SỞ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO
TỈNH BÌNH DƯƠNG
Trường THPT chuyên Hùng Vương

ĐỀ ĐỀ XUẤT

ĐỀ ĐỀ XUẤT KỲ THI HỌC SINH GIỎI KHU VỰC DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ NĂM 2023
Môn: **TOÁN – KHỐI 11**
*Thời gian: **180 phút,** không kể thời gian phát đề*

Câu 1: (4 *điểm*). Với mỗi số thực $x \in \left(\frac{1}{2};1\right)$, các số nguyên dương n sao cho $[nx]$ là số chẵn được viết thành một dãy tăng $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$.

a) Hỏi có tồn tại hay không số nguyên dương m để ba số $[mx],[(m+1)x],[(m+2)x]$ đều không thuộc dãy?

b) Chứng minh rằng có vô số nguyên dương n sao cho $\sum_{i=1}^{n}\frac{15}{a_{i+1}^2 - a_i^2} > 7^{2023}$.

Câu 2: (4 *điểm*).

Tìm tất cả hàm số $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn :

$$f(2023)=1 \text{ và } f(x).f(y)+f\left(\frac{2023}{x}\right)f\left(\frac{2023}{y}\right)=2f(xy), \forall x,y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Câu 3: (4 *điểm*).

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) có B, C cố định và A thay đổi trên (O). D là trung điểm BC. BE, CF là các đường cao của tam giác ABC. Hai đường tròn (DBF) và (DCE) cắt nhau tại điểm thứ hai là K.

a) Chứng minh rằng K luôn thuộc đường tròn cố định.

b) Lấy T trên (O) sao cho $KT \perp BC$ và A, T khác phía với BC. Các đường thẳng AB, BT cắt lại đường tròn (AKT) lần lượt tại M, N. Gọi I là trung điểm MN. Chứng minh rằng đường tròn (ATI) luôn đi qua điểm cố định.

Câu 4: (4 *điểm*). Cho dãy $f(1), f(2), f(3), \ldots$ được định nghĩa

$$f(n)=\frac{1}{n}\left(\left\lfloor\frac{n}{1}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+\ldots+\left\lfloor\frac{n}{n}\right\rfloor\right),$$

ở đó $\lfloor x\rfloor$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x.

a) Chứng minh rằng $f(n+1) < f(n)$ xảy ra với vô hạn số nguyên dương n.

b) Chứng minh rằng $f(n+1) > f(n)$ xảy ra với vô hạn số nguyên dương n.

Câu 5: (4 *điểm*). Tìm số các bộ số nguyên $(a_1, a_2, \ldots, a_n), n > 1$ thỏa mãn $|a_i| \le 1, \forall i = 1,2,\ldots,n$ và $|a_i - a_{i+1}| \le 1, \forall i = 1,2,\ldots,n$.

---------------HẾT---------------

ĐÁP ÁN VẢ THANG ĐIỂM CHẤM – TOÁN – KHỐI 11

Câu 1: (4 *điểm*). (Người ra đề: Nguyễn Văn Phi)

Với mỗi số thực $x \in \left(\frac{1}{2};1\right)$, các số nguyên dương *n* sao cho $[nx]$ là số chẵn được viết thành một dãy tăng $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$.

a) Hỏi có tồn tại hay không số nguyên dương m để ba số $[mx],[(m+1)x],[(m+2)x]$ đều không thuộc dãy?

b) Chứng minh rằng có vô số nguyên dương n sao cho $\sum_{i=1}^{n}\frac{15}{a_{i+1}^2-a_i^2} > 7^{2023}$.

THANG ĐIỂM CÂU 1

a) Câu trả lời là phủ định.

Thật vậy, giả sử có số m để $[mx],[(m+1)x],[(m+2)x]$ đều là số lẻ. Khi đó, ta có hai trường hợp sau:

+ Nếu $\{mx\} \ge \frac{1}{2}$ thì $[(m+1)x] = \left[mx + \{mx\} + x\right] = [mx] + \left[\{mx\} + x\right]$

Do $\begin{cases}\{mx\} \ge \frac{1}{2}\\ x > \frac{1}{2}\end{cases}$ nên $1 < \{mx\} + x < 2$ suy ra $[(m+1)x] = [mx] + 1$

Suy ra $[(m+1)x]$ là số chẵn, **mâu thuẫn**. **(1 điểm)**

+ Nếu $\{mx\} < \frac{1}{2}$ thì

Do $[mx]$, $[(m+1)x]$ cùng lẻ suy ra $\left[\{mx\} + x\right] = 0$.

