frac{2}{3}x\right) + x = f\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2 x\right) - \frac{2}{3}x + x.$$

Có thể chứng minh bằng quy nạp rằng với $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x) = (-1)^n f\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n x\right) + (-1)^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} x + \cdots - \frac{2}{3}x + x.$$

Bây giờ, ta chuyển qua giới hạn khi $n \to \infty$ và sử dụng tính liên tục của f tại 0, thu được $f(x) = \frac{3}{5}x$.

1.6.9. Nếu trong phương trình, đặt $y = 2x$, ta có

$$f(y) = \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}y\right) + \frac{1}{2^2}y = \frac{1}{2^2}f\left(\frac{1}{2^2}y\right) + \frac{1}{2^4}y + \frac{1}{2^2}y.$$

Có thể chứng minh bằng quy nạp rằng

$$f(y) = \frac{1}{2^n} f\left(\frac{1}{2^n} y\right) + \frac{1}{2^{2n}} y + \frac{1}{2^{2(n-1)}} y + \cdots + \frac{1}{2^2} y.$$

Cho $n \to \infty$ và sử dụng $f(0) = 0$ và f liên tục tại 0, ta kết luận rằng $f(y) = \frac{1}{3} y$.

1.6.10. Đặt $f(0) = c$. Trong phương trình Jensen, ta có

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x) + f(0)}{2} = \frac{f(x) + c}{2}.$$

Từ đó,

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} = f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x+y) + c}{2},$$

suy ra $f(x) + f(y) = f(x+y) + c$. Bây giờ, đặt $g(x) = f(x) - c$. Khi đó g thoả mãn phương trình Cauchy (xem 1.6.1). Vì vậy, $g(x) = ax$, hay nói cách khác, $f(x) = ax + c$.

1.6.11. Trước hết, ta chỉ ra rằng f tuyến tính trên mỗi khoảng con đóng $[\alpha, \beta]$ của (a, b). Theo phương trình Jensen,

$$f\left(\alpha + \frac{1}{2}(\beta - \alpha)\right) = f(\alpha) + \frac{1}{2}(f(\beta) - f(\alpha)).$$

Hơn nữa,

$$\begin{aligned} f\left(\alpha + \frac{1}{4}(\beta - \alpha)\right) &= f\left(\frac{\alpha + \frac{\alpha+\beta}{2}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} f(\alpha) + \frac{1}{2} f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \\ &= f(\alpha) + \frac{1}{4}(f(\beta) - f(\alpha)) \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} f\left(\alpha + \frac{3}{4}(\beta - \alpha)\right) &= f\left(\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{2}(\beta - \alpha)\right)\right) \\ &= \frac{1}{2} f(\beta) + \frac{1}{2} f\left(\alpha + \frac{1}{2}(\beta - \alpha)\right) \\ &= f(\alpha) + \frac{3}{4}(f(\beta) - f(\alpha)) \end{aligned}$$

Bây giờ, ta chứng minh bằng quy nạp rằng

$$f\left(\alpha+\frac{k}{2^n}(\beta-\alpha)\right)=f(\alpha)+\frac{k}{2^n}(f(\beta)-f(\alpha))$$

với $k=1,2,3,\ldots,2^n$ và $n\in\mathbb{N}$. Giả sử đẳng thức đúng với $m\le n$, ta chứng minh rằng nó đúng cho $n+1$. Thực vậy, nếu $k=2l$, $l=0,1,\ldots,2^n$, thì theo giả thiết quy nạp,

$$\begin{aligned}f\left(\alpha+\frac{k}{2^{n+1}}(\beta-\alpha)\right) &= f\left(\alpha+\frac{l}{2^n}(\beta-\alpha)\right)\\ &= f(\alpha)+\frac{l}{2^n}(f(\beta)-f(\alpha))\\ &= f(\alpha)+\frac{k}{2^{n+1}}(f(\beta)-f(\alpha)).\end{aligned}$$

Tương tự, nếu $k=2l+1$, $l=0,1,\ldots,2^n-1$, thì

$$\begin{aligned}f\left(\alpha+\frac{k}{2^{n+1}}(\beta-\alpha)\right) &= f\left(\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{l}{2^{n-1}}(\beta-\alpha)\right)+\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{l}{2^n}(\beta-\alpha)\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}f\left(\alpha+\frac{l}{2^{n-1}}(\beta-\alpha)\right)+\frac{1}{2}f\left(\alpha+\frac{l}{2^n}(\beta-\alpha)\right)\\ &= f(\alpha)+\frac{k}{2^{n+1}}(f(\beta)-f(\alpha)).\end{aligned}$$

Vì các số $\frac{k}{2^n}$ tạo thành tập trù mật trong $[0,1]$, tính liên tục của f suy ra rằng

$$f(\alpha+t(\beta-\alpha))=f(\alpha)+t(f(\beta)-f(\alpha))\quad\text{với}\quad t\in[0,1].$$

Đặt $x=\alpha+t(\beta-\alpha)$, được

$$f(x)=f(\alpha)+\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha).$$

Bây giờ quan sát rằng với giả thiết của ta, các giới hạn một phía của f tại a và b tồn tại. Thật vậy, chẳng hạn, ta có

$$\lim_{y\to b^-}\frac{f(y)}{2}=f\left(\frac{x+b}{2}\right)-\frac{f(x)}{2}\quad\text{với}\quad x\in(a,b).$$

Rõ ràng,

$$(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty}[\alpha_n - \beta_n],$$

ở đây $\{\alpha_n\}$ là dãy giảm các điểm trong (a,b) hội tụ tới a, và $\{\beta_n\}$ là dãy tăng các điểm của khoảng này hội tụ tới b. Vậy với $x \in (a,b)$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $x \in [\alpha_n, \beta_n]$ với mọi $n \geq n_0$. Suy ra rằng

$$f(x) = f(\alpha_n) + \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n) - \alpha_n}(x - \alpha_n).$$

Nếu cho $n \to \infty$, ta có

$$f(x) = f(a^+) + \frac{f(b^-) - f(a^+)}{b - a}(x - a).$$

1.6.12. Với $x \in \mathbb{R}$, đặt

$$x_1 = x \quad \text{và} \quad x_{n+1} = \frac{x_n - 1}{2}, \; n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Khi đó, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -1$ và $f(x_n) = f(2x_{n+1})$, $n \in \mathbb{N}$. Từ đó, $f(x) = f(x_n)$. Cho $n \to \infty$, ta thấy rằng $f(x) = f(-1)$. Vậy chỉ có hàm hằng thoả mãn giả thiết của ta.

1.6.13. Chú ý rằng $g(x) = f(x) - \frac{a}{2}x^2$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn phương trình hàm Cauchy (xem 1.6.1). Vậy $g(x) = g(1)x$, suy ra

$$f(x) - \frac{a}{2}x^2 = \left(f(1) - \frac{a}{2}\right)x \quad \text{với} \quad x \in \mathbb{R}.$$

1.6.14. Theo giả thiết,

$$f(-1) = f\left(-\frac{1}{2} = -\frac{1}{3} = \cdots = f(0)\right).$$

Ngoài ra, với $t \neq 0, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots$, ta có

$$f(t) = f\left(\frac{t}{t+1}\right) = f\left(\frac{t}{2t+1}\right) = f\left(\frac{t}{3t+1}\right) = \cdots .$$

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{t}{nt+1} = 0$, tính liên tục của f tại 0 suy ra rằng $f(t) = f(0)$. Vậy nghiệm duy nhất của phương trình đã cho là các hàm hằng.

1.6.15. Không. Thực ra, có nhiều hàm như vậy. Với $a \in (0,1)$, gọi g là hàm liên tục từ $[0,a]$ và $[a,1]$. Khi đó, hàm f được xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{với} \quad x \in [0,a], \\ g^{-1}(x) & \text{với} \quad x \in (a,1], \end{cases}$$

ở đây g^{-1} là nghịch đảo của g, có tính chất như trong bài toán.

1.6.16. Giả sử ngược lại rằng tồn tại $y_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $|g(y_0)| = a < 1$. Đặt $M = \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\}$. Theo định nghĩa của supremum, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $|f(x_0)| > \frac{M}{a}$. Theo giả thiết,

$$\begin{aligned} |f(x_0+y_0)| + |f(x_0-y_0)| &\geq |f(x_0+y_0) + f(x_0-y_0)| \\ &= 2|f(x_0)||g(y_0)| > 2\frac{M}{a}a = 2M. \end{aligned}$$

Từ đó, $|f(x_0+y_0)| > M$ hoặc $|f(x_0-y_0)| > M$, mâu thuẫn.

1.6.17. Chú ý rằng $g(x) = f(x)e^{-x}$ thoả mãn phương trình hàm Cauchy. Suy ra từ 1.6.1 rằng $f(x) = axe^x$.

1.6.18. Theo giả thiết, $f(0) = 0$ và $f(2x) = (f(x))^2$. Bằng quy nạp,

$$f(x) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 = \left(f\left(\frac{x}{2^2}\right)\right)^{2^2} = \cdots = \left(f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)^{2^n}.$$

Từ đó,

$$f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \sqrt[2^n]{f(x)}.$$

Nếu $f(x) > 0$, thì chuyển qua giới hạn khi $n \to \infty$, ta nhận được $0 = 1$, mâu thuẫn. Vậy, chỉ có hàm đồng nhất bằng 0 thoả mãn phương trình đã cho.

1.6.19. Thay x bởi $\frac{x-1}{x}$ trong

(i) $$f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1 + x$$

được

(ii) $$f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f\left(\frac{-1}{x-1}\right) = \frac{2x-1}{x}.$$

Tiếp tục thay x bởi $\frac{-1}{x-1}$ trong (i), ta nhận được

(iii) $$f\left(\frac{-1}{x-1}\right) + f(x) = \frac{x-2}{x-1}.$$

Cộng (i) với (iii) rồi trừ đi (ii), có

$$2f(x) = 1 + x + \frac{x-2}{x-1} - \frac{2x-1}{x}.$$

Từ đó,

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 1}{2x(x-1)}.$$

Có thể kiểm tra dễ dàng rằng hàm này tthoả mãn phương trình hàm đã cho.

1.6.20. Với các số thực x và y, xác định $\{x_n\}$ như sau : $x_{2k-1} = x$ và $x_{2k} = y$, $k = 1, 2, \ldots$. Khi đó đẳng thức $f(C - \lim\limits_{n\to\infty} x_n) = C - \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ kéo theo

$$f\left(\lim_{n\to\infty} \frac{nx + ny}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{nf(x) + nf(y)}{2n},$$

tức là f thoả mãn phương trình Jensen $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$. Như trong lời giải của 1.6.11, có thể chỉ ra rằng

(i) $$f\left(x + \frac{k}{2^n}(y-x)\right) = f(x) + \frac{k}{2^n}(f(y) - f(x))$$

với $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, 2^n$ và $n \in \mathbb{N}$. Với $t \in [0,1]$, có thể tìm dãy $\{\frac{k_n}{2^n}\}$ hội tụ tới t. Vì mọi dãy hội tụ cũng là hội tụ Cesàro (tới cùng giới hạn), dãy với các số hạng $x_n = x + \frac{k_n}{2^n}(y-x)$ hội tụ theo nghĩa Cesàro. Theo (i) dãy $\{f(x_n)\}$ hội tụ tới $f(x) + t(f(y) - f(x))$. Do đó,

$$f(x + t(y-x)) = f(x) + t(f(y) - f(x))$$

Suy ra từ 1.2.33 rằng f liên tục trên $\mathbb{R}$. Kết hợp với 1.6.10, điều này chỉ ra rằng $f(x) = ax + c$.

1.6.21. Vì $f(2x - f(x)) = x$ và f là đơn ánh, ta có $f^{-1}(x) = 2x - f(x)$. Vậy

(i) $$f(x) - x = x - f^{-1}(x).$$

Với $x_0 \in [0, 1]$, xác định bằng đệ quy dãy $\{x_n\}$ bởi $x_n = f(x_{n-1})$. Suy ra từ (i) rằng $x_n - x_{n-1} = x_{n-1} - x_{n-2}$. Vì vậy, $x_n = x_0 + n(x_1 - x_0)$. Vì $|x_n - x_0| \leq 1$, ta có $|x_1 - x_0| \leq \frac{1}{n}$ với $n \in \mathbb{N}$. Do đó, $f(x_0) = x_1 = x_0$.

1.6.22. Ta sẽ chứng minh rằng các nghiệm liên tục duy nhất của phương trình đã cho là các hàm $f(x) = m(x - c)$. Nếu $g(x) = 2x - \frac{f(x)}{m}$, thì g liên tục và

(i) $$g(g(x)) = 2g(x) - x \quad \text{với} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Vậy g là hàm một-một. Thực vậy, nếu $g(x_1) = g(x_2)$, thì ta có $g(g(x_1)) = g(g(x_2))$, suy ra $x_1 = x_2$. Theo kết quả trong 1.3.16, g hoặc tăng thực sự, hoặc giảm thực sự trên $\mathbb{R}$. Ta sẽ chứng minh rằng trường hợp trước xảy ra. Theo (i),

(ii) $$g(g(x)) - g(x) = g(x) - x \quad \text{với} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Nếu g giảm ngặt, thì với $x_1 < x_2$, ta có $g(x_1) > g(x_2)$, và do đó, $g(g(x_1)) < g(g(x_2))$. Mặt khác, (ii) suy ra

$$g(g(x_1)) - g(x_1) = g(x_1) - x_1, \quad g(g(x_2)) - g(x_2) = g(x_2) - x_2,$$

mâu thuẫn.

Từ (i), suy ra bằng quy nạp rằng

$$g^n(x) = ng(x) - (n-1)x \quad \text{với} \quad n \geq 1,$$

ở đây g^n kí hiệu phép lặp thứ n của g. Từ đó, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{g^n(x)}{n} = g(x) - x$. Ngoài ra,

(iii) $$g^n(x) - g^n(0) = n(g(x) - x - g(0)) + x.$$

Vậy, cho $n \to \infty$ và dùng tính đơn điệu của g, ta có

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} g(x) &\le x + g(0) \quad \text{với} \quad x < 0, \\ g(x) &\ge x + g(0) \quad \text{với} \quad x > 0. \end{aligned}$$

suy ra $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Vì vậy, hàm ngược $g^{-1}(x)$ được xác định trên $\mathbb{R}$. Trong (i), thay x bởi $g^{-1}(g^{-1}(y))$, ta thấy $g^{-1}(g^{-1}(y)) = 2g^{-1}(y) - y$. Vì g^{-1} thoả mãn (i), có thể chứng minh bằng phương pháp tương tự rằng

$$g^{-n}(y) - g^{-n}(0) = n(g^{-n}(y) - y - g^{-n}(0)) + y.$$

Tiếp theo, chuyển qua giới hạn khi $n \to \infty$, ta có (như trên)

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} g^{-1}(y) &\le y + g^{-1}(0) \quad \text{với} \quad y < 0, \\ g^{-1}(y) &\ge y + g^{-1}(0) \quad \text{với} \quad y > 0. \end{aligned}$$

Bây giờ, ta chứng minh rằng $g^{-1}(0) = -g(0)$. Thay x bởi $g^{-1}(y)$ trong (ii), ta được

$$g(y) - y = y - g^{-1}(y),$$

suy ra $g^{-1}(0) = -g(0)$.

Giả sử, chẳng hạn, rằng $g(0) \ge 0$. Khi đó, $g(x) > 0$ với $x > 0$. Theo (2), với $y = g(x) > 0$, ta thấy $x \ge g(x) + g^{-1}(0) = g(x) - g(0)$. Vậy theo (1), với $x > 0$, ta nhận được $g(x) = x + g(0)$. Vì $g^{-1}(0) \le 0$, ta có $g^{-1}(y) < 0$ với $y < 0$, và như trên, ta có thể chứng minh rằng $g^{-1}(y) = y + g^{-1}(0)$, tức là $g(x) = x + g(0)$ với $x < 0$. Vậy, $g(x) = x + g(0)$ hay tương đương, $f(x) = m(x - g(0))$ với $x \in \mathbb{R}$.

1.6.23. Dễ kiểm tra rằng các hàm đã cho thoả mãn các điều kiện của bài toán. Bây giờ, ta sẽ chứng minh rằng không còn nghiệm nào khác. Nếu trong phương trình

$$\text{(i)} \qquad f(x + y) + f(y - x) = 2f(x)f(y)$$

ta đặt $x = 0$ và y sao cho $f(y) \ne 0$, ta có $f(0) = 1$. Lấy $y = 0$ trong (i), ta thấy rằng $f(x) = f(-x)$, tức f là hàm chẵn. Do f liên tục và $f(0) = 1$, tồn tại khoảng $[0, c]$ mà trên đó hàm nhận giá trị dương. Chúng ta xét hai trường hợp : $f(c) \leq 1$ và $f(c) \geq 1$. Trường hợp thứ nhất, tồn tại θ, $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, sao cho $f(c) = \cos\theta$. Bây giờ, viết lại (i) dưới dạng

$$f(y + x) = 2f(x)f(y) - f(y - x).$$

Thay lần lượt $x = c, y = c$ và $x = c, y = 2c$ được $f(2c) = 2\cos^2\theta - 1 = \cos 2\theta$ và $f(3c) = 2\cos\theta\cos 2\theta - \cos\theta = \cos 3\theta$. Có thể chứng minh bằng quy nạp rằng $f(nc) = \cos n\theta$ Bây giờ, áp dụng (i) với $x = y = \frac{c}{2}$ được

$$\left(f\left(\frac{c}{2}\right)\right)^2 = \frac{f(0) + f(c)}{2} = \frac{1 + \cos\theta}{2} = \cos^2\left(\frac{theta}{2}\right).$$

Vì $f\left(\frac{c}{2}\right)$ và $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ dương, phương trình cuối cùng suy ra rằng $f\left(\frac{c}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ và bằng quy nạp $f\left(\frac{c}{2^n}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$ với $n \in \mathbb{N}$. Nếu ta bắt đàu với phương trình $f(nc) = \cos n\theta$ và lặp lại thủ tục trên, ta nhận được

$$f\left(\frac{mc}{2^n}\right) = \cos\left(\frac{m\theta}{2^n}\right) \quad \text{với} \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Vậy $f(cx) = \cos\theta x$ với $x = \frac{m}{2^n}$. Vì tập các số dạng $\frac{m}{2^n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, là tập con trù mật của $\mathbb{R}^+$, tính liên tục của f suy ra rằng $f(cx) = \cos\theta x$ với $x > 0$. Vì f chẵn, đẳng thức cũng đúng với x âm. Cuối cùng, $f(x) = \cos ax$ với $a = \frac{\theta}{c}$.

Trường hợp $f(x) > 1$, tồn tại θ sao cho $f(c) = \cosh\theta$. Để chỉ ra rằng $f(x) = \cosh(ax)$, lí luận tương tự như trường hợp trên.

1.6.24. Nếu ta đặt $x = \tanh u$, $y = \tanh v$, thì

$$\frac{x + y}{1 + xy} = \frac{\tanh u + \tanh v}{1 + \tanh u \tanh v} = \tanh(u + v).$$

Vì vậy, phương trình $g(u) = f(\tanh y)$ thoả mãn phương trình hàm Cauchy (xem 1.6.1) và liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó, $g(u) = au$. Từ đó, $f(x) = \frac{1}{2}a\ln\frac{1+x}{1-x}$ với $|x| < 1$.

1.6.25. Giả sử P không đồng nhất bằng 0 và thoả mãn phương trình. Đặt $Q(x) = P(1 - x)$. Khi đó, $Q(1 - x) = P(x)$, và phương trình đã cho có thể viết lại là $Q((1 - x)^2) = (Q(x))^2$ hay

(i) $$Q(x^2) = (Q(x))^2 \quad \text{với} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Nếu Q không là đơn thức, thì nó có dạng $Q(x) = {}^k + x^m R(x)$, ở đây $a \neq 0, m, k \geq 0$, và R là đa thức sao cho $R(0) \neq 0$. Với Q như vậy, theo (i),

$$^{2k} + x^{2m}R(x^2) = a^2x^{2k} + 2ax^{k+m}R(x) + x^{2m}R^2(x).$$

Đồng nhất hệ số của các luỹ thừa như nhau, ta có $Q(x) = ax^k$, $a \neq 0$ và $a = 1$. Do đó, $P(x) = (1-x)^k$ với $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Rõ ràng, hàm đồng nhất băng không cũng thoả mãn phương trình đã cho.

1.6.26. [S. Kotz, Amer. Math. Monthly 72 (1965), 1072-1075]. Để đơn giản kí hiệu, ta sẽ viết $f^m(x_i)$ thay vì $(f(x_i))^m$. Nếu trong phương trình

(i) $$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^m\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f^m(x_i)$$

ta đặt $x_i = c$, $i = 1, 2, \ldots, n$, ta có

(ii) $$f(c^m) = f^m(c).$$

Nói riêng, $f(1) = f^m(1)$, suy ra $f(1) = 0$ hoặc $f(1) = 1$; hoặc $f(1) = -1$ trong trường hợp n lẻ. Cũng như vậy, $f(0) = 0$ hoặc $f(0) = 1, f(0) = -1$ nếu m lẻ. Đặt $c = x^{\frac{1}{m}}$, $x \geq 0$, trong (ii), ta nhận được

$$f\left(x^{\frac{1}{m}}\right) = f^{\frac{1}{m}}(x).$$

Thay x_i bởi $x_i^{\frac{1}{m}}$ trong (i) và dùng đẳng thức cuối cùng, ta có

(iii) $$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^m\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f^m(x_i^{\frac{1}{m}}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f^m(x_i).$$

Nói riêng, với $x_3 = x_4 = \cdots = x_n = 0$,

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{n} = \frac{1}{n}f(x_1) + \frac{1}{n}f(x_2) + \frac{n-2}{n}f(0)\right).$$

Nếu trong (iii), ta đặt $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$, và thay x_1 bởi $x_1 + x_2$, ta có

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{n} = \frac{1}{n}f(x_1 + x_2) + \frac{n-1}{n}f(0)\right).$$

Do đó,

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) - f(0).$$

Vậy, hàm $g(x) = f(x) - f(0)$ thảo mãn phương trình hàm Cauchy và liên tục tại ít nhất một điểm. Theo kết qủa trong 1.6.2, $g(x) = ax$ với $x \geq 0$. Vậy

$$f(x) = ax + b, \quad \text{ở đây} \quad a = f(1) - f(0),\, b = f(0).$$

Suy ra từ trên rằng $b = 0$ hoặc $b = 1$; hay thêm vào đó, nếu m lẻ, $b = -1$. Vậy, các giá trị có thể duy nhất của a là $-2, -1, 0, 1$ hoặc 2. Dễ kiểm tra rằng

$$f(x) = 0, \quad f(x) = 1, \quad f(x) = x,$$

và, với m lẻ

$$f(x) = -1, \quad f(x) = -x$$

là các nghiệm duy nhất.

1.6.27. Nếu f thoả mãn điều kiện đã cho, thì với mọi số thực a, b, $b \neq 0$,

$$\begin{aligned} f(a+b) &= f((ab^{-1}z + z)(z^{-1}b)) = f(ab^{-1}z + z)f(z^{-1}b) \\ &= (f(ab^{-1}z) + f(z))f(z^{-1}b) = f(a) + f(b). \end{aligned}$$

Từ đó $f(0) = 0$ và $f(-x) = -f(x)$. Ngoài ra, $f(n) = nf(1)$ với mọi số nguyên n. Nếu f không đồng nhất bằng 0, thì tồn tại c sao cho $f(c) \neq 0$. Nhưng $f(c) = f(1)f(c)$, vậy $f(1) = 1$. Nếu $x \neq 0$, thì $1 = f(x)f(x^{-1})$, và do đó, $0 \neq f(x) = (f(x^{-1}))^{-1}$. Từ trên suy ra với các số nguyên p và $q \neq 0$,

$$f(pq^{-1}) = f(p)f(q^{-1}) = f(p)(f(q))^{-1} = pq^{-1}.$$

Chú ý rằng với $x > 0$, ta có $f(x) = (f(\sqrt{x}))^2 > 0$. Vậy nếu $y - x > 0$, thì $f(y - x) = f(y) - f(x) > 0$. Điều này có nghĩa f là đơn điệu thực sự, và $f(x) = x$ nếu $x \in \mathbb{Q}$. Suy ra rằng $f(x) = x$ với $x \in \mathbb{R}$.

1.6.28. Hàm f có dạng

(i)
$$f(x) = g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right),$$

ở đây g là hàm thực bất kỳ trên $\mathbb{R} \subset \{0\}$, thoả mãn phương trình hàm đã cho. Mặt khác, nếu f thoả mãn phương trình đã cho, thì

$$f(x) = \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right)}{2},$$

Tức là f có dạng (i).

1.6.29. Quan sát rằng nếu f thoả mãn phương trìng hàm đã cho và nếu ta đặt

$$g(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)\right), \quad h(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right)\right),$$

thì các hàm g và h có tính chất sau đây :

(i) $$g(x) = g\left(\frac{1}{x}\right),$$

và

(i) $$h(x) = -h\left(\frac{1}{x}\right), \quad h(x) + h^2(x) = 0, \quad h(-x) = h(x).$$

Bây giờ chú ý rằng nếu g và h thoả mãn (i) và (ii), thì f=g+h thoả mãn phương trình hàm đã cho. Vậy ta cần tìm các hàm g và h. Như trong lời giải của bài toán trước, có tthể chỉ ra rằng mọ hàm thoả mãn (i) có dạng

$$g(x) = k(x) + k\left(\frac{1}{x}\right),$$

ở đây k là hàm xác định trên $\mathbb{R} \subset \{0\}$. Để tìm hàm h, quan sát rằng (ii) suy ra $h(1) = 0$. Bây giờ, với $x > 1$, đặt $h(x) = s(\ln\ln x)$. Khi đó, s thoả mãn phương trình hàm

$$s(\ln\ln x) + s(\ln(2\ln x)) = 0,$$

hay có thể viết lại dưới dạng

$$s(t) + s(\ln 2 + t) = 0 \quad \text{với} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Điều này có nghĩa s có thể là hàm bất kỳ sao cho $s(t) = -s(\ln 2 + t)$ (chú ý rằng s là tuần hoàn với chu kỳ $2\ln 2$). Có vô hạn các hàm như vậy, chẳng hạn, có thể lấy $s(t) = \cos\frac{\pi t}{\ln 2}$. Tiếp theo, ta thác triển hàm f lên $(0,1)$ bằng cách đặt $h(x) = -h\left(\frac{1}{x}\right)$, và sau đó lên $(-\infty, 0)$ bằng cách đặt $h(-x) = -h(x)$.

1.6.30. [S. Haruki, Amer. Math. Monthly 86 (1979), 577-578]. Nếu trong phương trình đã cho ta thay x bởi $x+y$ và bởi $x-y$, ta có

$$\frac{f(x+y)-g(x-y)}{2y}=\phi(x). \tag{1}$$

Bây giờ, thay y bởi $-y$ trong (1), được

$$\frac{f(x-y)-g(x+y)}{-2y}=\phi(x).$$

Do đó, với $u,v\in\mathbb{R}$, ta có

$$\begin{aligned}\phi(u+v)+\phi(u-v) &= \frac{1}{2y}(f(u+v+y)-g(u+v-y)\\ &\quad +f(u-v+y)-g(u-v-y))\\ &= \frac{1}{2y}(f(u+v+y)-g(u-v-y))\\ &\quad +\frac{1}{2y}(f(u-(v-y))-g(u+(v-y))).\end{aligned}$$

Vậy

$$\phi(u+v)+\phi(u-v)=\frac{1}{2y}(2(v+y)\phi(u)-2(v-y)\phi(u))=2\phi(u).$$

Nếu ta đặt $s=u+v$ và $t=u-v$, thì điều này có thể viết lại dưới dạng

$$\frac{\phi(s)+\phi(t)}{2}=\phi\left(\frac{s+t}{2}\right),\quad s,t\in\mathbb{R}.$$

Gọi $A:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ được cho bởi $A(s)=\phi(s)-\phi(0)$. Khi đó, $A(0)=0$ và

$$\begin{aligned}A(t)+A(s) &= \phi(t)+\phi(s)-2\phi(0)\\ &= 2\phi\left(\frac{s+t}{2}\right)-2\phi(0)\\ &= 2\phi\left(\frac{s+t}{2}\right).\end{aligned} \tag{2}$$

Đặt $t=0$ có $A(s)=2A(\frac{s}{2})$. Tiếp tục, thay s bởi $s+t$, ta nhận được

$$A(s+t)=2A(\frac{s+t}{2}).$$

Từ đây và (2) suy ra

$$(3) \qquad A(s+t) = A(s) + A(t).$$

Vậy phương trình (1) có thể viết dưới dạng

$$(4) \qquad \frac{f(x+y) - g(x-y)}{2y} = B + A(x),$$

ở đây $B = \phi(0)$ và $x \mapsto A(x)$ là hàm thoả mãn (3). Nếu trong (4) lần lượt đặt $y = x$ và $y = -x$, thì ta có

$$f(2x) = g(0) + 2Bx + 2xA(x) \quad \text{và} \quad g(2x) = f(0) + 2Bx + 2xA(x).$$

Thay $2x$ bởi x và dùng $A(s) = 2A(\frac{s}{2})$, ta nhận được

$$f(x) = g(0) + Bx + \frac{1}{2}xA(x) \quad g(2x) = f(0) + Bx + \frac{1}{2}xA(x).$$

Thế những phương trình này vào (1) và áp dụng (3), ta đi đến

$$\frac{g(0) - f(0) + 2By + xA(y) + yA(x)}{2y} = \phi(x).$$

Đặt $x = 1$, ta có

$$A(x) = dy + f(0) - g(0) \quad \text{ở đây} \quad d = 2\phi(1) - A(1) - 2B.$$

Vì $A(0) = 0$, ta có $f(0) = g(0)$. Từ đó, $A(x) = dx$ và $f(x) = g(x) = f(0) + Bx + \frac{1}{2}dx^2$.

Dễ kiểm tra rằng $f(x) = g(x) = ax^2 + bx + c$ và $\phi(x) = f'(x) = 2ax + b$ thoả mãn phương trình hàm đã cho.

1.6.31. Tập $\mathbb{R}$ có thể xem như không gian vector trên $\mathbb{Q}$. *Cơ sở Hamel* cho $\mathbb{R}$ trên $\mathbb{Q}$ là tập độc lập tuyến tính cực đại. Tồn tại cơ sở Hamel $\mathbf{H}$ chứa 1. Vì vậy, mỗi $x \in \mathbb{R}$ có biểu diễn duy nhất

$$x = \sum_{h \in \mathbf{H}} \omega_h(x)h,$$

ở đây chỉ có hữu hạn hệ số $\omega_h(x)$ khác không. Do đó,với $x, y \in \mathbb{R}$,

$$x + y = \sum_{h \in \mathbf{H}} \omega_h(x+y)h = \sum_{h \in \mathbf{H}} (\omega_h(x) + \omega_h(y))h,$$

suy ra $\omega_h(x+y) = \omega_h(x) + \omega_h(y)$. Vậy, nói riêng, $f = \omega_1$ thoả mãn (a). Ta sẽ chứng minh nó cũng thoả mãn các tính chất khác.

Chú ý rằng $\omega_1 = 1$, bởi vì $1 = 1 \cdot 1$ và $1 \in \mathbf{H}$. Bây giờ, ta chỉ ra rằng $\omega_1(x) = x$ với $x \in \mathbb{Q}$. Theo tính cộng tính của ω_1,

$$1 = \omega_1(1) = \omega_1\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q} + \cdots + \frac{1}{q}\right) = q\omega_1\left(\frac{1}{q}\right).$$

Từ đó

$$\omega_1\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{1}{q}.$$

Lại do tính cộng tính, suy ra rằng

$$\omega_1\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q} \quad \text{với} \quad p, q \in \mathbb{N}.$$

Ngoài ra, $\omega_1(0) = 0$, bởi vì $0 = 0 \cdot 1$ và $1 \in \mathbf{H}$. Vậy

$$0 = \omega_1(0) = \omega_1\left(\frac{p}{q} + \left(-\frac{p}{q}\right)\right) = \omega_1\left(\frac{p}{q}\right) + \omega_1\left(-\frac{p}{q}\right),$$

hay nói cách khác

$$\omega_1\left(-\frac{1}{q}\right) = -\frac{1}{q}.$$

Vậy ta đã chứng minh rằng $\omega_1(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{Q}$. Cuối cùng, ta chỉ ra rằng ω_1 không liên tục. Nếu ω_1 liên tục, ta sẽ có $\omega_1(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết ω_1 chỉ nhận giá trị hữu tỷ.

1.7 Hàm liên tục trong không gian metric

1.7.1. Trước hết, ta chứng minh rằng (a) $\Longrightarrow$ (b). Gọi $\mathbf{F}$ là tập đóng trong $\mathbf{Y}$. Khi đó, nếu dãy $\{x_n\}$ các phần tử trong $f^{-1}(\mathbf{F})$ hội tụ tới x, thì $f(x_n) \in \mathbf{F}$, và do tính liên tục của f, $f(x_n) \to f(x)$. Vì $\mathbf{F}$ đóng, $f(x) \in \mathbf{F}$, hay nói cách khác $x \in f^{-1}(\mathbf{F})$. Vậy ta đã chứng minh rằng $f^{-1}(\mathbf{F})$ đóng.

Để chứng minh (b) $\Longrightarrow$ (c), chỉ cần chú ý rằng mọi tập con mở $\mathbf{G}$ của $\mathbf{Y}$ là phần bù của tập con đóng $\mathbf{F}$, tức là, $\mathbf{G} = \mathbf{Y} \subset \mathbf{F}$. Khi đó, ta có $f^{-1}(\mathbf{G}) = \mathbf{X} \subset f^{-1}(\mathbf{F})$.

Bây giờ ta sẽ chứng minh rằng (c) $\Longrightarrow$ (a). Gọi $x_0 \in \mathbf{X}$ và $\varepsilon > 0$ tuỳ ý cố định. Theo giả thiết, tập $f^{-1}(\mathbf{B}_\mathbf{Y}(f(x_0), \varepsilon))$ là mở trong $\mathbf{X}$. Do x_0 là phần tử của $f^{-1}(\mathbf{B}_\mathbf{Y}(f(x_0), \varepsilon))$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $\mathbf{B}_\mathbf{X}(f(x_0), \varepsilon) \subset f^{-1}(\mathbf{B}_\mathbf{Y}(f(x_0), \varepsilon))$. Vì vậy, ta có $f(\mathbf{B}_\mathbf{X}(x_0, \delta)) \subset \mathbf{B}_\mathbf{Y}(f(x_0), \varepsilon)$, tức là f liên tục tại x_0.

Vậy, ta đã chứng minh rằng ba điều kiện đầu tiên là tương đương. Tiếp theo, ta chứng minh rằng (a) $\Longrightarrow$ (d). Để làm vậy, lấy $y_0 \in f(\overline{\mathbf{A}})$. Theo định nghĩa nghịch ảnh của một tập dưới tác động của ánh xạ f, tồn tại $x_0 \in \overline{\mathbf{A}}$ sao cho $f(x_0) = g(x_0)$. Do tính liên tục của f tại x_0, với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại hình cầu $\mathbf{B}_\mathbf{X}(x_0, \delta)$ sao cho

$$f(\mathbf{B}_\mathbf{X}(x_0, \delta)) \subset \mathbf{B}_\mathbf{Y}(y_0, \varepsilon).$$

Vì $x_0 \in \overline{\mathbf{A}}$, ta thấy $\mathbf{B}_\mathbf{X}(x_0, \delta) \cap \mathbf{A} \neq \emptyset$. Vậy

$$\emptyset \neq f(\mathbf{B}_\mathbf{X}(x_0, \delta) \cap \mathbf{A}) \subset \mathbf{B}_\mathbf{Y}(y_0, \varepsilon) \cap f(\mathbf{A}),$$

tức là $y_0 \in f(\mathbf{A})$.

Để chứng minh (d) $\Longrightarrow$ (c), đặt $\mathbf{A} = f^{-1}(\mathbf{B})$. Khi đó

$$f(\overline{f^{-1}(\mathbf{B})}) \subset \overline{f(f^{-1}(\mathbf{B}))} = \overline{\mathbf{B}}.$$

Từ đó $\overline{f^{-1}(\mathbf{B})} \subset f^{-1}(\mathbf{B})$.

Cuối cùng, ta chứng minh rằng (c) $\Longrightarrow$ (b). Nếu $\mathbf{F}$ đóng, thì $\mathbf{F} = \overline{\mathbf{F}}$. Theo (c),

$$\overline{f^{-1}(\mathbf{F})} \subset f^{-1}(\mathbf{F}),$$

tức là $f^{-1}(\mathbf{F})$ đóng.

1.7.2. Kí hiệu $\mathcal{B}(\mathbf{X})$ là họ tất cả các tập con Borel của $\mathbf{X}$, tức là, σ-đại số các tập con của $\mathbf{X}$ chứa mọi tập mở. Kí hiệu $\tilde{\mathcal{B}}$ là họ các tập $\mathbf{B} \subset \mathbf{Y}$ sao cho

$f^{-1}(\mathbf{B}) \in \mathcal{B}(\mathbf{X})$. Khi đó $\tilde{\mathcal{B}}$ là σ-đại số các tập con của $\mathbf{Y}$. Vì f liên tục, suy ra từ bài toán trước rằng nghịch ảnh của mọi tập mở là mở. Do đó, $\tilde{\mathcal{B}}$ chứa tất cả các tập con mở của $\mathbf{Y}$. Từ đó, $\mathcal{B}(\mathbf{Y}) \subset \tilde{\mathcal{B}}$, suy ra nếu $\mathbf{B} \in \mathcal{B}(\mathbf{Y})$, thì $f^{-1}(\mathbf{B}) \in \tilde{\mathcal{B}}(\mathbf{X})$.

1.7.3. Cho $\mathbf{X} = \mathbf{Y} = \mathbb{R}$ được trang bị metric Euclide thông thường $d(x, y) = |x - y|$. Xác định $f(x) = \sin \pi x$ và $\mathbf{F} = \left\{n + \frac{1}{n} : n \geq 2\right\}$. Khi đó, $\mathbf{F}$ đóng trong không gian metric $\mathbf{X}$, vì nó chỉ chứa các điểm cô lập. Mặt khác,

$$f(\mathbf{F}) = \left\{\sin\frac{\pi}{2}, -\sin\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{4}, \dots\right\}$$

không đóng trong $\mathbf{Y}$ bởi vì nó không chứa điểm điểm tích luỹ của nó, tức là điểm 0.

Lấy $\mathbf{X}$ và $\mathbf{Y}$ như trên đồng thời xác định $f(x) = x(x-2)^2$ và $\mathbf{G} = (1, 3)$. Khi đó, $f(\mathbf{F}) = [0, 3)$.

1.7.4. Nếu $y_n \inf f(\mathbf{F})$, thì $y_n = f(x_n)$, ở đây $x_n \in \mathbf{F}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Nếu $\mathbf{F}$ compact trong $\mathbf{X}$, thì tồn tại dãy con $\{x_{n_k}\}$ của $\{x_n\}$ hội tụ tới $x \in \mathbf{F}$. Do tính liên tục của f, $\{y_{n_k}\}$ xác định bởi $y_{n_k} = f(x_{n_k})$ là dãy con của $\{y_n\}$ hội tụ tới $f(x) \inf f(\mathbf{F})$. Vậy tính compact của $f(\mathbf{F})$ được chứng minh.

1.7.5. Gọi $\{x_n\}$ là dãy các phần tử trong $\mathbf{F}_1 \cup \mathbf{F}_2 \cup \ldots \cup \mathbf{F}_m$ hội tụ tới x. Khi đó, tồn tại ít nhất một dãy $\mathbf{F}_i$ chứa dãy con $\{x_{n_k}\}$. Do đó, dãy $\{x_n\}$ có thể phân tích thành hữu hạn dãy con sao cho mỗi dãy con được chứa trong một tập $\mathbf{F}_i$. Do $\mathbf{F}_i$ đóng và f liên tục trên $\mathbf{F}_i$, $f(x_{n_k}) = f_{|\mathbf{F}_i}(x_{n_k}) \to f_{|\mathbf{F}_i}(x) = f(x)$. Suy ra rằng $\{f(x_n)\}$ được phân tích thành hữu hạn dãy con hội tụ tới $f(x)$, tức là $\{f(x_n)\}$ hội tụ tới $f(x)$.

Để thấy rằng khẳng định không đúng trong trường hợp vô hạn tập, xét $\mathbf{F}_i$ xác định như sau : $\mathbf{F}_0 = \{0\}$, $\mathbf{F}_i = \left\{\frac{1}{i}\right\}$, $i = 1, 2, 3, \dots$. Hàm cho bởi

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{với} \quad x \in \mathbf{F}_i,\ i = 1, 2, 3, \dots, \\ 0 & \text{với} \quad x \in \mathbf{F}_0, \end{cases}$$

liên tục trên mỗi $\mathbf{F}_i$, $i = 0, 1, 2, 3, \dots$, nhưng không liên tục trên tập $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \mathbf{F}_i$.

1.7.6. Lấy tuỳ ý $x_0 \in \bigcup\limits_{t \in \mathbf{T}} \mathbf{G}_t$. Khi đó, tồn tại $t_0 \in \mathbf{T}$ sao cho $x_0 \in \mathbf{G}_{t_0}$. Vì $\mathbf{G}_{t_0}$ mở và giới hạn của f trên $\mathbf{G}_{t_0}$ là liên tục, với $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho nếu $x \in \mathbf{B}(x_0, \delta) \subset \mathbf{G}_{t_0}$, thì $f(x) = f_{|\mathbf{G}_{t_0}}(x) \in \mathbf{B}\left(f_{|\mathbf{G}_{t_0}}(x_0), \varepsilon\right)$, tức là f liên tục tại x_0.

1.7.7. Giả sử rằng với mọ tập compact $\mathbf{A} \subset \mathbf{X}$, $f_{|\mathbf{A}}$ là liên tục. Nếu dãy $\{x_n\}$ các phần tử của $\mathbf{X}$ hội tụ tới x, thì tập $\mathbf{A} = \{x, x_1, x_2, x_3, \dots\}$ là compact trong $\mathbf{X}$. Vậy, $f(x_n) = f_{|\mathbf{A}}(x_n) \to f_{|\mathbf{A}}(x) = f(x)$. Vậy f liên tục trên $\mathbf{X}$. Bao hàm ngược lại là rõ ràng.

1.7.8. Tính liên tục của f^{-1} tương đương với điêuf kiện $f(\mathbf{G})$ mở trong $\mathbf{Y}$ với mỗi $\mathbf{G}$ mở trong $\mathbf{X}$. Nếu $\mathbf{G}$ mở trong $\mathbf{X}$, thì $\mathbf{G}^{\mathbf{C}} = \mathbf{X} \subset \mathbf{G}$, coi như tập con đóng của không gian compact $\mathbf{X}$ là compact. Theo kết quả của 1.7.4, $f(\mathbf{G}^{\mathbf{C}}) = bY \subset f(\mathbf{G})$ cũng compact, và do đó đóng. Điều này có nghĩa $f(\mathbf{G})$ mở.

Để chỉ ra tính compact là giả thiết cốt yếu, xét $f : (0,1) \cup \{2\} \to (0,1]$ cho bởi $f(x) = x$ với $x \in (0,1)$ và $f(2) = 1$. Rõ ràng, f là song ánh liên tục từ $(0,1 \cup \{2\})$ lên $(0,1]$. Vì $f^{-1}(x) = x$ với $x \in (0,1)$ và $f^{-1}(1) = 2$, hàm ngược không liên tục trên $(0,1]$.

1.7.9. Gọi d_1 và d_2 lần lượt là các metric của $\mathbf{X}$ và $\mathbf{Y}$. Do tính liên tục của f, với $\varepsilon > 0$ cho trước và $x \in \mathbf{X}$, tồn tại $\delta(x) > 0$ sao cho

$$(1) \qquad d_1(y, x) < \delta(x) \quad \text{kéo theo} \quad d_1(f(y), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Vì họ các hình cầu $\left\{\mathbf{B}\left(x, \frac{1}{2}\delta(x)\right) : x \in \mathbf{X}\right\}$ là phủ mở của không gian compact $\mathbf{X}$, tồn tại phủ con hữu hạn

$$(2) \qquad \left\{\mathbf{B}\left(x_i, \frac{1}{2}\delta(x_i)\right) : i = 1, 2, \dots, n\right\}.$$

Đặt $\delta = \frac{1}{2}\min\{\delta(x_1), \delta(x_2), \dots, \delta(x_n)\}$ và lấy x và y trong $\mathbf{X}$ sao cho $d_1(x, y) < \delta$. Vì họ (2) là một phủ của $\mathbf{X}$, tồn tại $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ sao cho $d_1(x, x_i) < \frac{1}{2}\delta(x_i)$. Khi đó

$$d_1(y, x_i) < d_1(y, x) + d_1(x, x_i) < \delta + \frac{1}{2}\delta(x_i) \le \delta(x_i).$$

Do đó, theo (1),

$$d_2(f(x), f(y)) \leq d_2(f(x), f(x_i)) + d_2(f(x_i), f(y)) < \varepsilon.$$

1.7.10. Với $x_0, x \in \mathbf{X}$ và $y \in \mathbf{A}$,

$$\operatorname{dist}(x, \mathbf{A}) \leq d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y).$$

Vậy $\operatorname{dist}(x, \mathbf{A}) \leq d(x, x_0) + \operatorname{dist}(x_0, \mathbf{A})$. Từ đó

$$\operatorname{dist}(x, \mathbf{A}) - \operatorname{dist}(x_0, \mathbf{A}) \leq d(x, x_0).$$

Cũng như vậy, $\operatorname{dist}(x_0, \mathbf{A}) - \operatorname{dist}(x, \mathbf{A}) \leq d(x, x_0)$. Do đó

$$|\operatorname{dist}(x, \mathbf{A}) - \operatorname{dist}(x_0, \mathbf{A})| \leq d(x, x_0),$$

và vì vậy f liên tục đều trên $\mathbf{X}$.

1.7.11. Nếu $f(\mathbf{X})$ không liên thông, thì tồn tại các tập con mở rời nhau, khác rỗng $\mathbf{G}_1$ và $\mathbf{G}_2$ sao cho $\mathbf{G}_1 \cup \mathbf{G}_2 = f(\mathbf{X})$. Tính liên tục của f suy ra rằng $f^{-1}(\mathbf{G}_i)$, $i = 1, 2$, là mở. Rõ ràng, chúng khác rỗng, rời nhau và hợp của chúng bằng $\mathbf{X}$, mâu thuẫn.

1.7.12. Gọi d_1 và d_2 lần lượt là các metric trên $\mathbf{X}$ và $\mathbf{Y}$. Giả sử f liên tục tại $x_0 \in \mathbf{A}$. Khi đó, với $\varepsilon > 0$ cho trước, có thể tìm $\delta > 0$ sao cho $f(x) \in \mathbf{B}f(x_0), \varepsilon/2$ bất cứ khi nào $x \in \mathbf{B}(x_0, \delta) \cap \mathbf{A}$. Do đó,, $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$ với mọi $x, y \in \mathbf{B}(x_0, \delta) \cap \mathbf{A}$. Suy ra rằng $o_f(x_0) = 0$. Ngược lại, nếu $o_f(x_0) = 0$, thì với $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta_\varepsilon > 0$ sao cho

$$0 < \delta < \delta_\varepsilon \quad \text{kéo theo} \quad \operatorname{diam}(f(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}(x_0, \delta))) < \varepsilon.$$

Từ đó $d_1(x, x_0) < \delta$ kéo theo

$$d_2(f(x), f(x_0)) \leq \operatorname{diam}(f(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}(x_0, \delta))) < \varepsilon.$$

1.7.13. Đặt $\mathbf{B} = \{x \in \overline{\mathbf{A}} : o_f(x) \geq \varepsilon\}$ và gọi $\{x_n\}$ là dãy các điểm của $\mathbf{B}$ hội tụ tới x_0. Vì $\mathbf{B} \subset \overline{\mathbf{A}}$, $x_0 \in \overline{\mathbf{A}}$. Vì vậy, $o_f(x_0)$ được xác định đúng đắn. Ngoài ra, với mọi $\delta > 0$, tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $\mathbf{B}(x_n, \delta/2) \subset \mathbf{B}(x_0, \delta)$. Từ đó

$$\operatorname{diam}(f(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}(x_0, \delta))) \geq \operatorname{diam}(f(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}(x_n, \delta/2))) \geq o_f(x_n) \geq \varepsilon.$$

Suy ra rằng $o_f(x_0) \geq \varepsilon$, hay nói cách khác, $x_0 \in \mathbf{B}$.

1.7.14. Theo kết quả của 1.7.12, tập $\mathbf{C}$ các điểm liên tục của f bằng tập các điểm mà trên đó dao dộ triệt tiêu. Đặt

$$\mathbf{B}_n = \{x \in \mathbf{X} : o_f(x) < frac1n\}.$$

Suy ra từ bài toán trước rằng $\mathbf{B}_n$ mở trong $\mathbf{X}$. Mặt khác,

$$\mathbf{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbf{B}_n,$$

tức là, tập các điểm liên tục của f có kiểu $\mathcal{G}_\delta$. Suy ra rằng tập $\mathbf{X} \setminus \mathbf{C}$ các điểm gián đoạn của f có kiểu $\mathcal{F}_\sigma$ trong $\mathbf{X}$.

1.7.15. Xét hàm định nghĩa bởi (so sánh với 1.2.3 (a))

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad x \text{ hữu tỷ.} \\ 0 & \text{nếu} \quad x = 0, \\ \frac{1}{q} & \text{nếu} \quad x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, \text{ và } p, q \text{ nguyên tố cùng nhau.} \end{cases}$$

1.7.16. [S. S. Kim, Amer. Math. Monthly 106 (1999), 258-259]. Gọi $\mathbf{A}$ có kiểu $\mathcal{F}_\sigma$ trong $\mathbb{R}$, tức là

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{F}_n = \mathbf{A},$$

ở đây $\mathbf{F}_n$ đóng. Không mất tổng quát, có thể giả sử rằng $\mathbf{F}_n \subset \mathbf{F}_{n+1}$ với $n \in \mathbb{N}$. Thực vậy, chỉ cần thay $\mathbf{F}_n$ bởi $\mathbf{F}_1 \cup \mathbf{F}_2 \cup \cdots \mathbf{F}_n$. Nếu $\mathbf{A} = \mathbb{R}$, thì, chẳng hạn, $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$ gián đoạn tại mỗi $x \in \mathbb{R}$. Nếu $\mathbf{A} \neq \mathbb{R}$, thì ta định nghĩa hàm g bằng cách đặt

$$g(x) = \begin{cases} \sum\limits_{n \in \mathbf{K}} \frac{1}{2^n} & \text{nếu} \quad x \in \mathbf{A}, \\ 0 \quad \text{nếu} & x \in \mathbb{R} \subset \mathbf{A}, \end{cases}$$

ở đây $\mathbf{K} = \{n : x \in \mathbf{F}_n\}$, và ta đặt

$$f(x) = g(x)\left(\chi_{\mathbb{Q}}(x) - \frac{1}{2}\right).$$

Trước hết, ta chỉ ra rằng mỗi điểm của $\mathbf{A}$ là điểm giám đoạn của f. Thực vậy, nếu $x \in \mathbf{A}^o$, thì mọi lân cận của x chứa một điểm mà tại đó dấu của f khác dấu của $f(x)$. Nếu $x \in \partial\mathbf{A} \cap \mathbf{A}$, thì $f(x) \neq 0$ và mọi lân cận của x chứa một điểm mà tại đó f triệt tiêu. Vì $\mathbf{A} = \mathbf{A}^o \cup (\partial\mathbf{A} \cap \mathbf{A})$, hàm f gián đoạn trên $\mathbf{A}$. Bây giờ, ta phải chỉ ra rằng f liên tục trên $\mathbb{R} \subset \mathbf{A}$. Ta có $f(x) = 0$ nếu $x \notin \mathbf{A}$. Nếu dãy $\{x_k\}$ hội tụ tới x và $x_k \in \mathbf{A}$, thì với mọi n, tồn tại k_n sao cho $x_k \in \mathbf{F}_n$ với $k \geq k_n$. (Nếu có vô hạn x_k trong $\mathbf{F}_n$ nào đó, thì x cũng nằm trong $\mathbf{F}_n$.) Do đó, với $k \geq k_n$,

$$g(x_k) = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots = \frac{1}{2^n},$$

tức là $\lim\limits_{k\to\infty} g(x_k) = 0 = g(x)$.

1.7.17. Không. Mọi hàm xác định trên không gian metric rời rạc là liên tục.

1.7.18. Trước hết giả sử rằng $x \in \partial\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}} \cap \overline{\mathbf{X} \setminus \mathbf{A}}$. Vì mỗi hình cầu $\mathbf{B}(x, \delta)$ chứa các điểm của $\mathbf{A}$ và các điểm của $\mathbf{X} \setminus \mathbf{A}$, ta có $o_{\chi_{\mathbf{A}}}(x) = 1$.

Bây giờ, giả sử rằng $o_{\chi_{\mathbf{A}}}(x) > 0$. Điều này có nghĩa với mọi $\delta > 0$,

$$\sup\left\{\left|\chi_{\mathbf{A}(x)} - \chi_{\mathbf{A}(y)}\right| : y \in \mathbf{B}(x, \delta)\right\} = o_{\chi_{\mathbf{A}}}(x, \delta) > 0.$$

Do đó, mỗi hình cầu $\mathbf{B}(x, \delta)$ phỉa chứa các điểm của $\mathbf{A}$ và các điểm của $\mathbf{X} \setminus \mathbf{A}$. Từ đó, $x \in \partial\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}} \cap \overline{\mathbf{X} \setminus \mathbf{A}}$.

Rõ ràng, nếu $\mathbf{A}$ vừa mở, vừa đóng, thì $\partial\mathbf{A} = \emptyset$. Vì vậy, theo 1.7.12, $\chi_{\mathbf{A}}$ liên tục trên $\mathbf{X}$. Ngược lại, nếu $\chi_{\mathbf{A}}$ liên tục trên $\mathbf{X}$, thì $\partial\mathbf{A} = \emptyset$. Bây giờ, ta chứng minh rằng $\overline{\mathbf{A}} \subset \mathbf{A}$. Nếu không, tồn tại $x \in \overline{\mathbf{A}} \setminus \mathbf{A} \subset \overline{\mathbf{X} \setminus \mathbf{A}}$, mâu thuẫn. Có thể chứng minh hoàn toàn tương tự rằng $\mathbf{X} \setminus \mathbf{A}$ cũng đóng.

