

## ĐỀ 69

### ĐỀ HSG TOÁN 9 NAM ĐỊNH 2023-2024

#### Câu 1. (3,0 điểm)

1) Cho  $m, n$  là các số tự nhiên thỏa mãn  $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{2}$ . Tính tổng  $m+n$

2) Chứng minh rằng với mọi số dương  $a$  và  $b$  thay đổi thỏa mãn

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{1}{1000} \text{ ta luôn có } \sqrt{a-1000} + \sqrt{b-1000} = \sqrt{a+b}$$

#### Câu 2. (5,0 điểm)

1) Cho phương trình:

$$(m + \sqrt{2x^2 + 4x + 3})(x^2 + 2x + m)(|x+1| - m - 1) = 0, \text{ với } m \text{ là tham số.}$$

a. Giải phương trình với  $m = -1$

b. Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình đã cho có đúng ba nghiệm phân biệt

$$2) \text{ Giải hệ phương trình: } \begin{cases} \sqrt{9(x-1)y} = y \left( 2 + \sqrt{\frac{y}{x-1}} \right) \\ y^2 + xy - 5x + 7 = 0 \end{cases}$$

#### Câu 3. (3,0 điểm)

1) Cho đa thức  $P(x) = x^3 + 6x^2 + ax + b$  với  $a, b$  là các số hữu tỷ và thỏa mãn  $P(1 - \sqrt{2}) = 0$ . Tính giá trị của biểu thức

$$Q = 18P(3) + 3P(2) + (a - b + 3)^{2022}$$

2) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên  $(m, n)$  thỏa mãn

$$(2m + 5n + 1)(2^m + n + m^2 + m) = 105$$

#### Câu 4. (7,0 điểm)

Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  ( $AB < AC$ ) có  $AH$  là đường cao. Lấy  $D$  là một điểm thuộc miền trong của tam giác  $AHC$  sao cho  $AH$  đi qua trung điểm của  $BD$ . Gọi  $E, F$  theo thứ tự là giao điểm của  $AH$  với đường thẳng  $CD$  và  $BD$ . Qua  $E$  kẻ đường thẳng tiếp xúc với đường tròn đường kính  $CD$  tại điểm  $M$  ( $A$  và  $M$  thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ là  $CD$ ). Gọi  $N$  là giao điểm thứ hai của đường thẳng  $BD$  với đường tròn đường kính  $CD$ . Chứng minh rằng:

1) Tứ giác ABCN nội tiếp một đường tròn và  $\widehat{ANB} + \widehat{CAH} = 90^\circ$

2) Tam giác EMD đồng dạng với tam giác ECM và  $\frac{MD \cdot AB}{MC}$  ;

$$\sqrt{\frac{ED \cdot BF \cdot BN}{EC}}$$

3) Ba điểm A, M, N thẳng hàng

**Câu 5. (2,0 điểm)**

1) Trên một mặt bàn phẳng có 2021 đồng xu kích thước bằng nhau, mỗi đồng xu có hai mặt trong đó có một mặt màu xanh và một mặt màu đỏ, đồng thời tất cả các đồng xu đều ngửa mặt màu xanh lên trên mặt bàn. Thực hiện trò chơi sau đây: mỗi lượt chơi phải đổi mặt 10 đồng xu nào đó trên mặt bàn. Hỏi sau 2022 lượt chơi có thể nhận được tất cả 2021 đồng xu trên mặt bàn đều ngửa mặt màu đỏ lên trên hay không? Hãy giải thích vì sao?