Do $\left[(m+2)x\right]$ lẻ và $\left[(m+2)x\right] = \left[(m+1)x\right] + \left[\{(m+1)x\} + x\right]$

Suy ra $\left[mx\right] = \left[(m+2)x\right] = \left[mx\right] + \left[\{mx\} + 2x\right]$.

suy ra $\left[\{mx\} + 2x\right] = 0$ **vô lí** vì $2x > 1$ và $\{mx\} \ge 0$.

Vì vậy không tồn tại số m **(1 điểm)**

b) Theo câu a, trong 6 số bất kỳ liên tiếp, luôn có hai số thuộc dãy $\left(a_n\right)$.

Ta có $\left[(m+5)x\right] - \left[mx\right] = \left[\{mx\} + 5x\right] < \left[1+5\right] = 6$. Suy ra $a_{n+1} - a_n < 6, \forall n \in \mathbb{Z}^+$ **(0,5 điểm)**

Dễ thấy $a_1 = 0$ nên ta có $a_n < 6 + a_{n-1} < \cdots < 6(n-1) + a_1 = 6(n-1)$

Do đó $a_{i+1}^2 - a_i^2 = \left(a_{i+1} - a_i\right)\left(a_{i+1} + a_i\right) \le 6.\left[6i + 6\left(i-1\right)\right] = 36i - 6 < 36i$ **(0,5 điểm)**

Suy ra $\sum_{i=1}^{n} \frac{15}{a_{i+1}^2 - a_i^2} \ge \sum_{i=1}^{n} \frac{15}{36i} = \frac{15}{36}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$

Chứng minh $\lim \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = +\infty$, suy ra $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} > \sum_{i=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{i}\right) = \ln\left(n+1\right) \longrightarrow +\infty$ **(0,5 điểm)**

Suy ra $\lim \sum_{i=1}^{n} \frac{15}{a_{i+1}^2 - a_i^2} = \lim \sum_{i=1}^{n} \frac{15}{18i} = +\infty$.

Theo định nghĩa giới hạn có vô số nguyên dương n đủ lớn để $\sum_{i=1}^{n} \frac{15}{a_{i+1}^2 - a_i^2} > 7^{2023}$. **(0,5 điểm)**

Câu 2: (4 *điểm*). (Người ra đề: Trần Văn Trí).

Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn :

$$f\left(2023\right) = 1 \text{ và } f\left(x\right).f\left(y\right) + f\left(\frac{2023}{x}\right)f\left(\frac{2023}{y}\right) = 2f\left(xy\right), \forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

THANG ĐIỂM CÂU 2

Cho $x = 1, y = 2023$ vào (1) ta được : $2f\left(1\right).f\left(2023\right) = 2f\left(2023\right) \Rightarrow f\left(1\right) = 1$ **(0,5 điểm)**

Cho $y = 1$ vào (1) ta được :

$f\left(x\right).f\left(1\right) + f\left(\frac{2023}{x}\right)f\left(2023\right) = 2f\left(x\right), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow f\left(\frac{2023}{x}\right) = f\left(x\right)$. (2) **(0,5 điểm)**

Kết hợp (1) và (3) ta được $f\left(x\right).f\left(y\right) = f\left(xy\right), \forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (3) **(0,5 điểm)**

Khi đó theo (3) ta có

Do đó $f^2\left(x\right) = f\left(x\right).f\left(\frac{2023}{x}\right) = f\left(x.\frac{2023}{x}\right) = f\left(2023\right) = 1, \forall x \ne 0$ **(0,5 điểm)**

Suy ra $\left|f\left(x\right)\right| = 1, \forall x \ne 0$.