1.7.19. Với $x \in \mathbf{A}$ và $\delta > 0$ ta có

$$\begin{aligned} o_f(x, \delta) &= \sup\{d_2(f(x), f(y)) : y \in \mathbf{B}(x, \delta)\} \\ &= \sup\{d_2(f(x), f(y)) : y \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}(x, \delta)\} \\ &\quad + \sup\{d_2(f(x), f(y)) : y \in (\mathbf{X} \setminus \mathbf{A}) \cap \mathbf{B}(x, \delta)\} \end{aligned}$$

Vậy
$o_f(x,\delta)$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup\{d_2(g_1(x),g_1(y)) : y\in \mathbf{A}\cap\mathbf{B}(x,\delta)\}\\
&\quad +\sup\{d_2(g_1(x),g_2(y)) : y\in (\mathbf{X}\setminus\mathbf{A})\cap\mathbf{B}(x,\delta)\}\\
&\leq o_{g_1}(x,\delta)+\sup\{d_2(g_1(x),g_2(y)) : y\in (\mathbf{X}\setminus\mathbf{A})\cap\mathbf{B}(x,\delta)\}\\
&\leq o_{g_1}(x,\delta)\\
&\quad +\sup\{d_2(g_1(x),g_2(x))+d_2(g_2(x),g_2(y)) : y\in (\mathbf{X}\setminus\mathbf{A})\cap\mathbf{B}(x,\delta)\}\\
&\leq o_{g_1}(x,\delta)+d_2(g_1(x),g_2(x))+o_{g_2}(x,\delta).
\end{aligned}$$

Vì g_1 và g_2 liên tục, ta có, theo 1.7.12,

(1) $$o_f(x)\leq d_2(g_1(x),g_2(x)).$$

Bây giờ, ta phải chứng minh rằng với $x\in\mathbf{A}$.

(2) $$o_f(x)\geq d_2(g_1(x),g_2(x)).$$

Gọi $\{\delta_n\}$ là dãy các số dương hội tụ tới 0. Vì $\mathbf{A}^o=\emptyset$, tập $\mathbf{X}\setminus\mathbf{A}$ trù mật trong $\mathbf{X}$. Vậy mỗi hình cầu $\mathbf{B}(x,\delta_n)$ chứa một điểm y_n của $\mathbf{X}\setminus\mathbf{A}$. Do đó,

$$\begin{aligned}
&\sup\{d_2(f(x),f(y)) : y\in\mathbf{B}(x,\delta_n)\}\\
&\geq \sup\{d_2(g_1(x),g_2(y)) : y\in\mathbf{B}(x,\delta_n)\cap(\mathbf{X}\setminus\mathbf{A})\}\\
&\geq d_2(g_1(x),g_2(y_n)).
\end{aligned}$$

Kết hợp với tính liên tục của g_2 suy ra

$$\lim_{n\to\infty}\sup\{d_2(f(x),f(y)) : y\in\mathbf{B}(x,\delta_n)\}\geq d_2(g_1(x),g_2(x)).$$

Từ đó suy ra (2). Suy ra từ (1) và (2) rằng đẳng thức cần chứng minh đúng với $x\in\mathbf{A}$. Theo cách tương tự (dùng tính trù mật của **A**) có thể chứng minh đẳn thức này cũng đúng cho $x\in\mathbf{X}\setminus\mathbf{A}$.

1.7.20. Giả sử rằng $\{f_n\}$ là dãy các hàm liên tục trên $\mathbf{X}$ sao cho $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Với $\varepsilon > 0$, đặt

$$\mathbf{P}_m(\varepsilon) = \{x \in \mathbf{X} : |f(x) - f_m(x)| \le \varepsilon\}$$

và $\mathbf{G}(\varepsilon) = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} (\mathbf{P}_m(\varepsilon))^o$. Ta sẽ chứng minh rằng $\mathbf{C} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{G}(1/n)$ là tập các điểm liên tục của f. Trước hết ta sẽ chứng minh rằng nếu f liên tục tại x_0, thì $x_0 \in \mathbf{C}$. Vì $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, tồn tại m sao cho

$$|f(x_0) - f_m(x_0)| \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

Suy ra từ tính liên tục của f và f_m tại x_0 rằng tồn tại một hình cầu $\mathbf{B}(x_0, \delta)$ sao cho với $x \in \mathbf{B}(x_0, \delta)$,

$$|f(x) - f(x_0)| \le \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{và} \quad |f_m(x) - f_m(x_0)| \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

Do đó, $|f(x) - f_m(x)| \le \varepsilon$ nếu $x \in \mathbf{B}(x_0, \delta)$. Điều này có nghĩa $x_0 \in (\mathbf{P}_m(\varepsilon))^o \subset \mathbf{G}(\varepsilon)$. Vì $\varepsilon > 0$ có thể chọn tuỳ ý, ta có $x_0 \in \mathbf{C}$.

Bây giờ nếu

$$x_0 \in \mathbf{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbf{G}(1/n),$$

thì, với mọi $\varepsilon > 0$, $x_0 \in \mathbf{G}(\varepsilon/3)$. Vậy tồn tại số nguyên dương m sao cho $x_0 \in (\mathbf{P}_m(\varepsilon))^o$. Do đó tồn tại hình cầu $\mathbf{B}(x_0, \delta)$ sao cho nếu $x \in \mathbf{B}(x_0, \delta)$, thì

$$|f(x) - f_m(x)| \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

Vì f_m liên tục, điều này chỉ ra rằng f liên tục tại x_0. Bây giờ, ta phải chứng minh rằng $\mathbf{X} \setminus \mathbf{C}$ thuộc phạm trù thứ nhất. Để làm vậy, xác định

$$\mathbf{F}_m(\varepsilon) = \{x \in \mathbf{X} : |f_m(x) - f_{m+k}(x)| \le \varepsilon \quad \text{với mọi} \quad k \in \mathbb{N}\}.$$

Tính liên tục của f_n, $n \in \mathbb{N}$, suy ra rằng $\mathbf{F}_m(\varepsilon)$ đóng. Vì $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in \mathbf{X}$, ta thấy rằng $\mathbf{X} = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \mathbf{F}_m(\varepsilon)$ và $\mathbf{F}_m(\varepsilon) \subset \mathbf{P}_m(\varepsilon)$. Do đó,

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} (\mathbf{F}_m(\varepsilon))^o \subset \mathbf{G}(\varepsilon).$$

Bây giờ chú ý rằng với mọi $\mathbf{F} \subset \mathbf{X}$, phần trong của $\mathbf{F} \setminus \mathbf{F}^o$ bằng rỗng, bởi vì $(\mathbf{F} \subset \mathbf{F}^o)^o \setminus \mathbf{F}^o \setminus (\mathbf{F}^o)^o = \emptyset$. Ngoài ra, nếu $\mathbf{F}$ đóng, thì $\mathbf{F} \setminus \mathbf{F}^o$ đóng và vì vậy $\mathbf{F} \setminus \mathbf{F}^o$ trù mật khắp nơi. Vì rằng

$$\mathbf{X} \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} (\mathbf{F}_m(\varepsilon))^o \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} (\mathbf{F}_m(\varepsilon) \setminus (\mathbf{F}_m(\varepsilon))^o),$$

tập $\mathbf{X} \setminus \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} (\mathbf{F}_m(\varepsilon))^o$ thuộc phạm trù thứ nhất. Cuối cùng, quan sát rằng

$$\mathbf{X} \setminus \mathbf{C} = \mathbf{X} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{G}(1/n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbf{X} \setminus \mathbf{G}(1/n)).$$

Vì vậy, tập $\mathbf{X} \setminus \mathbf{C}$ các điểm gián đoạn của f thuộc phạm trù thứ nhất.

1.7.21. Ta sẽ dùng kí hiệu của lời giải của bài toán trước. Ta có

$$\mathbf{X} \setminus \mathbf{G}(1/k) \subset \mathbf{X} \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} (\mathbf{F}_m(1/k))^o \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} (\mathbf{F}_m(1/k) \setminus (\mathbf{F}_m(1/k))^o).$$

Từ đó,

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} (\mathbf{X} \setminus \mathbf{G}(1/k)) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} (\mathbf{F}_m(1/k) \setminus (\mathbf{F}_m(1/k))^o).$$

Vậy, $\mathbf{X} \setminus \mathbf{C}$ là tập con của hợp đếm được các tập đóng và không đâu trù mật (các phần bù của chúng mở và trù mật trong $\mathbf{X}$). Suy ra rằng $\mathbf{C}$ chứa giao đếm được các tập mở và trù mật. Theo định lí Baire, $\mathbf{C}$ trù mật trong $\mathbf{X}$.

1.7.22. Với $\varepsilon > 0$, đặt

$$\mathbf{F}_k = \{0\} \cup \bigcap_{n \geq k} \left\{ x > 0 : \left| f\left(\frac{x}{n}\right) \right| \leq \varepsilon \right\}, \quad k = 1, 2, 3, \dots .$$

Vì f liên tục, các tập là đóng (xem, chẳng hạn, 1.7.1). Theo giả thiết, $\bigcup\limits_{k=1} \mathbf{F}_k = [0, \infty)$. Theo định lí Baire, ít nhất một trong các tập $\mathbf{F}_k$ có phần trong khác rỗng. Do đó, tồn tại $a > 0, \delta > 0$, và $k \in \mathbb{N}$ sao cho $(a - \delta, a + \delta) \subset \mathbf{F}_k$. Không mất tổng quát, có thể giả sử rằng $\delta \leq \frac{a}{k}$. Nếu $0 < x \leq \delta$ và $n = \left[\frac{a}{x}\right]$, thì

$a - \delta \leq a - x < nx \leq a < a + \delta$, và $n \geq k$. Vậy $nx \in \mathbf{F}_k$, và theo định nghĩa của $\mathbf{F}_k$,

$$f(x) = \left| f\left(\frac{nx}{n}\right) \right| \leq \varepsilon,$$

suy ra $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$.

1.7.23. Định nghĩa $\mathbf{F}_n$ như sau :

$$\mathbf{F}_n = \{x \in \mathbf{X} : |f(x)| \leq n \quad \text{với mọi} \quad f \in \mathcal{F}\}.$$

Suy ra từ tính liên tục của f rằng $\mathbf{F}_n$ đóng. Theo giả thiết, với mọi $x \in \mathbf{X}$, tồn tại số nguyên dương n_x sao cho $|f(x)| \leq n_x$ với mọi $f \in \mathcal{F}_{n_x}$. Do đó, $\mathbf{X} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{F}_n$. Vì $(\mathbf{X}, d_1)$ thuộc phạm trù thứ hai, tồn tại $\mathbf{F}_{n_0}$ có phần trong khác rỗng. Đặt $\mathbf{G} = \mathbf{F}_{n_0}^o$. Vì vậy, $|f(x)| \leq n_0$ với mọi $f \in \mathcal{F}$ và mỗi $x \in \mathbf{G}$.

1.7.24. Ta biết rằng

$$f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbf{F}_n\right) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} f(\mathbf{F}_n).$$

Bây giờ, ta chứng minh rằng nếu f liên tục, thì

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} f(\mathbf{F}_n) \subset f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbf{F}_n\right).$$

Lấy $y \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} f(\mathbf{F}_n)$. Khi đó, với mọi số nguyên dương $n, y \in f(\mathbf{F}_n)$, hay nói cách khác, $y = f(x_n)$. theo định lí về các tập lồng nhau của Cantor, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} f(\mathbf{F}_n) = \{x_0\}$ với $x_0 \in \mathbf{X}$ với $x_0 \in \mathbf{X}$ nào đó. Do tính liên tục của f, $y = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Vậy $y \in f\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} f(\mathbf{F}_n)\right)$.

1.7.25. Với $u, v \in \mathbf{X}$ ta có

$$d(f_u, f_v) = \sup\{|d_1(u, x) - d_1(v, x)| : x \in \mathbf{X}\} \leq d_1(u, v).$$

Ngoài ra,

$$\begin{aligned} d(f_u, f_v) &= \sup\{|d_1(u, x) - d_1(v, x)| : x \in \mathbf{X}\} \\ &\leq |d_1(u, x) - d_1(v, x)| = d_1(u, v). \end{aligned}$$

1.7.26. Giả sử trước hết rằng $\mathbf{X}$ là không gian metric compact và $f : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ liên tục. Khi đó, với $\varepsilon > 0$ cho trước và $x \in \mathbf{X}$, tồn tại $\delta_x > 0$ sao cho $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ với $|y - x| < \delta_x$. Vì họ $\{\mathbf{B}(x, \delta_x),\ x \in \mathbf{X}\}$ là phủ mở của $\mathbf{X}$, tồn tại phủ con hữu hạn $\mathbf{B}(x_1, \delta_{x_1}), \mathbf{B}(x_2, \delta_{x_2}), \ldots, \mathbf{B}(x_n, \delta_{x_n})$. Vì vậy với $x \in \mathbf{X}$, tồn tại $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sao cho $x \in \mathbf{B}(x_i, \delta_{x_i})$. Suy ra rằng

$$|f(x)| \le |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i)| \le \varepsilon + \max\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\},$$

tức là f bị chặn trên $\mathbf{X}$.

Bây giờ giả sử rằng hàm thực liên tục trên $\mathbf{X}$ bị chặn và giả sử ngược lại rằng $\mathbf{X}$ không compact. Khi đó, có thể tìm dãy $\{x_n\}$ các phần tử trong $\mathbf{X}$ mà không chứa bất kỳ dãy con hội tụ nào. Khi đó, $\mathbf{F} = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ đóng trong $\mathbf{X}$. Hàm f cho bởi $f(x_n) = n$ liên tục trên $\mathbf{F}$. Theo định lí thác triển Tietze, tồn tại thác triển liên tục của f xác định trên toàn $\mathbf{X}$. Vậy, ta đã xây dựng một hàm liên tục và không bị chặn, mâu thuẫn.

1.7.27. Trước hết, ta chứng minh rằng (a) suy ra (b). Giả sử (a) đúng, tức $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n) = 0$ và giả sử ngược lại rằng $\{x_n\}$ không chứa dãy con hội tụ. Khi đó tồn tại dãy $\{y_n\}$ các phần tử trong $\mathbf{X}$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} d_1(x_n, y_n) = 0$ và $y_n \ne x_n$ với $n \in \mathbb{N}$. Nếu $\{y_n\}$ chứa dãy con hội tụ y_{n_k}, thì do $\lim\limits_{k\to\infty} d_1(x_{n_k}, y_{n_k}) = 0$, dãy con $\{x_{n_k}\}$ cũng hội tụ. Suy ra rằng không có số hạng nào của dãy $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ được lặp lại vô hạn lần. Vì vậy, tồn tại một dãy tăng thực sự $\{n_k\}$ các số nguyên dương sao cho các tập vô hạn $\mathbf{F}_1 = \{x_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ và $\mathbf{F}_2 = \{y_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ đóng và rời nhau. Theo bổ đề Urysohn, tồn tại hàm liên tục $f : \mathbf{X} \to \mathbf{R}$ sao cho f bằng 1 trên $\mathbf{F}_1$ và bằng 0 trên $\mathbf{F}_2$. Vậy

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| = 1 \quad \text{và} \quad \lim_{k\to\infty} d_1(x_{n_k}, y_{n_k}) = 0.$$

Từ đó f liên tục nhưng không liên tục đều trên $\mathbf{X}$, mâuthuẫn (a).

Để chỉ ra rằng (b) suy ra (a), kí hiệu $\mathbf{A}$ là tập các điểm giới hạn của $\mathbf{X}$. Theo (b), mọi dãy các phần tử trong $\mathbf{A}$ có dãy con hội tụ tới phần tử trong $\mathbf{A}$. Vì vậy, $\mathbf{A}$ compact. Nếu $\mathbf{X} \ne \mathbf{A}$, thì với $\delta_1 > 0$, đặt $\delta_2 = \inf\{\rho(x) : x \in \mathbf{X}, \operatorname{dist}(x, \mathbf{A}) > \delta_1\}$. Ta sẽ chứng minh rằng $\delta_2 > 0$. Nếu $\delta_2 = 0$, thì tồn tại dãy $\{x_n\}$ các phần tử trong $\mathbf{X}$ sao cho $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n) = 0$ và $\operatorname{dist}(x_n, \mathbf{A}) > \delta_1$. theo (b), $\{x_n\}$ có dãy con hội tụ tới một phần tử trong $\mathbf{A}$, mâu thuẫn. Gọi $f : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục và lấy $\varepsilon > 0$ tuỳ ý cố định. Khi đó, với $x \in \mathbf{A}$, tồn tại $\delta_x > 0$ sao cho nếu $d_1(x, y) < \delta_x$, thì $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Vì $\mathbf{A}$ compact, tồn tại $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{A}$ sao cho

$$\mathbf{A} \subset \bigcup_{k=1}^{n} \mathbf{B}\left(x_k, \frac{1}{3}\delta_{x_k}\right).$$

Đặt $\delta_1 = \frac{1}{3}\min\{\delta_{x_1}, \ldots, \delta_{x_n}\}$ và $\delta_2 > 0$ như trên. Đặt $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ và lấy $x, y \in \mathbf{X}$ sao cho $d_1(x, y) < \delta$. Nếu $\operatorname{dist}(x, \mathbf{A}) > \delta_1$, thì $\rho(x) > \delta_2$, vậy $d_1(x, y) < \delta \le \delta_2$ chỉ nếu $x = y$. Khi đó, rõ ràng, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Nếu $\operatorname{dist}(x, \mathbf{A}) \le \delta_1$, thì tồn tại $a \in \mathbf{A}$ sao cho $d_1(x, a) \le \delta_1$. Suy ra từ trên rằng tồn tại $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ để $d_1(a, x_k) < \frac{1}{3}\delta_{x_k}$. Do đó,

$$d_1(y, x_k) \le d_1(y, x) + d_1(x, a) + d_1(a, x_k) < \delta + \delta_1 + \frac{1}{3}\delta_{x_k} \le \delta_{x_k}.$$

Từ đó

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(y)| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Điều này chứng minh tính liên tục đều của f trên $\mathbf{X}$.

1.7.28. Biết rằng, xem, chẳng hạn, 1.7.9, mọi hàm liên tục trên không gian metric compact là liên tục đều. Nếu $\mathbf{X}$ là compact, thì mỗi tập $\{x \in \mathbf{X} : \rho(x) > \varepsilon\}, \varepsilon > 0$, là hữu hạn. Mặt khác, giả sử rằng tồn tại một số $\varepsilon > 0$ sao cho tập $\{x \in \mathbf{X} : \rho(x) > \varepsilon\}$ là hữu hạn. Vì họ các hình cầu $\mathbf{B}(x, \varepsilon), x \in \mathbf{X}$ là phủ mở của $\mathbf{X}$, nó có phủ con hữu hạn, mâu thuẫn với $\rho(x) > \varepsilon$ với vô hạn x.

Bâygiờ giả sử mọi hàm thực liên tục trên $\mathbf{X}$ là liên tục đều và tập $x \in \mathbf{X} : \rho(x) > \varepsilon$ hữu hạn. Ta sẽ chứng minh rằng $\mathbf{X}$ compact. Gọi $\{x_n\}$ là dãy các điểm của $\mathbf{X}$. Nếu một số hạng của dãy này được lặp lại vô hạn lần, thì rõ ràng tồn tại một dãy con hội tụ. Nếu không, thì $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n) = 0$, vì tập $\{x \in \mathbf{X} : \rho(x) > \varepsilon\}$ là hữu hạn. Theo kết quả của bài toán trước, $\{x_n\}$ chứa một dãy con hội tụ.

1.7.29. Chỉ cần xét $\mathbf{X} = [0,1] \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \ldots$ được trang bị chuẩn Euclide $d_1(x,y) = |x-y|$.

Chương 2

Phép tính vi phân

2.1 Đạo hàm của hàm số thực

2.1.1.

(a) Ta có

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0, \\ -x^2 & x < 0. \end{cases}$$

Suy ra

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0, \\ -2x & x < 0, \end{cases}$$

bởi vì

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^2 - 0}{h} = 0 = f'_-(0).$$

(b) Ta có

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & x \geq 0, \\ -\frac{1}{2\sqrt{-x}} & x < 0. \end{cases}$$

Bởi vì

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{h} - 0}{h} = +\infty,$$

nhưng

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{-h}-0}{h} = -\infty$$

nên đạo hàm của f tại điểm 0 không tồn tại.

(c) $f'(x) = n\pi \sin(2\pi x)$ với $x \in (n, n+1), n \in \mathbb{Z}$. Hơn nữa với $n \in \mathbb{Z}$ ta có

$$f'_+(n) = \lim_{x\to n^+} \frac{n\sin^2(\pi x) - 0}{x-n} = \lim_{x\to n^+} \frac{n\sin^2(\pi x - n\pi)}{x-n} = 0,$$
$$f'_-(n) = \lim_{x\to n^-} \frac{(n-1)\sin^2(\pi x) - 0}{x-n} = 0,$$

suy ra $f'(x) = \pi[x]\sin(2\pi x)$.

(d) Từ câu (c) suy ra

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x\sin^2(\pi x))' - ([x]\sin^2(\pi x))' \\ &= \sin^2(\pi x) + \pi(x-[x])\sin(2\pi x). \end{aligned}$$

(e) $f'(x) = \frac{1}{x}$ với $x \neq 0$.

(f) $f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ khi $|x| > 1$.

2.1.2.

(a) Vì $\log_x 2 = \frac{\ln 2}{\ln x}$ nên ta có

$$f'(x) = -\frac{\ln 2}{x\ln^2 x} = -\frac{\log_x 2 \cdot \log_x e}{x}.$$

(b) Từ (a) suy ra

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\tan x \ln x - \frac{1}{x}\ln\cos x}{\ln^2 x} \\ &= -\tan x \log_x e - \frac{1}{x}\log_x \cos x \cdot \log_x e. \end{aligned}$$

2.1.3.

(a) Rõ ràng

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & |x| < 1, \\ \frac{1}{2} & |x| > 1. \end{cases}$$

Ta cần phải kiểm tra tính khả vi tại các điểm $x = 1$ và $x = -1$. Ta có

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{\frac{\pi}{4} - \frac{x-1}{2} - \frac{\pi}{4}}{x-1} = \frac{1}{2},$$
$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{4}}{x-1} = \arctan'(1) = \frac{1}{2}.$$

Do đó $f'(1) = \frac{1}{2}$. Ta lại có

$$f'_+(-1) = \lim_{x \to -1^+} \frac{\arctan x + \frac{\pi}{4}}{x+1} = \arctan'(-1) = \frac{1}{2},$$
$$f'_-(-1) = \lim_{x \to -1^-} \frac{-\frac{\pi}{4} - \frac{x-1}{2} - \frac{\pi}{4}}{x+1} = +\infty,$$

Suy ra f không khả vi tại điểm -1.

(b) Ta có

$$f'(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2}(1-x^2) & |x| < 1, \\ 0 & |x| > 1. \end{cases}$$

Hơn nữa

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{\frac{1}{e} - \frac{1}{e}}{x-1} = 0,$$
$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2e^{-x} - \frac{1}{e}}{x-1} = \left(x^2e^{-x^2}\right)'\Big|_{x=1} = 0.$$

Vì f là hàm chẵn nên $f'(-1) = 0$.

(c) Chú ý rằng f liên tục tại 0. Hơn nữa

$$f'_+(0) = \lim_{x \to)^+} \frac{\arctan \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}}{x} = \lim_{t \to \pi/2^-} \frac{t - \pi/2}{\frac{1}{\tan t}}$$
$$= \lim_{t \to \pi/2^-} \left(t - \frac{\pi}{2}\right) \tan t = -1$$

và

$$f'_-(0) = \lim_{x\to)^+} \frac{\arctan\left(-\frac{1}{x}\right) - \frac{\pi}{2}}{x} = \lim_{t\to\pi/2^-} \frac{t-\pi/2}{-\frac{1}{\tan t}}$$
$$= -\lim_{t\to\pi/2^-}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\tan t = 1,$$

suy ra f không khả vi tại điểm 0.

2.1.4. Trước hết ta thấy rằng

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|}{x} = 0.$$

Rõ ràng với $x \neq \frac{2}{2n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$ thì $f'(x)$ tồn tại, với $x_n = \frac{2}{2n+1}, n = 0, 2, 4, \dots$, ta có

$$f'_+(x_n) = \lim_{x\to x_n^+} \frac{x^2\cos\frac{\pi}{x}}{x - x_n} = \left(x^2\cos\frac{\pi}{x}\right)'\Big|_{x=x_n} = \pi,$$
$$f'_-(x_n) = \lim_{x\to x_n^-} \frac{x^2\cos\frac{\pi}{x}}{x - x_n} = \left(-x^2\cos\frac{\pi}{x}\right)'\Big|_{x=x_n} = -\pi,$$

Tương tự với $x_n = \frac{2}{2n+1}$, $n = 1, 3, 5, \dots$ thì $f'_+(x_n) = \pi$ và $f'_-(x_n) = -\pi$. Vì f là hàm chẵn nên f không khả vi tại các điểm x_n , $n \in \mathbb{Z}$.

2.1.5.

(a) Vì f liên tục nên $c = 0$ và $a + b = 1$. Vì $f'_-(0) = 4$, $f'_+(0) = b$ suy ra $b = 4$ và $a = -3$. Dễ thấy rằng với a, b, c được tìm ra ở trên hàm f sẽ khả vi trên $\mathbb{R}$.

(b) $a = d = -1, b = 0, c = 1$.

(c) $b = c = 1, a = 0, d = 1/4$.

2.1.6.

(a) Với $x \neq 0$ ta có

$$\sum_{k=0}^{n} e^{kx} = \frac{1 - e^{(n+1)x}}{1 - e^x}.$$

Đạo hàm hai vế ta được

$$\sum_{k=0}^{n} ke^{kx} = \frac{ne^{(n+2)x} - (n+1)e^{(n+1)x} + e^x}{(1-e^x)^2}.$$

(b) Đạo hàm n lần hai vế đẳng thức

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k \binom{2n}{k} e^{kx} = (e^x - 1)^{2n}$$

ta được

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k k^n \binom{2n}{k} e^{kx} = \left((e^x-1)^{2n}\right)^{(n)}.$$

Để tính được vế phải tại điểm 0 ta xét hàm $g(x) = e^x - 1$ và chú ý rằng đạo hàm cấp n của $g^{2n}(x)$ là một tổng mà các thành phần chứa một luỹ thừa của $g(x)$ với bậc ít nhất là n (xem 2.1.38), do đó đạo hàm cấp n của hàm $x \mapsto (e^x - 1)^{2n}$ tại 0 bằng 0. Từ đó suy ra

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k k^n \binom{2n}{k} = 0.$$

(d) Đạo hàm đẳng thức

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}, \quad x \neq 2l\pi, l \in \mathbb{Z},$$

ta được

$$\sum_{k=1}^{n} k\cos(kx) = \frac{n\sin\frac{x}{2}\sin\frac{(2n+1)x}{2} - \sin^2\frac{nx}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}, \quad x \neq 2l\pi, l \in \mathbb{Z}.$$

Với $x = 2l\pi$ ta có

$$\sum_{k=1}^{n} k\cos(kx) = \frac{1}{2}n(n+1).$$

2.1.7. Đặt $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx$ ta có

$$\begin{aligned}|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| = |f'(0)| &= \lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right| \\ &= \lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{\sin x}\right| \cdot \left|\frac{\sin x}{x}\right| = \lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{\sin x}\right| \le 1.\end{aligned}$$

2.1.8.

(a) Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{(x-a)f(a)-a(f(x)-f(a))}{x-a} \\ &= f(a) - af'(a).\end{aligned}$$

(b) Theo (a) ta có

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a}\frac{(f(x)-f(a))g(a)-f(a)(g(x)-g(a))}{x-a} \\ &= f'(a)g(a) - f(a)g'(a).\end{aligned}$$

2.1.9.

(a) Vì f liên tục tại a và $f(a) > 0$ nên $f\left(a+\frac{1}{n}\right) > 0$ với n đủ lớn. Hơn nữa vì f khả vi tại a nên hàm $x \mapsto \ln(f(x))$ cũng khả vi tại a, từ đó suy ra

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right)^{1/n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\frac{\ln f\left(a+\frac{1}{n}\right)-\ln f(a)}{\frac{1}{n}} \\ &= 0\cdot(\ln f(x))'_{|x=a} = 0.\end{aligned}$$

Vậy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right)^{1/n} = 1.$$

(b) Từ (a) suy ra

$$\lim_{x\to a} \ln\left(\frac{f(x)}{f(a)}\right)^{\frac{1}{\ln x - \ln a}} = \lim_{x\to a} \frac{\ln f(x) - \ln f(a)}{x-a} \cdot \frac{x-a}{\ln x - \ln a} = \frac{f'(a)}{f(a)}a.$$

2.1.10.

(a) Từ 2.1.8(b) cho $g(x) = x^n$ ta được

$$\lim_{x\to a} \frac{a^n f(x) - x^n f(a)}{x-a} = -na^{n-1}f(a) + a^n f'(a).$$

(b)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{f(x)e^x - f(0)}{f(x)\cos x - f(0)} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)e^x - f(0)}{x} \cdot \frac{x}{f(x)\cos x - f(0)}\right) \\
&= (f(x)e^x)'_{|x=0} \cdot \frac{1}{(f(x)\cos x)'_{|x=0}} \\
&= \frac{f'(0) + f(0)}{f'(0)}.
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n\left(f\left(a+\frac{1}{n}\right) + f\left(a+\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(a+\frac{k}{n}\right) - kf(a)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right) - f(a)}{\frac{1}{n}} + 2\frac{f\left(a+\frac{2}{n}\right) - f(a)}{\frac{2}{n}}\right. \\
&\left. + \cdots + k\frac{f\left(a+\frac{k}{n}\right) - f(a)}{\frac{k}{n}}\right) \\
&= (1+2+\cdots+k)f'(a) = \frac{k(k+1)}{2}f'(a).
\end{aligned}$$

(d) Với $k \in \mathbb{N}$ ta có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f\left(a+\frac{k}{n^2}\right) - f(a)}{\frac{k}{n^2}} = f'(a).$$

Vậy với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại n_0 sao cho với $n \geq n_0$ thì

$$\frac{k}{n^2}f'(a) - \frac{k}{n^2}\varepsilon < f\left(a+\frac{k}{n^2}\right) - f(a) < \frac{k}{n^2}f'(a) + \frac{k}{n^2}\varepsilon$$

với $k = \overline{1, n}$. Cộng các bất đẳng thức trên theo k ta được

$$\begin{aligned}\frac{n(n+1)}{2n^2}f'(a) - \frac{n(n+1)}{2n^2}\varepsilon &< \sum_{k=1}^{n}\left(f\left(a+\frac{k}{n^2}\right) - f(a)\right) \\ &< \frac{n(n+1)}{2n^2}f'(a) + \frac{n(n+1)}{2n^2}\varepsilon.\end{aligned}$$

Từ đó suy ra giới hạn cần tìm là $\frac{1}{2}f'(a)$.

2.1.11.

(a)

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^m + (n+2)^m + \cdots + (n+k)^m}{n^{m-1}} - kn\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^m - n^m + (n+2)^m - n^m + \cdots + (n+k)^m - n^m}{n^{m-1}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^m - 1}{\frac{1}{n}} + 2\frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^m - 1}{\frac{2}{n}} + \cdots + k\frac{\left(1+\frac{k}{n}\right)^m - 1}{\frac{k}{n}}\right) \\ &= \frac{k(k+1)}{2}m.\end{aligned}$$

Hãy so sánh với 2.1.10(c).

(b) Từ 2.1.10(c) ta có

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{\left(a+\frac{1}{n}\right)^n\left(a+\frac{2}{n}\right)^n\cdots\left(a+\frac{k}{n}\right)^n}{a^{nk}}\right) = \frac{k(k+1)}{2}\frac{1}{a}.$$

Suy ra

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(a+\frac{1}{n}\right)^n\left(a+\frac{2}{n}\right)^n\cdots\left(a+\frac{k}{n}\right)^n}{a^{nk}} = \exp\left\{\frac{k(k+1)}{2a}\right\}.$$

(c) Chú ý rằng

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\ln\left(\left(1+\frac{a}{n^2}\right)\left(1+\frac{2a}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{na}{n^2}\right)\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(1+\frac{a}{n^2}\right) + \ln\left(1+\frac{2a}{n^2}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{na}{n^2}\right)\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{n^2}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) - n\ln\frac{1}{a}\right).\end{aligned}$$

Sử dụng 2.1.10(d) suy ra

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{a}{n^2}\right)\left(1+\frac{2a}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{na}{n^2}\right)\right)=e^{a/2}.$$

2.1.12. Ta có

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(f(x)+f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x}{3}\right)+\cdots+f\left(\frac{x}{k}\right)\right)\\&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x}+\frac{f\,(x2)-f(0)}{x}+\cdots+\frac{f\,(xk)-f(0)}{x}\right)\\&=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)f'(0).\end{aligned}$$

2.1.13.

(a) Khi $f(x)=x^m, m\in\mathbb{N}$ thì

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(z_n)}{x_n-z_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^m-z_n^m}{x_n-z_n}=ma^{m-1}=f'(a).$$

(b) Xét hàm

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} & \text{với}\quad x\neq 0,\\ 0 & \text{với}\quad x=0.\end{cases}$$

Cho

$$x_n=\frac{2}{\pi(4n+1)}\qquad\text{và}\quad z_n=\frac{1}{2n\pi}$$

ta được

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(z_n)}{x_n-z_n}=-\frac{2}{\pi}\neq 0=f'(0).$$

Mặt khác với

$$g(x)=\begin{cases}x^{3/2}\sin\frac{1}{x} & \text{với}\quad x\neq 0,\\ 0 & \text{với}\quad x=0.\end{cases}$$

và các dãy $\{x_n\}$ và $\{z_n\}$ như trên thì ta lại có

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g(x_n)-g(z_n)}{x_n-z_n}=-\infty.$$

2.1.14. Từ giả thiết ta có

$$\frac{f(x_n)-f(z_n)}{x_n-z_n}=\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}\frac{x_n-a}{x_n-z_n}+\frac{f(z_n)-f(a)}{z_n-a}\frac{a-z_n}{x_n-z_n},$$

trong đó

$$0<\frac{a-z_n}{x_n-z_n}<1,\quad 0<\frac{x_n-a}{x_n-z_n}<1$$

và

$$\frac{a-z_n}{x_n-z_n}+\frac{x_n-a}{x_n-z_n}=1.$$

Từ đó suy ra giá trị của biểu thức

$$\frac{f(x_n)-f(z_n)}{x_n-z_n}$$

sẽ nằm giữa

$$\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}\quad \text{và} \quad \frac{f(z_n)-f(a)}{z_n-a}.$$

Sử dụng nguyên lý kẹp ta suy ra

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(z_n)}{x_n-z_n}=f'(a).$$

2.1.15. [W. R. Jones, M. D. Landau , Amer. Math. Monthly 76 (1969), 816-817]

(a) Trước tiên ta nhận thấy rằng f chỉ liên tục tại 1. Nếu $\{x_n\}$ là một dãy các số hữu tỷ khác 1 và hội tụ về 1 thì

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-1}{x_n-1}=\lim_{n\to\infty}(x_n+1)=2.$$

Nếu dãy $\{x_n\}$ là dãy các số vô tỷ hội tụ về 1 thì

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-1}{x_n-1}=\lim_{n\to\infty}2=2.$$

Suy ra $f'(1)=2$. Rõ ràng f là ánh xạ một một trên $(0,2)$. Hàm ngược f^{-1} được xác định trên $(0,3)$ ngoại trừ các số hữu tỷ có căn bậc hai vô tỷ, điều này có nghĩa là ta không định nghĩa được điểm trong trong miền xác định của f^{-1}. Vậy không tồn tại $(f^{-1})'$.

(b) Thấy rằng f được xác định trên $(0,2)\cup\mathbf{B}$, với $\mathbf{B}\subset(2,7/2)$. Đồng thời ta cũng thấy rằng hạn chế của f trên $(0,2)$ chính là hàm f được nêu ở (a), vì vậy $f'(1)=2$. Vì $f(\mathbf{B})=\mathbf{A}$ nên miền giá trị của f chứa $(0,3)$. Tuy vậy $(f^{-1})'$ cũng không tồn tại vì mỗi lân cận của $1=f(1)$ chứa ảnh của một điểm nào đó trong $(0,2)$ và trong $\mathbf{B}$ qua f. Bên cạnh đó ta có kết luận rằng giới hạn của f^{-1} tại điểm 1 cũng không tồn tại.

2.1.16. Theo định lý Louville ta có mọi số vô tỷ x bậc k đều được xấp xỉ không tốt bởi các số hữu tỷ, theo nghĩa tồn tại một số $M>0$ sao cho $\left|x-\frac{p}{q}\right|>\frac{1}{Mq^k}$ với mọi số hữu tỷ p/q. Từ đó suy ra

$$\left|\frac{f\left(\frac{p}{q}\right)-f(x)}{\frac{p}{q}-x}\right|\le Mq^k|a_q|.$$

Từ đó và với giả thiết $f'(x)=0$ ta suy ra điều phải chứng minh.

Ta có một nhận xét rằng với $a_q=2^{-q}$ thì f khả vi tại tất cả các điểm vô tỷ.

2.1.17. Đặt $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$, ta có

$$P'(x)=a\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}(x_k-x_j),\quad k=1,2,\dots,n.$$

Điều phải chứng minh

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{Q(x_k)}{P'(x_k)(x-x_k)}$$

tương đương với

$$Q(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{Q(x_k)P(x)}{P'(x_k)(x-x_k)}.$$

Ta viết biểu thức dưới dạng

$$Q(x)=\sum_{k=1}^{n}Q(x_k)\frac{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}(x-x_j)}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}(x_k-x_j)}.$$

Vì Q là đa thức có bậc không quá $n-1$ nên ta chỉ cần chứng minh rằng đẳng thức đúng với n điểm phân biệt. Rõ ràng đẳng thức đúng với các giá trị $x = x_k, k = 1, 2, \ldots, n$. Cho $Q(x) \equiv 1$ ta có

$$1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{P'(x_k)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} (x - x_j).$$

Tính toán hệ số của x^{n-1} ta được

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{P'(x_k)} = 0 \quad \text{với} \quad n \geq 2.$$

2.1.18. Sử dụng các kết quả bài trước với

(a) $\quad P(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n) \quad$ và $\quad Q(x) = n!,$

(b) $\quad P(x) = x(x+2)(x+4)\cdots(x+2n) \quad$ và $\quad Q(x) = n!2^n.$

2.1.19. Rõ ràng đạo hàm của $|f|$ tồn tại tại mỗi điểm x thoả mãn $f(x) \neq 0$. Nếu $f(x) = 0$ thì $f'(x) = 0$, tức là $|f|'(x) = 0$.

2.1.20. Tồn tại một lân cận của x sao cho tại đó mỗi hàm f_k đều không đổi dấu, từ đó suy ra $|f_k|$ khả vi tại x và ta có

$$\frac{\left(\prod\limits_{k=1}^{n} |f_k|\right)'}{\prod\limits_{k=1}^{n} |f_k|}(x) = \left(\ln \prod_{k=1}^{n} |f_k|\right)'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{|f_k|'(x)}{f_k(x)}.$$

Chú ý rằng $|f_k|'(x) = \operatorname{sgn}(f_k(x)) f_k'(x)$ ta suy ra điều phải chứng minh.

2.1.21. Sử dụng kết quả bài trên, thay thế f_k bởi f_k/g_k.

2.1.22.

(a) Rõ ràng f và $|f|$ liên tục tại $x = 0$. Hơn nữa $f'(0) = 1$ và $|f|'(0)$ không tồn tại (xem 2.1.19).

(b) f và $|f|$ chỉ liên tục tại các điểm $x_k = 3/2^k, k = 2, 3, \ldots$. Rõ ràng $f'(x_k) = 1$ và $|f|'(x_k)$ không tồn tại.

2.1.23. Cho $\varepsilon > 0$. Từ định nghĩa của $f'_+(x_0)$

(1) $$(f'_+(x_0) - \varepsilon)(x - x_0) \le f(x) - f(x_0) \le (f'_+(x_0) + \varepsilon)(x - x_0)$$

với $x > x_0$ và đủ gần tới x_0. Tương tự cho $f'_-(x_0)$

(2) $$(f'_-(x_0) - \varepsilon)(x - x_0) \ge f(x) - f(x_0) \ge (f'_-(x_0) + \varepsilon)(x - x_0)$$

với $x < x_0$ và đủ gần tới x_0. Từ (1) và (2) ta suy ra f liên tục tại x_0.

2.1.24. Vì $f(c) = \max\{f(x) : x \in (a, b)\}$ nên ta có $f(x) - f(c) \le 0$ với $x \in (a, b)$, suy ra
$$f'_-(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \ge 0.$$
Lập luận tương tự có $f'_+(c) \le 0$.

Nếu $f(c_0) = \min\{f(x) : x \in (a, b)\}$ thì ta lại được $f'_+(c_0) \ge 0$ và $f'_-(c_0) \le 0$.

2.1.25. Rõ ràng khẳng định đúng khi f là hàm hằng. Giả sử rằng f không là hàm hằng, không giảm tổng quát ta giả sử rằng $f(a) = f(b) = 0$, thế thì tồn tại $x_1 \in (a, b)$ sao cho $f(x_1) > 0$. Lấy k là số thực thoả mãn $0 = f(b) < k < f(x_1)$. Đặt $c = \sup\{x \in (a, b) : f(x) > k\}$. thế thì $f(x) \le k$ với $x \in [c, b]$. Hơn nữa tồn tại dãy âm $\{h_n\}$ hội tụ về 0 sao cho $f(c + h_n) > k$. Vì f'_- tồn tại nên
$$f'_-(c) = \lim_{n \to \infty} \frac{f(c + h_n) - f(c)}{h_n} \le 0,$$
từ đó suy ra $\inf\{f'_-(x) : x \in (a, b)\} \le 0$. Lập luận hoàn toàn tương tự ta có $\sup\{f'_-(x) : x \in (a, b)\} \ge 0$.

Các kết quả nhận được đối với f'_+ là hoàn toàn tương tự. Ta có
$$\inf\{f'_+(x) : x \in (a, b)\} \le 0 \le \sup\{f'_+(x) : x \in (a, b)\}.$$

2.1.26. Ta áp dụng kết quả bài trên cho hàm
$$x \mapsto f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Tương tự ta có kết quả cho $f'_+(x)$, tức là

$$\inf\{f'_+(x) : x \in (a,b)\} \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le \sup\{f'_+(x) : x \in (a,b)\}.$$

2.1.27. Từ bài trên ta có

$$\begin{aligned}\inf\{f'_-(z) : z \in (x,x+h)\} &\le \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &\le \sup\{f'_-(z) : z \in (x,x+h)\}.\end{aligned}$$

với $x \in (a,b)$ và $h > 0$ đủ nhỏ sao cho $x+h \in (a,b)$. Vì f'_- liên tục trên (a,b) nên khi cho $h \to 0^+$ ta được $f'_-(x) = f'_+(x)$.

2.1.28. Từ bài trên ta suy ra hàm như vậy không tồn tại.

2.1.29. Từ giả thiết suy ra f bằng 0 tại ít nhất một điểm trong khoảng mở (a,b). Đặt

$$c = \inf\{x \in (a,b) : f(x) = 0\},$$

ta có $f(c) = 0$. Vì $f'(a) > 0$ nên $f(x) > 0$ với $x \in (a,c)$. Hơn nữa vì $f'(c)$ tồn tại nên

$$f'(c) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)}{h} \le 0.$$

2.1.30. Rõ ràng $(1+x^2)f'(x) = 1$, từ đó suy ra $(1+x^2)f''(x) + 2xf'(x) = 0$. Sử dụng quy nạp suy ra

$$(1+x^2)f^{(n)}(x) + 2(n-1)xf^{(n-1)}(x) + (n-2)(n-1)f^{(n-2)}(x) = 0.$$

Cho $x = 0$ ta được $f^{(2m)}(0) = 0$ và $f^{(2m+1)}(0) = (1-)^m(2m)!$.

2.1.31. Sử dụng phép quy nạp.

2.1.32.

(a) Sử dụng công thức Leibniz

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$$

và đẳng thức (a) trong bài trên.

(b) Sử dụng công thức Leibniz và đẳng thức (b) trong bài trên.

2.1.33. Rõ ràng nếu $x > 1$ thì $f(x) > 0$, $f'(x) > 0$ và $f''(x) < 0$. Đạo hàm hàm số

$$(f(x))^2 = x^2 - 1$$

n lần ($n \geq 3$) và sử dụng công thức Leibniz ta được

$$2f(x)f^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)f^{(n-k)}(x) \equiv 0.$$

Sử dụng phép quy nạp ta được điều phải chứng minh.

2.1.34. Ta có

$$f_{2n}(x) = \ln\left(1 + x^{2n}\right) = \sum_{k=1}^{2n} \ln(x - \omega_k),$$

trong đó $\omega_k = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n} + i\sin\frac{(2k-1)\pi}{2n}$. Vì

$$f_{2n}^{(2n)}(x) = -(2n-1)!\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{(x - \omega_k)^{2n}}.$$

Đặt $x = -1$ ta được

$$f_{2n}^{(2n)}(-1) = -(2n-1)!\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{(1 + \omega_k)^{2n}},$$

tương đương

$$f_{2n}^{(2n)}(-1) = i\frac{(2n-1)!}{2^{2n}}\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{\cos^{2n}\frac{(2k-1)\pi}{4n}}.$$

Vì $f_{2n}^{(2n)}(-1)$ thực nên suy ra $f_{2n}^{(2n)}(-1) = 0$.

2.1.35. Kí hiệu $L(x)$ và $R(x)$ là vế trái và vế phải của đẳng thức trong đề bài, rõ ràng L và R là các đa thức bậc $n+1$ và $L(0) = R(0) = 0$. Do đó ta cần chứng minh rằng $L'(x) = R'(x), x \in \mathbb{R}$. Ta có

$$L'(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} x^k = P(x),$$
$$R'(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{P^{(k)}(0)}{k!} x^k + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{P^{(k+1)}(0)}{(k+1)!} x^{k+1}$$
$$= P(x) + (1-)^n \frac{P^{(k+1)}(0)}{(k+1)!} x^{k+1} = P(x).$$

Ta có điều phải chứng minh.

2.1.36. Tồn tại một lân cận của 0 để f dương, do đó

$$(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_1 x} + \cdots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_n x} = g(x).$$

Do đó $f'(x) = f(x)g(x)$ và $f'(0) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n > 0$. Hơn nữa

(1) $$g^{(i)}(x) = i! \left(\frac{\lambda_1^{i+1}}{(1 - \lambda_1 x)^{i+1}} + \cdots + \frac{\lambda_n^{i+1}}{(1 - \lambda_n x)^{i+1}} \right).$$

Sử dụng công thức Leibniz ta được

$$f^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i} g^{(i)}(x) f^{(k-1-i)}(x).$$

Từ (1) suy ra $f^{(k)}(0) > 0$ với mọi $k \in \mathbb{N}$.

2.1.37. Ta chứng minh bằng quy nạp. Với $n = 1$ thì đẳng thức là hiển nhiên, giả sử điều phải chứng minh đúng với $k \leq n$, ta chứng minh nó cũng đúng với $n + 1$. Thật vậy, ta có

$$(-1)^{n+1} \left(x^n f\left(\frac{1}{x}\right) \right)^{(n+1)} = (-1)^n \left(x^n f\left(\left(\frac{1}{x}\right) \right)' \right)^{(n)}$$
$$= (-1)^{n+1} n \left(x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right) \right)^{(n)} - (-1)^{n+1} \left(x^{n-2} f'\left(\frac{1}{x}\right) \right)^{(n)}$$
$$= -\frac{n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) - (-1)^{n-1} \left(x^{n-2} f'\left(\frac{1}{x}\right) \right)^{(n)}.$$

Hơn nữa

$$(-1)^{n-1}\left(x^{n-2}f'\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n)} = (-1)^{n-1}\left(\left(x^{n-2}f'\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n-1)}\right)'.$$

Theo giả thiết quy nạp với f' và $k = n-1$ ta được

$$\frac{1}{x^n}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^{n-1}\left(x^{n-2}f'\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n-1)},$$

từ đó suy ra

$$\begin{aligned}(-1)^{n+1}\left(x^n f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n+1)} &= -\frac{n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) - \left(\frac{1}{x^n}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)\right)' \\ &= \frac{1}{x^{n+2}}f^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

2.1.38. Chứng minh dưới đây được dựa theo bài báo của S. Roman [Amer. Math. Monthly 87 (1980), 805-809], mặc dù tác giả sử dụng những kiến thức giải tích hàm nhưng chứng minh khá sơ cấp. Ta xét phiếm hàm tuyến tính $L : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ xác định trên tập $\mathcal{P}$ các đa thức hệ số thực. Kí hiệu $\langle L, P(x)\rangle$ là giá trị của phiếm hàm L tại đa thức $P(x)$. Xét phiếm hàm tuyến tính A^k như sau

$$\left\langle A^k, x^n\right\rangle = n!\delta_{n,k},$$

trong đó

$$\delta_{n.k} = \begin{cases}1 & \text{với} \quad n = k,\\ 0 & \text{với} \quad n \neq k.\end{cases}$$

Ta kí hiệu giá trị của A^k tại x^n là $(x^n)^{(k)}_{|x=0}$. Kí hiệu $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k A^k, a_k \in \mathbb{R}$ là phiếm hàm tuyến tính sau

$$\left\langle \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k, P(x)\right\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left\langle A^k, P(x)\right\rangle.$$

Vì $\left\langle A^k, P(x)\right\rangle = 0$ với hầu hết k nên tồn tại hữu hạn các thành phần khác 0 trong tổng ở vế phải của đẳng thức trên, bây giờ ta cần đi chứng minh rằng nếu L là một phiếm hàm trên $\mathcal{P}$ thì

$$L = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle L, x^k \rangle}{k!} A^k. \tag{1}$$

Thật vậy, với $n \geq 0$ ta có

$$\left\langle \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle L, x^k \rangle}{k!} A^k, x^n \right\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle L, x^k \rangle}{k!} \langle A^k, x^n \rangle = \langle L, x^n \rangle .$$

Vì L và A^k tuyến tính nên

$$\langle L, P(x) \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle L, x^k \rangle}{k!} A^k, P(x) \right\rangle$$

với mọi đa thức P, ta có (1). Với phép đặt ở trên giá trị của A^k tại x^n là $(x^n)^{(k)}_{|x=0}$ thì ta định nghĩa được phép toán trên A^k như sau

$$A^k A^j = A^{k+j}.$$

Theo (1) ta mở rộng được phép toán này thành phép toán đối với $L, M : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ bất kì như sau:

$$LM = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle L, x^k \rangle}{k!} A^k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\langle M, x^j \rangle}{j!} A^j = \sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n,$$

trong đó

$$c_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle L, x^k \rangle}{k!} \frac{\langle M, x^{n-k} \rangle}{(n-k)!} = \frac{1}{n} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} \langle L, x^k \rangle \langle M, x^{n-k} \rangle .$$

Do đó theo (1) ta có

$$\langle LM, x^n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} \langle L, x^k \rangle \langle M, x^{n-k} \rangle . \tag{2}$$

Sử dụng phép quy nạp suy ra

$$\begin{aligned} &\langle L_1 \cdots L_j, x^n \rangle \\ &= \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_j = 0 \\ k_1 + \cdots + k_j = n}} \frac{n!}{k_1! \cdots k_j!} \langle L_1, x^{k_1} \rangle \langle L_2, x^{k_2} \rangle \cdots \langle L_j, x^{k_j} \rangle . \end{aligned} \tag{3}$$

Ta định nghĩa đạo hàm hình thức L' của L là

$$(A^0)' = 0, \quad (A^k)' = kA^{k-1} \quad \text{với} \quad k \in \mathbb{N}$$

và

$$L' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle L, x^k \rangle}{k!} kA^{k-1}.$$

Ta cần chứng minh rằng với mọi $P \in \mathcal{P}$,

(4) $$\langle L', P(x) \rangle = \langle L, xP(x) \rangle .$$

Rõ ràng ta chỉ cần chứng minh rằng $\langle (A^k)', x^n \rangle = \langle A^k, x^{n+1} \rangle$. Ta có

$$\langle (A^k)', x^n \rangle = \langle kA^{k-1}, x^n \rangle = kn!\delta_{n,k-1} = (n+1)!\delta_{n+1,k} = \langle A^k, x^{n+1} \rangle .$$

Để chứng minh công thức Faà di Bruno ta đặt

$$h_n = h^{(n)}(t), \quad g_n = g^{(n)}(t), \quad f_n = f^{(n)}(u)_{u=g(t)}.$$

Rõ ràng

$$h_1 = f_1 g_1, \quad h_2 = f_1 g_2 + f_2 g_1^2, \quad h_3 = f_1 g_3 + f_2 3 g_1 g_2 + f_3 g_1^3.$$

Dùng quy nạp chứng minh được

(5) $$h_n = \sum_{k=1}^{n} f_k l_{n,k}(g_1, g_2, \dots, g_m),$$

trong đó $l_{n,k}(g_1, g_2, \dots, g_n)$ độc lập với $f_j, j = 1, 2, \dots, n$. Để xác định $l_{n,k}(g_1, g_2, \dots, g_n)$ ta chọn $f(t) = e^{at}, a \in \mathbb{R}$, ta có $f_k = a^k e^{ag(t)}$ và $h_n = \left(e^{ag(t)}\right)^{(n)}$. Từ (5) suy ra

(6) $$e^{-ag(t)} \left(e^{ag(t)}\right)^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} a^k l_{n,k}(g_1, g_2, \dots, g_m).$$

Xét $B_n(t) = e^{-ag(t)} \left(e^{ag(t)}\right)^{(n)}$, $n \geq 0$ thì theo công thức Leibniz ta được

(7) $$\begin{aligned} B_n(t) &= e^{-ag(t)} \left(ag_1(t) e^{ag(t)}\right)^{(n-1)} \\ &= a \cdot e^{-ag(t)} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} g_{k+1}(t) \left(e^{ag(t)}\right)^{(n-k-1)} \\ &= a \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} g_{k+1}(t) B_{n-k-1}(t). \end{aligned}$$

Với $t \in \mathbf{I}$ cho trước, đặt $B_n = B_n(t)$ và xét phiếm hàm L và M xác định trên $\mathcal{P}$ như sau : $\langle L, x^n \rangle = B_n, \langle M, x^n \rangle = g_n$, khi đó $\langle L, 1 \rangle = B_0 = 1$ và $\langle M, 1 \rangle = g_0 = g(t)$. Hơn nữa theo (1) ta được

$$L = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} A^k \quad \text{và} \quad M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k}{k!} A^k.$$

Kết hợp (7) với (2) và (4) ta được

$$\begin{aligned}
\langle L, x^n \rangle &= a \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left\langle M, x^{k+1} \right\rangle \left\langle L, x^{n-k-1} \right\rangle \\
&= a \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left\langle M', x^{k} \right\rangle \left\langle L, x^{n-k-1} \right\rangle \\
&= a \left\langle M'L, x^{n-1} \right\rangle .
\end{aligned}$$

Do đó $\langle L', x^{n-1} \rangle = \langle M'L, x^{n-1} \rangle$ hay nói cách khác

$$L' = aM'L.$$

Phương trình vi phân dạng chính tắc này có nghiệm $L = ce^{a(M-g_0)}$, trong đó c là một số thực. Sử dụng điều kiện ban đầu ta được $1 = B_0 = \langle L, 1 \rangle = \left\langle ce^{a(M-g_0)}, 1 \right\rangle = c$, do đó $L = e^{a(M-g_0)}$, từ đó suy ra

$$\begin{aligned}
B_n &= \langle L, x^n \rangle = \left\langle e^{a(M-g_0)}, x^n \right\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \left\langle (M-g_0)^k, x^n \right\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \sum_{\substack{j_1, \cdots, j_k = 0 \\ j_1 + \cdots + j_n = n}} \frac{n!}{j_1! \cdots j_k!} \left\langle (M-g_0), x^{j_1} \right\rangle \cdots \left\langle (M-g_0), x^{j_k} \right\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \sum_{\substack{j_1, \cdots, j_k = 0 \\ j_1 + \cdots + j_n = n}} \frac{n!}{j_1! \cdots j_k!} g_{j_1} g_{j_2} \cdots g_{j_k}.
\end{aligned}$$

Tính toán hệ số của a^k ở (6) ta được

$$l_{n,k}(g_1, g_2, \dots, g_n) = \frac{n!}{k!} \sum_{\substack{j_1,\dots,j_k=1 \\ j_1+\cdots+j_n=n}} \frac{g_{j_1}}{j_1!} \cdot \frac{g_{j_2}}{j_2!} \cdots \frac{g_{j_k}}{j_k!}$$
$$= \frac{n!}{k!} \sum_{\substack{k_1,\dots,k_n=0 \\ k_1+\cdots+k_n=k \\ k_1+2_2+\cdots+nk_n=n}} \frac{k!}{k_1!\cdots k_n!} \left(\frac{g_1}{1!}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{g_n}{n!}\right)^{k_n}.$$

Cuối cùng ta có

$$\sum_{k=1}^{n} f_k l_{n,k}(g_1, \dots, g_n) = \sum_{k=1}^{n} f_k \sum_{\substack{k_1,\dots,k_n=0 \\ k_1+\cdots+k_n=k \\ k_1+2_2+\cdots+nk_n=n}} \frac{k!}{k_1!\cdots k_n!} \left(\frac{g_1}{1!}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{g_n}{n!}\right)^{k_n}.$$

Ta được điều phải chứng minh.