2) Xét tam giác ABC có độ dài các cạnh là a, b, c thay đổi và thỏa mãn  $c = 2b = abc$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{3}{b+c-a} + \frac{+5}{a+c-b} + \frac{4}{a+b-c}$$

-----HẾT-----

## HƯỚNG DẪN GIẢI

### Câu 1. (3,0 điểm)

1.1 Cho  $m, n$  là các số tự nhiên thỏa mãn

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{2}. \text{ Tính tổng } m+n$$

Ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{3-\sqrt{5}} & \stackrel{!}{=} \frac{2(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})}{2} \\ & \stackrel{!}{=} \frac{\sqrt{8+4\sqrt{3}}+\sqrt{12-4\sqrt{5}}}{2} \\ & \stackrel{!}{=} \frac{\sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}+\sqrt{(\sqrt{10}-\sqrt{2})^2}}{2} \\ & \stackrel{!}{=} \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})+(\sqrt{10}-\sqrt{2})}{2} \\ & \stackrel{!}{=} \frac{\sqrt{6}+\sqrt{10}}{2}\end{aligned}$$

Giả thiết ta có  $m = 6, n = 10$  hoặc  $m = 10, n = 6$  nên  $m + n = 16$

\* Chú thích thêm: Xét  $\sqrt{m}+\sqrt{n}=\sqrt{6}+\sqrt{10}$  bình phương hai vế được:

$$\sqrt{mn}-\sqrt{60}=\stackrel{!}{=} \frac{16-m-n}{2} \Leftrightarrow \sqrt{60}(\sqrt{k}-1)=\frac{16-m-n}{2} (*) \text{ với } mn = k.60, k \in$$

Q.

$$+) \text{ Nếu } \sqrt{k} = a \in Q, a \neq 1 (*) \Leftrightarrow \sqrt{60} = \frac{16-m-n}{2(a-1)} \in Q \text{ điều này vô lý do } \sqrt{60}$$

là số vô tỷ.

$$+) \text{ Nếu } \sqrt{k} \notin Q, (*) \Leftrightarrow \sqrt{k}-1 = \frac{16-m-n}{2\sqrt{60}} \text{ bình phương được } \sqrt{k}=b \in Q \text{ vô}$$

lý.

Vậy  $k = 1; (*) \Rightarrow m + n = 16, mn = 60$  nên  $(m,n) = (6,10)$  và  $(m,n) = (10,6)$

1.2) Chứng minh rằng với mọi số dương  $a$  và  $b$  thay đổi thỏa mãn

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \stackrel{!}{=} \frac{1}{1000} \text{ ta luôn có } \sqrt{a-1000} + \sqrt{b-1000} = \sqrt{a+b}$$

Giả thiết ta có  $1000 = \frac{ab}{a+b}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sqrt{a-1000} + \sqrt{b-1000} &= \sqrt{a - \frac{ab}{a+b}} + \sqrt{b - \frac{ab}{a+b}} \\ &= \sqrt{\frac{a^2}{a+b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a+b}} \\ &= \frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{a+b}} \\ &= \frac{a+b}{\sqrt{a+b}} \\ &= \sqrt{a+b} \end{aligned}$$

## Câu 2. (5,0 điểm)

2.1) Cho phương trình:

$$(m + \sqrt{2x^2 + 4x + 3})(x^2 + 2x + m)(|x+1| - m - 1) = 0, \text{ với } m \text{ là tham số.}$$

a. Giải phương trình với  $m = -1$

Điều kiện:  $2x^2 + 4x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow 2(x+1)^2 + 1 \geq 0$  thỏa mãn với mọi  $x$

Khi đó, với  $m = -1$  thay vào phương trình ta được:

$$(-1 + \sqrt{2x^2 + 4x + 3})(x^2 + 2x - 1)(|x+1|) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x^2 + 4x + 3} - 1 = 0 \\ x^2 + 2x - 1 = 0 \\ |x+1| = 0 \end{cases}$$

$$\text{Với } \sqrt{2x^2 + 4x + 3} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + 4x + 3} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

$$\text{Với } x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$\text{Với } |x+1| = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Vậy tất cả các nghiệm của phương trình đã cho là  $x = -1$ ,  $x = -1 + \sqrt{2}$ ,  
 $x = -1 - \sqrt{2}$

b. Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình đã cho có đúng ba nghiệm phân biệt

Ta có phương trình

$$\Leftrightarrow [m + \sqrt{2(x+1)^2 + 1}][(x+1)^2 + m - 1](|x+1| - m - 1) = 0$$

$$\text{Đặt } t = |x+1|, t \geq 0 \Rightarrow (m + \sqrt{2t^2 + 1})(t^2 + m - 1)(t - m - 1) = 0 (*)$$