Cho $x = y$ vào (2) ta suy ra $f\left(x^2\right) = f^2\left(x\right) = 1 \Rightarrow f\left(x\right) = 1, \forall x > 0$ **(0,5 điểm)**

Giả sử tồn tại $a, b < 0; a \ne b : f\left(a\right) = 1, f\left(b\right) = -1$.

Khi đó $f\left(\frac{2023}{a}\right) = 1; f\left(\frac{2023}{b}\right) = -1, f\left(ab\right) = 1$ **(0,5 điểm)**

Cho $x = a; y = b$ vào (1) ta được : $1.\left(-1\right) + 1.\left(-1\right) = 2f\left(ab\right) = 2$ vô lí

Do đó $f\left(x\right) = 1, \forall x \ne 0$ hoặc $f\left(x\right) = \begin{cases} 1 & \text{khi } x > 0 \\ -1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ **(0,5 điểm)**

Thử lại $f\left(x\right)=1,\forall x\neq 0$ hoặc $f\left(x\right)=\begin{cases}1 \quad \text{khi} \quad x>0\\ -1 \ \text{khi} \ x \ <0\end{cases}$ thỏa yêu cầu **(0,5 điểm)**

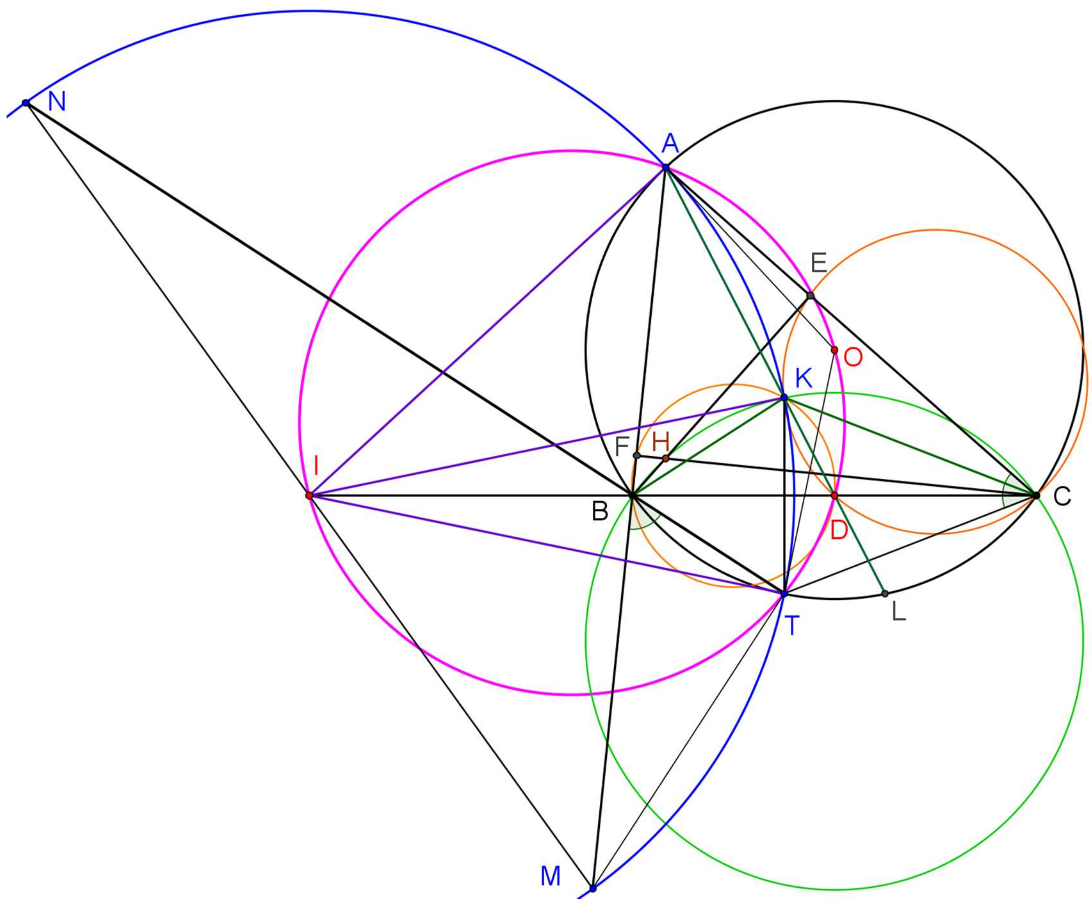
Câu 3: (4 *điểm*). (Người ra đề: Nguyễn Thị Kim Ngân)