2.1.39.

(a) Ta có

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^3} e^{-1/x^2} & \text{với} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{với} \quad x = 0, \end{cases}$$

vì (xem 1.1.12)

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^{-1/x^2}}{x} = 0.$$

Từ đó suy ra f' liên tục trên $\mathbb{R}$. Hơn nữa với $x \neq 0$ thì

$$f''(x) = e^{-1/x^2} \left(\frac{4}{x^6} - \frac{2 \cdot 3}{x^4}\right).$$

Sử dụng kết quả của bài 1.1.12 ta được $f''(0) = 0$, từ đó suy ra f'' cũng liên tục trên $\mathbb{R}$. Cuối cùng ta được

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} P\left(\frac{1}{x}\right) & \text{với} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{với} \quad x = 0, \end{cases}$$

trong đó P là một đa thức, do đó với mọi $n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

(b) Tương tự câu (a) ta có $g^{(n)}(0) = 0$ với $n \in \mathbb{N}$, đồng thời ta được $g \in C^\infty(\mathbb{R})$.

(c) Hàm số đang xét là tích của hai hàm f_1 và f_2 thuộc $C^\infty(\mathbb{R})$; quả vậy, ta thấy rằng $f_1(x) = g(x-a)$ và $f_2(x) = g(b-x)$ với g được xác định ở câu (b).

2.1.40. Ta có

$$\begin{aligned} f''(x) &= g'(f(x))f'(x) = g'(f(x))g(f(x)), \\ f'''(x) &= g'(f(x))(g(f(x)))^2 + (g'(f(x)))^2 g(f(x)). \end{aligned}$$

Do đó f'' và f''' đều liên tục trên (a,b). Sử dụng quy nạp ta được $f^{(n)}$ với $n \geq 3$ đều là tổng của các đạo hàm $g^{(k)}(f), k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, từ đó suy ra chúng liên tục trên (a,b).

2.1.41. Nếu $\alpha \neq 0$ thì

$$f''(x) = \frac{-\beta f'(x) - \gamma f(x)}{\alpha},$$

Từ đó suy ra

$$f'''(x) = \frac{-\beta f''(x) - \gamma f(x)}{\alpha} = \frac{(\beta^2 - \gamma\alpha) f('(x) + \gamma\beta f(x)}{\alpha^2}.$$

Sử dụng quy nạp suy ra đạo hàm thứ n là một biểu diễn tuyến tính của f và f'. Với $\alpha = 0$ thì $\beta \neq 0$ và $f'(x) = -\frac{\gamma}{\beta} f(x)$. Sử dụng quy nạp lần nữa suy ra

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{\gamma^n}{\beta^n} f(x).$$

2.2 Định lý giá trị trung bình

2.2.1. Xét hàm phụ $h(x) = e^{\alpha x} f(x), x \in [a,b]$ thoả mãn điều kiện của định lý Rolle, do đó tồn tại $x_0 \in (a,b)$ thoả mãn

$$0 = h'(x_0) = (\alpha f(x_0) + f'(x_0)) e^{\alpha x_0}.$$

Từ đó suy ra $\alpha f(x_0) + f'(x_0) = 0$.

2.2.2. Hàm $h(x) = e^{g(x)}f(x), x \in [a, b]$ thoả mãn điều kiện của định lý Rolle, do đó tồn tại $x_0 \in (a, b)$ thoả mãn

$$0 = h'(x_0) = (g'(x_0)f(x_0) + f'(x_0))e^{g(x_0)},$$

do đó $g'(x_0)f(x_0) + f'(x_0) = 0$.

2.2.3. Sử dụng định lý Rolle đối với hàm $h(x) = \frac{f(x)}{x}, x \in [a, b]$.

2.2.4. Sử dụng định lý Rolle đối với hàm $h(x) = f^2(x) - x^2, x \in [a, b]$.

2.2.5. Sử dụng định lý Rolle đối với hàm $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, x \in [a, b]$.

2.2.6. Chú ý rằng đa thức

$$Q(x) = \frac{a_0}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_1}{n}x^n + \cdots + a_n x$$

thoả mãn điều kiện định lý Rolle trong khoảng $[0, 1]$.

2.2.7. Hàm

$$h(x) = \frac{a_n}{n+1}\ln^{n+1} x + \cdots + \frac{a_2}{3}\ln^3 x + \frac{a_1}{2}\ln^2 x + \frac{a_0}{1}\ln x, \quad x \in [1, e^2],$$

thoả mãn các điều kiện của định lý Rolle.

2.2.8. Sử dụng định lý Rolle ta suy ra giữa hai nghiệm thực của đa thức P tồn tại ít nhất một nghiệm thực của P'. Hơn nữa mỗi nghiệm của đa thức bậc k P là một nghiệm của P' bậc $k-1$, do đó tồn tại $n-1$ nghiệm của P'.

2.2.9. Sử dụng định lý Rolle đối với f trong $[a, b]$ ta có tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = 0$. Tiếp đó sử dụng định lý Rolle đối với f' trên $[a, c]$ ta suy ra rằng tồn tại $x_1 \in (a, c) \subset (a, b)$ sao cho $f''(x_1) = 0$.

2.2.10. Lập luận tương tự bài tập trên.

2.2.11.

(a) Đặt $P(x) = x^{13} + 7x^3 - 5$, ta có $P(0) = -5$ và $\lim_{x\to\infty} P(x) = +\infty$. Sử dụng định lý giá trị trung gian ta có tồn tại nghiệm dương của $P(x) = 0$. Nếu tồn tại hai nghiệm dương khác nhau thì từ định lý Rolle ta suy ra tồn tại x_0 sao cho $P'(x_0) = 0$ với x_0 dương nào đó, điều này trái với giả thiết $P'(x) = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$. Cuối cùng ta có nhận xét rằng $P(x) < 0$ với $x < 0$.

(b) Xét hàm
$$f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1.$$
Ta có $f(2) = 0$. Nếu phương trình đang xét có nghiệm khác 2 thì theo định lý Rolle đạo hàm của nó phải có ít nhất một nghiệm, điều này mâu thuẫn với giả thiết vì $f'(x) < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

2.2.12. Ta sử dụng phương pháp quy nạp. Với $n = 1$, phương trình $a_1x^{\alpha_1} = 0$ không có nghiệm trong $(0, \infty)$. Giả sử với $n \in \mathbb{N}$ nào đó, phương trình
$$a_1x^{\alpha_1} + a_2x^{\alpha_2} + \cdots + a_nx^{\alpha_n} = 0,$$
có nhiều nhất là $n - 1$ nghiệm trong $(0, \infty)$. Xét phương trình
$$a_1x^{\alpha_1} + a_2x^{\alpha_2} + \cdots + a_nx^{\alpha_n} + a_{n+1}x^{\alpha_{n+1}} = 0,$$
ta viết dưới dạng
$$a_1 + a_2x^{\alpha_2-\alpha_1} + \cdots + a_{n+1}x^{\alpha_{n+1}-\alpha_1} = 0.$$
Nếu phương trình cuối cùng này có nhiều hơn n nghiệm trong $(0, \infty)$ thì sử dụng định lý Rolle ta suy ra đạo hàm của hàm trong vế trái sẽ có n nghiệm dương, điều này trái với giả thiết quy nạp, ta được điều phải chứng minh.

2.2.13. Sử dụng bài tập trên, thay x bởi e^x.

2.2.14. Rõ ràng $F(a) = F(b) = 0$ và F liên tục trên $[a, b]$. Hơn nữa F khả vi trên (a, b) và
$$F'(x) = \det \begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix}.$$

Sử dụng định lý Rolle ta suy ra tồn tại $x_0 \in (a,b)$ sao cho $F'(x_0) = 0$. Chọn $g(x) = x$ và $h(x) = 1$ với $x \in [a,b]$ thì

$$F'(x_0) = \det \begin{vmatrix} f'(x_0) & 1 & 0 \\ f(a) & a & 1 \\ f(b) & b & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

tức là $f(b) - f(a) = f'(x_0)(b-a)$, ta nhận được định lý giá trị trung bình. Để tổng quát hoá định lý này ta chỉ cần cho $h(x) \equiv 1$.

2.2.15. Sử dụng định lý giá trị trung bình ta suy ra tồn tại $x_1 \in (0,1)$ và $x_2 \in (1,2)$ sao cho

$$f'(x_1) = f(1) - f(0) = 1 \quad \text{và} \quad f'(x_1) = f(2) - f(1) = 1.$$

Sử dụng định lý Rolle đối với f' trong khoảng $[x_1, x_2]$ ta được điều phải chứng minh.

2.2.16. Vì f không là hàm tuyến tính nên tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho

$$f(c) < f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a) \quad \text{hay} \quad f(c) > f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a).$$

Giả sử rằng

$$f(c) < f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a).$$

Thế thì

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \text{và} \quad \frac{f(c)-f(b)}{c-b} < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Sử dụng định lý giá trị trung bình suy ra điều phải chứng minh. Ta lập luận tương tự cho trường hợp

$$f(c) > f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a).$$

2.2.17. Giả sử rằng $x_0 \neq \frac{1}{2}$, khi đó một trong hai khoảng $[0, x_0]$ và $[x_0, 1]$ không hơn $\frac{1}{2}$. GIả sử rằng đoạn đó là $[x_0, 1]$, sử dụng định lý giá trị trung bình ta được

$$\frac{-1}{1-x_0} = \frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0} = f'(c),$$

suy ra $|f'(c)| > 2$. Giả sử rằng $x_0 = \frac{1}{2}$ và f tuyến tính trong khoảng $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, thế thì $f(x) = 2x$ với $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Vì $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ nên tồn tại $x_1 > \frac{1}{2}$ sao cho $f(x_1) > 1$, trong trường hợp này sử dụng định lý giá trị trung bình trên khoảng $[x_1, 1]$ ta suy ra điều phải chứng minh. Nếu tồn tại $x_2 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ sao cho $f(x_2) > 2x_2$, sử dụng định lý giá trị trung bình đối với khoảng $[0, x_2]$ ta suy ra điều phải chứng minh. Nếu $f(x_2) < 2x_2$ thì sử áp dụng định lý giá trị trung bình cho khoảng $\left[x_2, \frac{1}{2}\right]$.

2.2.18. Sử dung định lý giá trị trung bình tổng quát cho hàm $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ và $x \mapsto \frac{1}{x}$ trên $[a, b]$ ta được

$$\frac{bf(a) - af(b)}{b - a} = \frac{\frac{f(b)}{b} - \frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} = \frac{\frac{x_1 f'(x_1) - f(x_1)}{x_1^2}}{-\frac{1}{x_1^2}} = f(x_1) - x_1 f'(x_1).$$

2.2.19. The định lý giá trị trung bình , với $x_1, x_2 \in [0, \infty)$,

$$|\ln(1 + x_1) - \ln(1 + x_2)| = \frac{1}{x_0 + 1}|x_1 - x_2| \leq |x_1 - x_2|.$$

Tương tự

$$|\ln(1 + x_1^2) - \ln(1 + x_2^2)| = \frac{2x_0}{x_0^2 + 1}|x_1 - x_2| \leq |x_1 - x_2|.$$

Và

$$|\arctan x_1 - \arctan x_2| = \frac{1}{x_0^2 + 1}|x_1 - x_2| \leq |x_1 - x_2|.$$

2.2.20. Cố định $x_0 \in (a, b)$, thế thì với mọi $x \in (a, b)$ ta có tồn tại c nằm giữa x_0 và x sao cho $f'(x) - f'(x_0 = f''(c)(x - x_0)$. Do đó

$$|f'(x)| \leq M|x - x_0| + |f'(x_0| \leq M(b - a) + |f'(x_0)|,$$

tức là f' bị chặn, từ đó (như kết quả bài trước) ta suy ra f liên tục đều trên (a, b).

2.2.21. Xét hàm $x \mapsto \arctan f(x)$, sử dụng định lý giá trị trung bình ta được với $a < x_1 < x_2 < b$, $x_2 - x_1 > \pi$,

$$|\arctan f(x_2) - \arctan f(x_1)| = \frac{|f'(x_0)|}{f^2(x_0) + 1}(x_2 - x_1).$$

Do đó

$$\pi \geq \frac{|f'(x_0)|}{f^2(x_0)+1}(x_2 - x_1),$$

từ đó suy ra

$$\frac{|f'(x_0)|}{f^2(x_0)+1} \leq \frac{\pi}{x_2 - x_1} < 1.$$

2.2.22. Ta có

$$\arctan f(x_2) - \arctan f(x_1) = \frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)+1}(x_2 - x_1)$$

với $a < x_1 < x_2 < b$. Từ (ii) suy ra

$$\arctan f(x_2) - \arctan f(x_1) \geq -(x_2 - x_1).$$

Cho $x_2 \to b^-$ và $x_1 \to a^+$, sử dụng (i) ta được $-\pi \geq -(b-a)$.

2.2.23. Sử dụng định lý giá trị trung bình suy ra

$$f'_-(b) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} = \lim_{h\to 0^-} f'(b+\theta h) = A.$$

2.2.24. Vì $f'(x) = O(x)$ nên tồn tại $M > 0$ và $x_0 \in (0, \infty)$ sao cho $|f'(x)| \leq Mx$ với $x \geq x_0$. Sử dụng định lý giá trị trung bình ta được

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f('x_0 + \theta(x - x_0))|(x - x_0) \\ &\leq M(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0) \leq Mx(x - x_0) \leq Mx^2 \end{aligned}$$

với $x \geq x_0$.

2.2.25. Sử dụng định lý Rolle cho hàm

$$h(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(f_k(x) - f_k(a) - (g_k(x) - g_k(a)) \frac{f_k(b) - f_k(a)}{g_k(b) - g_k(a)} \right).$$

2.2.26. Giả sử f khả vi đều trên $[a, b]$, khi đó với mọi dãy $\{h_n\}$ hội tụ về 0 sao cho $h_n \neq 0$ và $x + h_n \in \mathbf{I}$ với $x \in [a, b]$, dãy hàm $\left\{\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}\right\}$ hội tụ đều về f' trên $[a, b]$. Theo bài 1.2.34 thì f' liên tục trên $[a, b]$.

Bây giờ giả thiết rằng f' liên tục trên $[a, b]$, sử dụng định lý giá trị trung bình ta được với mọi $x \in [a, b], x + h \in \mathbf{I}$,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) = f'(x + \theta h) - f'(x)$$

với $0 < \theta < 1$. Vì f' liên tục đều trên $[a, b]$ nên f khả vi đều.

2.2.27. Vì f liên tục trên $[a, b]$ nên nó bị chặn, tức là tồn tại $A \geq 0$ sao cho $|f(x)| \leq A$ với $x \in [a, b]$. Theo giả thiết ta có

$$|g'(x)| \leq \frac{1 + A}{|\lambda|}|g(x)|.$$

Bây giờ xét $[c, d] \subset [a, b]$ có độ rộng không lớn hơn $\frac{1}{2}\frac{|\lambda|}{1+A} = \frac{B}{2}$ và thoả mãn $g(c) = 0$. Với $x_0 \in [c, d]$ ta có

$$|g(x_0) - g(c)| = |g(x_0)| = (x_0 - c)|g'(x_1)| \leq \frac{B}{2}\frac{|g(x_1)|}{B}.$$

Lặp lại quá trình trên ta tìm được dãy $\{x_n\}$ các điểm thuộc $[c, d]$ sao cho

$$|g(x_0)| \leq \frac{1}{2}|g(x_1)| \leq \cdots \leq \frac{1}{2^n}|g(x_n)| \leq \cdots.$$

Từ đó suy ra $g(x_0) = 0$. Để kết thúc chứng minh ta chia đoạn $[a, b]$ thành hữu hạn đoạn con có độ rộng không quá $\frac{B}{2}$.

Ta có nhận xét rằng giả thiết f liên tục trên $[a, b]$ có thể thay thế bởi tính bị chặn của nó trên $[a, b]$.

2.2.28. Sử dụng định lý giá trị trung bình tổng quát ta được

$$\frac{\frac{f(2x)}{2x} - \frac{f(x)}{x}}{\frac{1}{2x} - \frac{1}{x}} = f(\zeta) - \zeta f'(\zeta),$$

với $x < \zeta < 2x$. Từ đó suy ra

$$\frac{f(2x)}{2x} - \frac{f(x)}{x} = \frac{\zeta}{2x}\left(f'(\zeta) - \frac{f(\zeta)}{\zeta}\right).$$

Tức là

$$0 \leq |f'(\zeta)| \leq 2\left|\frac{f(2x)}{2x} - \frac{f(x)}{x}\right| + \left|\frac{f(\zeta)}{\zeta}\right|.$$

Cho $x \to \infty$ ta được điều phải chứng minh.

2.2.29. Suy ra từ bài 1.6.30.

2.2.30. Từ giả thiết suy ra

$$f'(px+qy) = f'(qx+py) \quad \text{với} \quad x \neq y. \tag{1}$$

Nếu $p \neq q$ thì f' là hàm hằng. Thật vậy, nếu $f'(x_1) \neq f'(x_2)$ thì đặt

$$x = \frac{p}{2p-1}x_1 + \frac{p-1}{2p-1}x_2 \quad \text{và} \quad y = \frac{p-1}{2p-1}x_1 + \frac{p}{2p-1}x_2,$$

thì ta được $x_1 = px + (1-p)y$ và $x_2 = py + (1-p)x$, trái với (1). Từ đó suy ra với $p \neq q$ thì f là hàm tuyến tính, nếu $p = q = \frac{1}{2}$ thì theo kết quả bài trước, f sẽ là một đa thức bậc hai.

2.2.31. Với $[a,b] \subset \mathbf{I}$, giả sử rằng $f'(a) < f'(b)$. Đặt λ là số thoả mãn $f'(a) < \lambda < f'(b)$. Xét hàm $g(x) = f(x) - \lambda x$, thế thì $g'(a) < 0$ và $g'(b) > 0$. Do đó g đạt cực tiểu trên $[a,b]$ tại điểm $x_0 \in (a,b)$, tức là $g'(x_0) = 0$, hay $f'(x_0) = \lambda$.

2.2.32.

(a) Cho $\varepsilon > 0$ sao cho $|f(x) - f'(x)| < \varepsilon$ với $x \geq a$. Theo định lý giá trị trung bình tổng quát, tồn tại $\xi \in (a,x)$ sao cho

$$\frac{e^x f(x) - e^a f(a)}{e^x - e^a} = f(\xi) - f'(\xi).$$

Do đó

$$|f(x) - f(a)e^{a-x}| < \varepsilon|1 - e^{a-x}|,$$

hay

$$|f(x)| < |f(a)|e^{a-x} + \varepsilon|1 - e^{a-x}|.$$

Từ đó suy ra$|f(x)| < 2\varepsilon$ với x đủ lớn.

(b) Sử dụng định lý giá trị trung bình tổng quát đối với hàm $x \mapsto e^{\sqrt{x}}f(x)$ và $x \mapsto e^{\sqrt{x}}$ và làm như câu a.

2.2.33. Từ giả thiết suy ra hàm $x \mapsto e^{-x}f(x)$ có ít nhất ba nghiệm phân biệt trong $[a,b]$, do đó theo định lý Rolle đạo hàm của nó $x \mapsto e^{-x}(f'(x) - f(x))$ phải có ít nhất hai nghiệm phân biệt trong $[a,b]$ và đạo hàm cấp hai của nó có ít nhất một nghiệm , tức là phương trình $e^{-x}(f(x) + f''(x) - 2f'(x)) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong $[a,b]$.

2.2.34. Chú ý rằng $Q(x) = F(x)G(x)$ với

$$\begin{aligned} F(x) &= P'(x) + xP(x) = e^{-x^2/2}\left(e^{x^2/2}P(x)\right)', \\ G(x) &= xP'(x) + P(x) = (xP(x))'. \end{aligned}$$

Xét các nghiệm $1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ của đa thức P, theo định lý Rolle F có $n-1$ nghiệm, ký hiệu là $b_i, i = 1, 2, \ldots, n-1$ và G có n nghiệm, ký hiệu là $c_i, i = 1, 2, \ldots, n$, có thể giả thiết rằng

$$\begin{aligned} &1 < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < b_{n-1} < a_n, \\ &0 < c_1 < a_1 < c_2 < a_2 < \cdots < c_n < a_n. \end{aligned}$$

Nếu $b_i \neq c_{i+1}, i = 1, 2, \ldots n-1$ thì đa thức Q có ít nhất $2n-1$ nghiệm. Bây giờ giả thiết rằng tồn tại i sao cho $b_i = c_{i+1} = r$, thế thì $P'(r) + rP(r) = 0 = rP'(r) + P(r)$, do đó $(r^2 - 1)P(r) = 0$. Vì $r > 1$ nên $P(r) = 0$ vô lý.

2.2.35. Gọi các nghiệm của P là $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$, theo giả thiết ta có $P'(x_m) > 0$, $P'(x_{m-1}) < 0$ và $P'(x_{M-2}) > 0$,.... Hơn nữa ta thấy rằng $Q(x_m) < 0$, $Q(x_{m-1}) > 0$, ... Nếu m lẻ thì $Q(x_1) < 0$, nếu m chẵn thì $Q(x_1) > 0$, suy ra theo định lý Rolle Q có ít nhất $m+1$ nghiệm thực khi m lẻ và ít nhất m nghiệm thực khi m chẵn. Ta cần chỉ ra rằng các nghiệm của Q là phân biệt. Vì các nghiệm của P là thực và phân biệt nên $(P(x))^2 > P(x)P''(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thật vậy, vì

$$P(x) = a_m(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_m),$$

nên thấy rằng với $x \neq x_m$, ta có

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{x - x_j}.$$

Vì vậy

$$P(x)P''(x) - (P(x))^2 = -P^2(x)\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{(x-x_j)^2} < 0.$$

Hơn nữa với $x = x_j$

$$(P(x_j))^2 > 0 = P(x_j)P''(x_j).$$

Do đó bất đẳng thức $(P'(x))^2 > P(x)P''(x)$ đúng, từ đó suy ra

$$\begin{aligned}P(x)Q'(x) &= P(x)(2P(x)P'(x) - P''(x))\\&= 2P'(x)(P^2(x) - P'(x)) + 2(P'(x))^2 - P(x)P''(x)\\&> 2P'(x)P^2(x) - (P'(x))^2.\end{aligned}$$

Tức là

$$P(x)Q'(x) > 2P'(x)Q(x). \tag{1}$$

Vậy các nghiệm của Q đều là nghiệm đơn, Nếu y_1 và y_2 là hai nghiệm liên tiếp của Q thì $Q'(y_1)$ và $Q'(y_2)$ trái dấu nhau, do đó từ (1) ta suy ra $P(y_1)$ và $P(y_2)$ cũng trái dấu nhau, và ta có kết luận rằng giữa hai nghiệm liên tiếp của Q luôn có ít nhất một nghiệm của P, vậy với m lẻ, nếu Q có hơn $m+1$ nghiệm thực thì P có nhiều hơn m nghiệm, vô lý, twong tự nếu với m chẵn Q có nhiều hơn m nghiệm thì nó phải có $m+2$ nghiệm, tức là P có nhiều hơn m nghiệm, vô lý.

2.2.36. [G. Peyser, Amer. Math. Monthly 74 (1967), 1102-1104]. Chú ý rằng nếu mọi nghiệm của đa thức bậc n P đều thực thì theo định lý Rolle, mọi nghiệm của P' cũng đều thực, và nằm giữa các nghiệm của P, do đó P' có dạng như đã cho trong đề bài, ta chỉ cần chứng minh khẳng định đầu, các khẳng định sau chứng minh tương tự. Rõ ràng $P(x) = Q(x)(x - a_n)$, do đó

$$P'(x) = Q'(x)(x - a_n) + Q(x). \tag{$*$}$$

Xét trường hợp $a_i < a_{i+1}$, giả sử rằng $P(x) > 0$ với $x \in (a_i > a_{i+1})$ khi đó $Q(x) < 0$ với $x \in (a_i > a_{i+1})$. Hơn nữa từ $(*)$ ta suy ra $Q'(x) < 0$ với $x \in (a_i, a_{i+1})$ và $Q'(c_i) < 0$, do đó $d_i > c_i$, điều phải chứng minh.

2.2.37. [G. Peyser, Amer. Math. Monthly 74 (1967), 1102-1104]. Giả sử rằng $a_{n-1} < a_n$ và $\varepsilon > 0$. Rõ ràng

$$S(x) = P(x) - \varepsilon R(x),$$

với $R(x) = (x - a_2) \cdots (x - a_n)$. Không mất tổng quát giả sử rằng $P(x) < 0$ với $x \in (a_{n-1}a_n)$, khi đó $S(x) < 0$ và $R(x) < 0$ với $x \in (a_{n-1}a_n)$. Vì

$$S'(x) = P(x)(x - a_n) - \varepsilon R'(x), \tag{1}$$

nên $S(c_{n-1}) = -\varepsilon R'(c_{n-1})$. Theo kết quả bài trước ta có $R'(c_{n-1}) > 0$. Theo (1) ta có $S'(c_{n-1}) < 0$. Vì S' đổi dấu âm sang dương tại một điểm thuộc (a_{n-1}, a_n) nên $f_{n-1} > c_{n-1}$. Khẳng định còn lại được chứng minh tương tự.

2.2.38. [G. Peyser, Amer. Math. Monthly 74 (1967), 1102-1104]. Đặt $W(x) = (x - a_i)^i (x - a_{i+1})$. Nếu $i = 2, 3, \ldots, n - 1$ thì $W'(x) = 0$ tại các điểm $x = a_i$ và tại

$$x = c = \frac{ia_{i+1} + a_i}{i+1} = a_{i+1} - \frac{a_{i+1} - a_i}{i+1}.$$

Nếu $i = 1$ thì W' chỉ bằng 0 tại c. Sử dụng kết quả đầu của 2.2.36 $n-i-1$ lần và tiếp đến là kết quả bài trên $n-1$ lần với ε bằng $a_i - a_1, a_i - a_2, \ldots, a_i - a_{i-1}$ liên tiếp ta được

$$c_i \le c = a_{i+1} - \frac{a_{i+1} - a_i}{i+1}.$$

Để chứng minh bất đẳng thức bên trái ta sử dụng phần thứ hai của hai bài tập trên một cách tương tự.

2.2.39. Chú ý rằng theo định lý giá trị trung bình, với mọi $x \in (0, 1/K) \cap [0, 1]$ ta có

$$|f(x)| \le Kx|f(x_1)| \le K^2 x x_1 |f(x_2)| \le \cdots \le K^n x x_1 \cdots x_{n-1} |f(x_n)|,$$

trong đó $0 < x_n < x_{n-1} < \cdots < x_1 < x$. Do đó $|f(x)| \le (Kx)^n |f(x_n)|$. Vì f bị chặn nên $f(x) \equiv 0$ trên $(0, 1/K) \cap [0, 1]$. Nếu $K \ge 1$ ta cũng có kết luận tương tự $f(x) \equiv 0$ trên $[1/K, 2/K]$. Lặp lại quá trình trên nhiều lần suy ra $f(x) \equiv 0$ trên $[0, 1]$.

2.2.40. Với $x_1 \in \mathbf{J}_1$ và $x_3 \in \mathbf{J}_3$ ta có

$$\frac{f^{(k-1)}(x_3) - f^{(k-1)}(x_1)}{x_3 - x_1} = f^{(k)}(\zeta)$$

với $\zeta \in (x_1, x_3)$. Do đó

$$\begin{aligned} m_k(\mathbf{J}) &\le \frac{1}{x_3 - x_1}\left(|f^{(k-1)}(x_3)| - |f^{(k-1)}(x_1)|\right) \\ &\le \frac{1}{\lambda_2}\left(|f^{(k-1)}(x_3)| - |f^{(k-1)}(x_1)|\right). \end{aligned}$$

Lấy cận dưới đúng theo $x_1 \in \mathbf{J}_1$ và $x_3 \in \mathbf{J}_3$ ta suy ra điều phải chứng minh.

2.2.41. Quy nạp theo k. Với $k = 1$ ta suy ra bất đẳng thức từ định lý giá trị trung bình và $|f(x)| \le 1$. Giả sử bất đẳng thức đúng với k nào đó, theo kết quả bài trên ta có

$$\begin{aligned} m_{k+1}(\mathbf{J}) &\le \frac{1}{\lambda_2}(m_k(\mathbf{J}_1) + m_k(\mathbf{J}_3)) \\ &\le \frac{1}{\lambda_2}\left(\frac{1}{\lambda_1^k}2^{\frac{k(k+1)}{2}}k^k + \frac{1}{\lambda_3^k}2^{\frac{k(k+1)}{2}}k^k\right) \\ &= 2^{\frac{k(k+1)}{2}}k^k\left(\frac{1}{\lambda_1^k\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3^k\lambda_2}\right). \end{aligned}$$

Đặt $\lambda_1 = \lambda_3 = \frac{k\lambda}{2(k+1)}$ và $\lambda_2 = \frac{\lambda}{k+1}$ ta được

$$m_{k+1}(\mathbf{J}) \le \frac{2^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}(k+1)^{k+1}}{\lambda^{k+1}}.$$

Điều phải chứng minh.

2.2.42. Ta có

$$P^{(p-1)}(x) = (p-1)!a_{p-1} + \frac{(p+1)!}{2!}a_{p+1}x^2 + \cdots + \frac{n!}{(n-p+1)!}a_n x^{n-p+1}.$$

Theo định lý Rolle ta có giữa hai nghiệm thực liên tiếp của P tồn tại đúng một nghiệm thực của P', từ đó suy ra đa thức $P^{(p-1)}$ có $n-p+1$ nghiệm thực phân biệt và $P^{(p)}$ có $n-p$ nghiệm thực phân biệt, đồng thời như trên ta có giữa hai nghiệm liên tiếp của $P^{(p-1)}$ có đúng một nghiệm của $P^{(p)}$. Giả sử phản chứng rằng a_{p-1} và a_{p+1} có cùng dấu, không giảm tổng quát ta có thể giả thiết chúng có dấu dương, khi đó tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho $P^{(p-1)}$ giảm trong khoảng $(-\varepsilon, 0)$ và tăng trong khoảng $(0, \varepsilon)$. Rõ ràng $P^{(p)}(0) = 0$. Nếu không tồn tại một nghiệm khác của $P^{(p)}$ thì ta có $P^{(p-1)}(x) > P^{(p-1)}(0) > 0$ với $x \neq 0$, vô lý. Nếu $P^{(p)}$ có nghiệm khác 0 với thì ký hiệu $x_0 \neq 0$ là nghiệm gần không nhất ta nhận thấy rằng giữa 0 và x_0 có một nghiệm của $P^{(p-1)}$, mặt khác $P^{(p-1)}(x) > 0$ trong khoảng mở có hai đầu là 0 và x_0, vô lý. Điều phải chứng minh.

2.3 Công thức Taylor và quy tắc L'Hôpital

2.3.1. Chú ý rằng với $n = 1$ ta được điều phải chứng minh từ định nghĩa của $f'(x_0)$. Với $n > 1$, đặt

$$r_n(x) = f(x) - \left(f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \right).$$

Thế thì $r_n(x_0) = r'(x_0) = \cdots = r^{(n)}(x_0) = 0$. Theo định nghĩa của đạo hàm thứ n

$$r^{(n-1)}(x) = r^{(n-1)}(x) - r^{(n-1)}(x_0) = r^{(n)}(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0),$$

từ đó suy ra $r^{(n-1)}(x) = o(x - x_0)$. Sử dụng định lý giá trị trung bình ta được

$$r^{(n-2)}(x_0) = r^{(n-2)}(x) - r^{(n-2)}(x_0) = r^{(n-1)}(c)(x - x_0),$$

với c là một điểm thuộc khoảng mở có hai đầu mút là x và x_0. Vì $|c - x_0| < |x - x_0|$, ta suy ra $r^{(n-2)}(x_0) = o((x - x_0)^2)$. Lặp lại quá trình trên n lần ta được $r_n(x) = o((x - x_0)^n)$.

2.3.2. Với $x, x_0 \in [a, b]$ đặt

$$r_n(x) = f(x) - \left(f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \right).$$

Không mất tổng quát ta giả thiết $x > x_0$. Trên đoạn $[x_0, x]$ xét hàm trung gian

$$\varphi(z) = f(x) - \left(f(z) + \frac{f'(z)}{1!}(x-z) + \cdots + \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x-z)^n\right).$$

Ta có

(1) $$\varphi(x_0) = r_n(x_0) \quad \text{và} \quad \varphi(x) = 0.$$

Hơn nữa $\varphi'(x)$ tồn tại và

(2) $$\varphi'(z) = -\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n.$$

Theo định lý giá trị trung bình tổng quát

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)},$$

trong đó ψ liên tục trên $[x_0, x]$ có đạo hàm khác không trên (x_0, x). Kết hợp với (1) và (2) ta được

$$r_n(x) = \frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{\psi'(c)} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Chọn $\psi(z) = (x-z)^p$ và viết $c = x_0 + \theta(x - x_0)$ ta được

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!p}(1-\theta)^{n+1-p}(x-x_0)^{n+1}.$$

2.3.3. Chú ý rằng kết quả trong bài này chính là các trường hợp riêng của bài trước với

(a) $p = n + 1$,

(b) $p = 1$.

2.3.4. Tích phần từng phần

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(x)dt = [-(x-t)f'(t)]_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} (x-t)f''(t)dt.$$

Do đó

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \int_{x_0}^{x} (x-t)f''(t)dt.$$

Lặp lại quá trình trên n lần ta sẽ suy ra dạng công thức Taylor cần chứng minh.

2.3.5. Với $n = 1$

$$\begin{aligned} R_2(x) &= \int_{x_0}^{x} \int_{x_0}^{t_2} f^{(2)}(t_1)dt_1dt_2 = \int_{x_0}^{x} (f'(xt_2) - f'(x_0))dt_2 \\ &= f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0). \end{aligned}$$

Sử dụng quy nạp ta suy ra điều phải chứng minh.

2.3.6. Sử dụng công thức Taylor với phần dư dạng Lagrange (xem 2.3.3 (a)), ta có

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{3!8}(1+\theta x)^{-5/2}x^3$$

với $0 < \theta < 1$ nào đó, suy ra

$$\left|\sqrt{1+x} - \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2\right)\right| \leq \frac{3|x|^3}{48\left(\frac{1}{2}\right)^{5/2}} = \frac{\sqrt{2}|x|^3}{4} < \frac{1}{2}|x|^3.$$

2.3.7. Sử dụng công thức Taylor với số dư dạng Lagrange đối với $f(x) = (1+x)^\alpha$, ta được

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)(1+\theta x)^{\alpha-2}}{2}x^2$$

với $0 < \theta < 1$. Để có điều phải chứng minh ta chỉ cần chú ý rằng

$$\frac{\alpha(\alpha-1)(1+\theta x)^{\alpha-2}}{2} > 0 \quad \text{với} \quad \alpha > 1 \quad \text{hay} \quad \alpha < 0,$$

và

$$\frac{\alpha(\alpha-1)(1+\theta x)^{\alpha-2}}{2} < 0 \quad \text{với} \quad 0 < \alpha < 1.$$

2.3.8. Theo công thức Taylor

$$\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)} = \frac{f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\theta_1(x))x^2}{g'(0)x + \frac{1}{2}g''(\theta_2(x))x^2}.$$

Mặt khác theo định lý giá trị trung bình

$$\frac{f'(\theta(x))}{g'(\theta(x))} = \frac{f'(0)+\theta(x)f''(\theta_3(x))}{g'(0)+\theta(x)g''(\theta_4(x))}.$$

Sử dụng các đẳng thức trên và tính liên tục tại 0 của f'' và g'' ta dễ dàng suy ra

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\theta(x)}{x} = \frac{1}{2}.$$

2.3.9.

(a) Theo công thức Taylor

$$f(0) = f(x+(-x)) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(-x) + \frac{f''(x)}{2!}(-x)^2$$
$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(-x)^n + \frac{f^{(n+1)}(x-\theta_1 x}{(n+1)!}(-x)^{n+1}.$$

Cho $\theta = 1-\theta_1$ ta được điều phải chứng minh.

(b) Chú ý rằng $f\left(\frac{x}{1+x}\right) = f\left(\frac{x^2}{1+x}\right)$, làm như câu (a).

2.3.10. Ta có

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{f'\left(\frac{x}{2}\right)}{1!}\left(\frac{x}{2}\right) + \cdots + \frac{f^{(2n)}\left(\frac{x}{2}\right)}{(2n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$
$$+\frac{f^{(2n+1)}\left(\frac{x}{2}+\theta_1\frac{x}{2}\right)}{(2n+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1},$$

tương tự

$$f(0) = f\left(\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{f'\left(\frac{x}{2}\right)}{1!}\left(\frac{x}{2}\right) + \cdots + \frac{f^{(2n)}\left(\frac{x}{2}\right)}{(2n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$
$$-\frac{f^{(2n+1)}\left(\frac{x}{2}-\theta_2\frac{x}{2}\right)}{(2n+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}.$$

Trừ vế với vế hai đẳng thức trên ta được

$$
\begin{aligned}
f(x) = f(0) &+ \frac{2}{1!}f'\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{2}{3!}f^{(3)}\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^3 \\
&+ \cdots + \frac{2}{(2n-1)!}f^{(2n-1)}\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1} \\
&+ \frac{f^{(2n+1)}\left(\frac{x}{2}+\theta_1\frac{x}{2}\right) + f^{(2n+1)}\left(\frac{x}{2}-\theta_2\frac{x}{2}\right)}{(2n+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}.
\end{aligned}
$$

Vì đạo hàm thoả mãn định lý giá trị trung gian (xem 2.2.31) ta có điều phải chứng minh.

2.3.11. Sử dụng kết quả bài trên với $f(x) = \ln(x+1)$, $x > 0$ và chú ý rằng đạohàm lẻ của f nhận giá trị dương với $x > 0$.

2.3.12. Sử dụng công thức Taylor với số dư dạng Peano (xem 2.3.1),

(a)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \\
&= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + o(h^2)}{h^2}\right. \\
&\left. - \frac{2f(x) - f(x) + hf'(x) - \frac{h^2}{2}f''(x) + o(h^2)}{h^2}\right\} = f''(x).
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h^2 f''(x) + o(4h^2)o(h^2)}{h^2} = f''(x).
\end{aligned}
$$

2.3.13. Tương tự cách giải bài trên, ta áp dụng công thức Taylor với phần dư dạng Peano.

2.3.14.

(a) Theo công thức Taylor với $x > 0$ ta có

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} > \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

(b) Với $x > 0$ ta có

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \frac{1}{(1+\theta_1 x)^5} > x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}.$$

Tương tự với $x > -1, x \neq 0$

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \frac{1}{(1+\theta_2 x)^4} > x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

(c) Sử dụng công thức Taylor cho hàm $x \mapsto \sqrt{1+x}$ ta được

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{1}{128}(1+\theta_1 x)^{-7/2} x^4 \\ &< 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 \end{aligned}$$

và

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}(1+\theta_2 x)^{-5/2} x^3 > 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2.$$

2.3.15. Theo 2.3.1

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) + o(h^{n+1}).$$

Mặt khác

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \theta(h)h).$$

Trừ đẳng thức trên cho đẳng thức dưới ta được

$$\frac{f^{(n)}(x+\theta(h)h) - f^{(n)}(x)}{h} = \frac{f^{(n+1)}(x)}{n+1} + \frac{o(h)}{h}.$$

Từ đó suy ra

$$\theta(h) = \frac{\frac{f^{(n+1)}(x)}{n+1} + \frac{o(h)}{h}}{\frac{f^{(n)}(x+\theta(h)h) - f^{(n)}(x)}{\theta(h)h}}.$$

Chú ý rằng $f^{(n+1)}(x)$ tồn tại và khác 0 ta suy ra điều phải chứng minh.

2.3.16. Với $0 < x \le 1$ ta có

(1) $$f(0) = f(x - x) = f(x) - f'(x)x + f''(x - \theta_1 x)\frac{x^2}{2},$$

và với $0 \le x < 1$,

(2) $$\begin{aligned} f(1) &= f(x + (1 - x)) \\ &= f(x) + f'(x)(1 - x) + f''(x + \theta_2(1 - x))\frac{(1 - x)^2}{2}. \end{aligned}$$

Thấy rằng từ (1) suy ra $|f'(1)| \le \frac{A}{2}$, và từ (2) ta có $|f'(0)| \le \frac{A}{2}$. Hơn nữa trừ (2) cho (1) ta được

$$f'(x) = \frac{1}{2}(f'(x - \theta_1 x)x^2 - f''(x + \theta_2(1 - x)^2) \quad \text{với} \quad 0 < x < 1.$$

Do đó

$$|f'(x)| \le \frac{A}{2}(2x^2 - 2x = 1) < \frac{A}{2}, \quad 0 < x < 1.$$

2.3.17.

(a) Với $x \in [-c, c]$,

(1) $$f(c) - f(x) = f'(x)(c - x) + \frac{f''(x - \theta_1(c - x))}{2}(c - x)^2$$

và

$$f(-c) - f(x) = -f'(x)(c + x) + \frac{f''(x - \theta_2(c + x))}{2}(c + x)^2.$$

Do đó

$$\begin{aligned} f'(x) = &\frac{f(c) - f(-c)}{2c} \\ &- \frac{(c - x)^2 f''(x + \theta_1(c - x)) - (c + x)^2 f''(x - \theta_2(c + x))}{4c}. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$|f'(x)| \le \frac{M_0}{c} + (c^2 + x^2)\frac{M_2}{2c}.$$

(b) Từ (1) ở trên, với $x \in [-c, c)$ ta có

$$f'(x) = \frac{f(c) - f(x)}{h} - \frac{f''(x + \theta_1 h)}{2}h,$$

trong đó $h = c - x > 0$. Do đó $|f'(x)| \leq 2\frac{M_0}{h} + \frac{1}{2}M_2 h$. Chọn $h = 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$ ta được $|f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$, kéo theo $M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$.

2.3.18. Bất đẳng thức $M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$ được chứng minh trong câu (b) bài 2.3.17, dấu đẳng thức đạt được, ví dụ như ở hàm

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{với} \quad -1 < x < 0, \\ \frac{x^2-1}{x^2+1} & \text{với} \quad 0 \leq x < \infty. \end{cases}$$

Thật vậy, ta có $M_0 = 1$ và $M_1 = M_2 = 4$.

2.3.19. Với $h > 0$ và $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + f''(x + \theta h)\frac{h^2}{2}$$

và

$$f(x - h) = f(x) - f'(x)h + f''(x - \theta_1 h)\frac{h^2}{2}.$$

Từ đó suy ra

$$f'(x) = \frac{1}{2h}(f(x + h) - f(x - h)) - \frac{h}{4}(f''(x + \theta h) - f''(x - \theta_1 h)),$$

tức là

$$|f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{h}{2}M_2 \quad \text{với} \quad h > 0.$$

Chọn $h = \sqrt{2\frac{M_0}{M_2}}$ ta được điều phải chứng minh.

2.3.20. Với $p = 2$ điều phải chứng minh được suy ra từ bài tập trên. Ta sử dụng phương pháp quy nạp. Giả sử khẳng định đúng với $2, 3, \dots, p$. Ta đi chứng minh rằng nó cũng đúng với $p + 1$. Ta có

$$f^{(p-1)}(x + h) = f^{(p-1)}(x) + f^{(p)}(x)h + f^{(p+1)}(x + \theta h)\frac{h^2}{2}$$

và
$$f^{(p-1)}(x-h) = f^{(p-1)}(x) - f^{(p)}(x)h + f^{(p+1)}(x-\theta_1 h)\frac{h^2}{2}.$$
Do đó
$$\begin{aligned} f^{(p)}(x) = &\frac{1}{2h}(f^{(p-1)}(x+h) - f^{(p-1)}(x-h)) \\ &- \frac{h}{4}(f^{(p+1)}(x+\theta h) - f^{(p+1)}(x-\theta_1 h)). \end{aligned}$$
Từ đó suy ra
$$|f^{(p)}(x)| \le \frac{M_{p-1}}{h} + \frac{h}{2}M_{p+1}, \quad h > 0.$$
Chọn $h = \sqrt{2\frac{M_{p-1}}{M_{p+1}}}$ ta được $M_p \le \sqrt{2M_{p-1}M_{p+1}}$. Theo giả thiết quy nạp, với $k = p-1$ và một vài tính toán ta được

$$M_p \le 2^{p/2} M_0^{\frac{1}{p+1}} M_{p+1}^{\frac{p}{p+1}}. \tag{1}$$

Vậy ta đã chứng minh được bất đẳng thức với $k = p$. Bây giờ ta đi chứng minh nó với $1 \le k \le p-1$. Theo giả thiết quy nạp ta có
$$M_k \le 2^{\frac{k(p-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{p}} + M_p^{\frac{k}{p}},$$
kết hợp với (1) ta được
$$M_k \le 2^{\frac{k(p+1-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{p+1}} + M_p^{\frac{k}{p+1}}.$$
Điều phải chứng minh.

2.3.21. Giả sử $|f''(x)| \le M (M > 0)$, với $x \in (0, \infty)$. Theo công thức Taylor cho $x, h \in (0, \infty)$ ta có
$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x+\theta h)\frac{h^2}{2}.$$
Từ đó suy ra
$$|f'(x)| \le \frac{|f(x+h) - f(x)|}{h} + \frac{Mh}{2}.$$

Vì $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, chọn $\varepsilon > 0$ thì tồn tại x_0 sao cho

$$|f'(x)| \leq \frac{\varepsilon}{h} + \frac{Mh}{2} \quad \text{với} \quad x > x_0, h > 0.$$

Chọn $h = \sqrt{2\frac{\varepsilon}{M}}$ ta được $|f'(x)| \leq \sqrt{2\varepsilon M}$, $x > x_0$, tức là $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

2.3.22. Với $x > 0$,

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2}f''(\xi) \quad \text{với} \quad \xi \in (x, x+1).$$

Do đó

$$xf'(x) = \frac{x}{x+1}(x+1)f(x+1) - xf(x) - \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{\xi}\cdot\xi f''(\xi).$$

Từ đó suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty} xf'(x) = 0$.

2.3.23. Với $u, x \in (0,1)$, $u > x$, theo công thức Taylor ta có

$$f(u) = f(x) + f'(x)(u-x) + \frac{1}{2}f''(\xi)(u-x)^2$$

với $\xi \in (x, u)$. Chọn $u = x + \varepsilon(1-x), 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, ta được

$$f(u) - f(x) = \varepsilon(1-x)f'(x) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 f''(x + \theta\varepsilon(1-x))(1-x)^2$$

với $\theta \in (0,1)$. Cho $x \to 1^-$ ta được

$$(1) \qquad 0 = \lim_{x\to 1^-}\left((1-x)f'(x) + \frac{1}{2}\varepsilon f''(x+\theta\varepsilon(1-x))(1-x)^2\right).$$

Theo định nghĩa giới hạn, nếu $\varepsilon_1 > 0$ thì

$$\begin{aligned}(1-x)|f'(x)| &\leq \varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon|f''(x+\theta\varepsilon(1-x))|(1-x)^2\\ &\leq \varepsilon_1 + \frac{1}{2}\frac{M\varepsilon}{(\theta\varepsilon-1)^2}\end{aligned}$$

với x đủ gần 1. Vì ε chọn tuỳ ý nên $(1-x)|f'(x)| \leq \varepsilon_1$, từ đó suy ra $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)f'(x) = 0$.

2.3.24. Ta có
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a) + \frac{f''(x_1)}{2!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$
và
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(b) + \frac{f''(x_2)}{2!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2,$$
với $x_1 \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right)$ và $x_2 \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right)$, do đó
$$|f(b) - f(a)| = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \frac{1}{2}|f''(x_2) - f''(x_1)| \le \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 |f''(c)|,$$
trong đó $|f''(c)| = \max\{|f''(x_2)|, |f''(x_1)|\}$.

2.3.25. Theo công thức Taylor ta có
$$1 = f(1) = \frac{1}{2}f''(0) + \frac{f'''(x_1)}{3!} \quad \text{và} \quad 0 = f(-1) = \frac{1}{2}f''(0) - \frac{f'''(x_2)}{3!}$$
với $x_1 \in (0,1)$ và $x_2 \in (-1,0)$. Do đó
$$f'''(x_1) + f'''(x_2) = 6,$$
tức là $f'''(x_1) \ge 3$ hoặc $f'''(x_2) \ge 3$. Chú ý rằng ta có thể nhận được dấu đẳng thức với ví dụ $f(x) = \frac{1}{2}(x^3 + x_2)$.

2.3.26. Viết

(1) $$f(t) = t(x) + (t-x)Q(t).$$

Đạo hàm hai vế đẳng thức trên theo t ta được

(2) $$f'(t) = Q(t) + (t-x)Q'(t).$$

Thay thế t bởi x_0,

(3) $$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + (x-x_0)^2 Q'(x_0).$$

Đạo hàm (2) theo t và cho $t = x_0$, sử dụng (3) ta được
$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}(x-x_0)^3 Q''(x_0).$$
Lặp lại quá trình trên n lần ta được đẳng thức cần chứng minh.

2.3.27. Theo công thức Taylor ở 2.3.1,

$$f(y_n) = f(0) + f'(0)y_n + o(y_n),$$
$$f(x_n) = f(0) + f'(0)x_n + o(x_n).$$

Do đó

(1) $$f'(0) = \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} - \frac{o(y_n) - o(x_n)}{y_n - x_n}.$$

(a) Vì $x_n < 0 < y_n$ nên

$$\left|\frac{o(y_n) - o(x_n)}{y_n - x_n}\right| \le \frac{|o(y_n)|}{y_n - x_n} + \frac{|o(x_n)|}{y_n - x_n} \le \frac{|o(y_n)|}{y_n} + \frac{|o(x_n)|}{-x_n}.$$

Từ đó suy ra

$$\lim_{n\to\infty} \frac{o(y_n) - o(x_n)}{y_n - x_n} = 0,$$

kết hợp với (1) ta được $\lim\limits_{n\to\infty} D_n = f'(0)$.

(b) Từ (1) ta suy ra chỉ cần chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{o(y_n)-o(x_n)}{y_n-x_n} = 0$. Ta có

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \frac{o(y_n) - o(x_n)}{y_n - x_n}\\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{o(y_n)}{y_n} \cdot \frac{y_n}{y_n - x_n} - \frac{o(x_n)}{x_n} \cdot \frac{x_n}{y_n - x_n}\right) = 0,\end{aligned}$$

đẳng thức cuối cùng được suy ra từ tính giới nội của các dãy $\left\{\frac{y_n}{y_n-x_n}\right\}$ và $\left\{\frac{x_n}{y_n-x_n}\right\}$.

