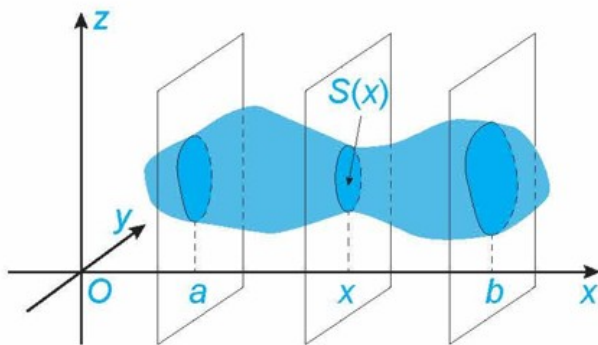


PHẦN A. LÝ THUYẾT VÀ VÍ DỤ

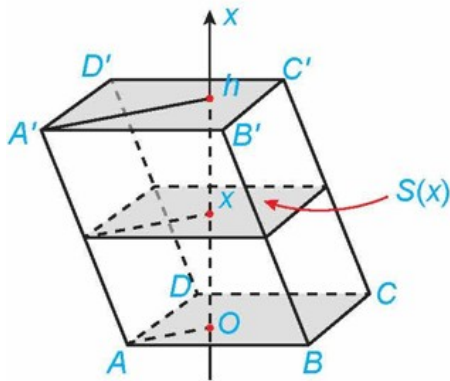
Công thức tính thể tích vật thể

Cho một vật thể trong không gian $Oxyz$. Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm có hoành độ $x=a, x=b$. Một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ là x cắt vật thể theo mặt cắt có diện tích là $S(x)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó thể tích V của phần vật thể B được tính bởi công thức

$$V = \int_a^b S(x) dx$$



Ví dụ 1: Tính thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy bằng S và chiều cao bằng h .
Giải

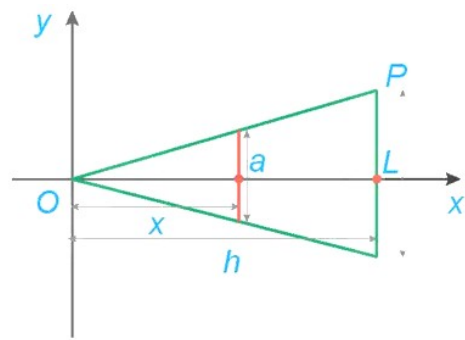
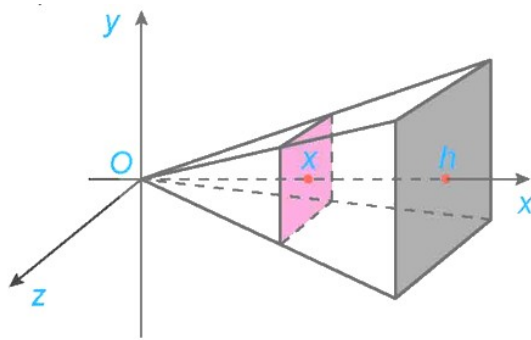


Chọn trục Ox song song với đường cao của khối lăng trụ và hai đáy nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với Ox tại $x=0$ và $x=h$. Mỗi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng $x(0 \leq x \leq h)$ cắt khối lăng trụ theo mặt cắt có diện tích không đổi là $S(x)=S$.

$$V = \int_0^h S(x) dx = \int_0^h S dx = Sx \Big|_0^h = Sh.$$

Do đó, thể tích của khối lăng trụ là

Ví dụ 2: Tính thể tích của khối chóp đều có đáy là hình vuông cạnh L và chiều cao là h .
Giải



Chọn trục Ox sao cho gốc O trùng với đỉnh của khối chóp và trục đi qua tâm của đáy. Khi đó, đáy của khối chóp nằm trên mặt phẳng vuông góc với Ox tại $x = h$.