Giả sử  $t_0 > 0$  là một nghiệm của phương trình (\*) khi đó phương trình  $|x+1|=t_0$  có hai nghiệm phân biệt là  $x = -1+t_0$ ,  $x = -1-t_0$

Còn  $t_0=0$  là một nghiệm của phương trình (\*) khi có phương trình  $|x+1|=0$  có nghiệm duy nhất  $x = -1$

Từ đó nếu (\*) có  $k$  nghiệm  $t > 0$  phân biệt thì phương trình đã cho có  $2k$  nghiệm phân biệt

Do vậy phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt thì phương trình (\*) có nghiệm  $t = 0$ , thay vào ta được  $m = -1$ ,  $m = 1$

Thử lại: các trường hợp đều thỏa mãn

Vậy tất cả các giá trị của tham số  $m$  thỏa mãn bài toán là  $m = -1$ ,  $m = 1$

$$2) \text{ Giải hệ phương trình: } \begin{cases} \sqrt{9(x-1)y} = y \left( 2 + \sqrt{\frac{y}{x-1}} \right) & (1) \\ y^2 + xy - 5x + 7 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 9(x-1)y \geq 0 \\ \frac{y}{x-1} \geq 0 \end{cases}$$

Khi đó từ phương trình (1) ta có  $y \geq 0$ ,  $x > 1$

TH1: Nếu  $y=0$  thì  $x = \frac{7}{5}$  thỏa mãn hệ

$$\begin{aligned} \text{TH2: Nếu } y > 0 \text{ thì (1)} &\Leftrightarrow 3\sqrt{x-1} = \sqrt{y} \left( 2 + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x-1}} \right) \\ &\Leftrightarrow 3(x-1) = \sqrt{y} (2\sqrt{x-1} + \sqrt{y}) \\ &\Leftrightarrow 4(x-1) = (x-1) + 2\sqrt{x-1}\sqrt{y} + (\sqrt{y})^2 \\ &\Leftrightarrow (2\sqrt{x-1})^2 = (\sqrt{x-1} + \sqrt{y})^2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x-1} = \sqrt{x-1} + \sqrt{y} \\ 2\sqrt{x-1} = -\sqrt{x-1} - \sqrt{y} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = \sqrt{y} \\ 3\sqrt{x-1} + \sqrt{y} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Với  $\sqrt{x-1} = \sqrt{y} \Leftrightarrow x = y+1$  thay vào (2) ta được  $y^2 - 2y + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow x = 2$$

Với  $3\sqrt{x-1} + \sqrt{y} = 0 \Leftrightarrow x = 1, y = 0$  không thỏa mãn điều kiện

Vậy tất cả các nghiệm của hệ đã cho là  $\left(\frac{7}{5}; 0\right), (2; 1)$

**Câu 3. (3,0 điểm)**

3.1) Cho đa thức  $P(x) = x^3 + 6x^2 + ax + b$  với  $a, b$  là các số hữu tỷ và thỏa mãn  $P(1 - \sqrt{2}) = 0$ . Tính giá trị của biểu thức

$$Q = 18P(3) + 3P(2) + (a - b + 3)^{2022}$$

Giả thiết ta có:  $(1 - \sqrt{3})^3 + 6(1 - \sqrt{3})^2 + a(1 - \sqrt{3}) + b = 0$

$$\Leftrightarrow (a + 18)\sqrt{3} = a + b + 34$$

Nếu  $a + 18 \neq 0 \Rightarrow \sqrt{3} \nmid \frac{a + b + 34}{a + 18}$

Vì  $a, b$  là các số hữu tỷ nên  $\frac{a + b + 34}{a + 18}$  là số hữu tỷ mâu thuẫn với  $\sqrt{3}$  là một số vô tỷ

Do đó  $\begin{cases} a + 18 = 0 \\ a + b + 34 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -18 \\ b = -16 \end{cases} \quad (1)$

Vậy  $P(x) = x^3 + 6x^2 - 18x - 16 \Rightarrow P(2) = -20, P(3) = 11 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra

$$Q = 18.11 + 3.(-20) + (-18 + 16 + 3)^{2022} = 198 - 60 + 1 = 139$$

**3.2) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên  $(m, n)$  thỏa mãn**

$$(2m + 5n + 1)(2^m + n + m^2 + m) = 105$$

Ta có 105 là số lẻ nên từ phương trình suy ra  $2m + 5n + 1$  lẻ  $\Rightarrow 5n$  chẵn tức là  $n$  cũng chẵn.