(c) Theo định lý giá trị trung bình ta có $D_n = f'(\theta_n)$, trong đó $x_n < \theta_n < y_n$. Sử dụng tính liên tục tại 0 của f' ta có điều phải chứng minh.

2.3.28. Chú ý rằng P là đa thức có bậc không vượt quá m, đạo hàm đẳng thức

$$(1 - y)^{m+1} \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} (-1)^k y^k,$$

ta được

$$(1) \qquad -(m+1)(1-y)^m = \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m+1}{k} (-1)^k k y^{k-1}.$$

Cho $y = 1$ ta được

$$(2) \qquad 0 = \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m+1}{k} (-1)^k k.$$

Từ đẳng thức trên suy ra $P^{(m-1)}(0) = 0$. Đạo hàm (1) rồi cho $y = 1$ ta lại thấy rằng (theo (2)) $P^{(m-2)}(0) = 0$. Lặp lại quá trình trên ta suy ra rằng $P^{(j)}(0) = 0$ với $j = 0, 1, 2, \dots, m-1$. Hơn nữa $P^{(m)}(0) = 0$, vì

$$0 = (1-1)^{m+1} = \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m+1}{k} (-1)^k.$$

Sử dụng công thức Taylor ta suy ra $P(x) \equiv 0$.

2.3.29. [E. I. Poffald, Amer. Math. Montly 97 (1990), 205-213] Ta sử dụng định lý (giá trị) trung bình tích phân sau.

Định lý. *Cho f và g là hai hàm liên tục trên $[a, b]$, g có dấu không đổi trong khoảng đó. Khi đó tồn tại $\xi \in (a, b)$ sao cho*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

Chứng minh. Đặt

$$m = \min\{f(x) : x \in [a, b]\} \quad \text{và} \quad M = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

Giả sử rằng, điều này không làm mất tính tổng quát của bài toán, $g(x) > 0$, khi đó $mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x)$. Tích phân bất đẳng thức kép ta được

$$m \int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M \int_a^b g(x)dx.$$

Do đó

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M.$$

Vì f thoả mãn định lý giá trị trung gian trong $[a, b]$ nên ta có điều phải chứng minh.

Bây giờ ta chứng minh công thức của đề bài. Sử dụng công thức Taylor với phần dư dạng tích phân (xem 2.3.4)

$$\begin{aligned} f^{(n)}\left(\frac{x}{n+1}\right) &= f^{(n)}(0) + f^{(n+1)}(0)\frac{x}{n+1} \\ &\quad + \int_0^{\frac{x}{n+1}} f^{(n+2)}(t)\left(\frac{x}{n+1} - t\right) dt. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} &f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}\left(\frac{x}{n+1}\right)}{n!}x^n \\ &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} \\ &+ \left(f^{(n)}(0) + f^{(n+1)}(0)\frac{x}{n+1} + \int_0^{\frac{x}{n+1}} f^{(n+2)}(t)\left(\frac{x}{n+1} - t\right) dt\right)\frac{x^n}{n!} \\ &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1} \\ &+ \int_0^{\frac{x}{n+1}} f^{(n+2)}(t)\left(\frac{x}{n+1} - t\right) dt\frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

Mặt khác cũng theo công thức Taylor với phần dư dạng tích phân ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1} \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!}\int_0^x f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}dt. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$
\begin{aligned}
&f(x) - \left(f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}\left(\frac{x}{n+1}\right)}{n!}x^n\right)\\
&= \frac{1}{(n+1)!}\int_0^x f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}dt\\
&\quad - \int_0^{\frac{x}{n+1}} f^{(n+2)}(t)\left(\frac{x}{n+1} - t\right)dt\frac{x^n}{n!}\\
&= \frac{1}{n!}\int_0^{\frac{x}{n+1}} f^{(n+2)}(t)\left(\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} - x^n\left(\frac{x}{n+1} - t\right)\right)dt\\
&\quad + \frac{1}{(n+1)!}\int_{\frac{x}{n+1}}^x f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}dt.
\end{aligned}
$$

Xét hàm

$$
g(t) = \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} - x^n\left(\frac{x}{n+1} - t\right) \qquad \text{với} \quad t \in [0, x].
$$

Rõ ràng $g'(t) > 0$ với mọi $t \in (0, x)$ và $g(0) = 0$, do đó g dương trên toàn khoảng mở $(0, x)$. Theo định lý trung bình tích phân ở trên ta có

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{x}{n+1}} f^{(n+2)}(t)\left(\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} - x^n\left(\frac{x}{n+1} - t\right)\right)dt\\
&= f^{(n+2)}(\xi)\int_0^{\frac{x}{n+1}} g(t)dt
\end{aligned}
$$

và

$$
\int_{\frac{x}{n+1}}^x f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}dt = f^{(n+2)}(\xi)\int_{\frac{x}{n+1}}^x (x-t)^{n+1}dt.
$$

Từ đó suy ra

$$
\begin{aligned}
&f(x) - \left(f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}\left(\frac{x}{n+1}\right)}{n!}x^n\right)\\
&= \frac{1}{n!}f^{(n+2)}(\xi_1)\int_0^{\frac{x}{n+1}} g(t)dt + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+2)}(\xi_2)\int_{\frac{x}{n+1}}^x (x-t)^{n+1}dt.
\end{aligned}
$$

Đặt

$$\lambda_1 = \int_0^{\frac{x}{n+1}} g(t)dt \quad \text{và} \quad \lambda_2 = \int_{\frac{x}{n+1}}^{x} \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}dt$$

ta sẽ thấy rằng

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{x^{n+2}n}{2(n+1)^2(n+2)}.$$

Sử dụng định lý giá trị trung gian ta có

$$\frac{f^{(n+2)}(\xi_1)\int_0^{\frac{x}{n+1}} g(t)dt + f^{(n+2)}(\xi_2)\int_{\frac{x}{n+1}}^{x} \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}dt}{\frac{x^{n+2}n}{2(n+1)^2(n+2)}} = f^{(n+2)}(\xi),$$

với ξ ở giữa ξ_1 và ξ_2. Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}&f(x) - \left(f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}\left(\frac{x}{n+1}\right)}{n!}x^n\right)\\&= \frac{1}{n!}f^{(n+2)}(\xi)\frac{x^{n+2}n}{2(n+1)^2(n+2)} = \frac{n}{2(n+1)}f^{(n+2)}(\xi)\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}.\end{aligned}$$

Đặt $\theta = \frac{\xi}{x}$ ta suy ra điều phải chứng minh.

2.3.30. Theo giả thiết và áp dụng công thức Taylor cho $f^{(n)}$ ta được

$$\begin{aligned}&f^{(n)}(x_0 + \theta(x)(x-x_0))\\&= f^{(n)}(x_0) + \frac{f^{(n+p)}(x_0 + \theta_1\theta(x)(x-x_0))}{p!}(\theta(x)(x-x_0))^p.\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}f(x) = f(x_0) &+ \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\\&+ \frac{f^{(n+p)}(x_0 + \theta_1\theta(x)(x-x_0))}{n!p!}(x-x_0)^{n+p}(\theta(x))^p.\end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}f(x) = f(x_0) &+ \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\\&+ \frac{f^{(n+p)}(x_0 + \theta_2(x-x_0))}{(n+p)!}(x-x_0)^{n+p}.\end{aligned}$$

Từ hai đẳng thức trên suy ra

$$\frac{f^{(n+p)}(x_0+\theta_1\theta(x)(x-x_0))}{n!p!}(\theta(x))^p = \frac{f^{(n+p)}(x_0+\theta_2(x-x_0))}{(n+p)!}.$$

Vì $f^{(n+p)}$ là hàm liên tục tại x_0 và $f^{(n+p)}(x_0) \neq 0$ nên khi cho $x \to x_0$ ta được $\frac{1}{(n+p)!} = \frac{1}{n!p!} \lim\limits_{x\to x_0} (\theta(x))^p$.

Trường hợp $p = 1$ chính là bài 2.3.15.

2.3.31. Theo công thức Taylor

$$\begin{aligned}
(1)\qquad \sum_{k=1}^{\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]} f(kx) &= \sum_{k=1}^{\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]} \left(f'(0)kx + \frac{1}{2}f''(\theta kx)k^2x^2\right) \\
&= f'(0)x\frac{\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]\left(\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]+1\right)}{2} + \eta(x),
\end{aligned}$$

trong đó

$$(2)\qquad \eta(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]} f''(\theta kx)k^2x^2.$$

Vì f'' bị chặn trong lân cận của 0 nên

$$\sum_{k=1}^{\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]} k^2 = \frac{\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]\left(\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]+1\right)\left(2\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]+1\right)}{6}.$$

Từ (2) ta suy ra $\lim\limits_{x\to 0^+} \eta(x) = 0$, còn từ (1) ta có

$$\lim_{x\to 0^+} \sum_{k=1}^{\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]} f(kx) = \frac{f'(0)}{2}.$$

2.3.32. Theo định lý Bolzano - Weierstrass (xem I, 2.4.30) ta có tập nghiệm của f có ít nhất một điểm giới hạn, ký hiệu là p trong $[c, d]$. Rõ ràng $f(p) = 0$. Xét dãy nghiệm $\{x_n\}$ của f hội tụ về p, theo định lý Rolle ta có giữa hai nghiệm của f sẽ tồn tại ít nhất một nghiệm của f', vì vậy p cũng là điểm giới hạn của tập các nghiệm của f'. Từ đó suy ra, theo công thức Taylor

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(p + \theta(x-p))}{n!}(x-p)^n$$

với $\theta \in (0,1)$. Vì $\sup\{|f^{(n)}(x)| : x \in (a,b)\} = O(n!)$ nên tồn tại $M > 0$ sao cho $|f(x)| \leq M|x-p|^n$ với n đủ lớn, do đó với $x \in (a,b)$ mà $|x-p| < 1$ thì $f(x) = 0$.

2.3.33. Tương tự bài tập trên, ta chứng minh được $f^{(k)}(0) = 0$ với $k \in \mathbb{N}$, theo công thức Taylor ta có

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Vì x cho trước và $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ nên ta suy ra $f(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

2.3.34.

(a) 1.

(b) $-e/2$.

(c) $1/e$.

(d) $e^{-1/6}$.

2.3.35. Để chứng minh rằng

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln f\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)} = e^{-a^2/2},$$

ta sử dụng công thức Taylor với phần dư dạng Peano (xem 2.3.1), được

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

tiếp theo sử dụng 1.1.17(a). Ta cũng có thể sử dụng quy tắc L'Hôpital trong trường hợp này:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} x\ln f\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln f(a\sqrt{t})}{t} = \lim_{x\to+\infty}\frac{af'(a\sqrt{t})}{2\sqrt{t}f(a\sqrt{t})} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{a^2f''(a\sqrt{t})}{2f(a\sqrt{t}) + 2a\sqrt{t}f'(a\sqrt{t})} = -\frac{a^2}{2}.
\end{aligned}$$

2.3.36. Giả sử rằng $a > 1$, theo quy tắc l'Hôpital ta có

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^x-1}{x(a-1)}\right)^{1/x} = a.$$

Nếu $0 < a < 1$ thì

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^x-1}{x(a-1)}\right)^{1/x} = 1.$$

2.3.37.

(a) Vì $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{2+\cos x}$ không tồn tại nên không sử dụng quy tắc l'Hôpital trong trường hợp này.

(b) Không sử dụng quy tắc l'Hôpital, vì đạo hàm của hàm dưới mẫu bằng 0 tại các điểm $\pi/2 + 2n\pi, n \in \mathbb{N}$. Mặt khác ta có thể chứng minh được rằng giới hạn này không tồn tại.

(c) Để tìm giới hạn của biểu thức dạng $f(x)^{g(x)}$ khi $x \to 0^+$ ta chỉ cần tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$. Tuy nhiên giới hạn này không tính được bằng quy tắc l'Hôpital vì giới hạn của biểu thức phân thức đạo hàm không tồn tại. Theo 1.1.23(a) ta có giới hạn cần tìm bằng 1.

(d) Giới hạn bằng 1 (xem 1.1.23(b)). Giới hạn không thể tính được bằng quy tắc l'Hôpital.

2.3.38. Ta có

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x\ln2}-\frac{1}{2^x-1}-\frac12}{x} &= \lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{\ln(1+t)}-\frac1t-\frac12}{\frac{\ln(1+t)}{\ln2}}\\
&= \lim_{t\to0}\frac{\ln2(2t-2\ln(1+t)-t\ln(1+t))}{2t\ln^2(1+t)}\\
&= -\frac{\ln2}{12},
\end{aligned}$$

đẳng thức cuối cùng được tính bằng cách sử dụng quy tắc l'Hôpital một vài lần liên tiếp. Từ đó suy ra $f'(0) = -\frac{\ln2}{12}$.

2.3.39. Sử dụng 2.3.28 ta chứng minh được rằng

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^r = \begin{cases} 0 & \text{với} \quad r = 0, 1, \dots, n-1, \\ n! & \text{với} \quad r = n. \end{cases}$$

Để chứng minh đẳng thức trong đề bài ta áp dụng quy tắc l'Hôpital n lần liên tiếp.

2.3.40. Giả sử rằng $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = +\infty$ và $L \in \mathbb{R}$. Theo (iii) , với $\varepsilon > 0$ cho trước tồn tại a_1 sao cho với $x \in (a, a_1)$ ta có

$$L - \varepsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < L + \varepsilon. \tag{1}$$

Vì g' thoả mãn định lý giá trị trung gian trong nên từ (1) suy ra g' không đổi dấu trên (a, b), từ đó suy ra g đơn điệu thực sự trên (a, b). Với $x, x_1 \in (a, a_1)$, $x < y$, theo định lý giá trị trung bình tổng quát ta có

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

với $x_0 \in (x, y) \subset (a, a_1)$. Cố định y, theo (1) ta có

$$L - \varepsilon < \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(y)}{g(x)}}{1 - \frac{g(y))}{g(x)}} < L + \varepsilon.$$

Không mất tổng quát ta coi g là thực sự tăng trên (a, b), khi đó

$$(L - \varepsilon)\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{f(x)} < \frac{f(x)}{g(x)} < (L + \varepsilon)\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)}.$$

Cho $x \to a^+$ ta được

$$L - \varepsilon \le \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \le L + \varepsilon,$$

ta được điều phải chứng minh cho một trường hợp. Các trường hợp khác được chứng minh tương tự.

2.3.41.

(a) Sử dụng quy tắc l'Hôpital ta có
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{ax}f(x)}{e^{ax}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{ax}(af(x)+f'(x)}{ae^{ax}} = \frac{L}{a}.$$

(b) Tương tự:
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{a\sqrt{x}}f(x)}{e^{a\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{a\sqrt{x}}\left(f'(x)+\frac{a}{2\sqrt{x}}f(x)\right)}{\frac{a}{2\sqrt{x}}e^{a\sqrt{x}}}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{a}(af(x)+2\sqrt{x}f'(x)) = \frac{L}{a}.$$

Các phản ví dụ để chứng minh rằng (a) và (b) không còn đúng khi a âm là các hàm $f(x)=e^{-ax}$ và $f(x)=e^{-a\sqrt{x}}$ tương ứng.

2.3.42. Sử dụng quy tắc l'Hôpital được chứng minh trong 2.3.40 ta được
$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{f'(x)}{xf''(x)}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(x-\frac{f'(x)}{f''(x)}\right)'}{x'} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)f'''(x)}{(f''(x))^2} = c.$$
Do đó
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{xf''(x)} = 1-c.$$
Theo giả thiết có $c\le 1$. Rõ ràng khi $c\ne 1$ thì

(1)
$$\lim_{x\to\infty}\frac{xf''(x)}{f'(x)} = \frac{1}{1-c}.$$

Bây giờ ta chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$. Theo công thức Taylor ta có
$$f(x+h) = f(x)+f'(x)h+f''(\zeta)\frac{h^2}{2},\quad h>0.$$
Do đó $f(x+h) > fx)+f'(x)h$. Cho $h\to\infty$ ta được $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$. Sử dụng quy tắc l'Hôpital lần nữa
$$\lim_{x\to\infty}\frac{xf'(x)}{f(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)+xf''(x)}{f'(x)} = 1+\frac{1}{1-c},$$
kết hợp với (1) ta được
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{xf''(x)}{f'(x)}\cdot\frac{f(x)}{xf'(x)} = \frac{1}{2-c}.$$

2.3.43. Với $x \neq 0$, theo công thức Leibniz ta có

$$
\begin{aligned}
g^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} f^{(k)}(x) \frac{1}{x^{n+1-k}}.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Đặt $g(0) = f'(0)$, sử dụng quy tắc l'Hôpital ta được

$$
\begin{aligned}
g^{(n)}(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{g(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - xf'(0)}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{2x} = \frac{f''(0)}{2}.
\end{aligned}
$$

Do đó $g'(0)$ tồn tại. Ta cần chỉ ra rằng g' liên tục tại 0. Theo (1) và sử dụng quy tắc l'Hôpital ta được

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} g'(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - g(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{xf''(x)}{2x} = g'(0).
\end{aligned}
$$

Suy ra g thuộc lớp $C^1(-1, 1)$. Bây giờ ta sử dụng quy nạp để chứng minh, giả sử rằng bài toán đã được chứng minh đến n tức là $g^{(n)}(0) = \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$ và

$g \in C^n(-1,1)$, thế thì từ (1) và sử dụng quy tắc l'Hôpital ta được

$$
\begin{aligned}
g^{(n+1)}(0 &= \lim_{x\to 0} \frac{g^{(n)}(x) - g^{(n)}(0)}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\frac{n!}{k!} f^{(k)}(x)x^k - x^{n+1}g^{(n)}(0)}{x^{n+2}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\frac{n!}{k!} f^{(k)}(x)x^k - x^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}}{x^{n+2}} \\
&= \lim_{x\to 0} \left\{ \frac{n!(-1)^n f'(x) + \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{n-k}\frac{n!}{k!} f^{(k+1)}(x)x^k}{(n+2)x^{n+1}} \right. \\
&\left. + \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{n-k}\frac{n!}{(k-1)!} f^{(k+1)}(x)x^{k-1} - x^n f^{(n+1)}(0)}{(n+2)x^{n+1}} \right\} \\
&= \lim_{x\to 0} \left\{ \frac{n!(-1)^n f'(x) + \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{n-k}\frac{n!}{k!} f^{(k+1)}(x)x^k}{(n+2)x^{n+1}} \right. \\
&\left. + \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{n-1-k}\frac{n!}{k!} f^{(k+1)}(x)x^{k} - x^n f^{(n+1)}(0)}{(n+2)x^{n+1}} \right\} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^n\big(f^{(n+1)}(x) - f^{(n+1)}(0)\big)}{(n+2)x^{n+1}} = \frac{f^{(n+2)}(0)}{n+2}.
\end{aligned}
$$

Bây giờ ta chỉ còn phải chứng minh rằng $g^{(n+1)}$ liên tục tại 0 nữa là xong. Ta lại sử dụng (1) và quy tắc l'Hôpital được

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} g^{(n+1)}(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k}\frac{(n+1)!}{k!} f^{(k)}(x)x^k}{x^{n+2}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^{n+1-k}(n+1)!}{k!} f^{(n+1)}(x)x^k + \sum\limits_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^{n+1-k}(n+1)!}{(k-1)!} f^{(n+1)}(x)x^{k-1}}{(n+2)x^{n+1}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n+2)}(x)}{n+2} = g^{(n+1)}(0).
\end{aligned}
$$

Từ những lập luận vừa nêu ta thấy rằng hàm g được định nghĩa như ở trên sẽ thuộc lớp $C^\infty(-1,1)$ và $g^{(n)}(0) = \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}, n = 0, 1, 2, \ldots$.

2.4 Hàm lồi

2.4.1. Giả sử f lồi trên **I**, ta có với $x_1 < x < x_2$

$$\text{(1)} \qquad \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

(xem (1) trong lời giải của 1.2.33). Mặt khác vì

$$x = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}x_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}x_2,$$

nên ta có

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}f(x_2),$$

từ đó suy ra

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Kết hợp với (**??**) ta được

$$\text{(2)} \qquad \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Cho $x \to x_1^+$ ta được

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Tương tự cho $x \to x_2^-$ ta được

$$f'(x_2) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

Từ đó suy ra $f'(x_1) \leq f'(x_2)$, tức là f' là hàm tăng.

Giả sử rằng f' tăng trên **I**, xét $x_1 < x < x_2$, theo định lý giá trị trung bình

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1), \quad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2),$$

trong đó $x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2$, từ đó và sử dụng tính đơn điệu của f' ta được (**??**). Bây giờ ta chứng minh rằng từ (**??**) ta suy ra tính lồi của f. Thật vậy, đặt $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, $x_1 < x_2$ và $\lambda \in (0,1)$, ta có $x \in (x_1, x_2)$,

$$x - x_1 = (1-\lambda)(x_2 - x_1) \quad \text{và} \quad x_2 - x = \lambda(x_2 - x_1).$$

Từ đó sử dụng (**??**) ta được $f(x) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$. Ta nhận thấy rõ ràng bất đẳng thức (**??**) tương đương với tính lồi của f. Với chú ý rằng f' tăng chặt trên $\mathbf{I}$ ta suy ra f lồi chặttrên $\mathbf{I}$.

2.4.2. Chú ý điều kiện $f''(x) \ge 0$ với $x \in \mathbf{I}$ tương đương với f' tăng, sử dụng kết quả bài trên ta được điều phải chứng minh.

2.4.3. Sử dụng quy nạp. Điều kiện được đặt với $n = 2$ chính là định nghĩa tính lồi của f, vì vậy giả thiết rằng bất đẳng thức đã được chứng minh với $n \ge 2$, ta đi chứng minh rằng nó cũng đúng với $n+1$. Xét $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ là các số không âm sao cho $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n + \lambda_{n+1} = 1$. Vì có thể biểu diễn $\lambda_n x_n + \lambda_{n+1}x_{n+1}$ dưới dạng $(\lambda_n + \lambda_{n+1})\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_n+\lambda_{n+1}}x_n + \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n+\lambda_{n+1}}x_{n+1}\right)$, nên theo giả thiết quy nạp ta được

$$\begin{aligned}
&f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1}x_{n+1}) \\
&\le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \\
&\quad + \cdots + (\lambda_n + \lambda_{n+1}) f\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_n + \lambda_{n+1}}x_n + \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}}x_{n+1}\right).
\end{aligned}$$

Vì hàm f lồi nên theo định nghĩa hàm lồi ta được điều phải chứng minh.

2.4.4. Vì $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2}$ nên hàm $x \mapsto \ln x$ lồi trên $(0,\infty)$, do đó

$$\ln\left(\frac{x^p}{p} + \frac{x^q}{q}\right) \ge \frac{1}{p}\ln x^p + \frac{1}{q}\ln y^q = \ln(xy).$$

2.4.5. Vì $x \mapsto \ln x$ lồi trên $(0,\infty)$ nên ta có

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n} + \cdots + \frac{x_n}{n}\right) &\ge \frac{1}{n}(\ln x_1 + \ln x_2 + \cdots + \ln x_n) \\
&= \frac{1}{n}\ln(x_1 \cdot x_2 \cdots x_n).
\end{aligned}$$

2.4.6. Hàm $x \mapsto e^x$ lồi chặttrên $\mathbb{R}$.

Hình vẽ

Giả sử với $a < b$ tồn tại mình nằm dưới đồ thị $y = e^x$ từ $x = a$ đến $x = b$ có diện tích nhỏ hơn hình thang tạo bởi các điểm $(a, 0), (b, 0), (a, e^a), (b, e^b)$, khi đó

$$e^b - e^a = \int e^t dt < (b-a)\frac{e^a + e^b}{2}.$$

2.4.7. Xét hàm $f(x) = x \ln x$, $x > 0$ ta có $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ nên f lồi. Từ đó suy ra

$$\frac{x+y}{2} \ln \frac{x+y}{2} \leq \frac{x}{2} \ln x + \frac{y}{2} \ln y.$$

2.4.8. Chú ý rằng hàm $x \mapsto x^\alpha, \alpha > 1$ là hàm lồi trên $(0, \infty)$.

2.4.9.

(a) Hàm $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x} + 1\right)$ lồi trên $(0, \infty)$, do $f''(x) > 0$ ở đó, sử dụng bất đẳng thức Jensen ta suy ra điều phải chứng minh (xem 2.4.3).

Chú ý rằng nếu $p_k = \frac{1}{n}$ với $k = 1, 2, \ldots, n$ và $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = 1$ thì ta được bất đẳng thức cho trong I. 1.2.43 (a).

(b) Sử dụng bất đẳng thức Jensen cho hàm

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad 0 < x < 1.$$

Chú ý rằng nếu $p_k = \frac{1}{n}$ với $k = 1, 2, \ldots, n$ và $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = 1$ thì ta được bất đẳng thức cho trong I. 1.2.45.

2.4.10.

(a) Xét hàm $f(x0 = \ln\sin x$ với $x \in (0,\pi)$, vì $f''(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} < 0$ nên f lõm trên $(0,\pi)$. Áp dụng bất đẳng thức Jensen cho $-f$ (xem 2.4.3) ta được điều phải chứng minh.

(b) Xét hàm

$$f(x) = \ln\sin x - \ln x, \quad x \in (0,\pi).$$

Chú ý rằng $f''(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{x^2} < 0$ và áp dụng bất đẳng thức Jensen cho $-f$.

2.4.11. Chú ý rằng hàm $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^a$ lồi trên $(0,\infty)$ vì

$$f''(x) = a\left(x + \frac{1}{x}\right)^{a-2}\left((a-1)\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + \frac{2}{x^3}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right) > 0.$$

Theo bất đẳng thức Jensen ta có

$$\left(\frac{n^2+1}{n}\right)^a = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k + \frac{1}{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n x_k}\right)^a \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\left(x_k + \frac{1}{x_k}\right)^a.$$

Vậy

$$\sum_{k=1}^n\left(x_k + \frac{1}{x_k}\right)^a \ge \frac{(n^2+1)^a}{n^{a-1}}.$$

2.4.12. Áp dụng bất đẳng thức Jensen cho hàm $x \mapsto -\ln x, x > 0$ ta được

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n}\left(\ln 1 + \ln\frac{2^2-1}{2} + \ln\frac{2^3-1}{2^2} + \cdots + \ln\frac{2^n-1}{2^{n-1}}\right)\\ &\le \ln\left(\frac{1}{n}\left(1 + \frac{2^2-1}{2} + \frac{2^3-1}{2^2} + \cdots + \frac{2^n-1}{2^{n-1}}\right)\right) = \ln\left(2 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n2^{n-1}}\right).\end{aligned}$$

2.4.13.

(a) Áp dụng bất đẳng thức Jensen đối với hàm $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$ ta được

$$\frac{1}{\frac{1}{n}x_1 + \frac{1}{n}x_2 + \cdots + \frac{1}{n}x_n} \le \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{x_1} + \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{x_n}.$$

Vậy

$$\frac{n^2}{x_1+x_2+\cdots+x_n} \le \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}.$$

(b) Áp dụng bất đẳng thức Jensen đối với hàm $f(x)=-\ln x$, $x>0$ ta được

$$\begin{aligned}\ln(x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}) &= \alpha_1\ln x_1+\alpha_2\ln x_2+\cdots+\alpha_n\ln x_n\\ &\le \ln(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n).\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

(1) $$x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n} \le \alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n.$$

Thay x_k trong (1) bởi $\frac{1}{x_k}$ ta chứng minh được bất đẳng thức còn lại.

(c) Nếu tồn tại x_k hay y_k bằng 0 thì ta chứng minh được bất đẳng thức. Giả sử rằng $x_k, y_k > 0$ với $k=1,2,\ldots,n$, ta viết bất đẳng thức dưới dạng

$$\frac{x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}+y_1^{\alpha_1}y_2^{\alpha_2}\cdots y_n^{\alpha_n}}{(x_1+y_1)^{\alpha_1}(x_2+y_2)^{\alpha_2}\cdots(x_n+y_n)^{\alpha_n}} \le 1.$$

Từ (b) ta suy ra

$$\begin{aligned}&\frac{x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}+y_1^{\alpha_1}y_2^{\alpha_2}\cdots y_n^{\alpha_n}}{(x_1+y_1)^{\alpha_1}(x_2+y_2)^{\alpha_2}\cdots(x_n+y_n)^{\alpha_n}}\\ &\le \alpha_1\frac{x_1}{x_1+y_1}+\alpha_2\frac{x_2}{x_2+y_2}+\cdots+\alpha_n\frac{x_n}{x_1+y_1}+\alpha_1\frac{y_1}{x_1+y_1}\\ &+\cdots+\alpha_1\frac{y_n}{x_n+y_n}+=1.\end{aligned}$$

(d) Sử dụng quy nạp theo m và (c).

2.4.14. Giả sử phản chứng rằng f không phải là hàm hằng trên $\mathbb{R}$, khi đó tồn tại $x_1<x_2$ sao cho $f(x_1)<f(x_2)$ hoặc $f(x_1)>f(x_2)$. Xét x thoả mãn $x_1<x_2<x$ ta có

$$f(x_2)=f\left(\frac{x-x_2}{x-x_1}x_1+\frac{x_2-x_1}{x-x_1}x\right)\le\frac{x-x_2}{x-x_1}f(x_1)+\frac{x_2-x_1}{x-x_1}f(x).$$

Khi đó

$$(1) \qquad f(x) \geq \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_1) - \frac{x_- x_2}{x_2 - x_1} f(x_1).$$

Nếu $f(x_2) = f(x_1) + A$ với $A > 0$ thì từ (1) suy ra $f(x) > A\frac{x-x_1}{x_2-x_1} + f(x_1)$, vô lý vì f là hàm bị chặn trên. Tương tự nếu $f(x_1) > f(x_2)$ thì $f(x_1) = A + f(x_2)$, chọn $x < x_1 < x_2$ ta được

$$f(x) \geq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + f(x_2),$$

mâu thuẫn với giả thiết f bị chặn trên.

2.4.15. Không. Xét hàm $f(x) = e^{-x}$, $x \in (a, \infty)$ và $f(x) = e^x$, $x \in (-\infty, a)$.

2.4.16. Giả sử rằng f không đơn điệu, khi đó tồn tại $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$ sao cho

$$f(x_1) > f(x_2) \quad \text{và} \quad f(x_2) < f(x_3),$$

hoặc

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{và} \quad f(x_2) > f(x_3).$$

Vì f lồi nên $f(x_2) \leq \max\{f(x_1), f(x_3)\}$, suy ra trường hợp sau không xảy ra. Từ tính liên tục của f (xem 1.2.33) ta suy ra tồn tại $c \in [x_1, x_3]$ sao cho $f(c) = \min\{f(x) : x \in [x_1, x_3]\}$, sử dụng giả thiết f lồi ta suy ra $f(x_1) \leq \max\{f(x), f(c)\}$ với $x \in (a, x_1)$, từ đó suy ra vì $f(c) \leq f(x_1)$ nên $f(x_1) \leq f(x)$, vậy nếu $x, y \in (a, c]$ thì

- từ $x < y < x_1$ suy ra $f(y) \leq \max\{f(x), f(x_1)\} = f(x)$,
- từ $x < x_1 \leq y$ suy ra $f(y) \leq \max\{f(c), f(x_1)\} = f(x_1) \leq f(x)$,
- từ $x_1 \leq x < y$ suy ra $f(y) \leq \max\{f(c), f(x)\} = f(x)$,

suy ra f là hàm giảm trên $(a, c]$, lặp lại lập luận trên ta suy ra f là hàm tăng trên $[c, b)$.

2.4.17. Đây là hệ quả trực tiếp của bài tập trên.

2.4.18. Vì f bị chặn nên sử dụng bài tập trên ta suy ra giới hạn một phía của f tại các điểm a và b tồn tại hữu hạn, vậy kết hợp với 1.2.33 và 1.5.7 ta được điều phải chứng minh.

2.4.19. Cho $x_1 < x_2$ là hai điểm thuộc (a, b), khi đó với $a < y < x_1 < x < x_2$ ta có (xem (1) và (2) trong 2.4.1)

$$(*) \qquad \frac{f(y) - f(x_1)}{y - x_1} \leq \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

từ đó suy ra hàm $x \mapsto \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$ tăng và bị chặn dưới trên (x_1, b), vậy đạo hàm phải $f'_+(x_1)$ tồn tại và

$$(**) \qquad f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Chú ý rằng với $x_1 < x_2 < t < b$ ta có

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(t) - f(x_2)}{t - x_2},$$

vậy

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'_+(x_2).$$

Kết hợp bất đẳng thức trên với (**) ta được $f'_+(x_1) \leq f'_+(x_2)$. Lập luận tương tự ta chứng minh được rằng đạo hàm trái của f cũng tồn tại và tăng trên (a, b), hơn nữa từ (*) suy ra với $x_1 \in (a, b)$ ta có $f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1)$. Nhắc lại rằng theo (2) của 2.4.1 ta có nếu $x_1 < x < x_2$ thì

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Suy ra

$$f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2).$$

Như vậy ta có

$$f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2) \leq f'_+(x_2) \quad \text{với} \quad x_1 < x_2.$$

Các bất đẳng thức trên cho ta thấy rằng nếu một trong các đạo hàm một phía của f liên tục tại một điểm của (a,b) thì ta có dấu đẳng thức tại điểm đó. Vì hàm đơn điệu chỉ có cùng lắm là đếm được điểm gián đoạn (xem 1.2.29) nên các đạo hàm một phía sẽ bằng nhau bên ngoài một tập đếm được (có độ đo 0).

Các khẳng định trên đều đúng đối với hàm lõm.

2.4.20. Vì f' tăng chặt nên hàm ngược $(f')^{-1}$ tồn tại và

$$\xi(x) = (f')^{-1}\left(\frac{f(b+x)-f(a-x)}{b-a+2x}\right).$$

Từ đó suy ra hàm ξ khả vi trên $(0,\infty)$. Đạo hàm đẳng thức trong đề bài ta được

$$\frac{f'(b+x)+f'(a-x)-2f'(\xi)}{b-a+2x} = f''(\xi)\xi'(x). \tag{1}$$

Chú ý rằng $f''(x) \geq 0$ và vì f'' tăng chặt nên f' lồi chặt (xem 2.4.1), vì vậy (xem hình vẽ bên dưới)

$$(b-a+2x)\frac{f'(b+x)-f'(a-x)}{2} > \int_{a-x}^{b+x} f'(t)dt = f(b+x)-f(a-x).$$

Hình vẽ

Do đó

$$\frac{f'(b+x)+f'(a-x)}{2} > f'(\xi),$$

vậy theo (1) ta được $\xi'(x) > 0$ với $x > 0$.

2.4.21. Không mất tính tổng quát giả sử rằng $\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i| > 0$ và $\sum\limits_{i=1}^{n}|y_i| > 0$. Theo 2.4.4 ta có

$$\frac{|x_i|}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}} \cdot \frac{|y_i|}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{1/q}} \leq \frac{1}{p}\left(\frac{|x_i|}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{|y_i|}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{1/q}}\right)^q.$$

Cộng vế với vế bất đẳng thức trên theo $i = 1, 2, \dots, n$ ta được

$$\begin{aligned}
&\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} |y_i x_i|}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q}} \\
&\le \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{|x_i|}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}} \right)^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{|y_i|}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q}} \right)^q \\
&= \frac{1}{p} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p}{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p} + \frac{1}{q} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} |y_i|^q}{\sum\limits_{i=1}^{n} |y_i|^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.
\end{aligned}$$

2.4.22. Với $p = 1$ ta có điều phải chứng minh. Với $p > 1$ xét q thoả mãn $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, khi đó $q = \frac{p}{p-1}$, do đó

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p &= \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| |x_1 + y_i|^{p-1} \\
&\le \sum_{i=1}^{n} |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i| |x_i + y_i|^{p-1} \\
&\le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i| \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

2.4.23. Theo bất đẳng thức Holder ta có

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{|a_n|}{n^{\frac{4}{5}}} \leq \left(\sum_{n=1}^{N} a_n^4\right)^{\frac{1}{4}} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{\frac{16}{15}}}\right)^{\frac{3}{4}}.$$

2.4.24. Đặt $s_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, $s_2 = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$ và $S = (s_1^p + s_2^p)^{\frac{1}{p}}$, khi đó

$$\begin{aligned} S^p = x_1^p + s_2^p &= \left(x_1 s_1^{p-1} + y_1 s_2^{p-1}\right) + \left(x_2 s_1^{p-1} + y_2 s_2^{p-1}\right) \\ &+ \cdots + \left(x_n s_1^{p-1} + y_n s_2^{p-1}\right). \end{aligned}$$

Từ đó suy ra theo bất đẳng thức Holder

$$\begin{aligned} S^p &\leq (x_1^p + y_1^p)^{\frac{1}{p}} (s_1^p + s_2^p)^{\frac{1}{q}} + (x_2^p + y_2^p)^{\frac{1}{p}} (s_1^p + s_2^p)^{\frac{1}{q}} \\ &+ \cdots + (x_n^p + y_n^p)^{\frac{1}{p}} (s_1^p + s_2^p)^{\frac{1}{q}} \\ &= S^{\frac{p}{q}} \left((x_1^p + y_1^p)^{\frac{1}{p}} + (x_2^p + y_2^p)^{\frac{1}{p}} + \cdots + (x_n^p + y_n^p)^{\frac{1}{p}}\right). \end{aligned}$$

Ta được điều phải chứng minh.

2.4.25. Đặt

$$s_i = \sum_{j=1}^{m} x_{i,j} \quad \text{và} \quad S = \left(\sum_{i=1}^{n} s_i\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Theo bất đẳng thức Holder ta có

$$\begin{aligned} S^p = \sum_{i=1}^{n} s_i s_i^{p-1} &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{i,j} s_i^{p-1} = \sum_{j=1}^{m} s_{i=1} n x_{i,j} s_i^{p-1} \\ &\leq \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} x_{i,j}^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} s_i^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \end{aligned}$$

$$= S^{p-1} \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} x_{i,j}^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

từ đó suy ra điều phải chứng minh.

2.4.26. Xét $x, y \in \mathbf{I}$ sao cho $x < y$. Với $n = 0, 1, 2, \ldots$ đặt

$$T_n = \left\{ \frac{i}{2^n} : i = 0, 1, \ldots, 2^n \right\}.$$

Ta sẽ sử dụng quy nạp để chứng minh rằng với $n = 0, 1, \ldots$ và $s \in \mathbf{T}_n$ thì

$$f((1-s)x + sy) \leq (1-s)f(x) + sf(y).$$

Thật vậy, với $n = 0$ bất đẳng thức là hiển nhiên với $s = 0$ hoặc $s = 1$. Giả sử ta chứng minh được bất đẳng thức đến n và với $s \in \mathbf{T}_n$, ta đi chứng minh nó với $n + 1$. Xét $s \in \mathbf{T}_{n+1}$, ta nhận thấy chỉ cần chứng minh đối với trường hợp $s \notin \mathbf{T}_n$. Vì tồn tại $\xi, \eta \in \mathbf{T}_n$ sao cho $s = \frac{\xi+\eta}{2}$ nên

$$\begin{aligned}
(1-s)x + sy &= \left(1 - \frac{\xi+\eta}{2}\right)x + \frac{\xi+\eta}{2}y \\
&= \frac{(1-\xi) + (1-\eta)}{2}x + \frac{\xi+\eta}{2}y \\
&= \frac{((1-\xi)x + \xi y) + ((1-\eta)x + \eta y}{2}.
\end{aligned}$$

Vì f lồi nên

$$f((1-s)x + sy) \leq \frac{f((1-\xi)x + \xi y) + f((1-\eta)x + \eta y)}{2}.$$

Sử dụng giả thiết quy nạp ta được

$$\begin{aligned}
f((1-s)x + sy) &\leq \frac{(1-\xi)f(x) + \xi f(y) + (1-\eta)f(x) + \eta f(y)}{2} \\
&= \left(1 - \frac{\xi+\eta}{2}\right)f(x) + \frac{\xi+\eta}{2}f(y) \\
&= (1-s)f(x) + sf(y).
\end{aligned}$$

Xét $t \in [0, 1]$ nào đó, vì tập

$$\mathbf{T} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbf{T}_n$$

trù mật trong $[0,1]$ nên tồn tại dãy điểm $\{s_n\} \subset \mathbf{T}$ sao cho $t = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$, do đó vì f liên tục nên

$$\begin{aligned} f((1-t)x+ty) &= \lim_{n\to\infty} f((1-s_n)x+s_ny) \\ &\le \lim_{n\to\infty}((1-s_n)f(x)+s_nf(y)) \\ &= (1-t)f(x)+tf(y). \end{aligned}$$

2.4.27. Tồn tại $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cộng tính và không liên tục (xem 1.6.31). Nếu f là một hàm thì với mọi $x\in\mathbb{R}$ ta có

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x}{2}\right) = 2f\left(\frac{x}{2}\right).$$

Vậy $f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}f(x)$, từ đó suy ra với $x,y\in\mathbb{R}$ ta có

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right) = \frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y) = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Nếu f lồi trên $\mathbb{R}$ thì nó phải liên tục (xem 1.2.33), vô lý.

2.4.28. Không giảm tổng quát, giả sử rằng $x<y$. Với $t\in(0,1)$ đặt $z=(1-t)x+ty$ thì $x<z<y$ và tồn tại $a\in(x,z)$ và $b\in(z,y)$ sao cho $z=\frac{a+b}{2}$. Tương tự tồn tại $t_a\in(0,t)$ và $t_b\in(t,1)$ sao cho

$$a=(1-t_a)x+t_ay \quad \text{và} \quad b=(1-t_b)x+t_by.$$

Vì $z=\frac{a+b}{2}$ nên $t=\frac{t_a+t_b}{2}$, sử dụng kết quả của 2.4.26 ta suy ra f lồi trên $\mathbf{I}$, ta cần chứng minh rằng f lồi thực sự. Ta có

$$\begin{aligned} f((1-t)x+ty) = f(z) &< \frac{f(a)+f(b)}{2} \\ &= \frac{f((1-t_a)x+t_ay)+f((1-t_b)x+t_by)}{2} \\ &\le \frac{(1-t_a)f(x)+t_af(y)+(1-t_b)f(x)+t_bf(y)}{2} \\ &= \left(1-\frac{t_a+t_b}{2}\right)f(x)+\frac{t_a+t_b}{2}f(y) \\ &= (1-t)f(x)+tf(y). \end{aligned}$$

2.4.29. Vì f liên tục trên $\mathbf{I}$ (xem 1.2.33) nên nó bị chặn địa phương. Xét $x_0 \in \mathbf{I}$ và $\varepsilon > 0$ sao cho khoảng $[x_0 - 2\varepsilon, x_0 + 2\varepsilon]$ vẫn nằm trong $\mathbf{I}$, vì f bị chặn địa phương nên tồn tại $M > 0$ sao cho

(1) $$|f(x)| \leq M \quad \text{với} \quad x \in [x_0 - 2\varepsilon, x_0 + 2\varepsilon].$$

Xét $x_1 \neq x_2$ trong $x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$, điểm $x_3 = x_2 + \frac{\varepsilon}{|x_2 - x_1|}(x_2 - x_1)$ thuộc $[x_0 - 2\varepsilon, x_0 + 2\varepsilon]$ và

$$x_2 = \frac{\varepsilon}{|x_2 - x_1| + \varepsilon} x_1 + \frac{|x_2 - x_1|}{|x_2 - x_1| + \varepsilon} x_3.$$

Vì f lồi nên ta suy ra

$$f(x_2) \leq \frac{\varepsilon}{|x_2 - x_1| + \varepsilon} f(x_1) + \frac{|x_2 - x_1|}{|x_2 - x_1| + \varepsilon} f(x_3).$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &\leq \frac{|x_2 - x_1|}{|x_2 - x_1| + \varepsilon}(f(x_3) - f(x_1)) \\ &\leq \frac{|x_2 - x_1|}{\varepsilon}(f(x_3) - f(x_1)) \end{aligned}$$

Kết hợp với (**??**) ta được $f(x_2) - f(x_1) \leq \frac{2M}{\varepsilon}|x_2 - x_1|$. Cuối cùng vì vai trò của x_2 và x_1 bình đẳng nên ta được $|f(x_2) - f(x_1)| \leq \frac{2M}{\varepsilon}|x_2 - x_1|$.

2.4.30. Xét $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in (0, \infty)$. Nếu $0 < x < x_1$ thì

$$x_1 = \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x} x + \frac{x_1 - x}{x_2 - x} x_2.$$

Vì f lồi nên

$$f(x_1) \leq \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x} f(x) + \frac{x_1 - x}{x_2 - x} f(x_2).$$

Cho $x \to 0^+$ ta được

$$f(x_1) \leq \frac{x_1}{x_2} f(x_2).$$

2.4.31.

(a) Từ tính đơn điệu của hàm $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ ta suy ra với $x_1, x_2 \geq 0$

$$f(x_1 + x_2) = x_1 \frac{f(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2} + x_2 \frac{f(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2} \leq f(x_1) + f(x_2).$$

(b) Giả sử $0 < a < b$ và đặt $p = \frac{a}{b}$ và $q = 1 - p$, sử dụng tính lồi và dưới cộng tính của f ta được

$$\begin{aligned} f(b) &= f(pa + q(a + b)) \leq pf(a) + qf(a + b) \\ &\leq pf(a) + q(f(a) + f(b)) = f(a) + \left(1 - \frac{a}{b}\right) f(b). \end{aligned}$$

Suy ra

$$\frac{f(b)}{b} \leq \frac{f(a)}{a}.$$

2.4.32. Giả sử phản chứng rằng f không lồi thực sự hoặc lõm thực sự, thế thì tồn tại các điểm $\alpha < \beta$ trong khoảng (a, b) sao cho đường thẳng đi qua các điểm $(\alpha, f(\alpha))$ và $(\beta, f(\beta))$ giao với đồ thi của f tại điểm $(\gamma, f(\gamma))$ sao cho $\alpha < \gamma < \beta$. Từ giả thiết suy ra tồn tại duy nhất $\zeta_1 \in (\alpha, \gamma)$ và $\zeta_2 \in (\gamma, \beta)$ sao cho

$$\frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha} = f'(\zeta_1) \quad \text{và} \quad \frac{f(\beta) - f(\gamma)}{\beta - \gamma} = f'(\zeta_2).$$

Vì $(\alpha, f(\alpha))$, $(\beta, f(\beta))$ và $(\gamma, f(\gamma))$ thẳng hàng nên $f'(\zeta_1) = f'(\zeta_2)$, điều này là vô lý.

Hình vẽ

2.4.33. Ta có nhận xét rằng *đạo hàm Dini*

$$D^+ f(x) = \overline{\lim_{t \to 0^+}} \frac{f(x + t) - f(x)}{t}, \qquad D_+ f(x) = \underline{\lim_{t \to 0^+}} \frac{f(x + t) - f(x)}{t},$$
$$D^- f(x) = \overline{\lim_{t \to 0^-}} \frac{f(x + t) - f(x)}{t}, \qquad D_- f(x) = \underline{\lim_{t \to 0^-}} \frac{f(x + t) - f(x)}{t}$$

luôn tồn tại hữu hạn hoặc vô hạn. Hơn nữa vì g_d khả vi nên ta luôn có (xem 1.4.10)

$$\begin{aligned} D^+f(x+d) &= D^+f(x) + g_d'(x), & D_+f(x) &= D_+f(x) + g_d'(x), \\ D^-f(x+d) &= D^-f(x) + g_d'(x), & D_-f(x) &= D_-f(x) + g_d'(x) \end{aligned}$$

với $x \in \mathbb{R}$, vì vậy đạo hàm Dini của f tại điểm $x+d$ được biểu diễn qua đạo hàm Dini của f tại điểm x. Xét $a < b$ là các số bất kỳ, đặt $m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ và $F(x) = f(x) - m(x-a)$, thế thì $F(a) = F(b) = f(a)$, và do đó F đạt cực trị trên $[a,b]$ tại một điểm c nào đó thuộc $(a, b0$. Không giảm tổng quát ta giả sử $F(c)$ là cực đại của F. Nếu $c+t \in (a,b)$ thì $F(c+t) \leq F(c)$, hay nói cách khác $f(c+t) - f(c) \leq mt$, từ đó suy ra $D^+f(c) \leq m \leq D_-f(c)$. Vì các đạo hàm Dini của f tại x được biểu diễn qua đạo hàm Dini của f tại c nên ta có ngay $D^+f(x) \leq D_-f(x)$ với mọi x. Nếu f là hàm lõm trên $[a,b]$ thì f khả vi hầu khắp nơi trên $[a,b]$, trừ ra một tập đếm được (xe, 2.4.19), từ đó suy ra f khả vi trên (a,b). Nếu f không lõm trêN(a,b) thì f sẽ đạt cực tiểu trên $[a,b]$ tại một điểm nào đó thuộc khoảng (a,b), theo trên ta chứng minh được $D^-f(x) \leq D_+f(x)$ với mọi x, từ đó suy ra $D^+f(x) \leq D_-f(x) \leq D^-f(x) \leq D_+f(x)$ với mọi x, tức là ta chứng minh được tính khả vi của f trên $\mathbb{R}$.

Bây giờ ta đi chứng minh rằng f' là hàm liên tục. Giả sử phản chứng rằng tồn tại x_0 sao cho f' gián đoạn tại đó, khi đó tồn tại dãy $\{z_n\}$ hội tụ về x_0 sao cho dãy $\{f'(z_n)\}$ hội tụ về $f'(x_0) + r$ với $r \neq 0$ hoặc dãy $\{f'(z_n)\}$ không bị chặn. Trong trường hợp thứ hai ta chỉ ra được một dãy $\{y_n\}$ sao cho $\{f'(y_n\}$ phân kỳ, giả sử nó tiến đến $+\infty$, khi đó

$$\frac{f(x_0) - f(y_n)}{x_0 - y_n} = f'(y_n) + o(1),$$

cho $n \to \infty$ ta được $f'(x_0) = +\infty$, vô lý. Trong trường hợp còn lại vì f' thoả mãn định lý về các giá trị trung gian (xem 2.2.31) nên tồn tại dãy $\{y_n\}$ sao cho $f'(y_n) = f'(x_0) + r/2$. Rõ ràng ta có thể giả thiết rằng dãy hội tụ một phía về x_0, giả sử là hội tụ phải, theo giả thiết với mọi x ta đều tìm được một dãy như vậy với r không đổi. Thật vậy vì $x = x_0 + (x - x_0) = x_0 + d$ và

$$f'(z_n + d) - g'_d(z_n) = f'(z_n) = f'(x_0) + r = f'(x_0 + d) - g'_d(x_0) + r.$$

nên khi chuyển qua giới hạn ta được

$$\lim_{n\to\infty} f'(z_n + d) = f'(x) + r.$$

Sử dụng định lý giá trị trung gian cho f' lần nữa ta chỉ ra rằng tồn tại dãy $\{\tilde{z}_n\}$ sao cho $f'(\tilde{z}_n) = f'(x) + r/2$. Bây giờ ta đi xây dựng dãy $\{x_n\}$ như sau: Xét x bất kỳ, chọn x_1 thoả mãn $x_1 < x + 2^{-1}$ và $f'(x_1) = f'(x) + r/2$, tiếp theo lấy x_2 sao ch $x_1 < x_2 < x_1 + 2^{-2}$ và $f'(x_2) = f'(x_1) + r/2$,

$$x_n < x_{n+1} < x_n + 2^{-n} \quad \text{và} \quad f'(x_{n+1}) = f'(x_n) + \frac{r}{2}.$$

Khi đó dãy vừa nhận được sẽ hội tụ, giả sử về a. Hơn nữa từ đẳng thức cuối cùng ở trên ta có $f'(x_n) = f'(x_1) + (n-1)r/2$, từ đó suy ra dãy $\{f'(x_n)\}$ phân kỳ về $+\infty$ hoặc $-\infty$, điều này là vô lý vì f khả vi tại a. Vậy ta chứng minh được rằng f' liên tục và thoả mãn các tính chất của f, như vậy nó cũng khả vi liên tục, lập luận tương tự như vậy ta chứng minh được rằng mọi cấp đạo hàm của f đều có tính chất như vậy, tức là $f \in C^\infty$.

2.4.34. Với $n = 2$ ta suy ra đẳng thức một cách dễ dàng. Giả sử $n > 2$ và xét dãy tăng $\{a_n\}$. Đặt

$$S_n = (f(a_n)a_1 - f(a_1)a_n + \sum_{k=1}^{n-1}(f(a_k)a_{k+1} - f(a_{k+1}a_k).$$

Ta cần chứng minh rằng $S_n \geq 0$. Thật vậy, vì f lồi nên

$$\begin{aligned} f(a_n) &= f\left(\frac{a_n - a_{n+1}}{a_1 - a_{n+1}}a_1 + \frac{a_1 - a_n}{a_1 - a_{n+1}}a_{n+1}\right) \\ &\leq \frac{a_n - a_{n+1}}{a_1 - a_{n+1}}f(a_1) + \frac{a_1 - a_n}{a_1 - a_{n+1}}f(a_{n+1}) \end{aligned}$$

Do đó

$$(a_{n+1} - a_1)f(a_n) + (a_n - a_{n+1})f(a_1) + (a_1 - a_n)f(a_{n+1}) \geq 0,$$

tức là $S_{n+1} - S_n \geq 0$, từ đó suy ra $S_n \geq S_2 = 0$.