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) có B, C cố định và A thay đổi trên (O). D là trung điểm BC. BE, CF là các đường cao của tam giác ABC. Hai đường tròn (DBF) và (DCE) cắt nhau tại điểm thứ hai là K.

a) Chứng minh rằng K luôn thuộc đường tròn cố định.

b) Lấy T trên (O) sao cho $KT\perp BC$ và A, T khác phía với BC. Các đường thẳng AB, BT cắt lại đường tròn (AKT) lần lượt tại M, N. Gọi I là trung điểm MN. Chứng minh rằng đường tròn (ATI) luôn đi qua điểm cố định.

THANG ĐIỂM CÂU 3



a) Gọi H là trực tâm ΔABC. Khi đó $\widehat{BHC}=\widehat{EHF}=180^0-\widehat{BAC}$ (vì $AEHF$ nội tiếp) (1)

Tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn đường kính BC nên $DB=DF=DC=DE$.

Suy ra $\widehat{BFD}=\widehat{FBD}=\widehat{ABC}$, $\widehat{CED}=\widehat{ECD}=\widehat{ACB}$. **(0,5 điểm)**

Do đó $\widehat{BKC}=\widehat{BKD}+\widehat{CKD}=\widehat{BFD}+\widehat{CED}=\widehat{ABC}+\widehat{ACB}=180^0-\widehat{BAC}$ (2) **(0,5 điểm)**

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BHC} = \widehat{BKC}$. Vậy K thuộc đường tròn (BHC).

Hơn nữa (BHC) đối xứng với (O) qua BC nên (BHC) cố định. **(0,5 điểm)**

b) Ta có $AE.AC = AF.AB$ (do $BCEF$ nội tiếp) hay $P_{A/(DBF)} = P_{A/(DCE)}$,

Suy ra $A \in KD$. **(0,5 điểm)**

Gọi L đối xứng với K qua D thì $BKCL$ là hình bình hành nên $\widehat{BLC} = \widehat{BKC} = 180^0 - \widehat{BAC}$.

Do đó $L \in (O)$. **(0,5 điểm)**

Vì $KT \perp BC$, $K \in (BHC)$, $T \in (O)$ nên K và T đối xứng nhau qua BC. ΔKTL có đường trung tuyến $TD = KD = \frac{1}{2}KL$ nên $KT \perp TL$,

dẫn đến $TL // BC$ hay AT là đường đối trung của ΔABC. **(0,5 điểm)**

Gọi tiếp tuyến tại A và T của (O) cắt nhau tại I' thì $I' \in BC$,

khi đó $I'A = I'T = I'K$ nên I' là tâm (AKT). **(0,5 điểm)**

Lại có

$$\widehat{MBT} + \widehat{BMT} = \widehat{ACT} + \frac{1}{2}\widehat{AI'T} = \widehat{ACT} + \frac{1}{2}\left(180^0 - \widehat{AOT}\right) = \widehat{ACT} + 90^0 - \frac{\widehat{AOT}}{2} = 90^0.$$

Do đó $TB \perp TM$, suy ra tâm (AKT) là trung điểm MN, hay $I' \equiv I$.

Hơn nữa (ATI) có đường kính là OI, mà $\widehat{ODI} = 90^0$ nên (ATI) đi qua D cố định.

(0,5 điểm).

Câu 4: (4 *điểm*). (Người ra đề: Nguyễn Thành Nhân)

Cho dãy $f(1), f(2), f(3), \ldots$ được định nghĩa

$$f(n) = \frac{1}{n}\left(\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor\right),$$

ở đó $\lfloor x \rfloor$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x.

a) Chứng minh rằng $f(n+1) < f(n)$ xảy ra với vô hạn số nguyên dương n.

b) Chứng minh rằng $f(n+1) > f(n)$ xảy ra với vô hạn số nguyên dương n.