Tương tự  $2^m + n + m^2 + m = 2^m + n + m(m + 1)$  lẻ, nhưng do  $n, m(m + 1)$  đều chẵn nên  $2^m$  lẻ tức là  $2^m = 1 \Leftrightarrow m = 0$

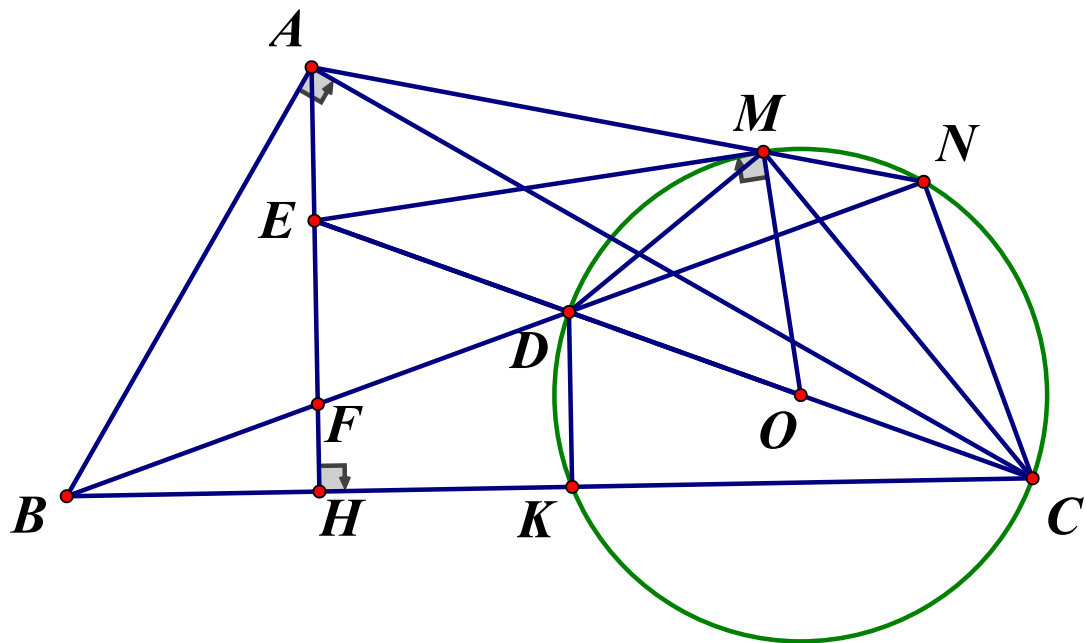
Khi  $m = 0$  thay vào phương trình ta được  $\begin{cases} n = 4 \\ n = \frac{-26}{5} \end{cases}$

Vậy cặp số tự nhiên duy nhất thỏa mãn bài toán là  $(m; n) = (0; 4)$

**Câu 4. (7,0 điểm)**

Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  ( $AB < AC$ ) có  $AH$  là đường cao. Lấy  $D$  là một điểm thuộc miền trong của tam giác  $AHC$  sao cho  $AH$  đi qua trung điểm của  $BD$ . Gọi  $E, F$  theo thứ tự là giao điểm của  $AH$  với đường thẳng  $CD$  và  $BD$ . Qua  $E$  kẻ đường thẳng tiếp xúc với đường tròn đường kính  $CD$  tại điểm  $M$  ( $A$  và  $M$  thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ là  $CD$ ). Gọi  $N$  là

giao điểm thứ hai của đường thẳng  $BD$  với đường tròn đường kính  $CD$ .  
**Chứng minh rằng:**



4.1) Tứ giác ABCN nội tiếp một đường tròn và  $\widehat{ANB} + \widehat{CAH} = 90^\circ$

Theo giả thiết ta có  $\widehat{BAC} = \widehat{BNC} \hat{=} 90^\circ$

Suy ra A và N cùng nhìn BC dưới một góc vuông nên A, B, C, N cùng thuộc đường tròn đường kính BC hay tứ giác ABCN nội tiếp một đường tròn.