2.4.35. [M. Kuzma, A. Simajdor, Amer. Math. Monthly 74 (1967), 401-402]. Vì f tăng thực sự và $a < f(x) < x$ nên ta có

$$a < f^{n+1}(x) < f^n(x) < x \quad \text{với}|quadn \in \mathbb{N} \quad \text{và} \quad x \in (a, b).$$

Từ đó suy ra dãy $\{f^n(x)\}$ hội tụ về l (l có thể bằng $-\infty$). Ta sẽ chứng minh rằng $l = a$. Thật vậy, theo kết quả của 1.2.33 ta có f^n đều liên tục, vậy nếu $l \in (a, b)$ thì ta được

$$f(l) = f\left(\lim_{n\to\infty} f^n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x) = l,$$

trái với giả thiết $f(x) < x$ với mọi $x \in (a, b)$, vậy $l = a$ với mọi $x \in (a, b)$. Theo 2.4.19 đạo hàm phải của f tồn tại và giảm trên (a, b), suy ra với $a < t_1 < t_0 < b$ thì (xem 2.4.19)

$$(1) \qquad f'_+(t_0) \le \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0} \le f'_+(t_1).$$

Cho $t_0 = f^n(x)$ và $t_1 = f^{n+1}(x)$ ta được

$$f'_+(f^n(x)) \le \frac{f^{n+2}(x) - f^{n+1}(x)}{f^{n+1}(x) - f^n(x)} \le f'_+(f^{n+1}(x)).$$

Từ $\lim\limits_{x\to a^+} f'_+(x) = 1$ ta suy ra

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{n+2}(x) - f^{n+1}(x)}{f^{n+1}(x) - f^n(x)} = 1,$$

và từ đó suy ra với $k \in \mathbb{N}$

$$(2) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{f^{n+k+1}(x) - f^{n+k}(x)}{f^{n+1}(x) - f^n(x)} = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{f^{n+i+2}(x) - f^{n+i+1}(x)}{f^{n+i+1}(x) - f^{n+i}(x)} = 1.$$

Vì f'_+ là hàm giảm nên từ đẳng thức $\lim\limits_{x\to a^+} f'_+(x) = 1$ ta suy ra $f'_+(x) \le 1$, do đó theo (**??**) ta được hàm $x \mapsto f(x) - x$ giảm trên (a, b). Vì $f(v) - v < 0$ nên

$$\frac{f(u) - u}{f(v) - v} \ge 1 \quad \text{với} \quad v < u,\ u, v \in (a, b).$$

Xét $a < y < x < b$, đặt $u = f^n(x)$ và $v = f^n(y)$ ta được

$$\frac{f^{n+1}(x) - f^n(x)}{f^{n+1}(y) - f^n(y)} \geq 1.$$

Mặt khác tồn tại $k \in \mathbb{N}$ sao cho $f^k(x) < y < x$, suy ra $f^{n+k}(x) < f^n(y)$. Vì hàm $x \mapsto f(x) - x$ giảm nên ta được

$$f^{n+1}(y) - f^n(y) \leq f^{n+k+1}(x) - f^{n+k}(x).$$

Từ đó suy ra

$$1 \leq \frac{f^{n+1}(x) - f^n(x)}{f^{n+1}(y) - f^n(y)} \leq \frac{f^{n+1}(x) - f^n(x)}{f^{n+k+1}(x) - f^{n+k}(x)},$$

kết hợp với (**??**) ta được điều phải chứng minh.

2.5 Các ứng dụng của đạo hàm

2.5.1.

(a) Sử dụng định lý giá trị trung bình tổng quát cho hàm $f(x) = 1 - \cos x$ và $g(x) = \frac{x^2}{2}$ ta được

$$\frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} = \frac{\sin\theta}{\theta} < 1$$

với $x \neq 0$.

(b) Với $x \geq 0$ xét hàm $f(x) = x - \sin x$ và $g(x) = \frac{x^3}{3!}$, sử dụng định lý giá trị trung bình tổng quát và (a) ở trên ta được

$$\frac{x - \sin x}{\frac{x^3}{3!}} = \frac{1 - \cos\theta}{\frac{\theta^2}{2}} < 1,$$

từ đó suy ra điều phải chứng minh. Chú ý rằng đối với $x < 0$ bất đẳng thức sẽ trở thành $\sin x < x - \frac{x^3}{3!}$.

(c) Dùng định lý giá trị trung bình tổng quát cho các hàm

$$f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}, \quad g(x) = \frac{x^4}{4!}$$

trên khoảng có hai đầu mút là 0 và x, và (b) ta được điều phải chứng minh.

(d) Dùng định lý giá trị trung bình tổng quát cho các hàm

$$f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{3!}, \quad g(x) = \frac{x^5}{5!}, \quad x \geq 0,$$

và (c).

2.5.2. Sử dụng quy nạp và lập luận tương tự câu trên.

2.5.3. Sử dụng định lý giá trị trung bình tổng quát cho hàm f và $g(x) = x$, $g(x) = x^2$ và $g(x) = x^3$ liên tiếp ta được

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(x_1)}{1}, \qquad \frac{f(b) - f(a)}{b^2 - a^2} = \frac{f'(x_2)}{2x_2},$$
$$\frac{f(b) - f(a)}{b^3 - a^3} = \frac{f'(x_3)}{3x_3^2}.$$

2.5.4. Đặt $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ và $\alpha = a + ib$, $a > 0$. Từ giả thiết $\lim\limits_{x\to+\infty}(\alpha f(x) + f'(x)) = 0$ ta suy ra

$$\lim_{x\to+\infty}(af_1(x) + f_1'(x) - bf_2(x)) = 0 \tag{1}$$

và

$$\lim_{x\to+\infty}(af_2(x) + f_2'(x) + bf_1(x)) = 0. \tag{2}$$

Chú ý rằng

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} e^{ibx} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{ax+ibx} f(x)}{e^{ax}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{ax+ibx}(f_1(x)\cos bx - f_2(x)\sin bx)}{e^{ax}} \\ &\quad + i \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{ax+ibx}(f_2(x)\cos bx + f_1(x)\sin bx)}{e^{ax}}.\end{aligned}$$

Sử dụng quy tắc l'Hôpital (2.3.40) , từ (1) và (2) ta được

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{ax}(f_1(x)\cos bx - f_2(x)\sin bx)}{e^{ax}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos bx(af_1(x) + f_1'(x) - bf_2(x)) - \sin bx(af_2(x) + f_2'(x) + bf_1(x))}{a} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Tương tự ta chứng minh được rằng

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{ax}(f_2(x)\cos bx + f_1(x)\sin bx)}{e^{ax}} = 0.$$

Do đó ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{ibx}f(x0 = 0$, suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Cuối cùng ta có một nhận xét rằng kết quả trên có thể được tổng quát như sau: Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty}(\alpha f(x)+f'(x)) = L$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L/\alpha$. Thật vậy, trong trường hợp này ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}(\alpha f(x) - L/\alpha) + (f(x) - L/\alpha)') = 0$ và sử dụng những kết quả vừa đạt được ở trên ta suy ra điều phải chứng minh.

2.5.5. Lấy $\alpha_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ và $\alpha_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ta có

$$\begin{aligned}
f(x) + f'(x) + f''(x) &= \alpha_1\alpha_2 f(x) + (\alpha_1 + \alpha_2)f'(x) + f''(x) \\
&= \alpha_2(\alpha_1 f(x) + f'(x)) + (\alpha_1 f(x) + f'(x))'.
\end{aligned}$$

Sử dụng kết quả bài trước (xem phần nhận xét ở phần lời giải) ta được $\lim\limits_{x\to+\infty}(\alpha_1 f(x) + f'(x)) = L/\alpha_2$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L/(\alpha_2\alpha_1) = L$.

2.5.6. Không. Ví dụ hàm $f(x) = \cos x$, $x > 0$.

2.5.7.

(a) Đặt $g(x) = f(x) - e^{-x}$, $x \geq 0$, ta có $g(0) = 0$, $g(x) \leq 0$ và $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$. Nếu $g(x) \equiv 0$ thì $f'(x) = -e^{-x}$ với $x \in (0, \infty)$, do đó giả sử tồn tại $a > 0$ sao cho $g(a) < 0$, khi đó với x đủ lớn, giả sử $x > M$ thì $g(x) > \frac{1}{2}g(a)$, từ đó suy ra g nhận giá trị nhỏ nhất tại $x_0 \in (0, M)$, tức là $g'(x_0) = 0$.

(b) Lập luận hoàn toàn tương tự như (a).

2.5.8. Ta có

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g'(x)}{g(x)}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)} - \frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}\right).$$

Theo định lý giá trị trung bình tổng quát ta có

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g'(x)}{g(x)}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)} - \frac{f'(\theta)}{g'(\theta)}\right),$$

với $0 < \theta < x \le a$. Vì f'/g' đơn điệu tăng nên

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' > 0 \quad \text{với} \quad x > 0.$$

2.5.9. Đặt $f(x) = \sin(\cos x) - x$, ta thấy rằng $f(0) = \sin 1$ và $f(\pi/2) = -\pi/2$. Theo định lý về giá trị trung gian ta có tồn tại $x_0 \in (0, \pi/2)$ thoả mãn $f(x_1) = 0$. Vì $f'(x) < 0$ trong $(0, \pi/2)$ nên không tồn tại nghiệm của f trong khoảng này. Một cách hoàn toàn tương tự ta chứng minh được rằng tồn tại duy nhất một nghiệm, gọi là x_2 của phương trình $\cos(\sin x) = x$.

Hình vẽ

Hơn nữa ta có

$$x_1 = \sin(\cos x_1) < \cos x_1, \quad x_2 = \cos(\sin x_1) > \cos x_2,$$

nên $x_2 > x_1$.

2.5.10. Giả sử phản chứng rằng tồn tại $x \in (a, b]$ sao cho $f(x_1) \neq 0$, khi đó từ tính liên tục của f ta suy ra $f(x) \neq 0$ với $x \in (\alpha, \beta)$. Giả sử rằng $f(x) > 0$ với $x \in (\alpha, \beta)$, $f(\alpha) = 0$, $\alpha \ge a$ và $f(\beta) > 0$. Khi đó theo định lý giá trị trung bình, với $0 < \varepsilon < \beta - \alpha$ ta có

$$|\ln f(\beta) - \ln f(\alpha + \varepsilon)| = \left|\frac{f'(\theta)}{f(\theta)}\right| (\beta - \alpha - \varepsilon) \le C(\beta - \alpha - \varepsilon).$$

Cho $\varepsilon \to 0^+$ ta được $+\infty \le C(\beta - \alpha)$, vô lý, ta được điều phải chứng minh.

2.5.11. Cho $0 < p < q$ và x dương, theo định lý giá trị trung bình ta có

$$\frac{\ln\left(1+\frac{p}{q}\right)}{\frac{x}{q}} = \frac{1}{1+\zeta_0} > \frac{1}{1+\zeta_1} = \frac{\ln\left(1+\frac{x}{p}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{q}\right)}{\frac{x}{p} - \frac{x}{q}},$$

trong đó $\zeta_0 \in \left(0, \frac{x}{q}\right)$, $\zeta_1 \in \left(\frac{x}{q}, \frac{x}{p}\right)$. Do đó

$$\left(\frac{x}{p} - \frac{x}{q}\right)\ln\left(1+\frac{x}{q}\right) > \frac{x}{q}\left(\ln\left(1+\frac{x}{p}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{q}\right)\right).$$

Từ đó suy ra

$$\frac{x}{p}\ln\left(1+\frac{x}{q}\right) > \frac{x}{q}\ln\left(1+\frac{x}{p}\right),$$

hay nói cách khác,

$$q\ln\left(1+\frac{x}{q}\right) > p\ln\left(1+\frac{x}{p}\right).$$

2.5.12. Ta suy ra bất đẳng thức $e^x \geq 1 + x$, $x \in \mathbb{R}$ bằng cách sử dụng định lý giá trị trung bình. Thật vậy, ta có

$$\frac{e^x - 1}{x} = e^\zeta > 1 \quad \text{với} \quad x > 0,$$

và

$$\frac{e^x - 1}{x} = e^\zeta < 1 \quad \text{với} \quad x < 0.$$

Nếu $x = 0$ thì xảy ra dấu đẳng thức. Ký hiệu

$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{và} \quad G_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k}$$

lần lượt là trung bình cộng và trung bình nhân của các số không âm $a_1, a_2, \dots, a_n$. ■ Nếu $A_n \neq 0$ thì

$$e^{\frac{a_k}{A_n}-1} \geq \frac{a_k}{A_n} \geq 0 \quad \text{với} \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Do đó

$$1 = e^0 = e^{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{A_n}-1\right)} = \prod_{k=1}^{n} e^{\frac{a_k}{A_n}-1} \geq \prod_{k=1}^{n}\frac{a_k}{A_n} = \frac{G_n^n}{A_n^n},$$

tức là $A_n \geq G_n$. Nếu $A_n = 0$ thì $A_n = G_n = 0$. Vì dấu đẳng thức trong bất đẳng thức $e^x \geq 1 + x$ chỉ xảy ra khi $x = 0$ nên ta có $A_n = G_n$ khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

2.5.13. Nếu trong bất đẳng thức $e^t \geq 1 + t$ ta thay thế t bởi $x - z$ thì được

$$xe^z \leq e^x + e^z(z-1) \quad \text{với} \quad x, z \in \mathbb{R}.$$

Thay thế z bởi $\ln y$ ta được điều phải chứng minh.

2.5.14. Theo định lý giá trị trung bình ta có tồn tại $a \in (-2, 0)$ sao cho

$$|f'(a)| = \frac{|f(0) - f(-2)|}{2} \leq \frac{|f(0)| - |f(-2)|}{2} \leq 1.$$

Tương tự tồn tai $b \in (0, 2)$ sao cho $|f'(b)| \leq 1$. Đặt $F(x) = (f(x))^2 + (f'(x))^2$. Hàm F đạt cực đại trên $[a, b]$, tức là tại $x_0 \in [a, b]$, vì $F(0) = 4$, $F(a) \leq 2$ và $F(b) \leq 2$ nên $x_0 \in (a, b)$, do đó $F'(x_0) = 2f'(x_0)(f(x_0) + f''(x_0)) = 0$. Chú ý rằng $f'(x_0) \neq 0$ vì từ $f'(x_0) = 0$ ta rút ra $F(x_0) = (f(x_0))^2 \leq 1$ vô lý, vậy $f(x_0) + f''(x_0) = 0$.

2.5.15.

(a) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$f(x) = (x^2 + 1) \arctan x - x > 0, \quad x > 0.$$

Vì $f'(x) = 2x \arctan x + 1 - 1 > 0$ nên $f(x) > f(0) = 0$ với $x > 0$.

(b) Theo công thức Taylor với số dư dạng Lagrange ta có

$$(1) \qquad 2\tan x = 2x + \frac{2}{3}x^2 2\left(\frac{\sin^3 \xi_1}{\cos^5 \xi_1} + \frac{1}{2}\frac{\sin \xi_1}{\cos^3 \xi_1}\right)x^4 > 2x + \frac{2}{3}x^3$$

và

$$(2) \qquad \sinh x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{1}{4!}\frac{e^{\xi_2} - e^{-\xi_2}}{2}x^4 < x + \frac{x^3}{6} + \frac{1}{4!}\frac{e^{\pi/2} - e^{-\pi/2}}{2}x^4.$$

Ta lại có $e^{\pi/2} < 8$. Thật vậy, chú ý rằng (xem I. 2.5.3) $\ln(1+x) > \frac{2x}{x+2}$ với $x > 0$, do đó $\ln 8 = 3\ln 2 = 3\ln(1+1) > 2$, suy ra $8 > e^2 > e^{\pi/2}$, do vậy

$$\frac{e^{\pi/2} - e^{-\pi/2}}{2} < \frac{e^{\pi/2}}{2} < 4,$$

kết hợp với (1) và (2) ta được

$$\sinh x < x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{6} < 2x + \frac{2}{3}x^3,$$

vì $x + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{6}x^4 > 0$ với $0 < x < 2$.

(c) Đặt $f(x) = \ln x - \frac{x}{e}$ với $x > 0$ và $x \neq e$. Ta có $f'(x) = \frac{e-x}{xe}$, suy ra $f'(x) > 0$ khi $0 < x < e$ và $f'(x) < 0$ với $x > e$. Do đó $f(x) < f(e) = 0$ với $x \neq e$.

(d) Với $x > 1$, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$f(x) = 2x\ln x - x^2 + 1 < 0.$$

Vì $f'(x) = e\ln x + 2 - 2x$ và $f''(x) = \frac{2}{x} - 2 < 0$ ta được $f'(x) < f'(1) = 0$ và do đó $f(x) < f(1) = 0$.

Với $0 < x < 1$ việc chứng minh bất đẳng thức ở đầu bài sẽ tương đương với chứng minh $f(x) = 2x\ln x - x^2 + 1 > 0$. Vì $f''(x) = \frac{2}{x} - 2 > 0$ nên ta được $f'(x) > f(1) = 0$ và do đó $f(x) > f(1) = 0$.

2.5.16.

(a) Sử dụng (c) ở bài trên ta được $\ln \pi < \frac{\pi}{e}$, tức là $e^\pi > \pi^e$.

(b) Sử dụng (d) ở bài trên ta được $\sqrt{2}\ln\sqrt{2} < \frac{1}{2}$, từ đó suy ra $2^{\sqrt{2}} < e$.

(c) Xem 2.5.15 (b).

2.5.17.

(a) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$\left(1+\frac{b}{x}\right)^{\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)} < e^{b/a}.$$

Vì $\ln(1+t) < t$ với $t > 0$ nên

$$\left(1+\frac{b}{x}\right)^{\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)} < \left(1+\frac{b}{x}\right)^{x/a} = \left(\left(1+\frac{b}{x}\right)^{x/a}\right)^{b/a} < e^{b/a}.$$

(b) Với n, m nguyên dương ta xét hàm

$$f(x) = \left(1+\frac{x}{m}\right)^m \left(1+\frac{x}{n}\right)^n, \quad |x| < \min\{m, n\}.$$

Khi đó $f'(x) < 0$ khi $x > 0$ và $f'(x) > 0$ khi $x < 0$, vậy $f(x) < f(0) = 1$ với $x \neq 0$ và $|x| = \min\{m, n\}$.

(c) Đặt $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2}+1) - \frac{1}{x} - \ln x$, $x > 0$. Ta có

$$f'(x) = \frac{(1-x)(\sqrt{1+x^2}+1)+x^2}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1+x^2}.$$

Rõ ràng $f'(x) > 0$ khi $< 0x \leq 1$. Khi $x > 1$ ta có

$$(1-x)(\sqrt{1+x^2}+1)+x^2 > 0$$

khi và chỉ khi

$$x^2 > (x-1)\sqrt{1+x^2}+1),$$

bất đẳng thức này tương đương

$$\frac{x^2}{x-1} - 1 > \sqrt{1+x^2}.$$

Vậy $f'(x) > 0$ với mọi $x > 0$, hơn nữa vì

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right) = 0,$$

nên $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, từ đó suy ra $f(x) < 0$ với $x > 0$.

2.5.18.

(a) Đặt

$$f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{\sqrt{1+x}}, \quad x > 0,$$

ta có

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{1+x} - 2 - x}{2(1+x)\sqrt{1+x}} < 0,$$

vì $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$, $x > 0$. Do đó $f(x) < f(0) = 0$.

(b) Với $x > 1$ bất đẳng thức được suy ra từ (a) khi thay x bằng $x - 1$. Nếu $x \in (0, 1)$ thì ta sử dụng (a) với $\frac{1}{x} > 1$.

2.5.19.

(a) Sử dụng công thức Taylor cho hàm $f(x) = (1+x)\ln(1+x)$.

(b) Theo công thức Taylor ta có

$$\ln(1 + \cos x) = \ln 2 - \frac{x^2}{4} - \frac{\sin\zeta}{(1+\cos\zeta)^2} \cdot \frac{x^3}{3!} < \ln 2 - \frac{x^2}{4}.$$

2.5.20.

(a) Đặt $f(x) = e^x - 1 - xe^x$ ta có $f'(x) = -xe^x < 0$, suy ra $f(x) < f(0) = 0$.

(b) Đặt $f(x) = e^x - 1 - xe^x - x^2e^x$, sử dụng (a) ta được

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x - 1 - 2xe^x - x^2e^x \\ &< 1 + xe^x - 1 - 2xe^x - x^2e_x = -xe^x(1+x) < 0. \end{aligned}$$

(c) Nếu $f(x) = xe^{x/2} - e^x + 1$ thì

$$f'(x) = e^{x/2}\left(1 + \frac{x}{2} - e^{x/2}\right) < 0,$$

vì $e^x > 1 + x$ với mọi $x > 0$.

(d) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức

$$x < (1+x)\ln(1+x).$$

(e) Ta đi chứng minh bất đẳng thức tương đương

$$(x+1)(\ln(x+1) - \ln 2) \le x \ln x.$$

Xét hàm $f(x) = (x+1)(\ln(x+1) - \ln 2) - x \ln x$. Hàm này đạt cực đại tại $x = 1$, do đó $f(x) \le f(1) = 0$.

2.5.21. Lấy loga hai vế, ta viết bất đẳng thức cần chứng minh dưới dạng $(e-x)\ln(e+x) > (e+x)\ln(e-x)$. Xét hàm $f(x) = (e-x)\ln(e+x) - (e+x)\ln(e-x)$ ta có $f''(x) > 0$ với $x \in (0, e)$, do đó $f'(x) > f'(0) = 0$, từ đó suy ra $f(x) > f(0) = 0$.

2.5.22. Đặt $f(x) = e^{x-1} + \ln x - 2x + 1$ ta có

$$f'(x) = e^{x-1} + \frac{1}{x} - 2.$$

Vậy với $x > 1$ thì $f''(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x^2} > 0$, vì $e^{x-1} > 1$ và $\frac{1}{x^2} < 1$.

2.5.23.

(a) Xét $f(x) = \frac{1}{2}\tan x + \frac{2}{3}\sin x - x$, ta có

$$f'(x) = \frac{2(1-\cos x)^2\left(\cos x + \frac{1}{2}\right)}{3\cos^2 x} > 0 \quad \text{với} \quad x \in \left(0, \frac{p}{i}2\right).$$

Tức là f đơn điệu tăng, do dó $f(x) > f(0)$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

(b) Xét $f(x) = x - \frac{3\sin x}{2+\cos x}$, ta có

$$f'(x) = \frac{(\cos x - 1)^2}{(2+\cos x)^2} \ge 0.$$

(c) Đặt $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} - x$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ta thấy rằng

$$f'(x) = \frac{1 + \cos^2 x - 2\sqrt{\cos x}\cos x}{2\sqrt{\cos x}\cos x} > \frac{(1-\cos x)^2}{2\sqrt{\cos x}\cos x} > 0.$$

2.5.24. Lấy $f(x) = x^\alpha + (1-x)^\alpha$ thì $f'(x) = 0$ chỉ khi $x = \frac{1}{2}$, hơn nữa f đạt cực tiểu $\frac{1}{2^{\alpha-1}}$ tại điểm này và cực đại bằng 1 tại các đầu mút của $[0,1]$

2.5.25. Chia hai vế cho x^α thì điều phải chứng minh tương đương với việc chứng minh rằng

$$(1+t)^\alpha < 1 + t^\alpha \quad \text{với} \quad t > 0.$$

Nếu $f(t) = (1+t)^\alpha - 1 - t^\alpha$ thì $f'(t) < 0$, do đó $f(t) < f(0)$ với $t > 0$.

2.5.26. Xét hàm

$$f(x) = (1+x)^\alpha - 1 - \alpha x - \frac{\alpha(\alpha-1)}{8}x^2, \quad x \in [-1,1].$$

Ta có $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ và với $x \in (-1,1)$ thì

$$\begin{aligned} f''(x) &= \alpha(1-\alpha)(1+x)^{\alpha+2} + \frac{\alpha(1-\alpha)}{4} \\ &< -2^{\alpha-2}\alpha(1-\alpha) + \frac{\alpha(1-\alpha)}{4} \\ &= \frac{1}{4}\alpha(1-\alpha)\left(1-2^\alpha\right) < 0. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra f' giảm trên $(-1,1)$, vậy $f'(x) > 0$ với $x \in (-1,0)$ và $f'(x) > 0$ với $x \in (0,1)$, đồng thời f đạt cực đại tại 0. Vì $f(0) = 0$ nên $f(x) \leq 0$ với $x \in [-1,1]$.

2.5.27. [D. S. Mitrinovic, J. E. Pecaric, Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo 42 (1993), 317-337]. Xét hàm

$$f(x) = (1+x)^\alpha - 1 - \alpha x - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(1+B)^{\alpha-2}x^2, \quad x \in [-1,B].$$

Ta có

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha - \alpha(\alpha-1)(1+B)^{\alpha-2}x$$

và

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)\left((1+x)^{\alpha-2}(1+B)^{\alpha-2}\right).$$

(a) Nếu $0 < \alpha < 1$ và $x \in (-1, 1)$ thì $f''(x) < 0$, tức là f' giảm, do đó $0 = f'(0) < f'(x)$ với $x \in (-1, 0)$ và $0 = f'(0) > f'(x)$ với $x \in (0, B]$. Vậy f đạt cực đại tại điểm 0, suy ra $f(x) \le f(0) = 0$ với $x \in [-1, B]$, thêm nữa vì $(1+B)^\alpha \ge 1$ nên ta có

$$(1+x)^\alpha - 1 - \alpha x - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2(1+B)^2}x^2 \le f(x) \le f(0) = 0.$$

(b) Như (a), khi $1 < \alpha < 2$ và $x \in [-1, B]$ thì $f(x) \ge f(0) = 0$, do đó

$$(1+x)^\alpha - 1 - \alpha x - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2(1+B)^2}x^2 \ge f(x) \ge f(0) = 0.$$

2.5.28.

(a) Xét hàm

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{với} \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right], \\ 1 & \text{với} \quad x = 0. \end{cases}$$

Thấy rằng f giảm trên $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, thật vậy, theo định lý giá trị trung bình ta có

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x - \frac{\sin x}{x}}{x} = \frac{\cos x - \cos\theta}{x},$$

trong đó $0 < \theta < x$, từ đó suy ra $f'(x) < 0$ trên $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. Vì $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$ nên ta được điều phải chứng minh.

(b) Ta viết bất đẳng thức cần chứng minh dưới dạng

$$\sin x \ge \frac{3}{\pi}x - 4\frac{x^3}{\pi^3}.$$

Đặt

$$f(x) = \sin x - \frac{3}{\pi}x - 4\frac{x^3}{\pi^3}, \quad \mathbf{I} = \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \quad \text{và} \quad \mathbf{J} = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Ta có $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ và $f\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$, hơn nữa $f''(0) = 0$, $f''\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$ và $f^{(4)}(x) \ge 0$ với mọi $x \in \mathbf{I}$. Từ đó suy ra $f''(x) \le 0$ trên $\mathbf{I}$ và do vậy f là hàm lõm trên $\mathbf{I}$. Vì $f(0) = 0$ và $f\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$ nên suy ra $f(x) \ge 0$ với

$x \in \mathbf{I}$. Bây giờ ta đi chứng minh rằng f' là hàm lồi trên $\mathbf{J}$. Thật vậy ta có $f^{(3)}\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$ và $f^{(4)}(x) > 0$ với $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ nên đạo hàm cấp ba của f sẽ dương trên $\mathbf{J}$, hơn nữa vì $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$ và $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ nên $f'(x) \le 0$ trên bJ, kết hợp với $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ta suy ra $f(x) \ge 0$ trên $\mathbf{J}$.

2.5.29. Giả sử rằng $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, ta có $\frac{\pi^3x^3}{3!} < \pi x^2$, vậy từ bất đẳng thức $\sin \pi x > \pi x - \frac{\pi^3x^3}{3!}$ (xem 2.5.1 (b)) ta được $\sin \pi x > \pi x - \frac{\pi^3x^3}{3!} > \pi x(1-x)$. Để chứng minh bất đẳng thức còn lại ta xét hàm $f(x) = 4x - 4x^2 - \sin \pi x$, $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Ta có $f'(x) = 4 - 8x - \pi \cos \pi x$ và $f''(x) = -8\pi^2 \sin \pi x$. Do đó

$$f''(x_0) = 0 \quad \text{khi và chỉ khi} \quad x_0 = \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{8}{\pi^2},$$

và $f''(0) = -8$, $f''\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^2 - 8 > 0$, do đó $f'(x) < 0$ với $x \in (0, x_0)$ và $f''(x) > 0$ với $x \in \left(x_0, \frac{1}{2}\right)$, hay nói cách khác f' thực sự giảm trên $(0, x_0)$ và thực sự tăng trên $\left(x_0, \frac{1}{2}\right)$, hơn nữa vì $f'(0) = 4 - \pi > 0$ và $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ nên ta suy ra $f'(x) < 0$ với $x \in \left(x_0, \frac{1}{2}\right)$, và do vậy $f'(x_0) < 0$, suy ra tồn tại $x_1 \in (0, x_0)$ sao cho $f'(x_1) \ge 0$ nếu $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ sao cho $f'(x_1) = 0$. Sử dụng tính đơn điệu của f' ta suy ra f tăng trên $(0, x_1)$ và giảm trên $\left(x_1, \frac{1}{2}\right)$. Vì $f(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ nên $f(x) \ge 0$ với $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Vậy ta đã chứng minh được bất đẳng thức với $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Rõ ràng bất đẳng thức cũng đúng đối với $x = \frac{1}{2}$. Cuối cùng ta chung sý rằng bất đẳng thức không thay đổi khi thay thế x bởi $1 - x$.

2.5.30. Đặt $f(x) = e^x - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - \frac{x}{n}(e^x - 1)$, $x > 0$, ta có

$$f'(x) = e^x - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} - \frac{x}{n}e^x - \frac{1}{n}e^x + \frac{1}{n},$$

và

$$f^{(l)}(x) = e^x - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-l}}{(k-l)!} - \frac{x}{n}e^x - \frac{l}{n}e^x, \quad l = 2, 3, \dots, n.$$

Hơn nữa ta có $f^{(l)}(0) = -\frac{l}{n} < 0$ với $l = 2, 3, \dots, n$, $f'(0) = 0$ và $f(0) = 0$. Vì $f^{(n)}(x) < 0$ với $x > 0$ nên đạo hàm $f^{(n-1)}$ sẽ giảm thực sự, tức là $f^{(n-1)}(x) < f^{(n-1)}(0) < 0$, từ đó suy ra tính đơn điệu của $f^{(n-2)}$ và $f^{(n-2)}(x) < 0$ với $x > 0$. Lặp lại những lập luận vừa nêu trên ta được $f(x) < f(0) = 0$ với $x > 0$.

2.5.31. Vì $f'(x) = -\frac{x^n}{n!}e^{-x}$ nên ta suy ra nó chỉ bằng 0 tại gốc toạ độ, hơn nữa nếu n chẵn thì $f'(x) < 0$ với $x \neq 0$, do đó trong trường hợp này f không có cực trị. Mặt khác nếu n lẻ thì $f'(x) > 0$ khi $x < 0$ và $f'(x) < 0$ với $x > 0$ nên với các giá trị n lẻ ta có $f(0) = 1$ là cực đại của f.

2.5.32. Đạo hàm $f'(x) = (m+n)x^{m-1}(1-x)^{n-1}\left(\frac{m}{m+n} - n\right)$ bằng 0 tại duy nhất $x_0 = 0$ khi $m > 1$, tại $x_1 = 1$ khi $n > 1$ và tại $x_2 = \frac{m}{m+n}$. Ta dễ dàng thử rằng $f(x_2) = \frac{m^m n^n}{(n+m)^{m+n}}$ chính là cực đại địa phương của f, hơn nữa nếu m lẻ thì $f(x_0) = 0$ là cực tiểu địa phương của f. Mặt khác nếu m lẻ thì 0 không là cực trị của f. Hoàn toàn tương tự ta có khi n chẵn, $f(x_1) = 0$ là cực tiểu địa phương của f và khi n lẻ thì x_1 không thể là điểm cực trị của f.

2.5.33. Từ bài trên ta có f đạt cực đại $f(x) = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$ tại điểm x thoả mãn phương trình
$$\sin^2 x = \frac{m}{m+n}.$$

2.5.34. Với $x \neq 0, 1$ ta có
$$f'(x) = \frac{1}{9} \cdot \frac{\frac{1}{3} - x}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}.$$
Vậy $f'(x) = 0$ tại $x = \frac{1}{3}$. Hơn nữa $f'(x) > 0$ khi $x \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ và $f'(x) < 0$ khi $x \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$, do đó $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}$ là cực đại địa phương của f. Hàm f không khả vi tại 0 và 1. Bên cạnh đó do $f(x) > 0$ với $x \in (0, 1)$ và $f(x) < 0$ với $x < 0$ nên f không đạt cực trị tại 0, nhưng $f(1) = 0$ là cực tiểu địa phương của f, vì $f(x) > 0 = f(1)$ với $x > 1$ và với $x \in (0, 1)$.

Hình vẽ

2.5.35. Ta có $f'(x) = \arcsin x$, suy ra điểm cực trị chính là nghiệm của f, vì $f(0) = 1$ và $f(-1) = f(1) = \frac{\pi}{2}$ nên $\frac{\pi}{2}$ là giá trị cực đại và 1 là giá trị cực tiểu của f trên $[-1, 1]$.

2.5.36. Với $x > 1$ ta có $f'(x) < 0$, suy ra $f(x) < f(1) = \frac{3}{2}$. Với $x \in (0, 1)$ ta có $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $f'(x) < 0$ nếu $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ và $f'(x) > 0$ với $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, vậy $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}$ là cực tiểu địa phương của f. Với $x < 0$ đạo hàm f' dương, suy ra $\frac{3}{2} = f(0) > f(x)$.

Vậy giá trị cực đại của f là $f(0) = f(1) = \frac{3}{2}$. Mặt khác vì $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ và $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên cận trên đúng của $f\mathbb{R})$ là 0, nhưng hàm f không có cực tiểu trên $\mathbb{R}$.

2.5.37.

(a) Giá trị cực đại của hàm $x \mapsto xe^{-x}$, $x \geq 0$ là $f(1) = \frac{1}{e}$, vậy

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k e^{-a_k} \leq \frac{1}{n} \cdot n \cdot \frac{1}{e} = \frac{1}{e}.$$

(b) Như (a) ta chỉ cần tìm giá trị cực đại của hàm

$$x \mapsto x^2 e^{-x}, \quad x \geq 0.$$

(c) Nếu một trong các hệ số $a_k = 0$ thì ta suy ra ngay bất đẳng thức cần chứng minh, giả sử $a_k > 0$ với mọi k, lấy logarít hai vế ta được bất đẳng thức tương đương

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\ln a_k - \frac{a_k}{3}\right) \leq \ln 3 - 1.$$

Và ta đi tìm giá trị cực đại của hàm

$$x \mapsto \ln x - \frac{x}{3}, \quad x > 0.$$

2.5.38. Ta có

$$f'(x0 = \begin{cases} \frac{1}{x^2} e^{-1/|x|}\left(\left(\sqrt{2} + \sin\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\operatorname{sgn} x - \cos\frac{1}{x}\right) & \text{với} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{với} \quad x = 0. \end{cases}$$

Vì
$$\left|\sin\frac{1}{x} \pm \cos\frac{1}{x}\right| \leq \sqrt{2}$$
nên $f'(x) \geq 0$ với $x > 0$ và $f'(x) \leq 0$ với $x < 0$, vậy không tồn tại cực trị địa phương của f tại các điểm $x \neq 0$, hơn nữa $0 = f(0)$ là giá trị cực tiểu của f vì $f(x) > f(0) = 0$ với $x \neq 0$.

2.5.39. Chú ý rằng $f(x) > f(0) = 0$ với $x \neq 0$, thêm nữa
$$f'(x0 = \begin{cases} x^2\left(8x + 4x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right) & \text{với} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{với} \quad x = 0. \end{cases}$$
Từ đó suy ra nếu $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0, 1\}$ thì
$$f'\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = \frac{1}{4n^2\pi^2}\left(\frac{4}{n\pi} - 1\right) < 0,$$
và nếu $n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$ thì
$$f'\left(\frac{1}{(2n+1)\pi}\right) = \frac{1}{(2n+1)^2\pi^2}\left(\frac{8}{(2n+1)\pi} + 1\right) > 0.$$

2.5.40. Chú ý rằng $\sinh x > 0$ và $\tanh x > 0$ với $x > 0$ nên bất đẳng thức
$$\frac{\sinh x}{\sqrt{\sinh^2 x + \cosh^2 x}} < \tanh x$$
được viết lại thành
$$\frac{1}{\sqrt{\sinh^2 x + \cosh^2 x}} < \frac{1}{\cosh x}.$$
Dễ dàng chứng minh được bất đẳng thức này. Các bất đẳng thức còn lại được chứng minh tương tự.

2.5.41. Với $0 < a < b$ đặt $x = \ln\sqrt{\frac{b}{a}}$ ta được
$$\frac{b-a}{2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}} < \frac{b-a}{b=a} < \ln\sqrt{\frac{b}{a}} < \frac{b-a}{2\sqrt{ab}} < \frac{1}{2}\cdot\frac{b^2-a^2}{2ab}.$$
Chia cho $\frac{b-a}{2}$ ta được điều phải chứng minh.

2.5.42.

(a) Ta có
$$\lim_{p\to 0}\left(\frac{x^p+y^p}{2}\right)^{1/p} = \lim_{p\to 0} e^{\frac{1}{p}\ln\frac{x^p+y^p}{2}} = e^{\frac{1}{2}xy} = \sqrt{xy},$$
vì theo quy tắc l'Hôpital ta có
$$\lim_{p\to 0}\frac{1}{p}\ln\frac{x^p+y^p}{2} = \lim_{p\to 0}\frac{\left(\ln\frac{x^p+y^p}{2}\right)'}{p'} = \frac{1}{2}xy.$$

(b) Với $p \neq 0$ đặt $f(p) = \left(\frac{x^p+y^p}{2}\right)^{1/p}$, ta chỉ cần chứng minh rằng hàm
$$F(p) = \ln f(p) = \frac{1}{p}\ln\frac{x^p+y^p}{2}$$
tăng thực sự. Ta có
$$F'(p) = \frac{1}{p^2}\left(\frac{p}{x^p+y^p}\left(x^p\ln x + y^p\ln y\right) - \ln\frac{x^p+y^p}{2}\right).$$
Đặt
$$G(p) = \frac{p}{x^p+y^p}\left(x^p\ln x + y^p\ln y\right) - \ln\frac{x^p+y^p}{2}$$
ta có
$$G'(p) = \frac{p\left[\left(x^p\ln^2 x + y^p\ln x^2 y\right)\left(x^p+y^p\right) - \left(x^p\ln x + y^p\ln y\right)^2\right]}{(x^p+y^p)^2}.$$
Ta cần chứng minh rằng
$$\left(x^p\ln^2 x + y^p\ln x^2 y\right)\left(x^p+y^p\right) - \left(x^p\ln x + y^p\ln y\right)^2 \geq 0.$$
Sử dụng bất đẳng thức Cauchy
$$(x_1y_1 + x_2y_2)^2 \leq (x_1^2y_1^2)(x_2^2+y_2^2)$$
thay
$$x_1 = x^{p/2}, \quad x^2 = y^{p/2}, \quad y_2 = x^{p/2}\ln x, \quad y_2 = y^{Pp2}\ln y,$$

ta được

$$\left(x^{p/2} \cdot x^{p/2} \ln x + y^{p/2} \cdot y^{p/2} \ln y\right)^2 \leq (x^p + y^p)\left(x^p \ln^2 x + y^p \ln^2 y\right).$$

Suy ra

$$(x^p \ln x + y^p \ln y)^2 \leq (x^p + y^p)\left(x^p \ln^2 x + y^p \ln^2 y\right),$$

tức là $G'(p) \geq 0$ với $p > 0$. Vậy trong trường hợp này ta được $G(p) = p^2F'(p) > G(0) = 0$. Khi $p < 0$ thì $G'(p) < 0$ và do đó $G(p) = p^2F'(p) > G(0)$. Từ những lập luận trên ta có kết luận rằng hàm $p \mapsto p$ tăng thực sự trên mỗi khoảng $(-\infty, 0)$ và $(0, \infty)$, theo định nghĩa của $M_0(x, y)$ (xem 2.5.42) ta suy ra f tăng thực sự trên $\mathbb{R}$.

2.5.43. Với $\lambda \geq 1$ ta xét hàm

$$f(\lambda) = \frac{x^n + y^n + \lambda((x+y)^n - x^n - y^n)}{2 + \lambda(2^n - 2)}$$

Sử dụng bất đẳng thức

$$(x+y)^n \leq 2^{n-1}(x^n + y^n),$$

ta chứng minh được rằng $f'(\lambda) \leq 0$, vậy f giảm trên $[0, \infty)$. Kết hợp với $f(1) = (x+y)^n/2^n$ ta chứng minh được bất đẳng thức bên phải. Để chứng minh bất đẳng thức còn lại ta chỉ cần chứng minh rằng $\lim\limits_{\lambda\to\infty} f(\lambda) \geq (\sqrt{xy})^n$. Áp dụng bất đẳng thức liên hệ giữa trung bình cộng và trung bình nhân ta được

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to\infty} f(\lambda) &= \frac{(x+y)^n - x^n - y^n}{2^n - 2} \\
&= \frac{\binom{n}{1}xy^{n-1} + \binom{n}{2}x^2y^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1}x^{n-1}y}{2^n - 2} \\
&\geq \sqrt[2^n-2]{(xy^{n-1})^{\binom{n}{1}}(x^2y^{n-2})^{\binom{n}{2}} \cdots (x^{n-1}y)^{\binom{n}{n-1}}} = (\sqrt{xy})^n,
\end{aligned}$$

bất đẳng thức cuối cùng được suy ra từ đẳng thức

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + (n-1)\binom{n}{n-1} = n(2_1^{n-1}),$$

để chứng minh đẳng thức trên ta sử dụng công thức

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}, \quad k \geq 1.$$

2.5.44.

(a) Đặt $f(x) = \sin(\tan x) - x$ với $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, ta có

$$f(0) = 0 \quad \text{và} \quad f'(x) = \cos(\tan x)\frac{1}{\cos^2 x} - 1,$$

suy ra

$$f'(x) \geq 0 \quad \text{khi và chỉ khi} \quad \cos(\tan x) \geq \cos^2 x.$$

Chú ý rằng $\cos(\tan x) \geq 1 - \frac{1}{2}\tan^2 x$ (xem 2.5.1(a)) nên ta chỉ cần chứng minh rằng $1 - \frac{1}{2}\tan^2 x \geq \cos^2 x$ với $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Bất đẳng thức cuối cùng được viết lại dưới dạng hiển nhiên đúng

$$2\cos^4 x - 3\cos^2 x + 1 \leq 0 \quad \text{với} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$$

(b) Với $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ xét hàm $f(x) = \tan(\sin x) - x$ ta có

$$f(0) = 0 \quad \text{và} \quad f'(x) = \frac{\cos x}{\cos^2(\sin x)} - 1.$$

Từ đó suy ra $f'(x) \geq 0$ khi và chỉ khi

$$\cos x \geq \cos^2(\sin x) = \frac{1 + \cos(2\sin x)}{2}.$$

Bài toán trở về chứng minh bất đẳng thức vừa nêu trên. Sử dụng 2.5.1(c) ta được bất đẳng thức

$$1 + \cos(2\sin x) \leq 2 - 2\sin^2 x + \frac{2}{3}\sin^4 x \leq 2\cos x$$

với $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, từ đó suy ra điều phải chứng minh.

2.5.45. Xét hàm $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$, với $x \in (0, \pi/2)$ ta có $f'(x) > 0$ khi và chỉ khi

$$\frac{1}{x^3} > \frac{\cos x}{\sin^3 x},$$

tức là khi và chỉ khi

$$\frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} - x > 0.$$

Đặt

$$g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} - x$$

ta có

$$g'(x) = (\cos x)^{2/3} + \frac{1}{3}(\cos x)^{-4/3}\sin^2 x - 1$$

và

$$g''(x) = \frac{4}{9}(\cos x)^{-7/3}\sin^3 x.$$

Vì $g''(x) > 0$ với $x \in (0, \pi/2)$ nên ta được $g'(x) > g'(0) = 0$, từ đó suy ra $g(x) > g(00 = 0$ với $x \in (0, \pi/2)$, tức là hàm f đang xét sẽ tăng trên khoảng đó, suy ra $f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{4}{\pi^2}$.

2.5.46. Chú ý rằng

$$\left(\arctan x - \frac{3x}{1 + 2\sqrt{1+x^2}}\right)' = \frac{\left(\sqrt{1+x^2} - 1\right)^2}{(1+x^2)(1+2\sqrt{1+x^2})^2} > 0$$

ta được điều phải chứng minh.

2.5.47. Nếu $a_k = b_k$ với mọi k thì ta được ngay điều phải chứng minh, giả sử tồn tại k để $_k \neq b_k$, đặt

$$f(x) = \prod_{k=1}^{n}(xa_k + (1-x)b_k) \quad \text{và} \quad g(x) = \ln f(x).$$

Khi đó

$$g'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k - b_k}{xa_k + (1-x)b_k} \quad \text{và} \quad g''(x) = -\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k - b_k}{xa_k + (1-x)b_k}\right)^2.$$

Vì $g''(x) < 0$ nên hàm g, và do đó hàm f, có cực đại trên $[0,1]$ tại một trong hai đầu mút khi và chỉ khi $g'(0)$ và $g'(1)$ cùng dấu, tức là $g'(0)g'(1) \geq 0$. Bất đẳng thức cuối được viết chi tiết là

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k - b_k}{a_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k - b_k}{b_k}\right) \geq 0.$$

2.5.48. Theo 2.5.1 (a) và (c) ta có

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Do đó để chứng minh bất đẳng thức ở đầu bài ta chỉ cần chứng minh rằng

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} \leq 1 + 1 - \frac{x^2y^2}{2},$$

hay tương đương

$$x^4 + y^4 + 12x^2y^2 - 12(x^2+y^2) \leq 0 \quad \text{với} \quad x^2 + y^2 \leq \pi.$$

Trong hệ toạ độ cực θ, r bất đẳng thức trên được viết lại như sau:

(1) $$r^2(2 + 5\sin^2 2\theta) \leq 24 \quad \text{với} \quad r^2 \leq \pi \quad \text{và} \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Vì

$$r^2(2 + 5\sin^2 2\theta) \leq 7\pi < 24,$$

nên ta chứng minh được (1).

2.5.49. Bất đẳng thức là hiển nhiên khi $x \geq 1$ hoặc $y \geq 1$, vậy giả sử $x, y \in (0,1)$ và đặt $y = tx$, vì tính đối xứng nên ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức cho $0 < t \leq 1$, ta có

$$x^y + y^x = x^{tx} + (tx)^x = (x^x)^t + t^x x^x.$$

Vì hàm $x \mapsto x^x$ có cực tiểu $e^{-1/e} = a$ tại $\frac{1}{e}$ và vì $t^x \geq t$ nên $x^y + y^x \geq a^t + ta$. Hơn nữa hàm $F(t) = a^t + ta$, $t \in \mathbb{R}$ chỉ có một cực tiểu địa phương $t_0 = 1 - e < 0$ và F tăng thực sự trên (t_0, ∞) và $F(0) = 1$ nên ta suy ra $x^y + y^x > 1$.

2.5.50. Với $0 < x < 1$ bất đẳng thức cần chứng minh được viết dưới dạng

$$1 - 2x^n + x^{n+1} < (1 - x^n)\sqrt{1 - x^n},$$

hay

$$\frac{1 - x^n}{1 - x} < \frac{1 - (1 - x^n)}{1 - \sqrt[n]{1 - x^n}}.$$

Vì hàm $t \mapsto \frac{1-t^n}{1-t}$ tăng thực sự trên $(0, 1)$ nên ta chỉ cần chứng minh rằng $x < \sqrt[n]{1 - x^n}$ hay $0 < x < \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$. Cuối cùng chú ý rằng $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2$ với $n \geq 2$, tức là $\frac{1}{\sqrt[n]{2}} > \frac{n}{n+1}$.

2.5.51. Với $0 < x < 1$ xét hàm

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} \sin \frac{1}{x}.$$

Vì $g'(x) < 0$ với $0 < x < 1$ nên ta có g tăng thực sự trên $(0, 1)$, vậy $g(y + z) < g(y)$ và $g(y + z) < g(z)$, từ đó suy ra

$$yg(y + z) + zg(y + z) < yg(y) + zg(z),$$

tức là $f(y + z) < f(y) + f(z)$.

2.5.52. Ta có công thức khai triển nhị thức Newton

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \tag{1}$$

Đạo hàm (**??**) theo x và nhân hai vế của đẳng thức nhận được với x ta được

$$nx(x + y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \tag{2}$$

Bây giờ đạo hàm (**??**) hai lần và nhân hai vế của đẳng thức mới nhận được với x^2 ta được

$$n(n - 1)x^2(x + y)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} k(k - 1) \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \tag{3}$$

Nếu trong (**??**), (**??**) và (**??**) ta thay y bởi $1-x$ thì sẽ được

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$
$$nx = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$
$$n(n-1)x^2 = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Từ đó suy ra

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x) \le \frac{n}{4}.$$

2.5.53. Từ giả thiết phương trình $f(x)=0$ có nghiệm duy nhất $\xi \in [a,b]$

Hình vẽ

Giả sử rằng $f'(x) > 0$ và $f''(x) < 0$ với $x \in [a,b]$, đặt $x_0 = a$ theo công thức Taylor với phần dư dạng Lagrange ta có

$$0 = f(\xi) = f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) + \frac{1}{2} f''(c)(\xi - x_n)^2,$$

trong đó c_n là phần tử thuộc khoảng có hai đầu mút là x_n và ξ. Từ định nghĩa của dãy $\{x_n\}$ ta được

$$\xi - x_{n+1} = \xi - x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}(\xi - x_n)^2 > 0.$$

Vậy $\{x_n\}$ bị chặn trên bởi ξ, từ đó suy ra $f(x_n) < 0$, vậy

$$\xi - x_{n+1} = \xi - x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} < \xi - x_n,$$

tức là $\{x-n\}$ tăng thực sự, do vậy nó hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$. Các trường hợp còn lại được chứng minh tương tự.

2.5.54. Rõ ràng m và M dương, từ kết quả bài trên ta suy ra

$$0 = f(\xi) = f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) + \frac{1}{2}f''(c_n)(\xi - x_n)^2,$$

trong đó ξ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x) = 0$ trên $[a, b]$ và c_n là một phần tử nằm giữa x_n và ξ. Do vậy ta có

$$|x_{n+1} - \xi| = \left|x_n - \xi - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right| = \frac{|f''(c_n)|}{2|f'(x_n)|}(\xi - x_n)^2 \leq \frac{M}{2m}(\xi - x_n)^2.$$

2.5.55. Ta sẽ chứng minh rằng $\sup\{e^{-x} + e^{-1/x} : x > 0\} = 1$. Xét hàm $f(x) = e^{-x} + e^{-1/x}, x > 0$ ta có $f(1) = 1$ và $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, suy ra ta chỉ cần chứng minh cho trường hợp $x > 1$, lúc đó $f(x) < 1$ hay nói cách khác ta có

(1) $$\frac{1}{2^{1/x}} < 1 - \frac{1}{2^x}, \quad \text{với} \quad x > 1.$$

Theo 2.3.7 (a) ta có

$$\left(1 - \frac{1}{2^x}\right)^x > 1 - \frac{x}{2^x}.$$

Bây giờ ta chứng minh rằng

(2) $$1 - \frac{x}{2^x} \geq \frac{1}{2} \quad \text{với} \quad x \geq 2.$$

Để chứng minh điều này ta viết **(??)** dưới dạng $g(x) = 2^{x-1} - x \geq 0$. Chú ý rằng g tăng thực sự trên $[2, \infty)$ và $g(2) = 0$ ta sẽ chứng minh được **(??)** với $x \geq 2$, tức là $f(x) < 1$ với $x \geq 2$. Bây giờ ta chứng minh $f(x) < 1$ trong khoảng $(1, 2)$. Xét hàm

$$h(x) = \ln f(x) = \ln\left(2^x + 2^{1/x}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right)\ln 2.$$

Vì

$$h'(x) = \ln 2 \frac{-2^{1/x} + \frac{1}{x^2}2^x}{2^x + 2^{1/x}},$$

ta có nhận xét rằng $h'(x) < 0$ khi và chỉ khi $(x^2 - 1)\ln 2 < 2x \ln x$. Để chứng minh bất đẳng thức vừa nêu ta xét hàm

$$k(x) = (x^2 - 1)\ln 2 - 2x \ln x, \quad x \in (1, 2)$$

có $k'(x) = 2x\ln 2 - 2\ln x - 2$ và $k''(x) = 2\left(\ln 2 - \frac{1}{x}\right)$ nên $k''(x) < 0$ với $x \in \left(1, \frac{1}{\ln 2}\right)$ và $k''(x) > 0$ với $x \in \left(\frac{1}{\ln 2}, 2\right)$. Vì $k'(1) = k'(2) < 0$ nên ta có $k'(x) < 0$ với mọi $x \in (1,2)$, tức là k là hàm giảm trên $(1,2)$, suy ra $k(x) < k(1) = 0$, vậy $h'(x) < 0$ khi $x \in (1,2)$, suy ra $h(x) < h(1) = 0$, hay $(x) < 1$ với $x \in (1,2)$. Vậy bất đẳng thức (**??**) đúng với mọi $x \in (1,\infty)$.