THANG ĐIỂM CÂU 4

Đặt $g(n) = n.f(n)$ với $n \geq 1$ và $g(0) = 0$.

a) Đặt $d(n)$ là số ước dương của n với $n \geq 1$. Ta có

$$g(n) = \left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor$$
$$= \left\lfloor \frac{n-1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{n-1}{n} \right\rfloor + d(n) = g(n-1) + d(n).$$

(0,5 điểm)

Từ đó

$$g(n) = g(n-1) + d(n) = g(n-2) + d(n-1) + d(n)$$
$$= \ldots = d(1) + d(2) + \ldots + d(n),$$

(0,5 điểm)

có nghĩa rằng $f(n) = \dfrac{d(1) + d(2) + \ldots + d(n)}{n}$, nói cách khác $f(n)$ là trung bình cộng của các số $d(1), d(2), \ldots, d(n)$.

Để chứng minh các khẳng định, sẽ là đủ nếu chứng minh được $d(n+1) > f(n)$ và $d(n+1) < f(n)$ đều xảy ra với vô hạn số nguyên dương n. **(1 điểm)**

Ta chú ý rằng $d(1) = 1$. Với $n > 1$, $d(n) \geq 2$, dấu bằng xảy ra nếu và chỉ nếu n là số nguyên tố.

Từ $f(6) = \dfrac{7}{3} > 2$, từ đó $f(n) > 2$ với mọi $n \geq 6$. Từ việc có vô hạn số nguyên tố, ta có $d(n+1) = 2$, và với mỗi $n \geq 6$ ta có $d(n+1) = 2 < f(n)$. Đpcm. **(1 điểm)**

b) Chú ý rằng dãy $d(1), d(2), d(3), \ldots$ là vô hạn, vì chẳng hạn $d(2^k) = k+1, \forall k \in \mathbb{N}^*$.

Từ đó $d(n+1) > \max\{d(1), d(2), \ldots, d(n)\}$ đúng với vô hạn số nguyên dương n. Đối với các số nguyên dương n như vậy ta cũng có $d(n+1) > f(n)$. Phép chứng minh hoàn tất. **(1 điểm)**

Câu 5: (4 *điểm*). (Người ra đề: Trần Văn Trí)

Tìm số các bộ số nguyên $(a_1, a_2, \ldots, a_n), n > 1$ thỏa mãn $|a_i| \leq 1, \forall i = 1, 2, \ldots, n$ và

$$|a_i - a_{i+1}| \leq 1, \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

THANG ĐIỂM CÂU 5

Gọi S_n là số bộ số thỏa mãn điều kiện bài toán.

Gọi A_n, B_n, C_n là tập hợp các bộ n số mà a_n tương ứng bằng $-1, 0, 1$. **(1 điểm)**

Ta có: $\left|S_n\right| = \left|A_n\right| + \left|B_n\right| + \left|C_n\right|$ Mặt khác từ mỗi bộ số thuộc A_n hoặc B_n ta có thể bổ sung thêm phần tử $a_{n+1} = -1$ để được một bộ số thuộc A_{n+1} nên $\left|A_{n+1}\right| = \left|A_n\right| + \left|B_n\right|$. **(1 điểm)**

Tương tự ta có $\left|C_{n+1}\right| = \left|C_n\right| + \left|B_n\right|; \left|B_{n+1}\right| = \left|A_n\right| + \left|B_n\right| + \left|C_n\right| = \left|S_n\right|$. **(1 điểm)**

Do đó ta có: $\left|S_{n+1}\right| = \left|A_{n+1}\right| + \left|B_{n+1}\right| + \left|C_{n+1}\right| = \left(\left|A_n\right| + \left|B_n\right| + \left|C_n\right|\right) + \left|B_{n+1}\right| + \left|B_n\right| = 2\left|S_n\right| + \left|S_{n-1}\right|$

Chú ý rằng $\left|S_2\right| = 7; \left|S_3\right| = 17$ ta thu được: $\left|S_n\right| = \dfrac{(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}}{2}$. **(1 điểm)**

---------------HẾT---------------