Do  $\widehat{ACB}$ ,  $\widehat{ANB}$  là hai góc nội tiếp cùng chắn cung  $\widehat{AB}$  của đường tròn đường kính BC nên  $\widehat{ACH} = \widehat{ACB} = \widehat{ANB}$  (1)

Trong tam giác vuông AHC (vuông tại H) có  $\widehat{ACH} + \widehat{CAH} = 90^\circ$

Nên từ (1) ta được  $\widehat{ANB} + \widehat{CAH} = 90^\circ$   $\widehat{ANB} + \widehat{CAH} = 90^\circ$

4.2) Tam giác EMD đồng dạng với tam giác ECM và

$$\frac{MD \cdot AB}{MC} \hat{=} \sqrt{\frac{ED \cdot BF \cdot BN}{EC}}$$

Xét hai tam giác EMD và ECM có góc  $\widehat{CEM}$  chung (2)

Hơn nữa  $\widehat{EMB} = \widehat{ECM}$  (vì cùng bằng  $\frac{1}{2}$  số đo  $\widehat{MD}$  của đường tròn đường kính

CD) (3)

$$\text{Do đó } \frac{EM}{EC} = \frac{ED}{EM} = \frac{MD}{CM} \Rightarrow \frac{MD^2}{MC^2} = \frac{ED}{EC} \quad (4)$$

Xét hai tam giác BHF và BNC có  $\widehat{CBN}$  chung và  $\widehat{BHF} = \widehat{BNC} = 90^\circ$  nên  $\triangle BHF \sim \triangle BNC$

Từ đó suy ra  $BH \cdot BC = BF \cdot BN$  cùng với tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH  $\Rightarrow AB^2 = BH \cdot BC = BF \cdot BN$

$$\text{Nhân vế (4) và (5) ta được } \frac{MD^2 \cdot AB^2}{MC^2} \cdot \frac{ED \cdot BF \cdot BN}{EC} \Leftrightarrow \frac{ED \cdot BF \cdot BN}{EC}$$

### 4.3) Ba điểm A, M, N thẳng hàng

Trong tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH  $\Rightarrow AC^2 = CH \cdot BC$  nên kết hợp với (5) ta được  $\frac{AB^2}{AC^2} \cdot \frac{BH \cdot BC}{CH \cdot BC} \cdot \frac{HB}{HC}$  (6)

Gọi K là giao điểm thứ hai của BC và đường tròn đường kính CD  $\Rightarrow AH \parallel DK$  (cùng vuông góc với BC)

Kết hợp với giả thiết FB = FD suy ra HB = HK (7)

Từ (6) và (7) suy ra  $\frac{AB^2}{AC^2} \cdot \frac{HK}{HC}$  cùng với  $\frac{HK}{HC} \cdot \frac{ED}{EC}$  (Do AH//DK)

$$\text{Ta được } \frac{AB^2}{AC^2} \cdot \frac{ED}{EC} \quad (8)$$

$$\text{Từ (4) và (8) ta được } \frac{AB^2}{AC^2} \cdot \frac{MD^2}{MC^2} \Leftrightarrow \frac{AB}{AC} \cdot \frac{MD}{MC}$$

Kết hợp với  $\widehat{BAC} = \widehat{DMC} = 90^\circ \Rightarrow \triangle ACB \sim \triangle MCD$

$$\Rightarrow \widehat{BCA} = \widehat{DCM} = \widehat{ECM}$$

Hay  $\widehat{ECM} = \widehat{BNA}$  (do (1)) (9)

Mặt khác  $\widehat{ECM} = \widehat{BNM}$  (do cùng bằng  $\frac{1}{2}$  số đo  $\widehat{MD}$  của đường tròn đường kính CD) nên từ (9) ta được  $\widehat{BNA} = \widehat{BNM}$  hay ba điểm A, M, N thẳng hàng.