2.5.56. [5] Chứng minh của bài này dựa vào định lý phạm trù Baire. Với $n \in \mathbb{N}$ xét tập $\mathbf{A}_n = \{x \in [0,1] : f^{(n)}(x) = 0\}$. Từ giả thiết ta suy ra $[0,1]$ là hợp của các $\mathbf{A}_n$, vậy theo định lý Baire tồn tại $\mathbf{A}_n$ trù mật khắp nơi trong $[0,1]$, tức là tồn tại đoạn $\mathbf{I}$ và n sao cho $\mathbf{I} \subset \overline{\mathbf{A}_n}$. Vì $f^{(n)}$ liên tục nên $f^{(n)}(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbf{I}$, từ đó suy ra trên $\mathbf{I}$ f sẽ trùng với một đa thức. Nếu $\mathbf{I} = [0,1]$ ta suy ra ngay điều phải chứng minh. Ngược lại nếu không phải thì lập luận tương tự trên đối với phần còn lại trong $[0,1]$. Lặp lại cách làm trên ta chỉ ra một họ các khoảng mà giao của chúng trù mật trong $[0,1]$, hơn nữa trên mỗi khoảng hàm f sẽ trùng với một đa thức, ta cần chứng minh rằng trên mọi đoạn f sẽ trùng với *chỉ một* đa thức mà thôi. Xét tập $\mathbf{B}$ là phần còn lại của họ các khoảng nói trên sau khi bỏ đi phần trong của chúng, rõ ràng $\mathbf{B}$ đóng, thêm nữa $\mathbf{B}$ nếu $\mathbf{B}$ khác rỗng thì mọi phần tử của $\mathbf{B}$ đều là điểm giới hạn của $\mathbf{B}$. Thật vậy, giả sử $x_0 \in \mathbf{B}$ không là điểm giới hạn của $\mathbf{B}$ thì x_0 là giao điểm của hai khoảng $\mathbf{I}_1$ và $\mathbf{I}_2$ mà $f^{(n_1)}(x) = 0$ với $x \in \mathbf{I}_1$ và $f^{(n_2)}(x) = 0$ với $x \in \mathbf{I}_2$, từ đó suy ra $f^{(n)}(x) = 0$ với $x \in \mathbf{I}_1 \cup \mathbf{I}_2$ và $n \geq \max\{n_1, n_2\}$. Vì $f^{(n)}$ liên tục nên f sẽ trùng với một đa thức nào đó trên $\mathbf{I}_1 \cup \mathbf{I}_2$, và suy ra $x_0 \notin \mathbf{B}$, vô lý. Vì $\mathbf{B}$ đóng nên nếu nó khác rỗng ta lại áp dụng định lý phạm trù của Baire. Vậy tồn tại $\mathbf{A}_n$ sao cho $\mathbf{A}_n \cap \mathbf{B}$ trù mật trong $\mathbf{J} \cap \mathbf{B}$, trong đó $\mathbf{J}$ là một khoảng nào đó, tức là $f^{(n)}(x) = 0$ trên $\mathbf{B} \cap \mathbf{J}$, mặt khác tồn tại $\mathbf{K} \subset \mathbf{J}$ là phần bù của $\mathbf{B}$, suy ra tồn tại $m \in \mathbb{N}$ sao cho $f^{(m)}(x) = 0$ với $x \in \mathbf{K}$. Nếu $m \leq n$ thì $f^{(n)}(x) = 0$ với $x \in \mathbf{K}$. Nếu $m > n$ thì $f^{(n+1)}(x) = f^{(n+2)}(x) = \cdots = f^{(m)}(x) = \cdots = 0$ với $x \in \mathbf{B} \cap \mathbf{I}$ vì mọi điểm của $\mathbf{B}$ đều là điểm giới hạn, từ đó suy ra $f^{(n+1)}(x) = f^{(n+2)}(x) = \cdots = f^{(m)}(x) = \cdots = 0$ với $x \in \mathbf{B} \cap \mathbf{I}$ tại các đầu mút của $\mathbf{K}$, ví dụ như tại a và b. Do đó với mọi $x \in \mathbf{K}$ ta có

$$0 = \int_a^x f^{(m)}(t)dt = f^{(m-1)}(x) - f^{(m-1)}(a) = f^{(m-1)}(x).$$

Lặp lại quá trình trên ta được $f^{(n)}(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbf{K}$ và $m > n$, và vì $\mathbf{K}$ lấy tuỳ ý trong $\mathbf{J}$ nên không tồn tại phần tử của $\mathbf{B}$ thuộc $\mathbf{J}$, suy ra vô lý. Vậy ta có $\mathbf{B}$ rỗng, tức là $\mathbf{I} = [0, 1]$, kết hợp với kết quả đã đạt được ở trên ta có điều phải chứng minh.

2.5.57. Đặt

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{với} \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 & \text{với} \quad x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Vậy $f'(x) = 0$ với $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ và $f^{(3)}(x) = 0$ với $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$.

Xét hàm

$$f(x) = \sin \frac{x}{2}, \quad x \in [0, 1]$$

ta thấy hàm này không thoả mãn khẳng định ở 2.5.56 khi $\lim\limits_{n \to \infty} f^{(n)}(x) = 0$ với mọi $x \in [0, 1]$.

2.6 Khả vi mạnh và khả vi theo nghĩa Schwarz

2.6.1. Sử dụng định nghĩa 1 khi cho $x_2 = a$. Điều ngược lại không đúng (xem 2.1.13).

2.6.2. [M. Esser, O. Shisha, Amer. Math. Monthly 71 (1964), 904-906] Xét $\varepsilon > 0$ cho trước và $\delta > 0$ sao cho

$$\mathbf{B} = \{x : |x - a| < \delta\} \subset \mathbf{A}$$

và với $x_1, x_2 \in \mathbf{B}$, $x_1 \neq x_2$ ta có

$$\left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - f^*(a) \right| < \varepsilon.$$

Bây giờ nếu $x \in \mathbf{A}^1$ (tức là nếu $f'(x)$ tồn tại) và nếu $|x - a| < \delta/2$ thì với mọi x_2 sao cho $|x_2 - x| < \delta/2$ ta có

$$\left| \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} - f^*(a) \right| < \varepsilon.$$

Cho $x_2 \to x$ ta được $|f'(x) - f^*(a)| \le \varepsilon$. Do đó $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in\mathbf{A}^1}} f'(x) = f^*(a) = f'(a)$. Vì $\mathbf{A}^* \subset \mathbf{A}^1$ nên ta có

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in\mathbf{A}^*}} f^*(x) = f^*(a) = f'(a).$$

2.6.3. [M. Esser, O. Shisha, Amer. Math. Monthly 71 (1964), 904-906] Vì f' liên tục tại a nên theo định lý giá trị trung bình ta có

$$\lim_{\substack{(x_1,x_2)\to(a,a)\\ x_1\neq x_2}} \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x-2} = \lim_{\substack{(x_1,x_2)\to(a,a)\\ x_1\neq x_2}} f'(x_1+\theta(x_2-x_1)) = f'(a).$$

2.6.4. [M. Esser, O. Shisha, Amer. Math. Monthly 71 (1964), 904-906] Không. Ta chỉ ra phản ví dụ. Xét hàm f trên $(-1,1)$ sau

$$f(x) = \int_0^x g(t)dt,$$

trong đó

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad t\in(-1,0)\cup\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2k+1},\frac{1}{2k}\right), \\ t & \text{nếu} \quad t\in\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2k},\frac{1}{2k-1}\right). \end{cases}$$

Khi đó f liên tục trên $(-1,1)$ và

$$\lim_{\substack{(x_1,x_2)\to(0,0)\\ x_1\neq x_2}} \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x-2} = \lim_{\substack{(x_1,x_2)\to(0,0)\\ x_1\neq x_2}} \frac{1}{x_1-x_2}\int_{x_2}^{x_1} g(t)dt = 0.$$

Đẳng thức cuối cùng được suy ra từ bất đẳng thức sau

$$0 \le \int_{x_2}^{x_1} g(t)dt \le \frac{x_1^2-x_2^2}{2} \quad \text{với} \quad x_2 < x_1.$$

Do đó f khả vi mạnh tại điểm 0. Mặt khác đạo hàm f' không tồn tại tại các điểm $\frac{1}{n}$, $n = 3,4,5,\dots$.

2.6.5. Suy ra từ 2.6.2 và 2.6.3.

2.6.6. [C. L. Belna, M.J. Evans, P. D. Humke, Amer. Math. Monthly 86 (1979) 121-123]. Chú ý rằng f' thuộc lớp phạm trù (Baire) thứ nhất, vì

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}},$$

suy ra tập các điểm gián đoạn của f' thuộc lớp phạm trù thứ nhất, (xem 1.7.20). Kết hợp với 2.6.3 ta có điều phải chứng minh.

2.6.7. Xét α thực sao cho $f(a) < \alpha < f(b)$, và ký hiệu $c = \inf\{x \in (a,b) : f(x) > \alpha\}$. Rõ ràng $c \neq a$ và $c \neq b$. Từ định nghĩa cận trên đúng ta có $f(x) \leq c$ với $x \in [a,c]$, và tồn tại dãy dương $\{h_n\}$ hội tụ về 0 sao cho $f(c+h_n) > \alpha$. Vì f khả vi Schwarz tại c nên

$$f^s(c) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(c+h_n) - f(c-h_n)}{2h_n} \geq 0.$$

Ta có nhận xét rằng khi $f(a) < f(b)$, với lập luận tương tự ta có tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho $f^s(c) \leq 0$.

2.6.8. [C. E. Aull, Amer. Math. Monthly 74 (1967) 708-711]. Nếu $f = 0$ trên $[a,b]$ thì ta có ngay điều phải chứng minh.Giả sử tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho $f(c) > 0$, theo bài trên tồn tại x_1 và x_2 sao cho $a < x_1 < c < x_2 < b$, $f^s(x_1) \geq 0$ và $f^s(x_2) \leq 0$.

2.6.9. [C. E. Aull, Amer. Math. Monthly 74 (1967) 708-711]. Rõ ràng hàm trung gian

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)$$

thoả mãn các giả thiết của bài tập trên.

2.6.10. [C. E. Aull, Amer. Math. Monthly 74 (1967) 708-711]. Vì f bị chặn trong (a,b) nên tồn tại $M \geq 0$ sao cho sao cho $|f^s(x)| \leq M$ với mọi $x \in (a,b)$. Theo bài trên ta có

$$-M \leq \frac{f(x) - f(t)}{x-t} \leq M \quad \text{với} \quad x,t \in (a,b),\, x \neq t.$$

Từ đó suy ra $|f(x) - f(t)| \leq M|x-t|$.

2.6.11. [C. E. Aull, Amer. Math. Monthly 74 (1967) 708-711]. Theo 2.6.9, tồn tại x_1 và x_2 nằm giữa x và $x+h$ ($x, x+h \in (a,b)$) sao cho

$$f^s(x_2) \leq \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq f^s(x_1).$$

Mặt khác từ tính liên tục của hàm f^s suy ra tồn tại x_3 nằm giữa x và $x+h$ sao cho $f^s(x_3) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Cho $h \to 0$ ta được $f^s(x) = f'(x)$.

2.6.12. Nếu $x, z \in \mathbf{I}$ và $x < z$ thì theo 2.6.9 tồn tại $x_2 \in (x,z)$ sao cho

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \geq f^s(x_2) \geq 0.$$

2.6.13. Tương tự bài trên.

2.6.14. Không. Xét hàm $f(x) = x - 2|x|$, $x \in (-1,1)$. Dễ dàng kiểm tra được rằng $f^s(0) = 1$ và $f(0)$ là cực đại của f trong $(-1,1)$.

Hình vẽ

2.6.15. [C. L. Belna, M.J. Evans, P. D. Humke, Amer. Math. Monthly 86 (1979) 121-123]. Ta đi chứng minh rằng tồn tại tập các thặng dư thoả mãn đẳng thức đầu là đủ, khi thay f bằng $-f$ trong đẳng thức thứ hai ta sẽ được điều phải chứng minh. Theo định nghĩa ta có $D_s f(x) \geq D_* f(x)$. Ta cần chứng minh rằng

$$\mathbf{A}(f) = \{x : D_s f(x) > D_* f(x)\}$$

thuộc phạm trù thứ nhất. Chú ý rằng $\mathbf{A}(f)$ là hợp đếm được của các tập

$$\mathbf{A}(f,\alpha) = \{x : D_s f(x) > \alpha > D_* f(x)\}, \quad \alpha \in \mathbb{Q}.$$

Do đó ta đi chứng minh rằng mỗi tập nói trên đều thuộc phạm trù thứ nhất. Vì $\mathbf{A}(f,\alpha) = \mathbf{A}(g,0)$ với $g(x) = f(x) - \alpha x$ nên ta chỉ cần chứng minh rằng

$bA(f, 0)$ thuộc phạm trù thứ nhất. Ta có

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(f,0) &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{A}_n(f,0)\\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\left\{x : f(x-h) \leq f(x+h) \text{ với } 0 < h < \frac{1}{n}\right\} \cap \mathbf{A}(f,0)\right).\end{aligned}$$

Vậy ta đi chứng minh rằng các tập $\mathbf{A}_n(f, 0)$ đều thuộc phạm trù thứ nhất. Giả sử phản chứng rằng tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $\mathbf{A}_n(f, 0)$ thuộc phạm trù thứ hai, khi đó tồn tại khoảng mở $\mathbf{I}$ sao cho $\mathbf{A}_n(f, 0)$ cũng thuộc phạm trù thứ hai trong mọi khoảng mở con của $\mathbf{I}$, thêm nữa ta giả sử độ rộng của $\mathbf{I}$ nhỏ hơn $\frac{1}{n}$ và $a, b \in \mathbf{I}$, $a < b$. Xét tập thặng dư $\mathbf{S} \subset \mathbb{R}$ sao cho $f_{|\mathbf{S}}$ liên tục và chọn $c \in \mathbf{S} \cap (a, b)$, lấy $\varepsilon > 0$ bất kỳ. Khi đó tồn tại tập con $\mathbf{J}$ của (a, b) sao cho $c \in \mathbf{J}$ và

$$(1) \qquad f(x) > f(c) - \varepsilon \quad \text{với} \quad x \in \mathbf{S} \cap \mathbf{J}.$$

Xét $\mathbf{K}$ là khoảng mở con của (a, b) sao cho $\bar{\mathbf{K}} = 2\mathbf{K} - b = \{y : y = 2x - b, x \in \mathbf{K}\} \subset \mathbf{J}$. Vì tập

$$\mathbf{S}_n = \left\{x : f(x-h) \leq f(x+h) \text{ với } 0 < h < \frac{1}{n}\right\}$$

thuộc phạm trù thứ hai trên $\mathbf{K}$ và $\mathbf{S}$ là tập thặng dư trên $\bar{\mathbf{K}}$ nên suy ra tập $(2\mathbf{S}_n - b) \cap (\mathbf{S} \cap \bar{\mathbf{K}}$ cũng thuộc phạm trù thứ hai, vì vậy khác rỗng. Ta chọn được $\tilde{x} \in \mathbf{S} \cap \bar{\mathbf{K}}$ sao cho $\frac{\tilde{x}+b}{2} \in \mathbf{S}_n$, đặt $h = \frac{b-\tilde{x}}{2}$ (hiển nhiên $0 < h < 1/n$) ta được $f(\tilde{x}) \leq f(b)$. Hơn nữa từ (1) suy ra $f(c) - \varepsilon < f(\tilde{x})$. Vì $\varepsilon > 0$ bất kỳ nên ta được $f(c) \leq f(b)$. Lập luận tương tự ta chứng minh được rằng $f(a) \leq f(c)$, suy ra f tăng trên $\mathbf{I}$, suy ra $D_* f(x) \geq 0$ với $x \in \mathbf{I}$, do đó $\mathbf{A}(f, 0) \cap \mathbf{I} = \emptyset$, vô lý. Ta được điều phải chứng minh.

2.6.16. Đây là hệ quả của bài toán trên, chú ý rằng đây chính là bài toán tổng quát của 2.6.6.

2.6.17. [J. Swetits, Amer. Math. Monthly 75 (1968), 1093-1095]. Giả sử rằng f bị chặn địa phương trên $[x_1, x_0)$ và $x - x_0 < \delta < 1$. Đặt trung điểm của $[x_1, x_0)$ là x_2 , khi đó tồn tại $M > 0$ sao cho $|f(x)| \leq M$ với $x \in [x_1, x_2]$. Chọn h, $0 < h < \delta/2$ sao cho

$$|f(x_2 + h)| > 1 + M + |f^s(x_2)|.$$

Khi đó

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(x_2+h) - f(x_2-h)}{2h} - f^s(x_2)\right| \\
&\geq \left|\frac{f(x_2+h) - f(x_2-h)}{2h}\right| - |f^s(x_2)| \\
&\geq |f(x_2+h)| - |f(x_2-h)| - |f^s(x_2)| \\
&\geq |f(x_2+h)| - M - |f^s(x_2)| > 1.
\end{aligned}$$

Vậy f không khả vi Schwarz đều trên $[a, b]$.

2.6.18. Sử dụng kết quả trong bài 2.6.9 và lập luận tương tự như bài 2.2.26 ta được điều phải chứng minh.

2.6.19. Xét hàm

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{với} \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \\ 1 & \text{với} \quad x = 0. \end{cases}$$

Khi đó f^s đồng nhất bằng 0 trên $\mathbb{R}$, vậy nó liên tục, nhưng f không khả vi Schwarz đều trên mọi khoảng chứa điểm 0.

2.6.20. [J. Swetits, Amer. Math. Monthly 75 (1968), 1093-1095]. Giả sử rằng f khả vi Schwarz đều trên mọi đoạn $[a, b] \subset \mathbf{I}$. Xét $x_0 \in (a, b)$ và $\delta_1 > 0$ sao cho $[x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1] \subset (a, b)$. Đặt $\mathbf{I}_1 = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$. Vì f bị chặn địa phương trên $\mathbf{I}$ nên tồn tại $M > 0$ sao cho

$$|f(x)| \leq M \quad \text{với} \quad x \in \mathbf{I}_1.$$

Xét $\delta > 0$ sao cho

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - f^s(x)\right| < 1$$

với $|h| < \delta$ và $x \in [a,b]$, khi đó với $x \in \mathbf{I}_2 = \left(x_0 - \frac{\delta_1}{2}, x_0 + \frac{\delta_1}{2}\right)$ và $|h_1| < \min\{\delta, \delta/2\}$ ta có

$$|f^s(x) < 1 + \left|\frac{f(x+h_1) - f(x-h_1)}{2h_1}\right| < 1 + \frac{2M}{2|h_1|}.$$

Vậy f^s bị chặn địa phương trên $\mathbf{I}$. Bây giờ ta cần chứng minh rằng f liên tục trên $\mathbf{I}$. Giả sử phản chứng rằng tồn tại điểm gián đoạn của f trên $[a,b]$ là điểm $x_0 \in [a,b] \subset \mathbf{I}$, khi đó tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho với mọi $\delta > 0$ tồn tại $x' \in [a,b] \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ mà $|f(x') - f(x_0)| > \varepsilon$. Vì f^s bị chặn địa phương nên tồn tại $M_1 > 0$ sao cho $|f^s(x)| \leq M_1$ với x thuộc khoảng có các đầu mút là x' và x_0, từ đó suy ra

$$\left|\frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} - f^s\left(\frac{x' + x_0}{2}\right)\right| \geq \frac{\varepsilon}{|x' - x_0|} - M_1,$$

điều này trái với giả thiết rằng f là khả vi Schwarz đều trên $[a,b]$, do vậy f liên tục trên $\mathbf{I}$ và sử dụng kết quả bài 2.6.18 ta suy ra f^s cũng liên tục trên $\mathbf{I}$. Kết hợp với 2.6.11 ta chứng minh được rằng f' tồn tại và liên tục trên $\mathbf{I}$. Điều ngược lại chính là một hệ quả của 2.6.18.

Chương 3

Dãy hàm và chuỗi hàm

3.1 Dãy hàm, sự hội tụ đều

3.1.1. Giả sử trước hết rằng $f_n \rightrightarrows f$. Khi đó, với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại n_0 sao cho

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

với mọi $n \geq n_0$ và mọi $x \in \mathbf{B}$. Từ đó, với $n \geq n_0$,

$$d_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in \mathbf{B}\} \leq \varepsilon,$$

và do đó, $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$.

Bây giờ giả sử rằng $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$. Khi đó

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in \mathbf{B}\} < \varepsilon$$

với n đủ lớn và với mọi $x \in \mathbf{B}$, tức là $\{f_n\}$ hội tụ đều trên $\mathbf{B}$ tới f.

3.1.2. Với $\varepsilon > 0$ cho trước, ta có

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{và} \quad |g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

với n đủ lớn và với mọi $x \in \mathbf{A}$. Vậy

$$|f_n(x) + g_n(x) - (f(x) + g(x))| \leq |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

với n đủ lớn và với mọi $x \in \mathbf{A}$.

Để thấy rằng khẳng định tương tự không đúng cho tích của hai dãy hội tụ đều, xét các hàm sau đây :

$$f_n(x) = x\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad \text{và} \quad g_n(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x \in (0,1).$$

Ta có $f_n \underset{(0,1)}{\rightrightarrows} f$ và $g_n \underset{(0,1)}{\rightrightarrows} g$, ở đây $f(x) = x$ và $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Mặt khác,

$$f_n(x)g_n(x) = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Vậy $\{f_n g_n\}$ hội tụ điểm trên $(0,1)$ tới hàm $x \mapsto \frac{1}{x}$. Vì

$$d_n = \sup\left\{\left|f_n(x)g_n(x) - \frac{1}{x}\right| : x \in (0,1)\right\} = +\infty, \quad n \in \mathbb{N},$$

sự hội tụ là không đều.

3.1.3. Trước hết chú ý rằng nếu $\{g_n\}$ hội tụ đều trên $\mathbf{A}$ tới hàm bị chặn g, thì tồn tại $C > 0$ sao cho với n đủ lớn,

$$|g_n(x)| \le C \quad \text{với mọi} \quad x \in \mathbf{A}.$$

Với $\varepsilon > 0$ cho trước, do $\{f_n\}$ và $\{g_n\}$ hội tụ đều, ta có

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2C} \quad \text{và} \quad |g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

với n đủ lớn và với mọi $x \in \mathbf{A}$. Từ đó, với n đủ lớn và với mọi $x \in \mathbf{A}$,

$$\begin{aligned}&|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)|\\ &\le |f_n(x) - f(x)||g_n(x)| + |g_n(x) - g(x)||f(x)| < \varepsilon.\end{aligned}$$

3.1.4. Từ tiêu chuẩn Cauchy cho sự hội tụ của dãy số thực, suy ra rằng $\{f_n\}$ hội tụ điểm trên $\mathbf{A}$, chẳng hạn tới f. Ta phải chứng minh rằng sự hộu tụ là đều. Lấy tuỳ ý $\varepsilon > 0$. Theo giả thiết, tồn tại n_0 sao cho nếu $n, m > n_0$, thì

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

với mọi $x \in \mathbf{A}$. Do tính liên tục của hàm giá trị tuyệt đối, ta nhận được

$$\lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$$

với mọi $x \in \mathbf{A}$ và với mọi $n > n_0$.

3.1.5. Gọi $\{f_n\}$ là dãy các hàm bị chặn hội tụ đều trên $\mathbf{A}$ tới f. Khi đó, với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|f(x)| \leq |f_{n_0}(x) - f(x)| + |f_{n_0}(x)| < \varepsilon + |f_{n_0}(x)|$$

với mọi $x \in \mathbf{A}$. Vì f_{n_0} bị chặn trên $\mathbf{A}$, f cũng bị chặn trên $\mathbf{A}$.
Hàm giới hạn của dãy hội tụ điểm các hàm bị chặn không nhất thiết bị chặn. Để thấy điều này, chẳng hạn lấy

$$f_n(x) = \min\left\{\frac{1}{n}, n\right\}, \quad x \in (0,1),\ n \in \mathbb{N}.$$

Dãy $\{f_n\}$ hội tụ tới hàm không bị chặn $x \mapsto 1/x$, $x \in (0,1)$.

3.1.6. Với $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Dãy không hội tụ đều trên $\mathbb{R}$ bởi vì $d_{2n} = +\infty$. Rõ ràng, dãy con f_{2n-1} hội tụ đều trên $\mathbb{R}$.

3.1.7. Chứng minh như trong 3.1.4.

3.1.8.

(a) Ta có

$$\frac{1}{1+(nx-1)^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x),$$

ở đây

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{với} \quad x \in (0,1] \\ \frac{1}{2} & \text{với} \quad x = 0. \end{cases}$$

Vì hàm giới hạn không liên tục, sự hội tụ là không đều (xem, chẳng hạn, 1.2.34).

(b) Ta có

$$\frac{x^2}{x^2+(nx-1)^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

và $d_n = \sup\{|f_n(x) - 0| : x \in [0,1]\} = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1$. Theo 3.1.1, sự hội tụ là không đều.

(c) Vì

$$x^n(1-x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

và $d_n = \sup\{|f_n(x) - 0| : x \in [0,1]\} = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$, ta thấy rằng $\{f_n\}$ hội tụ đều trên $[0,1]$.

(d) Dãy hội tụ không đều vì

$$d_n = \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e}.$$

(e) Vì rằng $d_n = f\left(\frac{n}{n+1}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, dãy hội tụ đều.

(f) Dãy hội tụ đều bởi vì

$$d_n = \sup\{|f_n(x) - x| : x \in [0,1]\} = 1 - f_n(1) = \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(g) Dãy hội tụ điểm tới

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{với} \quad x \in [0,1), \\ \frac{1}{2} & \text{với} \quad x = 1. \end{cases}$$

Vậy hàm giới hạn không liên tục và vì vậy dãy không hội tụ đều (xem, chẳng hạn, 1.2.34).

3.1.9.

(a) Dễ thấy rằng $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ và $d_n = \frac{1}{4}$. Vạy dãy không hội tụ đều trên $\mathbf{A}$. Mặt khác,

$$\sup\{|f_n(x)| : x \in \mathbf{B}\} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right), \quad n \geq 2,$$

và vì vậy dãy hội tụ đều trên $\mathbf{B}$.

(b) Dãy hội tụ đều trên $\mathbb{R}$ tới hàm không, và như vậy nó cũng hội tụ đều trên mỗi tập con của $\mathbb{R}$.

3.1.10.

(a) Vì $d_n = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$, $\{f_n\}$ hội tụ đều trên $\mathbb{R}$ tới 0.

(b) $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x^2$, và vì $f_n(\sqrt{n}) - n = n(\ln 2 - 1)$, chuỗi không hội tụ trên $\mathbb{R}$.

(c) Ta có $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{x}$. Dãy không hội tụ đều trên $(0, \infty)$, bởi vì $f\left(\frac{1}{n}\right) - n = n(\ln 2 - 1)$.

(d) $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$, ở đây

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{với} \quad |x| \le 1, \\ \frac{1}{2} & \text{với} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

Đặt $u_n = \sqrt[2n]{1 + x^{2n}}$. Khi đó, với $x > 1$,

$$\begin{aligned} \sqrt[2n]{1 + x^{2n}} &= u_n - x = \frac{u_n^{2n} - x^{2n}}{u_n^{2n-1} + u_n^{2n-2}x + \cdots + x^{2n-1}} \\ &= \frac{1}{u_n^{2n-1} + u_n^{2n-2}x + \cdots + x^{2n-1}} \le \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

Suy ra rằng

$$d_n \le \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| + \sup_{x\in[1,\infty)} |f_n(x) - f(x)| \le \sqrt[2n]{2} - 1 + \frac{1}{2n},$$

tức là $\{f_n\}$ hội tụ đều trên $\mathbb{R}$.

(e) Như trong (d), có thể chỉ ra rằng dãy hội tụ đều trên $\mathbb{R}$ tới

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{với} \quad |x| \le 2, \\ |x| & \text{với} \quad |x| > 2. \end{cases}$$

(f) Ta có

$$d_n = \sup |\sqrt{n+1} \sin^n x \cos x| = \left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Vậy dãy hội tụ không đều trên $\mathbb{R}$.

(g) Dãy hội tụ điểm tới $\ln x$ (xem, chẳng hạn, I, 2.5.4). Theo công thức Taylor,

$$\begin{aligned} d_n &= \sup_{x\in[1,a]} |n(\sqrt[n]{x}-1)-\ln x| = \sup_{x\in[1,a]} \left|n\left(e^{\frac{1}{n}\ln x}-1\right)-\ln x\right| \\ &= \sup_{x\in[1,a]} \left|n\left(1+\frac{1}{n}\ln x-\frac{\ln^2 x}{2n^2}e^{\zeta_n}-1\right)-\ln x\right| \le \frac{\ln^2 a}{2n}a^{\frac{1}{n}}, \end{aligned}$$

bởi vì $0<\zeta_n<\frac{\ln a}{n}$. Do đó, $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$, suy ra $f_n \underset{[1,a]}{\rightrightarrows} f$, ở đây $f(x)=\ln x$.

3.1.11. Ta có $[nf(x)] = nf(x)-p_n(x)$, ở đây $0\le p_n(x)<1$. Từ đó

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in[a,b]} \left|\frac{p_n(x)}{n}\right| \le \frac{1}{n},$$

và vì vậy $f_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$.

3.1.12. Vì

$$\begin{aligned} \sin\sqrt{4\pi^2n^2+x^2} &= \sin\left(2\pi n\sqrt{1+\frac{x^2}{4\pi^2n^2}}+2n\pi-2n\pi\right) \\ &= \sin 2n\pi\left(\sqrt{1+\frac{x^2}{4\pi^2n^2}}-1\right) \\ &= \sin\frac{x^2}{\sqrt{4\pi^2n^2+x^2}+2n\pi}, \end{aligned}$$

ta thấy rằng $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\sqrt{4\pi^2n^2} = \frac{x^2}{4\pi}$. Ngoài ra, nếu $x\in[0,a]$ thì, dùng bất đẳng thức $\sin x \ge x-\frac{x^3}{3!}$, ta nhận được

$$\left|n\sin\sqrt{4\pi^2n^2+x^2}-\frac{x^2}{4\pi}\right| \le \frac{a^2}{4\pi}\left(1-\frac{2}{\sqrt{1+\frac{n^2}{4\pi^2n^2}}+1}\right)+\frac{n}{3!}\frac{a^6}{8n^2\pi^2}.$$

Điều này suy ra sự hội tụ đều của dãy trên $[0,a]$.

Với $x\in\mathbb{R}$, theo bất đẳng thức $|\sin x|\le|x|$, ta có

$$\left|n\sin\sqrt{4\pi^2n^2+x^2}-\frac{x^2}{4\pi}\right| \ge \frac{x^2}{4\pi}\left(1-\frac{2}{\sqrt{1+\frac{n^2}{4\pi^2n^2}}+1}\right)$$

suy ra dãy hội tụ không đều trên $\mathbb{R}$.

3.1.13. Trước hết, ta chứng minh bằng quy nạp rằng, với mọi n nguyên dương,

$$0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \frac{2\sqrt{x}}{2 + n\sqrt{x}} < \frac{2}{n}, \quad x \in [0, 1].$$

Với $n = 1$, bất đẳng thức là hiển nhiên. Bây giờ, giả sử bất đẳng thức đúng với n, ta sẽ chứng minh đẳng thức đúng với $n + 1$. Theo giả thiết quy nạp

$$0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \sqrt{x}.$$

Từ đó, theo định nghĩa của P_{n+1},

$$\sqrt{x} - P_{n+1}(x) = (\sqrt{x} - P_n(x)) \left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + P_n(x))\right).$$

Vậy $\sqrt{x} - P_{n+1}(x) \geq 0$. Ngoài ra,

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - P_{n+1}(x) &\leq \frac{2\sqrt{x}}{2 + n\sqrt{x}} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right) \\ &\leq \frac{2\sqrt{x}}{2 + n\sqrt{x}} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2 + (n+1)\sqrt{x}}\right) \\ &= \frac{2\sqrt{x}}{2 + (n+1)\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Vì $|x| = \sqrt{x^2}$, suy ra từ các bất đẳng thức đã chứng minh rằng dãy các đa thức $\{P_n(x^2)\}$ hội tụ đều trên $[-1, 1]$ tới hàm giá trị tuyệt đối $|x|$.

3.1.14. Theo định lí giá trị trung bình,

$$\left| \frac{f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}} - f'(x) \right| = |f'(\zeta_n) - f'(x)|,$$

ở đây $\zeta_n \in \left(x, x + \frac{1}{n}\right)$. Vì đạo hàm f' liên tục đều trên $\mathbb{R}$, với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại n_0 sao cho nếu $n \geq n_0$, thì

$$|f'(\zeta_n) - f'(x)| < \varepsilon \quad \text{với mọi} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Vậy ta đã chứng minh dãy hội tụ đều trên $\mathbb{R}$.

Xét $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$d_n = \sup \left| \frac{f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}} - f'(x) \right| = \sup \left| 3x\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right| = +\infty,$$

suy ra dãy hội tụ không đều. Vậy giả thiết liên tục đều của f' là không bỏ được.

3.1.15. Gọi $\varepsilon > 0$ tuỳ ý. Từ tính liên tục đều của dãy trên $\mathbb{R}$, suy ra rằng tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|f_{n_0}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{với mọi} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Bây giờ, do tính liên tục đều của f_{n_0}, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x')| < \frac{\varepsilon}{3}$ bất cứ khi nào $|x - x'| < \delta$. Do đó,

$$|f(x) - f(x')| \le |f_{n_0}(x) - f(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x')| + |f_{n_0}(x') - f(x')| < \varepsilon$$

bất cứ khi nào $|x - x'| < \delta$.

3.1.16. Đặt $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$ với $x \in \mathbf{K}$. Ta sẽ chỉ ra rằng $\{g_n\}$ hội tụ đều tới 0 tren $\mathbf{K}$. Gọi $\varepsilon > 0$ tuỳ ý. Vì $\{g_n\}$ hội tụ điểm tới 0 trên $\mathbf{K}$, với $x \in \mathbf{K}$, tồn tại n_x sao cho

$$0 \le g_{n_x} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Suy ra từ tính liên tục của g_{n_x} và từ tính đơn điệu của dãy $\{g_n\}$ rằng tồn tại lân cận $\mathbf{O}(x)$ của x sao cho

(1) $$0 \le g_n(t) < \varepsilon \quad \text{với} \quad n \ge n_x \quad \text{và} \quad t \in \mathbf{O}(x).$$

Vì $\mathbf{K}$ compact, tồn tại hữu hạn điểm $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{K}$ sao cho $\mathbf{K} \subset \mathbf{O}(x_1) \cup \mathbf{O}(x_2) \cup \cdots \cup \mathbf{O}(x_n)$. Bây giờ, nếu

$$n_0 = \max\{n_{x_1}, n_{x_2}, \dots, n_{x_n}\},$$

thì (1) đúng với mọi $n > n_0$ và mọi $x \in \mathbf{K}$.

Để thấy tính compact của $\mathbf{K}$ là không bỏ được, xét

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx}, \quad x \in (0,1),\, n = 1, 2, \ldots .$$

Khi đó, $d_n = \sup\limits_{x\in(0,1)} |f_n(x) - f(x)| = 1$, và vì vậy dãy hội tụ không đều.

Tính liên tục của hàm giới hạn cũng không bỏ được. Thực vậy, dãy

$$f_n(x) = x^n, \quad x \in [0,1],\, n \in \mathbb{N},$$

không hội tụ đều trên $[0,1]$.

Ví dụ sau chỉ ra giả thiết về tính liên tục của f_n không bỏ được. Các hàm

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad x = 0 \ \text{ hoặc } \ \frac{1}{n} \le x \le 1, \\ 1 & \text{nếu} \quad 0 < x < \frac{1}{n} \end{cases}$$

không liên tục. Chúng tạo thành dãy đơn điệu hội tụ điểm tới 0 trên $[0,1]$, nhưng dãy hội tụ không đều. Cuối cùng, các hàm xác định bởi

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2 x & \text{với} \quad 0 \le \frac{1}{2n}, \\ n - 2n^2\left(x - \frac{1}{2n}\right) & \text{với} \quad \frac{1}{2n} < x \le \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{với} \quad \frac{1}{n} < x \le 1 \end{cases}$$

liên tục và tạo thành dãy hội tụ điểm tới 0 trên $[0,1]$. Chú ý rằng dãy $\{f_n\}$ không đơn điệu và dãy hội tụ không đều.

3.1.17. Gọi $\{f_n\}$ là dãy các hàm liên tục hội tụ đều trên tập compact $\mathbf{K}$ tới hàm giới hạn f. Lấy $\varepsilon > 0$. Chọn n_0 sao cho (xem 3.1.7)

$$|f_n(x) - f_{n_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{với} \quad n > n_0 \quad \text{và mọi} \quad x \in \mathbf{K}.$$

Tiếp theo, vì mỗi hàm f_n liên tục đều trên $\mathbf{K}$, có thể chọn $\delta > 0$ sao cho nếu $x, x' \in \mathbf{K}$ và $|x - x'| < \delta$, thì

$$(1) \qquad |f_k(x) - f_k(x')| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{với} \quad 1 \le k \le n_0.$$

Vì vậy, ta nhận được

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f_n(x')| &\leq |f_n(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x')| \\ &\quad + |f_{n_0}(x') - f_n(x')| < \varepsilon\end{aligned}$$

với $|x - x'| < \delta$ và $n > n_0$. Từ đây và (1), suy ra tính liên tục đồng bậc của dãy $\{f_n\}$ trên $\mathbf{K}$.

3.1.18. Gọi $\{f_{n_k}\}$ là dãy con của $\{f_n\}$, và $\{x_n\}$ là dãy các phần tử của $\mathbf{A}$ hội tụ tới $x \in \mathbf{A}$. Ta xác định dãy $\{y_m\}$ bằng cách đặt

$$y_m = \begin{cases} x_1 & \text{với} \quad 1 \leq m \leq n_1, \\ x_2 & \text{với} \quad n_1 < m \leq n_2, \\ \cdots \\ x_k & \text{với} \quad n_{k-1} < m \leq n_k, \\ \cdots \end{cases}$$

Khi đó, dãy $\{y_m\}$ hội tụ tới x, vì thế $\lim\limits_{m\to\infty} f_m(y_m) = f(x)$. Vậy $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(y_{n_k}) = \lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x_k) = f(x)$.

3.1.19. Trước hết chú ý rằng nếu $\{f_n\}$ hội tụ liên tục trên $\mathbf{A}$ tới f, thì $\{f_n\}$ hội tụ điểm tới hàm giới hạn f. Để thấy điều này, chỉ cần xét dãy hằng mà tất cả các số hạng của nó đều bằng một phần tử của $\mathbf{A}$. Chọn tuỳ ý $x \in \mathbf{A}$ và gọi $\{x_n\}$ là dãy các phần tử trong $\mathbf{A}$ hội tụ tới x. Với $\varepsilon > 0$ cho trước, sự hội tụ điểm của dãy suy ra tồn tại n_1 (có thể phụ thuộc x_1) sao cho

$$|f_{n_1}(x_1) - f(x_1)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tương tự, tồn tại n_2 (có thể phụ thuộc x_2), $n_2 > n_1$, sao cho

$$|f_{n_2}(x_2) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tiếp tục quá trình này, ta nhận được dãy $\{n_k\}$ sao cho

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ngoài ra, theo kết quả trong bài toán trước,

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad k \geq k_0.$$

Do đó, $|f(x_k) - f(x)| \leq |f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| + |f_{n_k}(x_k) - f(x)| < \varepsilon$ với $k \geq k_0$.

3.1.20. Gọi $\{x_n\}$ là dãy các phần tử trong $\mathbf{A}$ hội tụ tới $x \in \mathbf{A}$. Gọi $\varepsilon > 0$ cho trước. Từ tính hội tụ đều của $\{f_n\}$, suy ra rằng

$$|f(x_n) - f_n(x_n)| \leq \sup_{y \in \mathbf{A}} |f(y) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{với} \quad n \geq n_0.$$

Vì f liên tục,

$$|f(x_n) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{với} \quad n \geq n_1.$$

Từ đó, nếu $n \geq \max\{n_0, n_1\}$, ta có

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| < \varepsilon.$$

Ví dụ sau chỉ ra điều ngược lại không đúng. Gọi $\mathbf{A} = (0,1)$ và $f_n(x) = x^n$. Dễ thấy $\{f_n\}$ không hội tụ đều tới 0 trên $(0,1)$. Tuy nhiên $\{f_n\}$ hội tụ liên tục trên $(0,1)$. Thật vậy, nếu $\{x_n\}$ là dãy các điểm trong $(0,1)$ hội tụ tới $x \in (0,1)$, thì tồn tại $0 < a < 1$ sao cho $x_n < a$. Vì vậy, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) = 0$.

3.1.21. (i) $\Longrightarrow$ (ii) đã được chứng minh trong bài toán trước. Ta phải chứng minh (ii) $\Longrightarrow$ (i). Ta biết rằng hàm giới hạn f liên tục trên $\mathbf{K}$. Giả sử ngược lại rằng $\{f_n\}$ không hội tụ đều trên $\mathbf{K}$. Khi đó, tồn tại $\varepsilon_0 > 0$, dãy $\{n_k\}$ các số nguyên dương, và dãy $\{x_k\}$ các phần tử trong $\mathbf{K}$ sao cho

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| > \varepsilon_0.$$

Vì $\mathbf{K}$ compact, không mất tổng quát, có thể giả sử rằng $\{x_k\}$ hội tụ, chẳng hạn, tới $x \in \mathbf{K}$. Mặt khác, theo 3.1.18,

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x)| < \frac{\varepsilon_0}{3} \quad \text{với} \quad k > k_0.$$

Ngoài ra, do tính liên tục của f

$$|f(x_k) - f(x)| < \frac{\varepsilon_0}{3} \quad \text{với} \quad k > k_1.$$

Vậy, với k đủ lớn,

$$\varepsilon_0 < |f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \le |f_{n_k}(x_k) - f(x)| + |f(x) - f(x_k)| < \frac{2}{3}\varepsilon_0,$$

mâu thuẫn.

3.1.22. Giả sử, chẳng hạn, rằng hàm f_n tăng trên $[a, b]$. Rõ ràng, f liên tục đều trên $[a, b]$. Lấy $\varepsilon > 0$. Do tính liên tục đều của f, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}$$

bất cứ khi nào $|x - x'| < \delta$, $x, x' \in [a, b]$. Bây giờ, chọn $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k = b$ sao cho $|x_i - x_{i-1}| < \delta$, $i = 1, 2, \dots, k$. Vì

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

tồn tại n_0 sao cho nếu $n > n_0$ thì

$$|f_n(x - i) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad i = 1, 2, \dots, k. \tag{1}$$

Rõ ràng, với mỗi $x \in [a, b]$, tồn tại một i sao cho $x_{i-1} \le x < x_i$. Bây giờ, từ tính đơn điệu của f_n và (1) suy ra

$$f(x_{i-1}) - \frac{\varepsilon}{2} < f_n(x_{i-1}) \le f_n(x) \le f_n(x_i) < f(x_i) + \frac{\varepsilon}{2}$$

với $n > n_0$. Vì f tăng, ta có $f(x_{i-1}) \le f(x) \le f(x_i)$. Kết hợp với tính liên tục đều của f, được

$$-\varepsilon < f(x_{i-1}) - f(x_i) - \frac{\varepsilon}{2} \le f_n(x) - f(x) \le f(x_i) - f(x_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Vậy ta đã chứng minh $\{f_n\}$ hội tụ đều trên $[a, b]$.

3.1.23. Trước hết, ta chứng minh rằng tồn tại dãy con $\{f_n\}$ hội tụ trên tập số hữu tỷ $\mathbb{Q}$. Vì $\mathbb{Q}$ đếm được, ta có thể viết $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \dots\}$. Dãy $\{f_n(r_1)\}$ bị chặn, vậy nó chứa dãy con hội tụ $\{f_{n,1}(r_1)\}$. Tiếp theo, vì $\{f_{n,1}(r_2)\}$ bị chặn, tồn tại dãy con hội tụ $\{f_{n,2}(r_2)\}$. Rõ ràng $\{f_{n,2}(r_2)\}$ cũng hội tụ. Lặp lại quá trình trên, ta thu được dãy các dãy $\{f_{n,1}\}$, $\{f_{n,2}\}, \dots$ với các tính chất sau :

- $\{f_{n,k+1}\}$ là dãy con của $\{f_{n,k}\}$ với $k = 1, 2, \ldots,$
- dãy $\{f_{n,k}(r_i)\}$ hội tụ với $k \in \mathbb{N}$ và $i = 1, 2, \ldots, k$.

Vậy dãy đường chéo $\{f_{n,n}\}$ hội tụ trên $\mathbb{Q}$. Theo cách này, ta đã xây dựng dãy con $\{f_{n_k}\}$ hội tụ điểm trên $\mathbb{Q}$, chẳng hạn, tới f. Rõ ràng, f tăng trên $\mathbb{Q}$. Bây giờ, ta thác triển f lên $\mathbb{R}$ bằng cách đặt

$$f(x) = \sup\{f(r) : r \in \mathbb{Q},\, r \leq x\}.$$

Hàm đã thác triển f cũng liên tục trên $\mathbb{R}$. Bây giờ, ta chứng minh rằng nếu f liên tục tại x, thì $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$. Để làm vậy, xét hai dãy hữu tỷ $\{p_n\}$ và $\{q_n\}$ hội tụ tới x sao cho $p_n < x < q_n$. Tính đơn điệu của f_{n_k} suy ra $f_{n_k}(p_n) \leq f_{n_k}(x) \leq f_{n_k}(q_n)$. Bây giờ, cho $k \to \infty$, ta có

$$f(p_n) \leq \liminf_{k\to\infty} f_{n_k}(x) \leq \limsup_{k\to\infty} f_{n_k}(x) \leq f(q_n).$$

Tiếp theo, chuyển qua giới hạn khi $n \to \infty$ (xem, chẳng hạn, 1.1.35), ta được

$$f(x^-) \leq \liminf_{k\to\infty} f_{n_k}(x) \leq \limsup_{k\to\infty} f_{n_k}(x) \leq f(x^+).$$

Suy ra rằng $f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$ tại mỗi điểm liên tục x của hàm f. Ta biết rằng tập $\mathbf{D}$ các điểm gián đoạn của hàm đơn điệu là đếm được (xem, chẳng hạn, 1.2.29). Vậy ta có $f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$ trên tập $\mathbb{R} \setminus \mathbf{D}$, và do $\{f_{n_k}\}$ bị chặn trên tập đếm được $\mathbf{D}$, ta có thể dùng phương pháp đường chéo một lần nữa để chon dãy con của $\{f_{n_k}\}$ hội tụ điểm trên $\mathbf{D}$. Rõ ràng, dãy con này hội tụ trên toàn $\mathbb{R}$.

3.1.24. Nếu $\mathbf{K}$ là tập con compact của $\mathbb{R}$, thì tồn tại khoảng đóng $[a, b]$ sao cho $\mathbf{K} \subset [a, b]$. Rõ ràng f liên tục đều trên $[a, b]$. Theo kết qủa trong 3.1.22, $\{f_{n_k}\}$ hội tụ đều trên $[a, b]$, và vì vậy nó cũng hội tụ đều trên $\mathbf{K}$.

Ví dụ sau chỉ ra rằng $\{f_{n_k}\}$ có thể hội tụ đều trên $\mathbb{R}$. Đặt

$$f_n(x) = \left(\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}\right)\right)^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Mỗi f_n đơn điệu thực sự trên $\mathbb{R}$, và $\{f_n\}$ hội tụ điểm tới $f(x) \equiv 0$. Tuy nhiên, sự hội tụ là không đều.

3.1.25. Trước hết, ta chứng minh rằng nếu $\{P_n\}$ là dãy các đa thức hội tụ đều trên $\mathbb{R}$, thì bắt đầu với giá trị nào đó của chỉ số n, mọi P_n có cùng bậc. Thực vậy, nếu điều này không đúng, thì với mọi $k \in \mathbb{N}$, tồn tại $n_k > k$ sao cho bậc của P_k khác bậc của P_{n_k}. Do đó,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |P_{n_k} - P_n(x)| = +\infty,$$

mâu thuẫn với tiêu chuẩn Cauchy cho sự hội tụ đều (xem, chẳng hạn, 3.1.7). Từ đó, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho nếu $n \geq n_0$, thì

$$P_n(x) = a_{n,p}x^p + a_{n,p-1}x^{p-1} + \cdots + a_{n,1}x + a_{n,0}.$$

Lại theo tiêu chuẩn Cauchy cho sự hội tụ đều, ta thấy nếu $n \geq n_0$, thì các hệ số $a_{n,i}$, $i = 1, 2, \ldots, p$, là hằng số (độc lập với n), tức là,

$$P_n(x) = a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \cdots + a_1 x + a_{n,0}.$$

Rõ ràng, dãy đa thức như vậy hội tụ đều trên $\mathbb{R}$ tới đa thức

$$P(x) = a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

ở đây $a_0 = \lim_{n\to\infty} a_{n,0}$.

3.1.26. Rõ ràng, (i) $\Longrightarrow$ (ii). Bây giờ ta chứng minh rằng (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Thực vậy,

$$\begin{aligned}
&a_{n,0} + a_{n,1}c_0 + \cdots + a_{n,p}c_0^p = P_n(c_0),\\
&a_{n,0} + a_{n,1}c_1 + \cdots + a_{n,p}c_1^p = P_n(c_1),\\
&\cdots\\
&a_{n,0} + a_{n,1}c_p + \cdots + a_{n,p}c_p^p = P_n(c_p).
\end{aligned} \tag{1}$$

Vì định thức Vandermonde

$$\det \begin{vmatrix} 1 & c_0 & c_0^2 & \dots & c_0^p \\ 1 & c_1 & c_1^2 & \dots & c_1^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & c_p & c_p^2 & \dots & c_p^p \end{vmatrix}$$

khác không, hệ phương trình tuyến tính (1) có duy nhất nghiệm và $a_{n,i}$, $i = 0, 1, 2, \dots, p$, có thể được xác định bằng qui tắc Cramer. Do đó, (ii) suy ra sự hội tụ của mỗi dãy $a_{n,i}$, $i = 0, 1, 2, \dots, p$. Dễ chứng minh (iii) $\Longrightarrow$ (i).

3.1.27. Vì $\{f_n\}$ liên tục đồng bậc, với $\varepsilon > 0$ cho trước, có thể chọn $\delta > 0$ sao cho với mọi $n \in \mathbb{N}$

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1}$$

bất cứ khi nào $|x - y| < \delta$, $x, y \in \mathbf{K}$. Cho $n \to \infty$, ta có

$$|f(x) - f(y)| \le \frac{\varepsilon}{3} \tag{2}$$

(Chú ý điều nàu chỉ ra rằng f liên tục đều trên $\mathbf{K}$.) Vì $\mathbf{K}$ compact, tồn tại hữu hạn khoảng mở $(x_i - \delta, x_i + \delta)$, $i = 1, 2, \dots, k$, $x_i \in \mathbf{K}$, phủ $\mathbf{K}$. Do tính hội tụ điểm của $\{f_n\}$, tồn tại n_0 sao cho nếu $n > n_0$, thì

$$|f_n(x_i) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad i = 1, 2, \dots, k. \tag{3}$$

Rõ ràng, với $x \in \mathbf{K}$, tồn tại i sao cho $|x - x_i| < \delta$. Vậy theo (1), (2) và (3), nếu $n > n_0$, thì

$$|f_n(x) - f(x)| \le |f_n(x) - f_n(x_i)| + |f_n(x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)| < \varepsilon.$$

3.1.28. Quan sát rằng $\{f_n\}$ liên tục đồng bậc trên $[a, b]$. Thực vậy, theo định lí giá trị trung bình,

$$|f_n(x) - f_n(y)| = |f_n'(\zeta)||x - y| \le M|x - y|$$

với mọi $x, y \in [a, b]$ và $n \in \mathbb{N}$. Từ bài toán trước, ta có điều phải chứng minh.

3.1.29.

(a) Vì $|f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, dãy hội tụ đều trên $\mathbb{R}$. Ta có $f_n'(x) = \sqrt{n}\cos nx$. Từ đó $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(0) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$. Ngoài ra, nếu $x \neq 0$, thì giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(0)$ không tồn tại. Thực vậy, nếu $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(0) = l$, thì với n đủ lớn, ta sẽ có $|\cos nx| < \frac{1}{2}$. Vậy $|\cos 2nx| = 1 - 2\cos^2 nx > \frac{1}{2}$, mâu thuẫn. Vậy $\{f_n'\}$ không hội tụ tại bất cứ điểm nào.

(b) Vì $|f_n(x)| \leq \frac{1}{2n}$, dãy hội tụ đều trên $[-1, 1]$. Mặt khác,

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - n^2x^2}{(1 + n^2x^2)^2} = \begin{cases} 1 & \text{với} \quad x = 0, \\ 0 & \text{với} \quad x \neq 0. \end{cases}$$

Giới hạn điểm của $\{f_n'\}$ gián đoạn tại 0, và vì vậy $\{f_n'\}$ không hội tụ đều.

3.1.30. Trước hết giả sử rằng $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$. Lấy $\varepsilon > 0$. Khi đó tồn tại $\delta > 0$ sao cho nếu $0 < |x - x_0| < \delta$, thì $|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$. Do $\{f_n\}$ hội tụ đều trên $\mathbf{A}$,

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{với} \quad n \geq n_0,\ x \in \mathbf{A}.$$

Từ đó,

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

bât cứ khi nào $0 < |x - x_0| < \delta$ và $n \geq n_0$. Vì $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)$ tồn tại, suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = l$.

Bây giờ, giả sử rằng $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = l$. Đặt $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = g_n(x_0)$. Vậy ta có $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x_0) = l$. Lấy $\varepsilon > 0$. Do tính hội tụ đều của $\{f_n\}$, tồn tại n_1 sao cho $n > n_1$ kéo theo

$$(1) \qquad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad x \in \mathbf{A}.$$

Theo trên, tồn tại n_2 sao cho nếu $n > n_2$, thì

$$(2) \qquad |g_n(x_0) - l| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Cố định $n_0 > \max\{n_1, n_2\}$. Vì $\lim\limits_{x\to x_0} f_{n_0}(x) = g_{n_0}(x_0)$, ta có

$$(2) \qquad |f_{n_0}(x) - g_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

nếu $|x - x_0| < \delta_{n_0}$. Theo (1), (2) và (3), ta thấy rằng $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$.

Đẳng thức $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ có thể được thiết lập tương tự.

3.1.31. Lấy $\varepsilon > 0$. Chọn n_0 sao cho nếu $n, m \geq n_0$, thì

$$(1) \qquad |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

và

$$(2) \qquad |f'_n(t) - f'_m(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad t \in [a, b].$$

Kết hợp với định lí giá trị trung bình áp dụng cho hàm $f_n - f_m$, ta được

$$(3) \qquad |f_n(x) - f_m(x) - f_n(t) + f_m(t)| < \frac{\varepsilon|x-t|}{2(b-a)} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

với $n, m \geq n_0$ và $x, t \in [a, b]$. Bây giờ, theo (3) và (1),

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| \ &\leq \ |f_n(x) - f_m(x) - f_n(x_0) + f_m(x_0)| \\ &\quad\ |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Tiêu chuẩn Cauchy cho sự hội tụ đều được thoả mãn (xem, chẳng hạn, 3.1.7). Chọn tuỳ ý $x \in [a, b]$. Xác định các hàm h và h_n bởi

$$h(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}, \quad h_n(t) = \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}, \quad t \in [a, b], \, t \neq x.$$

Khi đó, $\lim\limits_{t\to x} h_n(t) = f'_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$. Theo (3),

$$|h_n(t) - h_m(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad n, m \geq n_0,$$

tức là $\{h_n\}$ hội tụ đều (hiển nhiên tới h) trên $[a, b] \setminus \{x\}$. Áp dụng kết quả trong bài toán trướccho dãy $\{h_n\}$ và tập $[a, b] \setminus \{x\}$, ta nhận được $\lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x) = \lim\limits_{t\to x} h(t) = f'(x)$.