Mỗi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng $x (0 \leq x \leq h)$, cắt khối chóp theo mặt cắt là hình vuông có cạnh là a .

$$\frac{x}{h} = \frac{a}{L} \quad \text{Theo định lí Thalès, ta có} \quad a = \frac{L}{h}x$$

Do đó, diện tích của mặt cắt này là $S(x) = \frac{L^2}{h^2}x^2$.

Vậy thể tích của khối chóp này là $V = \int_0^h S(x) dx = \int_0^h \frac{L^2}{h^2}x^2 dx = \frac{L^2}{h^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{1}{3}L^2h$.

Chú ý. Bằng ứng dụng của tích phân, người ta chứng minh được thể tích của khối chóp bất kì bằng $\frac{1}{3}$ diện tích mặt đáy nhân với chiều cao của nó.

Công thức tính thể tích của khối tròn xoay

Cho hàm số $f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $[a; b]$.

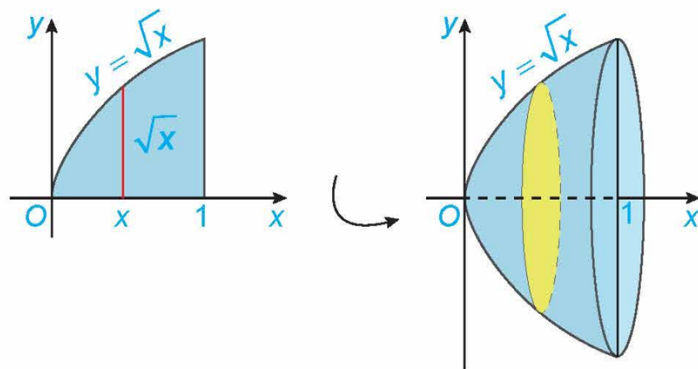
Khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ xung quanh trục hoành, ta được hình khối gọi là một khối tròn xoay.

Khi cắt khối tròn xoay đó bởi một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm $x \in [a; b]$ được một hình tròn có bán kính $f(x)$.

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Thể tích của khối tròn xoay này là

Ví dụ 3: Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 1$.



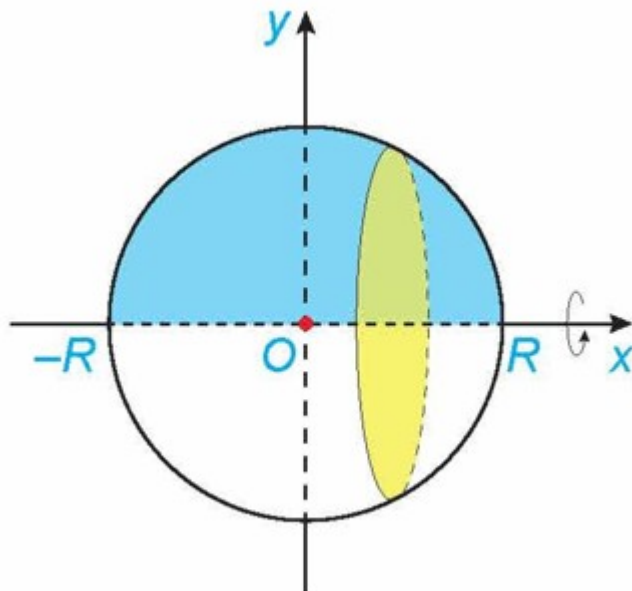
Giải

Thể tích khối tròn xoay cần tính là

$$V = \pi \int_0^1 f^2(x) dx = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^1 x dx = \frac{\pi x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Ví dụ 4: Tính thể tích của khối cầu bán kính R .

Giải



Khối cầu bán kính R có thể xem là vật thể sinh ra khi quay quanh trục hoành nửa hình tròn giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{R^2 - x^2} (-R \leq x \leq R)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -R, x = R$.

Do đó, thể tích của khối cầu bán kính R là

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-R}^R (\sqrt{R^2 - x^2})^2 dx = \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx \\ &= \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-R}^R = \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$