### Câu 5. (2,0 điểm)

**5. 1) Trên một mặt bàn phẳng có 2021 đồng xu kích thước bằng nhau, mỗi đồng xu có hai mặt trong đó có một mặt màu xanh và một mặt màu đỏ, đồng thời tất cả các đồng xu đều ngửa mặt màu xanh lên trên mặt bàn. Thực hiện trò chơi sau đây: mỗi lượt chơi phải đổi mặt 10 đồng xu nào đó trên mặt bàn. Hỏi sau 2022 lượt chơi có thể nhận được tất cả 2021 đồng xu**



**trên mặt bàn đều ngửa mặt màu đỏ lên trên hay không? Hãy giải thích vì sao?**

Lượt chơi thứ nhất có 10 đồng xu mặt xanh được ngửa thành mặt đỏ. Do đó sau lượt chơi thứ nhất có 2011 đồng xu mặt xanh và 10 đồng xu mặt đỏ được ngửa lên phía trên.

Giả sử trong lượt chơi thứ hai có  $x$  đồng xu mặt xanh được lật thành màu đỏ, như vậy sẽ có  $(10-x)$  đồng xu màu đỏ thành màu xanh (với  $x$  là số tự nhiên thỏa mãn  $0 \leq x \leq 10$ )

Khi đó số đồng xu màu xanh ngửa lên phía trên sẽ là

$$(2011-x) + (10-x) = 2021 - 2x$$

Cứ như vậy sau bao nhiêu lần đi nữa thì trên mặt bàn số đồng xu có mặt màu xanh ngửa lên phía trên luôn luôn là số lẻ. Vậy sau 2022 lượt chơi không thể nhận được 2021 đồng xu có mặt màu đỏ được ngửa lên phía trên.

**5.2) Xét tam giác ABC có độ dài các cạnh là a, b, c thay đổi và thỏa mãn  $c=2b=abc$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức**

$$P = \frac{3}{b+c-a} + \frac{+5}{a+c-b} + \frac{4}{a+b-c}$$

Với hai số  $x, y > 0$  ta được  $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0 \Leftrightarrow x+y \geq 2\sqrt{xy} > 0$  và tương tự  $\frac{1}{x}$

$$\frac{+1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}} \text{ ; } 0$$

$$\text{Từ đó suy ra } (x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$$

Vậy với mọi  $x, y > 0$  ta được  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ . Dấu bằng xảy ra khi  $x = y$

$$\text{Ta có } P = \frac{3}{b+c-a} + \frac{+5}{a+c-b} + \frac{4}{a+b-c}$$

$$\Leftrightarrow P = \left(\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{a+b-c}\right) + 2\left(\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{a+c-b}\right) + 3\left(\frac{1}{a+c-b} + \frac{4}{a+b-c}\right)$$

Với mọi tam giác ABC ta luôn có  $b+c-a > 0, a+c-b > 0,$

$a+b-c > 0$  nên áp dụng kết quả trên vào ta được:

$$P \geq \frac{4}{2b} + \frac{+8}{2c} + \frac{+12}{2a} \text{ ; } \frac{2}{b} + \frac{+4}{c} + \frac{+6}{a} \text{ ; } 2\left(\frac{1}{b} + \frac{2}{c} + \frac{3}{a}\right)$$

Theo giả thiết  $2b+c=abc \Leftrightarrow \frac{2}{c} + \frac{1}{b} \geq a$  suy ra

$$P \geq 2 \left( a + \frac{3}{a} \right) \geq 2 \cdot 2 \sqrt{a \cdot \frac{3}{a}} \geq 4\sqrt{3}$$

Vậy GTNN của P là  $4\sqrt{3}$  khi

$$\left\{ \begin{array}{l} a=b=c \\ \frac{2}{c} + \frac{1}{b} = a \Leftrightarrow a=b=c=\sqrt{3} \text{ hay tam giác } ABC \text{ là tam giác đều cạnh bằng } \sqrt{3} \\ a = \frac{3}{a} \end{array} \right.$$

----- **HẾT** -----