3.1.32. Đẳng thức

$$1 = (x + (1-x))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

suy ra

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Do đó,

$$(1) \qquad |B_n(f,x) - f(x)| \le \sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Do tính liên tục của f trên $[0,1]$, với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

bất cứ khi nào $|| < \delta$, $x, x' \in [0,1]$. Rõ ràng, tồn tại $M > 0$ sao cho $|f(x)| \le M$ với $x \in [0,1]$. Lấy x tuỳ ý trong $[0,1]$. Khi đó, tập $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ có thể phân tích thành hai tập

$$\mathbf{A} = \left\{ k : \left| \frac{k}{n} - x \right| < \delta \right\} \quad \text{và} \quad \mathbf{B} = \left\{ k : \left| \frac{k}{n} - x \right| \ge \delta \right\}.$$

Nếu $k \in \mathbf{A}$, thì

$$\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| < \varepsilon,$$

và như vậy

$$(2) \qquad \sum_{k \in \mathbf{A}} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| < \varepsilon \sum_{k \in \mathbf{A}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \le \varepsilon.$$

Nếu $k \in \mathbf{B}$, thì

$$\frac{(k - nx)^2}{n^2 \delta^2} \ge 1,$$

và theo bất đẳng thức đã cho trong 2.5.52, ta có

$$\begin{aligned} &\sum_{k \in \mathbf{B}} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\le \frac{2M}{n^2 \delta^2} \sum_{k \in \mathbf{B}} (k - nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \le \frac{M}{2n\delta^2}. \end{aligned}$$

Kết hợp với (1) và (2), được

$$|B_n(f,x) - f(x)| \le \varepsilon + \frac{M}{2n\delta^2}, \quad x \in [0,1].$$

3.1.33. Nếu $[a,b] = [0,1]$, thì ta lấy $P(x) = B_n(f,x)$. Nếu $[a,b] \neq [0,1]$, thì ta có thể áp dụng kết quả trong bài toán trước cho hàm $g(y) = f(a+(b-a))$, $y \in [0,1]$. Vậy, với $\varepsilon > 0$, tồn tại đa thức Bernstein $B_n(g,y)$ sao cho

$$|g(y) - B_n(g,y)| < \varepsilon, \quad y \in [0,1].$$

Đặt $x = a + y(b-a)$, ta được

$$\left| f(x) - B_n\left(g, \frac{x-a}{b-a}\right)\right| < \varepsilon.$$

3.2 Chuỗi hàm, sự hội tụ đều

3.2.1.

(a) Nếu $x \in (-1,1]$, thì $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^2} \neq 0$. Vậy chuỗi phân kỳ theo điều kiện cần cho sự hội tụ. Nếu $|x| > 1$, thì $|x|^n \ge 2$ với n đủ lớn. Từ đó

$$\left|\frac{1}{1+x^n}\right| \le \frac{1}{|x|^n - 1} \le \frac{2}{|x|^n},$$

và chuỗi hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.

(b) Rõ ràng, chuỗi hội tụ nếu $x = 0$. Nếu $x \neq 0$, thì

$$\frac{x^n}{1+x^n} = \frac{1}{1+x^{\frac{1}{n}}}.$$

Vì vậy, theo (a), chuỗi hội tụ với $-1 < x < 1$.

(c) Nếu $x = 0$, chuỗi phân kỳ. Nếu $x \neq 0$, thì

$$\frac{2^n + x^n}{1 + 3^n x^n} = \frac{\left(\frac{2}{3x}\right)^n + \frac{1}{3^n}}{1 + \frac{1}{3^n x^n}}.$$

Vậy số hạng thứ n của chuỗi hội tụ tới 0 nếu và chỉ nếu $\left|\frac{2}{3x}\right| < 1$, tức là, nếu $|x| > \frac{2}{3}$. Theo tiêu chuẩn so sánh, chuỗi hội tụ nếu $x \in (-\infty, -2/3) \cup (2/3, \infty)$.

(d) Ta có

$$\frac{x^{n-1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})} = \frac{1}{x(1-x)}\left(\frac{1}{1-x^n} - \frac{1}{1-x^{n+1}}\right).$$

Từ đó,

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \sum_{n=1}^{N} \frac{x^{n-1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})} \\ &= \frac{1}{x(1-x)}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{N+1}}\right). \end{aligned}$$

Do đó,

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2} & \text{nếu} \quad |x| < 1, \\ \frac{1}{x(1-x)^2} & \text{nếu} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

Vậy chuỗi hội tụ trên $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

(e) Ta có

$$\frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n}} = \frac{1}{1-x^{2n-1}} - \frac{1}{x^{2n}}.$$

Từ đó

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & \text{nếu} \quad |x| < 1, \\ \frac{1}{1-x} & \text{nếu} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

Vậy chuỗi hội tụ trên $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

(f) Nếu $x \leq 0$, thì chuỗi phân kỳ vì điều kiện cần cho sự hội tụ không được thoả mãn. Với $x > 0$, theo tiêu chuẩn cô đặc Cauchy (xem, chẳng hạn, I, 3.2.28) chuỗi đã cho hội tụ nếu và chỉ nếu $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n^x}{2^{n(x-1)}}$ hội tụ. Theo tiêu chuẩn căn, chuỗi thứ hai hội tụ nếu $x > 1$ và phân kỳ nếu $x < 1$. Nếu $x = 1$, thì chuỗi phân kỳ. Tóm lại, miền hội tụ là $(1, \infty)$.

(g) Vì $x^{\ln n} = n^{\ln x}$, chuỗi hội tụ nếu $\ln x < -1$ và phân kỳ nếu $\ln x \geq -1$. Vậy miền hội tụ là $\left(0, \frac{1}{e}\right)$.

(h) Ta có

$$\sin^2\left(2\pi\sqrt{n^2+x^2}\right) = \sin^2\left(2n\pi\frac{\frac{x^2}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{n^2}}+1}\right) \le \frac{\pi^2 x^4}{n^2}.$$

Theo tiêu chuẩn so sánh, chuỗi hội tụ với mọi x.

3.2.2.

(a) Vì $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ với $x > 0$, ta có

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(n^2(1+x^2)) = \operatorname{arctg}\frac{1}{n^2(1+x^2)} < \frac{1}{n^2(1+x^2)} \le \frac{1}{n^2}.$$

Theo tiêu chuẩn Weierstrass (tiêu chuẩn hội tụ trội), chuỗi hội tụ đều trên $\mathbb{R}$.

(b) Với $x \in [2,\infty)$,

$$\frac{\ln(1+nx)}{nx^n} \le \frac{1}{x^{n-1}} \le \frac{1}{2^{n-1}},$$

và do đó, chuỗi hội tụ đều theo tiêu chuẩn Weierstrass.

(c) Vì $\sup\left\{n^2x^2e^{-n^2|x|} : x \in \mathbb{R}\right\} = \frac{4}{n^2e^2}$, chuỗi hội tụ đều trên $\mathbb{R}$ theo tiêu chuẩn Weierstrass.

(d) Chuỗi hội tụ điểm tới

$$S(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu} \quad x \in [-1,1]\setminus\{0\}, \\ 01 & \text{nếu} \quad x = 0. \end{cases}$$

Vì S không liên tục, chuỗi không hội tụ đều trên $[-1,1]$.

(e) Chú ý rằng

$$\sup_{1/2\le|x|\le 2}\left|\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n})\right| \le \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(2^n+2^n) = \frac{n^2}{\sqrt{n!}}2^{n+1}.$$

Vì $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}2^{n+1}$ hội tụ, chẳng hạn theo tiêu chuẩn tỷ số, chuỗi hội tụ đều trên $\mathbf{A}$ theo tiêu chuẩn Weierstrass.

(f) Chuỗi không hội tụ đều trên **A** theo tiêu chuẩn Cauchy. Thực vậy, nếu $0 < \frac{1}{3^n x} \leq \frac{\pi}{2}$, thì

$$\begin{aligned} |S_{n+m}(x) - S_n(x)| &= 2^{n+1} \sin \frac{1}{3^{n+1}x} + \cdots + 2^{n+m} \sin \frac{1}{3^{n+m}x} \\ &= 2^{n+1} \sin \frac{2}{\pi} \frac{1}{3^{n+1}x} + \cdots + 2^{n+m} \sin \frac{2}{\pi} \frac{1}{3^{n+m}x} \\ &= 2^{n+1} \frac{2}{\pi 3^{n+1}x}. \end{aligned}$$

Đặt $x = \frac{1}{3^n}$, ta thu được

$$\left| S_{n+m}\left(\frac{1}{3^n}\right) - S_n\left(\frac{1}{3^n}\right) \right| \geq \frac{2^{n+2}}{3\pi} \geq \frac{2^3}{3\pi}.$$

(g) Sự hội tụ đèu của chuỗi suy ra từ tiêu chuẩn Weierstrass. Ta có

$$\ln\left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n}\right) \leq \frac{x^2}{n \ln^2 n} < \frac{a^2}{n \ln^2 n},$$

và chuỗi $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{a^2}{n \ln^2 n}$ hội tụ theo tiêu chuẩn cô đặc Cauchy.

3.2.3. Đặt $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ và $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$. Khi đó

$$\sup\{S(x) - S_n(x) : x \in [0,1]\} = 1/(n+1),$$

suy ra chuỗi hội tụ đều trên $[0,1]$. Vì $\sup\{f_n(x) : x \in [0,1]\} = 1/n$, tiêu chuẩn Weierstrass không thể áp dụng.

3.2.4. Ta có

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{((k-1)x+1)(kx+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{(k-1)x+1} - \frac{1}{kx+1} \right) = 1 - \frac{1}{nx+1}. \end{aligned}$$

Từ đó

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad x = 0, \\ 1 & \text{nếu} \quad x > 0. \end{cases}$$

Rõ ràng, f không liên tục tại 0.

3.2.5.

(a) Chuỗi hội tụ tuyệt đối trên $\mathbb{R}$, vì

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x^n\sin(nx)}{n!}\right| \le \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^n}{n!} = e^{|x|}.$$

Rõ ràng, chuỗi hội tụ đều trên mỗi khoảng bị chặn. Vậy, tính liên tục của tổng suy từ kết quả trong 1.2.34.

(b) Vì

$$\sum_{n=0}^{\infty}|x|^{n^2} \le \sum_{n=0}^{\infty}|x|^n = \frac{1}{1-|x|},$$

chuỗi hội tụ tuyệt đối trên $(-1,1)$. Ngoài ra, chuỗi hội tụ đều trên mỗi khoảng con compact của $(-1,1)$. Vậy tổng liên tục trên $(-1,1)$.

(c) Chuỗi hội tụ tuyệt đối với $-1/2 < x < 1/2$, và như trong (a), có thể chứng minh rằng tổng của nó liên tục trên $(-1/2,1/2)$.

(d) Chuỗi hội tụ tuyệt đối với $1/e-1 < x < e-1$, và tổng của nó liên tục trên $(1/e-1, e-1)$.

3.2.6. Rõ ràng, chuỗi hội tụ với $x=0$. Sử dụng, chẳng hạn, kết quả trong I, 3.2.16, ta thấy rằng chuỗi hội tụ nếu $0<|x|<1$. Nếu $|x|\ge 1$, chuỗi phân kỳ. Lí luận tương tự như trong lời giải của bài toán trước, tổng liên tục trên miền hội tụ.

3.2.7. Trước hết chú ý rằng chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n^2x)}{n^2}$$

hội tụ đều trên $\mathbb{R}$, vậy tổng $\tilde{S}$ của nó liên tục trên $\mathbb{R}$. Ngoài ra, nếu $S_n(x) = \frac{x\sin(k^2x)}{k^2}$, thì $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = x\tilde{S}(x)$. Do đó, tổng của chuỗi đã cho cũng liên tục trên $\mathbb{R}$.

3.2.8. Giả sử $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ hội tụ đều trên $\mathbf{A}$ tới S. Điều đó có nghĩa rằng

$$d_n = \sup_{x\in\mathbf{A}} |S_n(x) - S(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ở đây $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$. Vì f bị chặn, ta cũng có

$$d_n' = \sup_{x\in\mathbf{A}} |f(x)S_n(x) - f(x)S(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Để thấy rằng tính bị chặn của f là không bỏ được, lấy $\mathbf{A} = (0,1]$, $f(x) = \frac{1}{x}$, và $f_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}$. Khi đó, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ hội tụ đều trên $\mathbf{A}$, nhưng $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x} f_n(x)$ không hội tụ đều trên $\mathbf{A}$, bởi vì

$$\sup_{x\in(0,1)} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{x} f_k(x) \right| = \sup_{x\in(0,1)} \frac{2}{x2^n} = +\infty.$$

Dễ thấy rằng nếu $\frac{1}{f}$ bị chặn trên $\mathbf{A}$, thì chiều ngược lại đúng.

3.2.9. Với $x \in \mathbf{A}$, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_n(x)$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz. Ngoài ra, theo kết quả trong I, 3.4.14,

$$\sup_{x\in\mathbf{A}} |r_n(x)| = \sup_{x\in\mathbf{A}} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} f_k(x) \right| \le \sup_{x\in\mathbf{A}} f_{n+1}(x).$$

Kết hợp với điều kiện (3), suy ra tính hội tụ đều của chuỗi đã cho trên $\mathbf{A}$.

3.2.10. Ba chuỗi (a),(b) và (c) thoả mãn giả thiết của bài toán trước.

3.2.11. Theo bất đẳn thức Cauchy,

$$\sup_{x\in\mathbf{A}} \left| \sum_{k=n}^{n+m} c_k f_k(x) \right| \le \left(\sum_{k=n}^{n+m} c_k^2 \right)^{1/2} \sup_{x\in\mathbf{A}} \left(\sum_{k=n}^{n+m} f_k^2(x) \right)^{1/2}.$$

Vậy chỉ cần áp dụng tiêu chuẩn Cauchy cho sự hội tụ đều.

3.2.12.

(a) $\mathbf{A} = \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$ và $\mathbf{B} = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$. Chuỗi hội tụ đều trên $\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right]$, bởi vì

$$\sup_{x\in\left[\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right]} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k} 2^k (3x-1)^k \right| \le \sup_{x\in\left[\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right]} \frac{|6x-2|^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

(b) $\mathbf{A} = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ và $\mathbf{B} = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$. Chuỗi hội tụ đều trên $[-2,-1]$, bởi vì

$$\sup_{x\in[-2,-1]} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{x+1}{x}\right)^k \right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k2^k}.$$

3.2.13. Tích phân từng phần, được

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) g_k(x) = \sum_{k=1}^{n} G_k(x)(f_k(x) - f_{k+1}(x)) + G_n(x) f_n(x).$$

Điều này cùng với giả thiết (3), suy ra

$$\begin{aligned}
&|S_{n+m}(x) - S_n(x)| \\
&= \left| \sum_{k=n}^{n+m-1} G_k(x)(f_k(x) - f_{k+1}(x)) + G_{n+m}(x) f_{n+m}(x) - G_n(x) f_n(x) \right| \\
&\le M \left(\sum_{k=n}^{n+m-1} |f_k(x) - f_{k+1}(x)| + |f_{n+m}(x)| + |f_n(x)| \right).
\end{aligned}$$

Bây giờ với $\varepsilon > 0$ cho trước. Khi đó, từ (1) và (2) suy ra rằng, với $m \in \mathbb{N}$ và với n đủ lớn

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in\mathbf{A}} |S_{n+m}(x) - S_n(x)| \\
&\le M \sup_{x\in\mathbf{A}} \left(\sum_{k=n}^{n+m-1} |f_k(x) - f_{k+1}(x)| + |f_{n+m}(x)| + |f_n(x)| \right) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Vậy có thể áp dụng tiêu chuẩn Cauchy cho sự hội tụ đều đối với $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) g_n(x)$.

Để chứng minh tiêu chuẩn Dirichlet cho sự hội tụ đều, chú ý rằng tính đơn điệu và sự hội tụ đều tới 0 của $\{f_n(x)\}$ kéo theo (1) và (2). Ngoài ra, vì dãy các tổng riêng của $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ bị chặn đều trên **A**, ta thấy điều kiện (3) cũng được thoả mãn. Do đó, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ hội tụ đều trên **A**.

3.2.14. Ta dùng tiêu chuẩn Dirichlet cho sự hội tụ đều.

(a) Lấy $f_n(x) = \frac{1}{n}$ và $g_n(x) = (-1)^n x^n$.

(b) Ở đây, ta lấy

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \quad \text{và} \quad g_n(x) = \sin(nx)$$

và chú ý rằng

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) \right| \leq \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \leq \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}.$$

(c) Vì

$$\begin{aligned} 2\left|\sum_{k=1}^{n} \sin(k^2x)\sin(kx)\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n} \cos(k(k-1)x) - \cos(k(k+1)x)\right| \\ &= |1 - \cos(n(n+1)x)| \leq 2 \end{aligned}$$

và $\left\{\frac{1}{n+x^2}\right\}$ giảm và hội tụ đều tới không, chuỗi hội tụ đều trên $\mathbb{R}$ theo tiêu chuẩn Dirichlet.

(d) Ta có

$$(*) \qquad \begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)\operatorname{arctg}(nx)}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(nx)\left(\operatorname{arctg}(nx) - \frac{\pi}{2}\right)}{n} - \frac{\frac{\pi}{2}\sin(nx)}{n} \right). \end{aligned}$$

Vì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{\pi}{2}\sin(nx)}{n}$ hội tụ đều trên $[\delta, 2\pi - \delta]$ (xem (b)), dãy các tổng riêng bị chặn đều. Ngoài ra, dãy $\{\operatorname{arctg}(nx) - \pi/2\}$ và thoả mãn tiêu chuẩn

Cauchy cho sự hội tụ đều trên $[\delta, 2\pi - \delta]$, bởi vì

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg}((m+n)x) - \operatorname{arctg}(nx) &= \operatorname{arctg}\frac{mx}{1+(m+n)nx^2}\\ &\le \operatorname{arctg}\frac{mx}{(m+n)nx^2}\\ &\le \operatorname{arctg}\frac{1}{n\delta}.\end{aligned}$$

Vậy $\{\operatorname{arctg}(nx) - \pi/2\}$ hội tụ đều tới 0. Theo $(*)$, suy ra chuỗi đã cho hội tụ đều trên $\mathbf{A}$.

(e) Ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^{x-\frac{\alpha}{2}}}\frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}.$$

Vì $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$ hội tụ, dãy các tổng riêng bị chặn. Ngoài ra, dãy $\left\{\frac{1}{n^{x-\frac{\alpha}{2}}}\right\}$ giảm và hội tụ đều tới 0 trên $[a, \infty)$.

(f) Chú ý rằng với $x \in [o, \infty)$,

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{e^{kx}}\right| = \left|\frac{1 - \frac{(-1)^n}{e^{nx}}}{e^x + 1}\right| \le 1.$$

Ngoài ra, dãy $\left\{\frac{1}{\sqrt{n+x^2}}\right\}$ giảm và hội tụ đều tới 0 trên $[0, \infty)$.

3.2.15. Tích phân từng phần, có

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)g_k(x) = \sum_{k=1}^{n} G_k(x)(f_k(x) - f_{k+1}(x)) + G_n(x)f_n(x).$$

ở đây $G_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} g_k(x)$. Do f_1 bị chặn trên $\mathbf{A}$, điều kiện (2) suy ra tồn tại $M > 0$ sao cho $|f_n(x)| \le M$ với mọi $x \in \mathbf{A}$ và mọi $n \in \mathbb{N}$. Vì $\{G_n\}$ hội tụ đều trên **A**, chẳng hạn, tới G, ta có

$$\begin{aligned}
&S_{n+m}(x) - S_n(x) \\
&= \sum_{k=n}^{n+m-1} G_k(x)(f_k(x) - f_{k+1}(x)) + G_{n+m}(x)f_{n+m}(x) - G_n(x)f_n(x) \\
&= \sum_{k=n}^{n+m-1} (f_k(x) - f_{k+1}(x))(G_k(x) - G(x)) \\
&+(G_{n+m}(x) - G(x))f_{n+m}(x) - (G_n(x) - G(x))f_n(x).
\end{aligned}$$

Kết hợp với (2) và tính bị chặn đều của $\{f_n(x)\}$, suy ra $\{S_n\}$ thoả mãn tiêu chuẩn Cauchy cho sự hội tụ đều.

Để chứng minh tiêu chuẩn Abel cho sự hội tụ đều, chỉ cần chú ý rằng tính đơn điệu và tính bị chặn đều của $\{f_n\}$ suy ra sự hội tụ theo từng điểm tới một hàm bị chặn, và như vậy, các điều kiện (1) và (2) được thảo mãn.

3.2.16.

(a) Dãy $\{\text{arctg}(nx)\}$ thoả mãn các điều kiện (1') và (2') trong tiêu chuẩn Abel cho sự hội tụ đều. Ngoài ra, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}$ hội tụ đều trên $\mathbb{R}$ (xem 3.2.10(a)).

(b) Tiêu chuẩn Abel cho sự hội tụ đều có thể được áp dụng, bởi vì chuỗi

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n} + cosx}$$

hội tụ đều trên **A** (xem 3.2.10(c)) và dãy $\left\{\cos \frac{x}{n}\right\}$ bị chặn và đơn điệu với $n > \frac{2R}{\pi}$.

(c) Chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$$

hội tụ (xem, chẳng hạn, I, 3.4.8) và dãy $\left\{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+x}}\right\}$ đơn điệu và bị chặn trên $[0, \infty)$. Vậy có thể dùng tiêu chuẩn Abel cho sự hội tụ đều.

3.2.17. Kết quả suy trực tiếp từ 3.1.30.

3.2.18. Để chứng minh (a) và (b), có thể dùng kết quả trong 3.2.14, 3.2.17, và trong I, 3.1.32(a).

(c) Vì

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x^n - x^{n+1}) = \begin{cases} x & \text{với} \quad x \in [0,1), \\ 0 & \text{với} \quad x = 1, \end{cases}$$

ta nhận được

$$\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=1}^{\infty}(x^n - x^{n+1}) = 1.$$

(d) Trước hết chú ý rằng $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^x}$ hội tụ đều trên $[0,\infty)$ theo tiêu chuẩn Weierstrass. Vậy, theo bài toán trước

$$\lim_{x\to 0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^x} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 1.$$

(e) Vì

$$\sup \frac{x^2}{1+n^2x^2} = \frac{1}{n^2},$$

chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{1+n^2x^2}$ hội tụ đều trên $\mathbb{R}$. Bây giờ, dùng kết quả trong 3.1.30, ta được

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{1+n^2x^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

3.2.19. Trước hết quan sát rằng $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ hội tụ dều trên $[0,1]$. Điều này suy ra trực tiếp từ tiêu chuẩn Abel cho sự hội tụ đều được phát biểu trong 3.2.15, với $f_n(x) = x^n$ và $g_n(x) = a_n$. Bây giờ, theo 3.2.17, ta thấy giới hạn là $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

3.2.20. Vì f_n liên tục trên $[0,1]$, ta thấy rằng

$$\sup_{x\in[0,1)}\sum_{k=n}^{n+m}f_k(x) = \sup_{x\in[0,1]}\sum_{k=n}^{n+m}f_k(x)$$

Vậy theo tiêu chuẩn Cauchy, sự hội tụ đều của $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ trên $[0,1)$ kéo theo sự hội tụ đều của $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ trên $[0,1]$.

3.2.21. $\mathbf{A} = (0,\infty)$. Sự hội tụ là không đều. Thực vậy, nếu chuỗi hội tụ đều trên $\mathbf{A}$, thì theo kết quả trong bài toán trước, nó sẽ hội tụ với $x = 0$, mâu thuẫn.

3.2.22. Chú ý rằng

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) = f(x) - S_n(x),$$

ở đây $S_n(x)$ là tổng riêng thứ n của $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Theo giả thiết, dãy $\{r_n(x)\}$ đơn điệu và hội tụ tới 0 tại mỗi x cố định trong $[a,b]$

3.2.23. Không. Xét

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n, \quad \mathbf{A} = [0,1].$$

Theo kết quả được phát biểu trong 3.2.9, chuỗi này hội tụ đều trên $\mathbf{A}$. Mặt khác, tổng của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n$ là

$$S(x) = \begin{cases} 1 & \text{với} \quad x \in [0,1), \\ 0 & \text{với} \quad x = 1. \end{cases}$$

Vì S không liên tục, sự hội tụ là không đều.

3.2.24. Vì f_n đơn điệu trên $[a,b]$,

$$|r_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \max\{|f_k(a)|, |f_k(b)|\}.$$

Điều này chỉ ra rằng nếu chuỗi hội tụ tuyệt đối tại caca điểm mút của khoảng $[a,b]$, thì nó hội tụ tuyệt đối và đều trên toàn khoảng $[a,b]$.

3.2.25. Gọi $\mathbf{A}$ là tập bị chặn không chứa các phần tử của $\{a_n\}$. Vì $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_n|}$ hội tụ, ta có $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = +\infty$. Do đó, có thể chọn n_0 sao cho nếu $n \geq n_0$, thì $|x - a_n| \geq 1$ với $x \in \mathbf{A}$. Từ đó, với n đủ lớn,

$$\frac{1}{|x-a_n|} = \frac{1}{|a_n|}\cdot\frac{1}{|\frac{x}{a_n}|-1} \leq \frac{1}{|a_n|}\cdot\frac{1}{1-\frac{M}{|a_n|}},$$

ở đây $M = \sup\limits_{x\in\mathbf{A}}|x|$. Cuối cùng, quan sát rằng nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_n|}$, thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{|a_n|}\cdot\frac{1}{1-\frac{M}{|a_n|}}\right)$ cũng hội tụ.

3.2.26. Viết

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}\cdot\frac{1}{n^{x-x_0}}$$

và dùng tiêu chuẩn Abel cho sự hội tụ đều (xem, chẳng hạn, 3.2.15).

3.2.27. Ta đã chỉ ra trong lời giải của bài 3.2.7 rằng chuỗi đã cho hội tụ tới một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Bây giờ, ta chứng minh rằng sự hội tụ là không đều trên $\mathbb{R}$.

Trước hết quan sát rằng nếu n_0 lẻ, thì tổng

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{\sin(n^2x)}{n^2}$$

khác không tại mỗi điểm $x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Ngoài ra,

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{\sin(n^2x)}{n^2} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{\sin(n_0^2\frac{\pi}{2})}{(n_0+2l)^2}. \tag{1}$$

Nếu chuỗi $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}x\frac{\sin(n^2x)}{n^2}$ hội tụ đều tới f trên $\mathbb{R}$, thì với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại số lẻ n_0 sao cho

$$\left|f(x) - \sum_{n=1}^{n_0-1}x\frac{\sin(n^2x)}{n^2}\right| < \varepsilon \quad \text{với mọi} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Nói riêng, ta sẽ có

$$\left|\frac{f(x_k)}{x_k} - \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{\sin(n^2\frac{\pi}{2})}{n^2}\right| < \frac{\varepsilon}{\frac{\pi}{2}+2k\pi},$$

và do đó,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(x_k)}{x_k} = \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{\sin(n^2\frac{\pi}{2})}{n^2}.$$

Mặt khác, theo (1),

$$\frac{f(x_k)}{x_k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x_k)}{n^2} = \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{\sin(n^2\frac{\pi}{2})}{n^2} + \sin\left(n_0^2\frac{\pi}{2}\right)\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(n_0+2l)^2},$$

mâu thuẫn với

$$\sin\left(n_0^2\frac{\pi}{2}\right)\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(n_0+2l)^2} \neq 0.$$

3.2.28. Khẳng định suy trực tiếp từ kết quả trong 3.1.31.

3.2.29. Theo định lí Weierstrass, chuỗi $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$ hội tụ đều trên $\mathbb{R}$. Ngoài ra, vì

$$\left|\left(\frac{1}{n^2+x^2}\right)'\right| = \left|\frac{-2x}{(n^2+x^2)^2}\right| \leq \frac{1}{n^3},$$

$\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2+x^2}\right)'$ cũng hội tụ đều trên $\mathbb{R}$. Từ đó, theo kết quả trong bài toán trước, f khả vi trên mỗi khoảng compact và do đó khả vi trên $\mathbb{R}$.

3.2.30. Chú ý trước hết rằng $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{1+n^2}$ hội tụ đều trên $\mathbb{R}$. Chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos(nx)}{1+n^2}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-n\sin(nx)}{1+n^2}$$

hội tụ đều trên khoảng được chỉ ra theo tiêu chuẩn Dirichlet cho sự hội tụ đều được phát biểu trong 3.2.13. Vì vậy, tính khả vi của f suy từ 3.2.28.

3.2.31. Chuỗi $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$ hội tụ, chẳng hạn, với $x=0$. Chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n+x}$$

hội tụ đều trên $[0,\infty)$ theo kết quả được phát biểu trong 3.2.9. Vậy theo kết quả trong 3.2.28, f khả vi trên $[0,\infty)$ và

$$f'(0)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=\ln 2,\quad f'(1)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n=1}=1-\ln 2.$$

Cuối cùng, áp dụng 3.1.30, ta có $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0$.

3.2.32. Theo tiêu chuẩn Abel cho sự hội tụ đều (xem, chẳng hạn, 3.2.15). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{n}}$ hội tụ đều trên $\mathbb{R}$. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}$ cũng hội tụ đều trên $\mathbb{R}$ (xem 3.2.10(a)). Vậy có thể áp dụng 3.2.28.

3.2.33. Rõ ràng, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx^2)}{1+n^3}$ hội tụ đều trên $\mathbb{R}$. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2nx\cos(nx^2)}{1+n^3}$ hội tụ đều trên mỗi khoảng bị chặn. Vì vậy, theo 3.2.28, f' liên tục trên mỗi khoảng bị chặn và như vậy f' liên tục trên $\mathbb{R}$.

3.2.34. Theo tiêu chuẩn Weierstrass, chuỗi đã cho và chuỗi

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}n\sqrt{n}(\operatorname{tg}x)^{n-1}\frac{1}{\cos^2 x}$$

hội tụ đều trên mỗi khoảng con compact của $(-\pi/4,\pi/4)$. Vì vậy, theo 3.2.28, f' liên tục trên $(-\pi/4,\pi/4)$.

3.2.35. Theo tiêu chuẩn Weierstrass, chuỗi đã cho hội tụ trên $[0,\infty)$. Lại theo tiêu chuẩn Weierstrass, ta thấy chuỗi

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-ne^{-nx}}{1+n^2}$$

hội tụ đều trên mỗi khoảng $[a, \infty)$, $a > 0$. Vậy f thuộc $C^1(0, \infty)$. Lặp lại qúa trình trên k lần, ta kết luận rằng $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \frac{(-1)^k n^k e^{-nx}}{1+n^2}$ hội tụ đều trên mỗi $[a.\infty)$, $a > 0$. Điều này chỉ ra rằng $f \in C^\infty(0, \infty)$.

Nếu $f'(0)$ tồn tại, thì do

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx} - 1}{x(1+n^2)} \le \sum_{n=0}^{N} \frac{e^{-nx} - 1}{x(1+n^2)}$$

với $x > 0$ và $N \ge 1$, ta nhận được

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} \le \sum_{n=0}^{N} \frac{-n}{1+n^2}.$$

Chuyển qua giới hạn khi $N \to \infty$, ta thu được $f'(0) \le \infty$, mâu thuẫn.

3.2.36. Rõ ràng, chuỗi hội tụ đều trên mỗi khoảng bị chặn. Vậy f liên tục trên $\mathbb{R}$. Ngoài ra, với $x \neq 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|x|}{x^2 + n^2} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \operatorname{sgn}(x) - x|x|}{(x^2+n^2)^2}.$$

Vậy chuỗi hội tụ đều trên mỗi khoảng bị chặn không chứa 0. Do đó, f' liên tục tại $x \neq 0$. Bây giờ, ta chỉ ra rằng $f'(0)$ không tồn tại. Vì

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \left(\frac{|h|}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{h^2 + n^2} \right)$$

và (xem, chẳng hạn, 3.2.17)

$$\lim_{h \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{h^2 + n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

giới hạn $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ không tồn tại.

3.2.37. Trước hết quan sát rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ hội tụ đều trên mỗi khoảng $[x_0, \infty)$, $x_0 > 1$ (xem, chẳng hạn, 3.2.26). Vậy hàm $\zeta-$Rieman liên tục trên

$(1,\infty)$. Với $k \in \mathbb{N}$, chuỗi

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\ln^k n}{n^x}$$

cũng hội tụ đều trên mỗi $[x_0,\infty)$, $x_0 > 1$, bởi vì

$$\frac{\ln^k n}{n^x} \le \frac{n^{\frac{x_0-1}{2}}}{n_{x_0}} = \frac{1}{n^{\frac{x_0+1}{2}}}$$

với n đủ lớn. Do đó, mọi đạo hàn cấp k của hàm $\zeta-$Rieman liên tục trên $(1,\infty)$.

3.2.38. Theo (1), tồn tại $x_0 \in (0,1]$ sao cho $f(x_0) \neq 0$. Bây giờ, theo (2) và theo công thức Taylor với phần dư dạng Lagrange, ta có

$$f(x_0) = \frac{f^{(n)}(\theta_n)x_0^n}{n!},$$

ở đây $\theta_n \in (0,1)$. Từ đó,

(∗) $$f^{(n)}(\theta_n) = \frac{n!f(x_0)}{x_0^n}.$$

Bây giờ, (3) suy ra rằng $\sup\limits_{x\in[0,1]} \left|a_n f^{(n)}(x)\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Điều này có nghĩa với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại n_0 sao cho nếu $n > n_0$, thì $|a_n f^{(n)}(\theta_n)| < \varepsilon$. Từ (∗) suy ra rằng

$$|n!a_n| < \frac{\varepsilon x_0^n}{|f(x_0)|}.$$

3.2.39. Rõ ràng, với $x \in \mathbb{Z}$, ta có $f_n(x) = 0$. Vậy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = 0$. Bây giờ, đặt $x = \frac{r}{s}$, ở đây r, s nguyên tố cùng nhau và $s > 1$. Nếu p là số nguyên tố khác s, thì $f_p(x) \ge \frac{1}{p^s}$. Thực vậy, với mọi $a \in \mathbb{Z}$,

$$\left|\frac{r}{s} - \frac{a}{p}\right| = \frac{|rp - as|}{sp} \ge \frac{1}{sp}.$$

Do đó,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \ge \sum_{p\in\mathbf{P}} \frac{1}{sp},$$

ở đây **P** kí hiệu tập các số nguyên tố khác s. Vậy (xem, chẳng hạn, I, 3.2.72) chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ phân kỳ với mọi $x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$. Với x vô tỷ, đặt

$$\mathbf{A} = \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{4} < nx - [nx] < \frac{1}{2} \right\},$$
$$A(m) = \sharp\{n \in \mathbf{A} : n < m\},$$

ở đây $\sharp\mathbf{B}$ là số các phần tử của tập **B**. Do với x vô tỷ, số $nx - [nx]$ phân bố đều theo modulo 1(xem, chẳng hạn, Định lí 25.1 trong P. Billingsley, Probability and Measure, Wiley, New York, 1979, pp. 282-283), suy ra rằng $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{A(m)}{m} = \frac{1}{4}$. Do đó, $\sum\limits_{n\in\mathbf{A}} \frac{1}{4n} = +\infty$. Chú ý rằng với $n \in \mathbf{A}$,

$$f_n(x) = x - \frac{[nx]}{n} \geq \frac{1}{4n}.$$

Suy ra rằng $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ phân kỳ với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

3.2.40. Vì g bị chặn, chuỗi hội tụ đều trên $\mathbb{R}$ tới f. Từ đó, f liên tục trên $\mathbb{R}$. Ta phải chỉ ra rằng f không đâu khả vi. Chọn tuỳ ý số thực x và số nguyên dương n. Nếu tồn tại số nguyên trong $\left(4^m x, 4^m x + \frac{1}{2}\right)$, thì không tồn tại số nguyên trong $(4^m x - \frac{1}{2}, 4^m x)$. Vậy ta luôn tìm được $\delta_n = \pm\frac{1}{2}4^{-m}$ sao cho không tồn tại số nguyên trong khoảng mở với các điểm mút $4^m x$ và $4^m(x+\delta_m)$. Theo định nghĩa của g,

$$\left|\frac{g(4^n(x+\delta_m)) - g(4^m x)}{\delta_m}\right| = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad n > m, \\ 4^m & \text{nếu} \quad 0 \leq n \leq m. \end{cases}$$

Chú ý ở đây rằng, với m cố định,

$$\frac{g(4^n(x+\delta_m)) - g(4^m x)}{\delta_m}$$

có cùng dấu với $n = 0, 1, \dots, m$. Từ đó

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(4^n(x+\delta_m)) - f(4^m x)}{\delta_m}\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{g(4^n(x+\delta_m)) - g(4^n x)}{\delta_m}\right| \\
&= \left|\sum_{n=0}^{m}\left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{g(4^n(x+\delta_m)) - g(4^n x)}{\delta_m}\right| \\
&= \sum_{n=0}^{m}\left(\frac{3}{4}\right)^n 4^n \\
&= \frac{3^{m+1}-1}{2}.
\end{aligned}$$

Vì $\lim\limits_{m\to\infty} \delta_m = 0$, suy ra từ trên rằng $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ không tồn tại. Điều này chỉ ra rằng f không đâu khả vi. Đồ thị của ba tổng riêng đầu tiên $S_0(x), S_1(x), S_2(x)$ của chuỗi xác định f được vẽ phác dưới đây.

3.3 Chuỗi luỹ thừa

3.3.1. Xác định R là supremum của tập các số $r \in [0,\infty)$ sao cho $\{a_n|r^n\}$ là dãy bị chặn. Nếu R dương, thì với $0 \le \rho < R$, tồn tại hằng số dương, chẳng hạn C_ρ, sao cho $|a_n|\rho^n \le C_\rho$. Từ đó, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \le \frac{1}{\rho}$. Vì bất đẳng thức cuối đúng với mọi $\rho \in [0, R)$, ta có

(i) $$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \le \frac{1}{R}.$$

Chú ý rằng bất đẳng thức (i) cũng đúng với $R = 0$. Để chỉ ra bất đẳng thức ngược lại cũng đúng, giả sử rằng $R < \infty$; thì với $\rho > R$, dãy $\{a_n|\rho^n\}$ không bị chặn. Do đó, nó chứa một dãy con sao cho $|a_{n_k}|\rho^{n_k} \ge 1$. Vậy

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \ge \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \ge \frac{1}{\rho}.$$

Vì $\rho > R$ được chọn tuỳ ý, ta nhận được

(ii) $$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \ge \frac{1}{R}.$$

Chú ý rằng (ii) hiển nhiên đúng với $R = \infty$. Kết hợp (i) và (ii), ta có $\frac{1}{R} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$. Bây giờ, theo tiêu chuẩn căn, chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ hội tụ tuyệt đối với $|x - x_0| < R$ và phân kỳ với $|x - x_0| > R$.

3.3.2.

(a) Bán kính hội tụ của chuỗi là 1, và vì vậy chuỗi hội tụ với $|x| < 1$, phân kỳ với $|x| > 1$. Với $x = 1, -1$, chuỗi phân kỳ. Vậy khoảng hội tụ là khoảng mở $(-1, 1)$.

(b) Bán kính hội tụ là $+\infty$, và vì thế chuỗi hội tụ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

(c) Miền hội tụ là khoảng đóng $[-1/2, 1/2]$.

(d) Ta có

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{(2 + (-1)^n)^n} = 3.$$

Vậy chuỗi hội tụ trên $(-1/3, 1/3)$. Rõ ràng, chuỗi phân kỳ tại các điểm mút của khoảng hội tụ.

(e) Vì

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{2 + (-1)^n}{5 + (-1)^{n+1}} = \frac{3}{4},$$

chuỗi hội tụ trên $(-4/3, 4/3)$. Tại các điểm mút, chuỗi phân kỳ.

(f) Vì

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{2^n} = 1,$$

ta có thể dễ dàng tìm ra khoảng hội tụ là $(-1, 1)$.

(g) Vì

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n!]{2^{n^2}} = 1,$$

ta có thể dễ dàng tìm ra khoảng hội tụ là $(-1, 1)$.

(h) Ta có

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{(-1)^n n} = e.$$

Vì vậy, chuỗi hội tụ trên $(-1/e, 1/e)$. Tại các điểm mút, chuỗi phân kỳ vì không thoả mãn điều kiện cần cho sự hội tụ. Thực vậy, nếu $x = 1/e$, thì

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{2n})^{4n^2}}{e^{2n}} = e^{-1/2}$$

và nếu $x = -1/e$, thì $\lim\limits_{n\to\infty} |a_{2n}| = e^{-1/2}$.

3.3.3.

(a) Bán kính hội tụ là $\sqrt{2}$ và khoảng hội tụ là $[1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$.

(b) Bán kính hội tụ của $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} y^n$ là 1. Vậy chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{2x+1}{x}\right)^n$ hội tụ trên $(-1/3, 1/3)$. Rõ ràng nó phân kỳ tại $x = -1$ và $x = -1/3$.

(c) Bán kính hội tụ của $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n4^n}{3^n} y^n$ là $3/4$. Do đó, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n4^n}{3^n} x^n(1-x)^n$ hội tụ trên $(-1/2, 3/2)$. Ta có thể dễ dàng thấy rằng nó phân kỳ tại các điểm mút.

(d) Vì bán kính hội tụ là 4, chuỗi hội tụ trên $(-3, 5)$. Với $x = 5$, chuỗi phân kỳ vì dãy các số hạng của nó $\left\{\frac{(n!)^2}{(2n)!}4^n\right\}$ đơn điệu tăng. Với $x = -3$, ta nhận được chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!} 4^n$, phân kỳ vì không thoả mãn điều kiện cần cho sự hội tụ.

(e) Bán kính hội tụ của $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} y^n$ là 1. Vì vậy, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} (\operatorname{tg} x)^n$ hội tụ trên tập

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{4} + n\pi, \frac{\pi}{4} + n\pi\right).$$

Nếu $x = -\frac{\pi}{4} + n\pi$ hoặc $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$, chuỗi phân kỳ.

(f) Miền hội tụ là

$$(-\infty, -\operatorname{tg} 1) \cup (\operatorname{tg} 1, \infty)$$

.

3.3.4.

(a) Giả sử rằng, chẳng hạn, $R_1 < R_2$. Khi đó, với $|x| < R_1$, chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)x^n$ hội tụ vì nó là tổng của hai chuỗi hội tụ. Với $R_1 < |x| < R_2$, chuỗi phân kỳ vì nó là tổng của chuỗi hội tụ và chuỗi phân kỳ. Vậy, $R = R_1 = \min\{R_1, R_2\}$. Nếu $R_1 = R_2$, thì rõ ràng $R \geq R_1$. Để chỉ ra bất đẳng thức có thể ngặt, đặt $a_n = -1, b_n = 1$ với $n = 0, 1, 2, \ldots$. Khi đó, $R_1 = R_2 = 1$ và $R = \infty$.

(b) Vì rằng (xem, chẳng hạn, I, 2.4.16)

$$\frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n b_n|} \leq \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2},$$

ta thu được $R \geq R_1 R_2$. Ví dụ sau đây chỉ ra rằng bất đẳng thức có thể ngặt. Đặt

$$a_{2n} = 0,\ a_{2n+1} = 1, \quad b_{2n} = 1,\ b_{2n+1} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Khi đó, $R_1 = R_2 = 1$ và $R = \infty$.

3.3.5.

(a) Suy ra từ

$$a_n = \frac{a_n}{b_n} \cdot b_n$$

và từ (b) trong bài toán trước rằng $R_1 \geq R R_2$. Để thấy rằng bất đẳng thức có thể ngặt, xét, chẳng hạn, chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ và $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, ở đây

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{với } n \text{ chẵn,} \\ 2^n & \text{với } n \text{ lẻ.} \end{cases}$$

và

$$b_n = \begin{cases} 2^n & \text{với } n \text{ chẵn}, \\ 1 & \text{với } n \text{ lẻ}. \end{cases}$$

Khi đó, $R_1 = R_2 = R = 1/2$.

(b) Chỉ cần chứng minh rằng nếu $|x| < \min\{R_1, R_2\}$, thì theo định lí Mertens (xem, chẳng hạn, I, 3.6.1) tích Cauchy của các chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ và $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ hội tụ. Ví dụ sau đây chỉ ra rằng bất đẳng thức $R \geq \min\{R_1, R_2\}$ có thể ngặt. Tích Cauchy của $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ và $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, ở đây

$$a_0 = 1, a_n = -\left(\frac{3}{2}\right)^n, \quad b_0 = 1, b_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

là $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right) x^n$ (xem, chẳng hạn, I,3.6.11). Ta có $R_1 = 2/3, R_2 = 1/3$ và $R = 4/3$. Ví dụ tiếp theo chỉ ra R có thể vô hạn mặc dù cả R_1 và R_2 đều hữu hạn. Nếu

$$a_n = \begin{cases} 2 & \text{nếu } n = 0, \\ 2^n & \text{nếu } n = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

và

$$b_n = \begin{cases} -1 & \text{nếu } n = 0, \\ 1 & \text{nếu } n = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

thì $R_1 = 1/2, R_2 = 1$ và $R = +\infty$.

3.3.6. Ta sẽ dùng 3.3.1(2).

(a) Với $0 < \varepsilon < L$, tồn tại n_0 sao cho nếu $n \geq n_0$, thì

$$\sqrt[n]{\frac{L-\varepsilon}{n^\alpha}} \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{\frac{L+\varepsilon}{n^\alpha}}.$$

Từ đó, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ và $R = 1$.

(b) Như trong (a), có thể chỉ ra rằng $R = \alpha$.

(c) $R = \infty$.

3.3.7.

(a) Vì $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|2^n a_n|} = \frac{2}{n}$, bán kính hội tụ bằng $\frac{1}{2}R$.

(b) Nếu $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ sao cho $\frac{1}{R} - \varepsilon > 0$, thì với vô hạn n,

$$n\sqrt[n]{|a_n|} > n\left(\frac{1}{R} - \varepsilon\right).$$

Do đó, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$ và $R = 0$.

(c) Vì $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$, ta thấy rằng bán kính hội tụ là R/e (xem, chẳng hạn, I, 2.4.20).

(d) Do tồn tại dãy các số nguyên dương $\{n_k\}$ sao cho

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|},$$

ta kết luận rằng bán kính hội tụ là R^2.

3.3.8. Suy trực tiếp từ kết quả trong 3.1.25 rằng những chuỗi luỹ thừa duy nhất như vậy là các đa thức.

3.3.9. Bán kính hội tụ của chuỗi là $+\infty$. Đạo hàm từng từ, ta được

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}\right)' = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-1)!!} = 1 + xf(x).$$

3.3.10. Như trong lời giải của bài toán trước, với $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$f''(x) + f'(x) + f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

3.3.11. Với $x \in (-1, 1)$, đặt

$$g(x) = \frac{f(xx_0) - f(x_0)}{x - 1}.$$

Khi đó, $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = x_0 f'(x_0)$. Ngoài ra (xem, chẳng hạn, I, 3.6.4),

$$g(x) = \frac{1}{1-x} f(x_0) - \frac{1}{1-x} f(x_0 x) = \sum_{n=0}^{\infty} (f(x_0) - S_n(x_0)) x^n.$$

Vậy nếu $0 < x < 1$ và $m = 0, 1, 2, \ldots$, ta nhận được

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (f(x_0) - S_n(x_0)) x^n > (f(x_0) - S_m(x_0)) x^m.$$

Do đó, $x_0 f'(x_0) = \lim\limits_{x \to 1^-} g(x) \geq f(x_0) - S_m(x_0) > 0$.

3.3.12. Trước hết ta chứng minh rằng $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n x^n$ và $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) T_n x^n$ hội tụ với $|x| < 1$. Do $\{T_n\}$ bị chặn, tồn tại $C > 0$ sao cho $|T_n| \leq C$ với mọi n. Khi đó, với $|x| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) |T_n x^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) C |x|^n = \frac{C}{(1 - |x|)^2}.$$

Sự hội tụ của $\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n x^n$ với $|x| < 1$ suy ra từ đẳng thức

$$\sum_{n=0}^{N} (n+1) S_n x^n = S_0 + \sum_{n=0}^{N} ((n+1) T_n - n T_{n-1}) x^n.$$

Tương tự, vì $\sum\limits_{n=0}^{N} a_n x^n = a_0 + \sum\limits_{n=0}^{N} (S_n - S_{n-1}) x^n$, sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n x^n$ kéo theo sự hội tụ của $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ với $|x| < 1$.

Các đẳng thức đã phát biểu suy từ định lí Mertens (xem, chẳng hạn, I, 3.6.1).

3.3.13. Ta có

$$\begin{aligned}\frac{|x|}{1-|x|}|f'(x)| &\le \sum_{n=0}^{\infty}|x|^n\sum_{k=0}^{\infty}2^k x^{2^k} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{2^k\le n}\right)|x|^n \\ &= \left(\sum_{k=0}^{[\log_2 n]}\right)|x|^n \\ &\le \sum_{n=1}^{\infty}n|x|^n = 2\frac{|x|}{(1-|x|)^2}.\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức cần chứng minh được thoả mãn với $M = 2$.

3.3.14. Sự hội tụ đều của $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ trên $[0, 1]$ suy từ tiêu chuẩn Abel cho sự hội tụ đều (xem lời giải của 3.2.19). Để chứng minh (2), chỉ cần áp dụng 3.1.30 (cũng xem lời giải của 3.2.19).

3.3.15. Chúng ta trước hết chỉ ra rằng

$$\overline{\lim_{x\to 1^-}} f(x) \le \overline{\lim_{n\to\infty}} S_n. \tag{1}$$

Ta có (xem 3.3.12)

$$f(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}S_n x^n \quad \text{với} \quad |x| < 1. \tag{2}$$

Nếu $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} S_n = +\infty$, thì (1) là rõ ràng. Nếu $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} S_n = S \in \mathbb{R}$, thì theo (2), ta có

$$S - f(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(S - S_n)x^n. \tag{3}$$

Gọi $\varepsilon > 0$ cho trước. Khi đó, tồn tại n_0 sao cho $S_n < S + \varepsilon$ bất cứ khi nào

$n > n_0$. Vậy, theo (3), với $x \in (0,1)$,

$$\begin{aligned} S - f(x) &\geq (1-x)\sum_{n=0}^{n_0}(S-S_n)x^n - \varepsilon(1-x)\sum_{n=n_0+1}^{\infty}x^n \\ &= (1-x)\sum_{n=0}^{n_0}(S-S_n)x^n - \varepsilon x^{n_0+1} \\ &\geq (1-x)\sum_{n=0}^{n_0}(S-S_n)x^n - \varepsilon \end{aligned}$$

Do đó,

$$f(x) \leq S + \varepsilon - (1-x)\sum_{n=0}^{n_0}(S-S_n)x^n.$$

Vì tồn tại $\delta > 0$ sao cho nếu $x \in (1-\delta, 1)$, thì

$$\left|(1-x)\sum_{n=0}^{n_0}(S-S_n)x^n\right| < \varepsilon,$$

ta thấy rằng $f(x) \leq S + 2\varepsilon$. Vậy (1) được chứng minh trong trường hợp $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} S_n$. Bây giờ, nếu $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} S_n = -\infty$, thì rõ ràng, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\infty$. Vậy với $M \in \mathbb{R}$, có thể chọn n_1 sao cho nếu $n > n_1$, thì $S_n < M$. Do đó, với $x \in (0,1)$, ta có

$$\begin{aligned} M - f(x) &= (1-x)\sum_{n=0}^{n_1}(M-S_n)x^n + (1-x)\sum_{n=n_1+1}^{\infty}(M-S_n)x^n \\ &= (1-x)\sum_{n=0}^{n_1}(M-S_n)x^n. \end{aligned}$$

Vậy $f(x) \leq M-(1-x)\sum\limits_{n=0}^{n_1}(M-S_n)x^n$. Vì tồn tại $\delta > 0$ sao cho nếu $x \in (1-\delta, 1)$, thì

$$\left|(1-x)\sum_{n=0}^{n_0}(M-S_n)x^n\right| < \varepsilon$$

ta thu được $f(x) \leq M + \varepsilon$. Từ đó

$$\underline{\lim_{x\to 1^-}} f(x) \leq \overline{\lim_{x\to 1^-}} f(x) \leq M.$$

Vì M có thể được chọn tuỳ ý, suy ra $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$. Điều này kết thúc chứng minh của (1). Bất đẳng thức

$$\underline{\lim}_{x\to 1^-} S_n \leq \underline{\lim}_{x\to 1^-} f(x)$$

được thiết lập tương tự.

3.3.16. Đặt

$$A_n = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} k|a_k|}{n}.$$

Khi đó, $\lim_{n\to\infty} A_n = 0$ (xem, chẳng hạn, I, 2.3.2). Theo giả thiết, nếu $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, thì $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$. Vậy, với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại n_0 sao cho nếu $n \geq n_0$, thì

$$|f(x_n) - L| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad A_n < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{và} \quad n|a_n| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Đặt $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, ta có

$$S_n - L = f(x) - L + \sum_{k=0}^{n} a_k(1 - x^k) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k, \quad |x| < 1.$$

Bây giờ, chú ý rằng nếu $x \in (0, 1)$, thì

$$(1 - x^k) = (1 - x)(1 + x + \cdots + x^{k-1}) \leq k(1 - x).$$

Do đó,

$$|S_n - L| \leq |f(x) - L| + (1 - x)\sum_{k=0}^{n} k|a_k| + \frac{\varepsilon}{3n(1 - x)}.$$

Cuối cùng, lấy $x = x_n$, ta được

$$|S_n - L| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

3.3.17. Xét, chẳng hạn, chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$.

3.3.18. Từ định lí Abel (xem 3.3.14), suy ra rằng nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ, thì giới hạn $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ tồn tại. Để chỉ ra chiều ngược lại đúng, giả sử rằng $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = g \in \mathbb{R}$. Khi đó, theo giả thiết, với $0 < x < 1$, ta nhận được

$$\sum_{n=1}^{k} a_n x^n \le f(x) \le g, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Từ đó, $\sum\limits_{n=1}^{k} a_n = \lim\limits_{x\to 1^-} \sum\limits_{n=1}^{k} a_n x^n \le g$, suy ra sự hội tụ của $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

3.3.19. Xác định

$$b_0 = 0, \quad b_n = a_1 = 2a_2 + \cdots + na_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n - b_{n-1}}{n} x^n \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{x^n - x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^n}{n(n+1)} \right) \\ &= a_0 + (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n(n+1)} x^n. \end{aligned}$$

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{n+1} = 0$, có thể chứng minh rằng

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n+1} x^n = 0.$$

Bây giờ, áp dụng định lý Tauber, ta nhận được

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n(n+1)} = L - a_0.$$

Ngoài ra

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{b_n}{n(n+1)} &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} b_n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\ &= \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{b_n-b_{n-1})}{n}-\frac{b_N}{N+1}\right)\\ &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} a_n.\end{aligned}$$

Vậy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = L$.

3.3.20. Suy ra từ sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n^2$ và kết quả trong I,3.5.9(b) rằng

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1^2+2^2a_2^2+\cdots+n^2a_n^2}{n}=0.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy

$$\left(\sum_{k=1}^{n} ka_k\right)^2 \le n\left(\sum_{k=1}^{n} k^2a_k^2\right).$$

Do đó,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} ka_k}{n}\right)^2 \le \frac{\sum_{k=1}^{n} k^2a_k^2}{n}=0.$$

kết quả cần chứng minh suy từ bài toán trước.

3.3.21. Lấy $\varepsilon > 0$. Theo giả thiết, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho nếu $n > n_0$, thì

$|a_n - Ab_n| < \varepsilon b_n$. Vậy, với $x \in (0,1)$,

$$\begin{aligned}
|f(x) - Ag(x)| &= \left|\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - Ab_n)x^n\right| \\
&\le \left|\sum_{n=0}^{n_0}(a_n - Ab_n)x^n\right| + \left|\sum_{n=n_0+1}^{\infty}(a_n - Ab_n)x^n\right| \\
&\le \sum_{n=0}^{n_0}|a_n - Ab_n| + \varepsilon \sum_{n=n_0+1}^{\infty} b_n x^n \\
&\le \sum_{n=0}^{n_0}|a_n - Ab_n| + \varepsilon g(x).
\end{aligned}$$

Vì $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = +\infty$, với x đủ gần 1, ta có

$$\sum_{n=0}^{n_0}|a_n - Ab_n| + \varepsilon g(x).$$

Từ đó, $|f(x) - Ag(x)| < 2\varepsilon g(x)$ với x đủ gần 1.

3.3.22. Chú ý rằng theo định lý Mertens (xem, chẳng hạn, I, 3.6.1),

$$f(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n \quad \text{và} \quad g(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} T_n x^n$$

với $|x| < 1$. Vậy từ kết quả trong bài toán trước, ta có

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{f(x)}{1-x}}{\frac{g(x)}{1-x}} = A.$$

3.3.23. Xét

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2(1-x)} = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x^{2n} - x^{2n+1})$$

và

$$g(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Khi đó, $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{4}$. Mặt khác, vì $S_{2n=1} = 0$, $S_{2n} = n+1$ và $T_n = n$, giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{T_n}$ không tồn tại.

3.3.24. Với $x \in (0,1)$,

$$(1) \qquad f(x) \geq \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \geq x^n S_n,$$

bởi vì tất cả các hệ số a_n không âm. Đặt $x = e^{-\frac{1}{n}}$, ta có

$$e^{-1} S_n \leq f\left(e^{-\frac{1}{n}}\right).$$

Vậy, theo giả thiết, với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại n_0 sao cho nếu $n \geq n_0$, thì

$$e^{-1} S_n \leq \frac{A+\varepsilon}{1-e^{-\frac{1}{n}}} < 2(A+\varepsilon)n.$$

Bất đẳng thức cuối cùng suy ra từ $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n = -\frac{1}{2} > -1$. Vậy ta có

$$(1) \qquad S_n \leq A_2 n \quad \text{với} \quad A_2 \geq 2(A+\varepsilon)e \quad \text{nào đó.}$$

Bây giờ, theo (2), ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n \\ &< (1-x)S_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k + A_2(1-x)\sum_{k=n}^{\infty} kx^k \\ &< S_n + A_2 n x^n + \frac{A_2 x^{n+1}}{1-x}. \end{aligned}$$

Nếu trong (1) đặt $x = e^{-\alpha/n}$, $\alpha > 0$, ta nhận được

$$f\left(e^{-\frac{\alpha}{n}}\right) = \frac{A-\varepsilon}{1-e^{-\frac{\alpha}{n}}} > (A-\varepsilon)\frac{n}{\alpha}.$$

Bất đẳng thức cuối suy từ $e^{-\frac{\alpha}{n}} > 1 - \frac{\alpha}{n}$. Do đó,

$$(A - \varepsilon)\frac{n}{\alpha} < S_n + A_2ne^{-\alpha} + \frac{2A_2ne^{-\alpha}}{\alpha},$$

hay nói cách khác

$$S_n > n\frac{A - \varepsilon - 2A_2e^{-\alpha} - A_2\alpha e^{-\alpha}}{\alpha}.$$

Nếu lấy n đủ lớn, ta nhận được $S_n > A_1n$ với hằng số dương A_1 nào đó.

3.3.25. Ta bắt đầu với một số kiến thức chuẩn bị sẽ dùng trong chứng minh của định lí. Giả sử rằng φ liên tục trên $[0,1]$ trừ điểm $c \in (0,1)$ mà tại đó các giới hạn một phía $\varphi(c^+)$, $\varphi(c^-)$ tồn tại và $\varphi(c) = \varphi(c^+)$ hoặc $\varphi(c) = \varphi(c^-)$. Bây giờ, ta sẽ chỉ ra rằng với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại các đa thức P_1 và P_2 sao cho

$$\int_0^1 (P_2(x) - \varphi(x))\,dx < \varepsilon \quad \text{và} \quad \int_0^1 (\varphi(x) - P_1(x))\,dx < \varepsilon$$

Để làm vậy, giả sử, chẳng hạn, rằng $\varphi(c^-) < \varphi(c^+)$ và $\varphi(c) = \varphi(c^+)$. Rõ ràng, có thể chọn $\delta_1 > 0$ đủ nhỏ sao cho bất đẳng thức $|\varphi(c-\delta_1) - \varphi(x)| < \varepsilon/4$ đúng với $x \in (c - \delta_1, c)$. Đặt

$$M = \sup\{|\varphi(x) - \varphi(c)| : x \in (c - \delta_1, c)\}$$

và lấy $\delta < \min\{\delta_1, \varepsilon/(4M), c, 1 - c\}$. Bây giờ định nghĩa

$$g(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{nếu} \quad x \in [0, c - \delta] \cup [c, 1], \\ \max\{l(x), \varphi(x)\} & \text{nếu} \quad x \in (c - \delta, c), \end{cases}$$

ở đây $l(x)$ là hàm tuyến tính sao cho $l(c - \delta) = \varphi(c - \delta)$ và $l(c) = \varphi(c)$. Khi đó, g liên tục và $\varphi \le g$ trên $[0,1]$. Theo định lí xấp xỉ của Weierstrass (xem, chẳng hạn, 3.1.33), tồn tại đa thức P_2 sao cho

$$|g(x) - P_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{với} \quad x \in [0,1].$$

Cũng như vậy, ta định nghĩa

$$h(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{nếu} \quad x \in [0, c] \cup [c + \delta, 1], \\ \min\{l_1(x), \varphi(x)\} & \text{nếu} \quad x \in [c, c + \delta), \end{cases}$$

ở đây $l_1(x)$ là hàm tuyến tính sao cho $l_1(c) = \varphi(c^-)$ và $l_1(c + \delta) = \varphi(c + \delta)$. Rõ ràng, h liên tục và $h \le \varphi$ trên $[0, 1]$. Theo định lí xấp xỉ của Weierstrass, tồn tại đa thức P_1 sao cho

$$|h(x) - P_1(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{với} \quad x \in [0, 1].$$

Ngoài ra, ta có

$$\int_0^1 (g(x) - \varphi(x))\, dx = \int_{(c-\delta, c)} (g(x) - \varphi(x))\, dx.$$

Nếu đặt

$$\mathbf{A} = \{x \in (c - \delta, \delta) : g(x) = l(x)\} \quad \text{và} \quad \mathbf{B} = (c - \delta, c) \setminus \mathbf{A},$$

thì ta nhận được

$$\begin{aligned} \int_{(c-\delta,c)} (g(x) - \varphi(x))\, dx &= \int_{\mathbf{A}} (g(x) - \varphi(x))\, dx \\ &\le \int_{(c-\delta,c)} |l(x) - \varphi(x)|\, dx \\ &\le \int_{(c-\delta,c)} (|\varphi(x) - \varphi(c - \delta)| + |\varphi(c - \delta) - l(x)|\, dx \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + M\frac{\delta}{2} < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Suy ra từ trên rằng

$$\begin{aligned} &\int_0^1 (P_2(x) - \varphi(x))\, dx \\ &= \int_0^1 (P_2(x) - g(x))\, dx + \int_0^1 (g(x) - \varphi(x))\, dx < \varepsilon. \end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự, có thể chứng minh rằng

$$\int_0^1 (\varphi(x) - P_1(x))\, dx < \varepsilon.$$

Bây giờ, ta chứng minh định lí của Hardy và Littlewood. Không mất tổng quát, có thể giả sử rằng $A = 1$. Trước hết, ta chỉ ra rằng

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n P(x^n) = \int_0^1 P(t)\, dt$$

với mọi đa thức P. Rõ ràng, chỉ cần chứng minh đẳng thức đúng cho $P(x) = x^k$. Ta có,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+kn} &= \lim_{x\to 1^-} \frac{1-x}{1-x^{k+1}} (1-x^{k+1}) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{(k+1)n} \\
&= \frac{1}{k+1} = \int_0^1 t^k\, dt.
\end{aligned}$$

Bây giờ, xác định φ bởi

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{với} \quad 0 \le x < e^{-1}, \\ \frac{1}{x} & \text{với} \quad e^{-1} \le x \le 1. \end{cases}$$

Ta phải chứng minh rằng

$$\text{(1)} \qquad \lim_{x\to 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \varphi(x^n) = \int_0^1 \varphi(t)\, dt = 1.$$

Suy ra từ các chuẩn bị ở phần đầu lời giải rằng, với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại các đa thức P_1 và P_2 sao cho

$$P_1(x) - \frac{\varepsilon}{2} \le h(x) \le \varphi(x) \le g(x) \le P_2(x) + \frac{\varepsilon}{2}$$

và

$$\int_0^1 (P_2(x) - \varphi(x))\, dx < \varepsilon, \quad \int_0^1 (\varphi(x) - P_1(x))\, dx < \varepsilon.$$

Vì $a_n \geq 0$, ta thu được

$$\begin{aligned} \overline{\lim_{x\to 1^-}}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \varphi(x^n) &\leq \overline{\lim_{x\to 1^-}}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n P_2(x^n) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \int_0^1 P_2(t)\,dt + \frac{\varepsilon}{2} < \int_0^1 \varphi(t)\,dt + \frac{3\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Do đó,

$$\overline{\lim_{x\to 1^-}}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \varphi(x^n) \leq \int_0^1 \varphi(t)\,dt.$$

Theo đúng cách như vậy, có thể chứng minh rằng

$$\overline{\lim_{x\to 1^-}}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \varphi(x^n) \geq \int_0^1 \varphi(t)\,dt.$$

Vậy (1) được chứng minh. Vì vậy,

$$1 = \lim_{N\to\infty}(1-e^{-1/N})\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-1/N}\varphi(e^{-1/N}) = \lim_{N\to\infty}(1-e^{-1/N})\sum_{n=0}^{N} a_n.$$

Vì $\lim\limits_{N\to\infty}(1-e^{-1/N}) = 1$, ta thu được

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\sum\limits_{n=0}^{N} a_n}{N} = 1.$$

3.3.26. Nếu $|na_n| \leq C$, thì với mọi $x \in (0,1)$,

$$|f'(x)| \leq \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n|x^{n-2} \leq C\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)x^{n-2} = C\frac{1}{(1-x)^2}.$$

Theo 2.3.23 suy ra rằng

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)f'(x) = 0 = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}.$$

Bây giờ, vì

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{na_n}{C}\right)x^{n-1} = \frac{1}{1-x} - \frac{f'(x)}{C},$$

ta thu được $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)F(x) = 1$. Kết hợp với định lí của Hardy và Littlewood ở trên, có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{ka_k}{C}\right)}{n} = 1.$$

Từ đó,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} ka_k}{n} = 0.$$

Để kết thúc chứng minh, chỉ cần áp dụng kết quả đã cho trong 3.3.19.

3.3.27. Giả sử ngược lại rằng $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Khi đó, với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại n_0 sao cho nếu $n > n_0$, thì $|a_n| < \varepsilon/2$. Vậy,

$$|(1-x)f(x)| \le \left|(1-x)\sum_{k=0}^{n_0} a_k x^k\right| + \frac{\varepsilon}{2},$$

suy ra

$$\lim_{x\to 1^-} |(1-x)f(x)| = 0,$$

trái giả thiết.

3.4 Chuỗi Taylor

3.4.1. Giả sử rằng $|f^{(n)}(x)| \le M$ với $n \in \mathbb{N}$ và $x \in [a,b]$. Theo công thức Taylor với phần dư dạng Lagrange (xem, chẳng hạn, 2.3.3 (a)), ta có

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_n(x),$$

ở đây

$$|r_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right| \le M\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Từ đó, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$. Do đó,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

3.4.2. Không, vì $f^{(n)}(0) = 0$ với $n = 0, 1, 2, \ldots$, và $f(x) \neq 0$ với $x \neq 0$.

3.4.3. Theo tiêu chuẩn M của Weierstrass, chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n^2x)}{e^n}$ và $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{-n^2\sin(n^2x)}{e^n}$ hội tụ tuyệt đối và đều trên $\mathbb{R}$. Vậy f' liên tục trên $\mathbb{R}$. Lặp lại lí luận trên, ta thấy f thuộc $C^{\infty}(\mathbb{R})$. Ngoài ra, có thể tìm được $f^{(2k-1)}(0) = 0$ và $f^{(2k)}(0) = (-1)^k \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^{4k}}{e^n}$. Vậy

$$\frac{|f^{(2k)}(0)|x^{2k}}{(2k)!} > \left(\frac{n^2x}{2k}\right)^{2k} e^{-n}, \quad x \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Nếu lấy $n = 2k$, ta nhận được

$$\frac{|f^{(2k)}(0)|x^{2k}}{(2k)!} > \left(\frac{2kx}{e}\right)^{2k} > 1 \quad \text{với} \quad x \neq 0 \quad \text{và} \quad k > \left|\frac{e}{2x}\right|.$$

Vì vậy, chuỗi Taylor của f hội tụ về 0 với $x \neq 0$ và đẳng thức không đúng nếu $x \neq 0$.

3.4.4. Giả sử trước hết rằng $x > 0$. Phần dư dạng Lagrange trong công thức Taylor của $f(x) = (1 + x)^{\alpha}$ là

$$r_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}.$$

Với $|x| < 1$, ta có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}x^{n+1} = 0.$$

Để thấy điều này, có thể áp dụng, chẳng hạn, I, 2.2.31. Do đó, để chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$, chỉ cần chứng minh rằng $\{(1+\theta x)^{\alpha-n-1}\}$ là dãy bị chặn. Điều này suy râ từ các bất đẳng thức rõ ràng sau

$$1 \le (1+\theta x)^{\alpha} \le (1+x)^{\alpha} \le 2^{\alpha} \quad \text{với} \quad \alpha \ge 0$$

và

$$2^{\alpha} \le (1+\theta x)^{\alpha} \le (1+x)^{\alpha} \le 1 \quad \text{với} \quad \alpha < 0$$

và $(1+\theta x)^{-n} \le 1$. Vậy, ta đã chứng minh đẳng thức đã cho đúng với $0 < x < 1$. Bây giờ, ta xét trường hợp $x < 0$. Phần dư dạng Cauchy trong công thứcTaylor của $f(x) = (1+x)^\alpha$ (xem, chẳng hạn, 2.3.3(b)) là

$$r_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1-\theta)^n(1+\theta x)^{\alpha-n-1}.$$

Như trên, chỉ cần chứng minh rằng $\{(1-\theta)^n(1+\theta x)^{\alpha-n-1}\}$ là dãy bị chặn. Vì $x \in (-1,0)$, ta thấy rằng

$$(1-\theta)^n \le \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right) < 1.$$

Ngoài ra,

$$1 \le (1+\theta x)^{\alpha-1} \le (1+x)^{\alpha-1} \quad \text{nếu} \quad \alpha \le 1$$

và

$$(1+x)^{\alpha-1} \le (1+\theta x)^{\alpha-1} \le 1 \quad \text{nếu} \quad \alpha \ge 1.$$

Điều này chứng minh đẳng thức đúng với $x \in (-1,0)$.

3.4.5. Trước hết giả sử rằng $x \neq 0$. Khi đó đẳng thức

$$|x| = \sqrt{1-(1-x^2)}$$

và công thức nhị thức Newton với $\alpha = 1/2$ (xem bài toán trước) suy ra

$$\begin{aligned} |x| &= 1 - \frac{1}{2}(1-x^2) - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^n n!}(1-x^2)^n \\ &= 1 - \frac{1}{2}(1-x^2) - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!}(1-x^2)^n. \end{aligned}$$

Ngoài ra, chú ý rằng chuỗi $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!}$ hội tụ, bởi vì theo công thức Wallis (xem, chẳng hạn, I, 3.8.38)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(2n-3)!!}{(2n)!}}{\frac{1}{(2n-1)\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Vì vậy, theo địnhlí Abel (xem, chẳng hạn, 3.3.14), đẳng thức cũng đúng với $x = 0$.

3.4.6. Vi phân từng số hạng suy ra f thuộc $C^\infty(-R,R)$. Ngoài ra,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}.$$

Từ đó, $f^{(k)}(0) = k!a_k$ với $k = 0, 1, 2, \ldots$.

3.4.7. Quan sát rằng

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n((x-x_0)+x_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x-x_0)^k x_0^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n x_0^{n-k} \right) (x-x_0)^k. \end{aligned}$$

Để thấy bất đẳng thức cuối cùng đúng, chú ý rằng

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \left| a_n \binom{n}{k} (x-x_0)^k x_0^{n-k} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(|x-x_0|+|x_0|)^n.$$

Do đó, chuỗi kép ở vế trái của đẳng thức hội tụ tuyệt đối với $|x-x_0|+|x_0| < R$, và vì vậy có thể áp dụng kết quả trong I, 3.7.23. Bây giờ, vi phân từng số hạng, ta nhận được

$$f^{(k)}(x_0) = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n x_0^{n-k} k! \quad \text{với} \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Vậy

$$\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n x_0^{n-k} \quad \text{với} \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

3.4.8. Đặt $c_n = a_n - b_n$ và

(1) $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad x \in (-R, R).$$

Khi đó, $f(x) = 0$ với $x \in \mathbf{A}$. Bây giờ, gọi $\mathbf{B}$ là tập tất cả các điểm giới hạn của $\mathbf{A}$ thuộc $(-R, R)$, và đặt $\mathbf{C} = (-R, R) \subset \mathbf{B}$. Khi đó, $\mathbf{C}$ mở. Theo giả thiết, $\mathbf{B}$ khác rỗng. Rõ ràng, $(-R, R) = \mathbf{B} \cup \mathbf{C}$. Bây giờ, ta phải chứng minh rằng $\mathbf{B}$ cũng mở. Để làm vậy, lấy $x_0 \in \mathbf{B}$. Theo (1) và kết quả trong bài toán trước,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x - x_0)^n, \quad |x - x_0| < R - |x_0|. \tag{1}$$

Bây giờ, ta chứng minh rằng $d_n = 0$ với $n = 0, 1, 2, \ldots$. Nếu điều này không xảy ra, thì sẽ tìm được ít nhất một số nguyên không âm k để $d_k \neq 0$ và ta nhận được

$$f(x) = (x - x_0)^k g(x)$$

ở đây

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_{k+n} (x - x_0)^n \quad |x - x_0| < R - |x_0|.$$

Vì g liên tục tại x_0 và $g(x_0) = d_k \neq 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $g(x) \neq 0$ với $|x - x_0| < \delta$, mâu thuẫn với giả thiết x_0 thuộc $\mathbf{B}$. Vậy $d_n = 0$ với $n = 0, 1, 2, \ldots$, và do đó, $f(x) = 0$ với $|x - x_0| < R - |x_0|$. Vậy ta đã chứng minh rằng $\mathbf{B}$ mở. Vì $(-R, R)$ là tập liên thông, ta có $\mathbf{C} = \emptyset$ và $\mathbf{B} = (-R, R)$.

3.4.9. Ta sẽ áp dụng kết quả trong 3.4.6.

(a) Vì

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

ta có

$$\sin x^3 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{6n+3}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

(b) Dùng đồng nhất thức $\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$, $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$\sin x^3 = \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (3^{2n} - 1) \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(c) Ta có $\sin x\cos 3x = \frac{1}{2}(\sin 4x - \sin 2x),\ x \in \mathbb{R}$. Vậy

$$\sin x\cos 3x = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(4^{2n-1} - 2^{2n+1})\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad x \in \mathbb{R}.$$

(d) Ta có $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x,\ x \in \mathbb{R}$, và

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad x \in \mathbb{R}.$$

Do đó,

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^{2n}\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad x \in \mathbb{R}.$$

(e) Vì

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n},\quad x \in (-1,1),$$

ta có

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x)) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad x \in (-1,1).$$

(f) Rõ ràng, $\ln(1+x+x^2) = \ln\frac{1-x^3}{1-x^2},\ x \in (-1,1)$. Vì vậy, như trong (e), ta có

$$\ln(1+x+x^2) = \sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n,\quad x \in (-1,1),$$

ở đây

$$a_n = \begin{cases} -\frac{2}{n} & \text{với}\quad n = 3k,\ k = 1,2,3,\dots\ , \\ \frac{1}{n} & \text{với}\quad n \neq 3k,\ k = 1,2,3,\dots\ . \end{cases}$$

(g) Vì $\frac{1}{1-5x+6x^2} = \frac{3}{1-3x} - \frac{2}{1-2x}$, ta có

$$\frac{1}{1-5x+6x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(3^{n+1} - 2^{n+1})x^n,\quad x \in (-1/3,1/3).$$

(h) Ta biết rằng

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

và

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1, 1).$$

Theo định lí Mertens (xem, chẳng hạn, I, 3.6.1) tích Cauchy của hai chuỗi hội tụ với $|x| < 1$, và

$$\frac{e^x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) x^n.$$

3.4.10.

(a) Ta có

$$f(x+1) = (x+2)e^{x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e(n+2)}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Từ đó,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e(n+2)}{n!}(x-1)^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(b) Như trong 3.4.9(h), có thể chứng minh rằng

$$f(x-1) = e\sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) x^n, \quad x \in (-1, 1).$$

Vậy

$$f(x) = e\sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) (x-1)^n, \quad x \in (0, 2).$$

(c) Sử dụng đồng nhất thức

$$\frac{\cos x}{x} = \frac{\cos 1 \cos(x-1) - \sin 1 \sin(x-1)}{1 + (x-1)}.$$

(d) Lí luận tương tự như trong lời giải của 3.4.9(h), được

$$\frac{\ln x}{x} = \sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\right)(x-1)^n, \quad x \in (0,2).$$

3.4.11.

(a) Theo 3.4.4,

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$$

với $|x| < 1$. Từ đó

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}.$$

Đặt

$$S(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}$$

và chú ý rằng $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = S'(x)$. Vậy $\arcsin x = S(x) + C$. Ngoài ra, vì $S(0) = 0 = \arcsin 0$, ta có $S(x) = \arcsin x$.

(b) Đặt

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}.$$

Theo đồng nhất thức đã biết

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}, \quad |x| < 1,$$

ta nhận được $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} = S'(x)$. Vậy $S(x) = \operatorname{arctg} x + C$. Vì $\operatorname{arctg} 0 = S(0) = 0$, ta có $C = 0$.
Để có bất đẳng thức đầu, chỉ cần đặt $x = \frac{1}{2}$ trong (a). Để có bất đẳng thức thứ hai, quan sát rằng $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}$ hội tụ và dùng định lí Abel (xem, chẳng hạn, 3.3.14) cho chuỗi luỹ thừa (b).

3.4.12.

(a) Dùng khai triển Taylor cho $\operatorname{arctg} x$ (đã có trong bài toán trước) và cho $\ln(1+x^2)$, ta có

$$x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{2n(2n-1)}, \quad x \in (-1,1).$$

(b) Dùng khai triển Taylor cho $\arcsin x$ (đã có trong bài toán trước) và công thức nhị thức Newton (xem 3.4.4), ta nhận được

$$x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!(2n-1)} x^{2n}, \quad x \in (-1,1).$$

3.4.13.

(a) Đặt

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^{n+1}, \quad |x| < 1.$$

Khi đó

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n - \ln(1-x), \quad |x| < 1.$$

Vậy

$$f(x) = (1-x)\ln(1-x) + x \text{với} \quad |x| < 1.$$

Bây giờ, dùng định lí Abel được

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} = 2\ln 2 - 1.$$

(b) Với $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} x^{2n+1} &= \frac{1}{2} x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &= \frac{1}{2}(x\cos x - \sin x). \end{aligned}$$

Đặt $x = 1$, ta được

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} = \frac{1}{2}(\cos 1 - \sin 1).$$

(c) Suy ra từ đẳng thức

$$\frac{1}{n^2+n-2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

rằng nếu $0 < |x| < 1$, thì

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n-2} x^{n-1} = \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} x^{n-1} - \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2} x^{n-1} \\
&= \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \frac{1}{3x^3}\sum_{n=4}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \\
&= \frac{1}{3}\ln(1+x) + \frac{1}{3x^3}\left(\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right).
\end{aligned}$$

Kết hợp với định lí Abel, có

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n-2} = \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{5}{18}.$$

(d) Tổng là $\pi/2 - \ln 2$. Để thấy điều này, áp dụng 3.4.12(a) và định lí Abel.

(e) Theo công thức nhị thức Newton (xem 3.4.4),

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} \qquad |x| < 1,$$

và từ đó, theo định lí Abel,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(f) Rõ ràng,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^{n+1}}{n!} = 3xe^{3x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Vậy

$$3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n(n+1)}{n!} = (3xe^{3x})' = e^{3x}(3+9x).$$

Đặt $x = 1$ có

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n(n+1)}{n!} = 4e^3.$$

3.4.14. Khoảng hội tụ của chuỗi là $(-1, 1)$. Gọi $S(x)$ là tổng của chuỗi trong khoảng đó. Khi đó

$$S'(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((n-1)!)^2}{(2n-1)!}(2x)^{2n-1}$$

và

$$S''(x) = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((n-1)!)^2}{(2n-2)!}(2x)^{2n-2}.$$

Suy ra rằng

$$(1-x^2)S''(x) - xS'(x) = 4, \quad |x| < 1.$$

Nhân cả hai vế đẳng thức này với $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ được

$$\left(\sqrt{1-x^2}S'(x)\right)' = \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Do đó,

$$S'(x) = \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x + \frac{C}{\sqrt{1-x^2}},$$

và vì vậy, $S(x) = 2(\arcsin x)^2 + C \arcsin x + D$. Vì $S'(0) = S(0) = 0$, ta có $S(x) = 2(\arcsin x)^2$.

Nếu $x = \pm 1$, ta nhận được chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((n-1)!)^2}{(2n)!}4^n.$$

hội tụ theo tiêu chuẩn Gauss (xem, chẳng hạn, I,3.2.25). Thực vậy, ta có

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{6}{4n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Vậy theo định lí Abel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((n-1)!)^2}{(2n)!} 4^n = \frac{\pi^2}{2}.$$

3.4.15. Với $a \in \mathbf{I}$,

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x),$$

ở đây

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(s)(x-s)ds.$$

Áp dụng công thức đổi biến hai lần, ta được

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{1}{n!}\int_0^{x-a} f^{(n-1)}(u+a)(x-u+a)du \\ &= \frac{(x-a)^{n+1}}{n!}\int_0^1 f^{(n+1)}((x-a)t+a)(1-t)^n dt. \end{aligned}$$

Tính đơn điệu của $f^{(n+1)}$ suy ra rằng nếu $a < x < b$, $b \in \mathbf{I}$, thì

$$\begin{aligned} 0 \le R_n(x) &\le \frac{(x-a)^{n+1}}{n!}\int_0^1 f^{(n+1)}((x-a)t+a)(1-t)^n dt \\ &= \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{n+1} R_n(b). \end{aligned}$$

Rõ ràng, $R_n(b) \le f(b)$. Vậy

$$0 \le R_n(x) \le \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n f(b) \quad \text{với} \quad a < x < b,\ a, b \in \mathbf{I},$$

và vì vậy, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Điều này chỉ ra rằng chuỗi Taylor hội tụ đều tới f trên mỗi khoảng con compact của $\mathbf{I}$. Vì $a < b$ được chọn tuỳ ý trong $\mathbf{I}$, tính giải tích của f suy từ 3.4.7.

3.4.16. Chứng minh tương tự như trong 3.4.1.

3.4.17. [18]. Lấy x_0 tuỳ ý trong **I**. Theo giả thiết, tồn tại $r > 0$ sao cho

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad \text{với} \quad |x - x_0| < r.$$

Đạo hàm m lần, được

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} n(n-1)\cdots(n-m+1)(x - x_0)^{n-m}.$$

Từ đó

$$|f^{(m)}(x)| \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|f^{(n)}(x_0)|}{n!} n(n-1)\cdots(n-m+1)|x - x_0|^{n-m}.$$

Suy ra từ định nghĩa bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa (xem, chẳng hạn, 3.3.1) rằng với $o < \rho\varrho < r$, tồn tại số dương C sao cho

$$\frac{|f^{(n)}(x_0)|}{n!} \le \frac{C}{\rho^n}.$$

Do đó,

$$|f^{(m)}(x)| \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C}{\rho^n} n(n-1)\cdots(n-m+1)|x - x_0|^{n-m}.$$

Vì vậy, theo đồng nhất thức

$$\sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-m+1)x^{n-m} = \frac{m!}{(1-x)^{m+1}}, \quad |x| < 1,$$

ta đi đến

$$\begin{aligned} |f^{(m)}(x)|\rho^{-m} &\le \sum_{n=m}^{\infty} \frac{C}{\rho^{n-m}} n(n-1)\cdots(n-m+1)|x - x_0|^{n-m} \\ &= \frac{Cm!}{\rho^m \left(1 - \frac{|x - x_0|}{\rho}\right)^{m+1}} \le \frac{C\rho m!}{(\rho - \rho_1)^m} \end{aligned}$$

với $|x - x_0| < \rho_1 < \rho$. Vậy ta có thể lấy $\mathbf{J} = (x_0 - \rho_1, x_0 + \rho_1)$, $A = C\rho$ và $B = \rho - \rho_1$.

3.4.18. [18].Đặt

$$f(x) = \frac{1}{1 - A(x-1)} \quad \text{với} \quad |x-1| < \frac{1}{A}$$

và

$$g(x) = \frac{1}{1-t} \quad \text{với} \quad |t| < 1.$$

Khi đó,

$$h(t) = (f \circ g)(t) = \frac{1-t}{1-(A+1)t}.$$

Rõ ràng,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A^n (x-1)^n, \quad g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n.$$

Ngoài ra,

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{1-(A+1)t} - \frac{t}{1-(A+1)t} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (1+A)^n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} (1+A)^n t^{n+1} \\ &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} A(1+A)^{n-1} t^n. \end{aligned}$$

Vì $g^{(n)}(0) = n!$, $f^{(n)}(g(0)) = f^{(n)}(1) = n!A^n$ và $h^{(n)}(0) = n!A(1+A)^{n-1}$, dùng công thức Faà di Bruno, ta có đẳng thức cần chứng minh.

3.4.19. [18]. Chọn x_0 tuỳ ý trong $\mathbf{I}$ và đặt $y_0 = f(x_0)$. Suy ra từ 3.4.17 rằng tồn tại các khoảng $\mathbf{I}_1 \subset \mathbf{I}$ và $\mathbf{J}_1 \subset \mathbf{J}$ (lần lượt chứa x_0 và y_0) và các hằng số dương A, B, C và D sao cho

$$|f^{(n)}(x)| \le A \frac{n!}{B^n} \quad \text{với} \quad x \in \mathbf{I}_1$$

và

$$|g^{(n)}(y)| \le C \frac{n!}{D^n} \quad \text{với} \quad x \in \mathbf{J}_1.$$

Theo công thức Faà di Bruno,

$$h^{(n)}(x) = \sum \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_n!} g^{(k)}(f(x)) \left(\frac{f^{(1)}(x)}{1!}\right)^{k_1} \left(\frac{f^{(2)}(x)}{2!}\right)^{k_2} \cdots \left(\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\right)^{k_n},$$

ở đây $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ và tổng lấy trên tất cả các $k_1, k_2, \ldots, k_n$ sao cho $k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n = n$. Điều này cùng với kết quả trong bài toán trước cho ta

$$\begin{aligned} |h^{(n)}(x)| &\le \sum \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}\frac{Ck!}{D^k}\left(\frac{A}{B^1}\right)^{k_1}\left(\frac{A}{B^2}\right)^{k_2}\cdots\left(\frac{A}{B^n}\right)^{k_n} \\ &= \sum \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}\frac{Ck!}{D^k}\frac{A^k}{B^n} = \frac{n!C}{B^n}\sum \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}\frac{Ck!}{D^k} \\ &= \frac{n!C}{B^n}\frac{A}{D}\left(1+\frac{A}{D}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

Bây giờ, suy từ kết quả trong 3.4.16 rằng h giải tích thực trên $\mathbf{I}$.

3.4.20. Suy từ 3.4.15 rằng $g(x) = f(-x)$ giải tích thực trên khoảng $-\mathbf{I}$. Vì $x \mapsto -x$ giải tích thực, kết quả suy ra từ bài toán trước.

3.4.21. [18]. Xét $g(t) = 1 - \sqrt{1-2t}$, $|t| < 1/2$, và $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$. Khi đó

$$h(t) = f(g(t)) = \frac{1}{\sqrt{1-2t}} = g'(t).$$

Vậy $g^{(n+1)}(t) = h^{(n)}(t)$. Ngoài ra, theo công thức nhị thức Newton (xem 3.4.4),

$$g(t) = -\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-2t)^n.$$

Rõ ràng, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$. Do đó, $g^{(n)}(0) = -n!\binom{\frac{1}{2}}{n}(-2)^n$ và $f^{(n)}(g(0)) = n!$. Cuối cùng, theo công thức Faà di Bruno ,

$$\begin{aligned} &-(n+1)!\binom{\frac{1}{2}}{n+1}(-2)^{n+1} = g^{(n+1)}(0) = h^{(n)}(0) \\ &= n!\sum \frac{k!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}\left(-\binom{\frac{1}{2}}{1}(-2)\right)^{k_1}\cdots\left(-\binom{\frac{1}{2}}{n}(-2)\right)^{k_n} \\ &= (-2)^n n!\sum \frac{k!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}\binom{\frac{1}{2}}{1}^{k_1}\cdots\binom{\frac{1}{2}}{n}^{k_n} \end{aligned}$$

ở đây $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ và tổng lấy trên tất cả các $k_1, k_2, \ldots, k_n$ sao cho $k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n$.

3.4.22. [18]. Trước hết quan sát rằng nếu f thoả mãn các giả thiết được phát biểu trong bài toán, thì nghịch đảo g của nó tồn tại trong một khoảng mở chứa $f(x_0)$. Ngoài ra,

$$g'(y) = h(g(y)), \quad \text{ở đây} \quad h(x) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Rõ ràng, vì f thuộc C^∞ nên g cũng vậy. Bây giờ ta phải chứng minh rằng g thoả mãn các giả thiết của 3.4.16. Theo 3.4.19, ta biết rằng h giải tích trong một khoảng mở nào đó chứa x_0 (hợp của hai hàm giải tích). Vì vậy, theo 3.4.17, tồn tại các hằng số dương A và B sao cho

$$|h^{(n)}(x)| \le A\frac{n!}{B^n} \tag{1}$$

trong khoảng mở $\mathbf{I}_0 \subset \mathbf{I}$ nào đó chứa x_0. Bây giờ, phép quy nạp sẽ chỉ ra rằng tồn tại khoảng mở $\mathbf{K}$ chứa $f(x_0)$ sao cho

$$|g^{(n)}(y)| \le n!(-1)^{n-1}\binom{\frac{1}{2}}{n}\frac{(2A)^n}{B^{n-1}} \quad \text{với} \quad y \in \mathbf{K}. \tag{2}$$

Ta chọn $\mathbf{K}$ sao cho $g(\mathbf{K})$ được chứa trong $\mathbf{I}_0$. Khi đó, theo (1), ta có $|g'(y)| = |h(g(y))| \le A$, tức là (2) đúng với $n = 1$. Giả sử (2) đúng với $k = 1, 2, \ldots, n$, ta sẽ chứng minh nó đúng với $n + 1$. Theo bài toán trước, ta có

$$\begin{aligned}
&|g^{(n+1)}(y)| = (h \circ g)^{(n+1)}(y) \\
\le\ & n!\sum \frac{k!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}\frac{A}{B^k}\left(\binom{\frac{1}{2}}{1}\right)^{k_1}\cdots\left((-1)^{n-1}\binom{\frac{1}{2}}{n}\right)^{k_n} \\
=\ & (-1)^n n!\frac{(2A)^n}{B^n}A\sum \frac{(-1)^k k!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}\binom{\frac{1}{2}}{1}^{k_1}\cdots\binom{\frac{1}{2}}{n}^{k_n} \\
=\ & (-1)^n n!\frac{(2A)^n}{B^n}A2(n+1)\binom{\frac{1}{2}}{n+1} \\
=\ & (-1)^n (n+1)!\frac{(2A)^{n+1}}{B^n}\binom{\frac{1}{2}}{n+1}.
\end{aligned}$$

Điều này kết thúc chứng minh của (2). Vì vậy, tính giải tích của g trên $\mathbf{K}$ suy ra từ 3.4.16.

3.4.23. Suy ra từ $f^{-1}(x) = f'(x)$ rằng f ánh xạ khoảng $(0, \infty)$ lên chính nó và f thuộc C^∞ trên khoảng này. Từ đó, $f'(x) > 0$ và f tăng thực sự tren $(0, \infty)$. Đạo hàm đẳng thức $f(f'(x)) = x$, ta có $f''(x) > 0$ với $x \in (0, \infty)$ và $n \geq 2$. Ta sẽ chứng minh điều này bằng quy nạp, dùng công thức Faà di Bruno (xem 2.1.38). Giả sử rằng $(-1)^m f^{(m)}(x) > 0$ với $m = 2, 3, \ldots, n$. Khi đó,

$$\begin{aligned}0 =& \sum \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_n!} f^{(k)}(f'(x)) \left(\frac{f''(x)}{1!}\right)^{k_1} \left(\frac{f^{(3)}(x)}{2!}\right)^{k_2} \\ &\cdots \left(\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}\right)^{k_{n-1}} + f'(f'(x)) f^{(n+1)}(x),\end{aligned}$$

ở đây $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1}$ và tổng lấy trên tất cả các $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$ sao cho $k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_{n-1} = n$. Dấu của mỗi số hạng dưới $\sum$ là

$$\operatorname{sgn}((-1)^k (-1)^{2k_1} (-1)^{3k_2} \cdots (-1)^{nk_{n-1}}) = (-1)^n,$$

ta nhận được

$$\operatorname{sgn}\left(f'(f'(x)) f^{(n+1)}(x)\right) = \operatorname{sgn} f^{(n+1)}(x) = -(-1)^n.$$

Bây giờ, kết qủa trong 3.4.20 chỉ ra rằng f giải tích trên $(0, \infty)$.

3.4.24. Theo bài toán trước ta biết rằng mỗi hàm f thoả mãn giả thiết là giải tích trên $(0, \infty)$. Trước hết, ta chứng minh rằng tồn tại duy nhất số a sao cho $f(x) < x$ nếu $x \in (0, a)$, và $f(x) > x$ nếu $x > a$. Để làm vậy, quan sát rằng do tính đơn điệu của f, ta có $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$, cùng với đẳng thức $f'(f(x)) f'(x) = x f'(x)$, ta được

$$f(f(x)) = \int_0^x t f'(t) dt. \tag{1}$$

Bây giờ, nếu $f(x)$ lớn hơn x với $0 < x < 1$, thì (1) suy ra

$$\int_0^x f'(t)(t-1) dt > 0,$$

Mâu thuẫn với giả thiết $f'(x) > 0$ với $x > 0$. Mặt khác, nếu $f(x) < x$ với mọi $x \in (0, \infty)$, thì (1) suy ra

$$f(x) > f(f(x)) = \int_0^x tf'(t)dt > \int_0^x f(t)f'(t)dt = \frac{1}{2}(f(x))^2,$$

suy ra $f(x) < 2$ với $x > 0$, ngược với giả thiết $f((0,\infty)) = (0,\infty)$. Do đó, theo tính chất giá trị trung gian, tồn tại điểm bất động a của f. Vì $f(x) < x$ với $x \in (0, a)$, ta có $f'(y) = f^{-1}(y)$ với $y \in (0, a)$. Cũng như vậy, $f'(y) < y$ với $y > a$.

Bây giờ, ta chuyển qua chứng minh tính duy nhất. Giả sử ngược lại, tồn tại hai hàm như vậy, f_1 vàf_2. Gọi a_1 và a_2 lần lượt là các điểm bất động của f_1 và f_2. Rõ ràng, ta có thể giả sử rằng $a_1 \geq a_2$. Đặt $g = f_1 - f_2$. Nếu $a_1 = a_2 = a$, thì $g(a) = 0$ và $f^{-1} = f'$ suy ra $g^{(n)}(a) = 0$ với $n \in \mathbb{N}$. Vì g giải tích, g là hàm hằng (bằng 0) trên $(0, \infty)$. Nếu $a_1 > a_2$, thì $f_1(x) < x \leq f_2(x)$ và $f_1'(x) > x \geq f_2'(x)$ với $x \in [a_2, a_1)$. Vì vậy, $g(x) < 0$ và $g'(x) > 0$ với $x \in [a_2, a_1)$. Vì $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 0$, tồn tại $b \in (0, a_2)$ sao cho $g'(b) = 0$ và $g'(x) > 0$ với $x \in (b, a_1)$, và$g'(x) < 0$ với $x \in ([, a_2)$. Đặt $f_1'(b) = f_2'(b) = b'$. Khi đó, $b' \in (b, a_2)$, bởi vì $b < f_2'(b) = b' < f_2'(a_2) = a_2$. Từ đó, $g'(b) < 0$. Mặt khác, $f_1(b') = f_1(f_1'(b)) = b$ và $f_2(b') = f_2(f_2'(b)) = b$, mâu thuẫn.

3.4.25. Nếu $f(x) = ax^c$, thì $f'(x) = acx^{c-1}$ và $f^{-1}(x) = a^{-\frac{1}{c}}x^{\frac{1}{c}}$. Từ đây có $c = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ và $a = c^{1-c}$.

3.4.26. Theo côngg thức Taylor đã chứng minh rong 2.3.10,

$$\ln(1+x) = 2\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{x}{2+x}\right)^{2n+1} + R_n(x),$$

ở đây

$$R_n(x) = \frac{2}{(2N=1)(1+\theta x)^{2N+3}}\left(\frac{x}{2}\right)^{2N+3}.$$

Rõ ràng, $\lim\limits_{N\to\infty} R_n(x) = 0$ với $x \in (0, 2)$. Do đó

$$\ln(1+x) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{x}{2+x}\right)^{2n+1}.$$

3.4.27. [Tung-Po Lin, Amer. Math. Monthly 81(1974), 879-883]. Theo định nghĩa,

$$\frac{L(x,y)}{M_p(x,y)} = \frac{\frac{x-y}{\ln x - \ln y}}{(\frac{x^p+y^p}{2})^{1/p}} = \frac{2^{1/p}(x-y)}{(x^p+y^p)^{1/p}\ln\frac{x}{y}}$$

với x và y dương, khác nhau và với $p \neq 0$. Chia tử số và mẫu số cho y và đặt $z = \left(\frac{x}{y}\right)^p$, ta được

$$\frac{L(x,y)}{M_p(x,y)} = \frac{2^{1/p}(z^{1/p}-1)}{(z+1)^{1/p}\ln z^{1/p}}.$$

Bây giờ viết

$$z = \frac{1+\omega}{1-\omega} \qquad \left(\omega = \frac{z-1}{z+1},\ 0 < |\omega| < 1\right)$$

và nhân cả tử và mẫu với $\frac{(1-\omega)^{1/p}}{2\omega}$, ta đi đến

$$\begin{aligned}\frac{L(x,y)}{M_p(x,y)} &= \frac{p2^{1/p}\left(\left(\frac{1+\omega}{1-\omega}\right)^{1/p}-1\right)}{\left(\frac{1+\omega}{1-\omega}+1\right)^{1/p}\ln\frac{1+\omega}{1-\omega}} \\ &= \frac{\frac{p\left((1+\omega)^{1/p}-(1-\omega)^{1/p}\right)}{2\omega}}{\frac{\ln(1+\omega)-\ln(1-\omega)}{2\omega}} = \frac{f(\omega,p)}{g(\omega)}.\end{aligned}$$

Rõ ràng,

$$g(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\omega^{2n},$$

Và theo 3.4.4,

$$f(\omega,p) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\left(\left(\frac{1}{p}-1\right)\left(\frac{1}{p}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{p}-2n\right)\cdot\frac{1}{(2n)!}\right)\omega^{2n}.$$

Do đó, để chứng minh rằng $f(\omega,p) < g(\omega)$, chỉ cần chỉ ra với mọi số nguyên dương n,

$$\left(\frac{1}{p}-1\right)\left(\frac{1}{p}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{p}-2n\right)\cdot\frac{1}{(2n)!} \le 1$$

và bất đẳng thức ngặt xảy ra với ít nhất một n. Với $n = 1$, ta có

$$\left(\frac{1}{p}-1\right)\left(\frac{1}{p}-2\right)\cdot\frac{1}{2} \le 1 \quad \text{với} \quad p \ge \frac{1}{3},$$

bởi vì

$$\frac{1}{2p^2} - \frac{3}{2p} + 1 = 1 - \frac{1}{2p}\left(3 - \frac{1}{p}\right) < 1, \quad \text{nếu} \quad 0 < \frac{1}{p} < 3.$$

Từ đó

$$\begin{aligned} Q_n &= \frac{\left(\frac{1}{p}-1\right)\left(\frac{1}{p}-2\right)\left(\frac{1}{p}-3\right)\cdots\left(\frac{1}{p}-2n\right)}{(2n)!} \\ &= \underbrace{\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{2p}\right)}_{Q_1}\underbrace{\left(1-\frac{1}{3p}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2np}\right)}_{<1} \end{aligned}$$

Với $p \geq \frac{1}{3}$. Vậy, $Q_1 \leq 1$ với $p \geq \frac{1}{3}$, và công thức cuối cùng chứng minh rằng $Q_n < 1$ với $n = 2, 3, \ldots$.

3.4.28. [Tung-Po Lin, Amer. Math. Monthly 81(1974), 879-883]. Ta dùng những kí hiệu từ lời giải của bài toán trước. Ta có, $Q_1 > 1$ với $p < \frac{1}{3}$. Vậy tồn tại $0 < h < 1$ sao cho nếu $0 < \omega < h$, thì $f(\omega, p) > g(\omega)$. Bây giờ, quan sát rằng bất đẳng thức $0 < \omega < h$ có thể viết lại dưới dạng

$$1 < z < r^p, \quad \text{ở đây} \quad r = \left(\frac{1+h}{1-h}\right)^{1/p} \quad \text{và} \quad z = \left(\frac{x}{y}\right)^{1/p}.$$

Điều này có nghĩa tồn tại $r > 1$ sao cho $L(x,y) > M_p(x,y)$ nếu $1 < \frac{x}{y} < r$.

3.4.29. [Tung-Po Lin, Amer. Math. Monthly 81(1974), 879-883]. Đặt $\frac{x}{y} = \frac{(1+\omega)^2}{(1-\omega)^2}$, $0 < |\omega| < 1$, ta nhận được

$$\begin{aligned} \frac{L(x,y)}{M_0(x,y)} &= \frac{\frac{x-y}{\ln x - \ln y}}{(xy)^{1/2}} = \frac{\frac{\frac{x}{y}-1}{\ln\frac{x}{y}}}{\left(\frac{x}{y}\right)^{1/2}} = \frac{\frac{\frac{(1+\omega)^2}{(1-\omega)^2}-1}{4\left(\omega+\frac{1}{3}\omega^3+\frac{1}{5}\omega^5+\cdots\right)}}{\frac{1+\omega}{1-\omega}} \\ &= \frac{1}{1-\omega^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{3}\omega^2+\frac{1}{5}\omega^4}+\cdots \\ &= \frac{1+\omega^2+\omega^4+\omega^6+\cdots}{1+\frac{1}{3}\omega^2+\frac{1}{5}\omega^4+\frac{1}{7}\omega^6+\cdots} > 1. \end{aligned}$$

Kết hợp với 2.5.42 và 2.5.43 suy ra điều phải chứng minh.

3.4.30. [Tung-Po Lin, Amer. Math. Monthly 81(1974), 879-883]. Dùng các kí hiệu đã đưa ra trong lời giải của 3.4.27, ta có

$$\frac{L(x,y)}{M_p(x,y)} = \frac{p\left((1+\omega)^{1/p} - (1-\omega)^{1/p}\right)}{\ln \frac{1+\omega}{1-\omega}} \underset{\omega \to 1}{\longrightarrow} 0.$$

Vì $z = \left(\frac{x}{y}\right)^p = \frac{1+\omega}{1-\omega}$, ta nhận được $L(x,y) < M_p(x,y)$ với z đủ lớn.

Tài liệu tham khảo

[1] J. Banaś, S. Wądrychowicz, *Zbiór zadań z analizy matematycznej*, Windawnictwa Naukowo - Techniczne, Warszawa, 1994.

[2] W. I. Bernik, O. W. Melnikov, I. K. Zuk , *Sbornik olimpiadnych zadač po matematike*, Narodnaja Asveta, Minsk , 1980.

[3] P. Biler, A. Witkowski, *Problems in Mathematical Analysis,* Marcel Dekker, Inc, New York and Basel, 1990.

[4] T. J. Bromwich, *An Introduction to the Theory of Infinte Series*, Macmillan and Co., Limited, London ,1949.

[5] R. P. Boas, *A Primer of Real Analytic Functions*, Birkhäuser Verlag, Basel Boston Berlin, 1992.

[6] L. Carleson. T. W. Gamelin, *Complex Dynamics*, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg, 1993.

[7] B. Demidovič, *Sbornik zadač i upražnenij po matematičeskomu analizu*, Nauka, Moskva, 1969.

[8] J. Dieudonné, *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York San Francisco London, 1969.

[9] A. J. Dorogovcev, *Matematičeskij analiz. Spravočnoe posobe*, Vyščaja Škola, Kiev, 1985.

[10] A. J. Dorogovcev, *Matematičeskij analiz. Sbornik zadač*, Vyščaja Škola, Kiev, 1987.

[11] G. M. Fichtenholz, *Differential-und Integralrechnung, I, II, III*, V.E.B. Deutscher Verlag Wiss., Berlin, 1966-1968.

[12] B. R. Gelbaum, J. M. H. Olmsted, *Theorems and Counterexamples in Mathematics*, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg, 1990.

[13] E. Hille, *Analysis Vol. I*, Blaisdell Publishing Company, New York Toronto London, 1964.

[14] W. J. Karzor, M. T. Nowak, *Problems in Mathematical Analysis I. Real Number, Sequences and Series*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[15] G. Klambauer, *Mathematical Analysis*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1975.

[16] G. Klambauer, *Problems and Propositions in Analysis*, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1979.

[17] K. Knopp, *Theorie und Anwendung der Unendhichen Reihen*, Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg, 1947.

[18] S. G. Krant, H. R. Parks, *A Primer of Real Analytic Functions*, Bikhauser Verlag, 1992.

[19] L. D. Kudriavtsev, A. D. Kutasov, V. I. Chejlov, M. I. Shabunin, *Problems de Aná Matemático. Límite, Continuidad, Derivabilidad (Spanish)*, Mir, Moskva, 1989.

[20] K. Kuratowski, *Introduction to Calculus*, Pergamon Press, Oxford-Eidenburg-New York; Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1969.

[21] S. Lojasiewicz, *An Introduction to the Theory of Real Number*, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley&Sons, Ltd., Chichester, 1988.

[22] D. S. Mitrinović, *Elemetary Inequalities*, P. Noordhoff Ltd., Gronigen, 1964.

[23] G. Pólia, G. Szegö, *Problems and theorems in analysis I,* Spriger - Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1978.

[24] R. Remmert, *Theory of Complex Functions*, Spriger - Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1991.

[25] Ya. I. Rivkind, *Zadači po matematičeskomu analizu,* Vyšejšaja Škola, Mińsk, 1973.

[26] W.I. Rozhkov, V.D. Kurdevanidze, N. G. Pafionov, *Sbornik zadac matematiceskich olimpiad,* Izdat. Univ. Druzhby Narodov, Maskva, 1987.

[27] W. Rudin, *Principle of Mathematical Analysis,* McGraw - Hill Book Company, New York, 1964.

[28] W. Rzymowsky, *Convex Functions*, preprint.

[29] W. A. Sadowničij, A. S. Podkolzin, *Zadači studenčcskich olimpiad po matematike,* Nauka, Moskva, 1978.

[30] R. Sikorski, *Funkcje rzeczywiste*, PWN, Warszawa, 1958.

[31] H. Silverman, *Complex variables,* Houghton Mifflin Company, Boston, 1975.

[32] E. C. Titchmarsch, *The Theory of Functions*, Oxford University Press, London, 1944.

[33] G. A. Tonojan, W. N. Sergeev, *Studenčeskije matematičeskije oimpiady,* Izdatelstwo Erevanskogo Universiteta, Erevan, 1985.