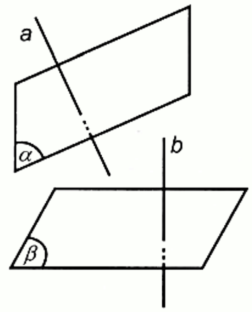
MỤC LỤC

Ⓐ. Tóm tắt kiến thức

❶. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG

- **Định nghĩa:** Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.



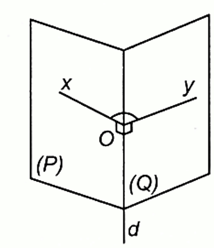
$$\left.\begin{array}{l} a \perp (\alpha) \\ b \perp (\beta) \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right) = \left(\widehat{a,b}\right).$$

❷. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

- **Hai mặt phẳng vuông góc**: Hai mặt phẳng vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90°.
- $(P) \perp (Q) \Leftrightarrow \left(\widehat{(P),(Q)}\right) = 90^\circ$

$$(\alpha)//(\beta) \Rightarrow \left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right) = 0^\circ;\ (\alpha) \equiv (\beta) \Rightarrow \left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right) = 0^\circ.$$

- **Chú ý:**
- **Cách xác định góc khác:** Dùng cho hai mặt phẳng cắt nhau: "Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng cùng vuông góc với giao tuyến tại một điểm".



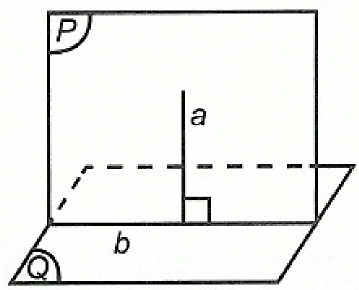
- **Bước 1.** Tìm giao tuyến *d* của (*P*) và (*Q*).
- **Bước 2.** Chọn điểm *O* trên *d*, từ đó:
- +) Trong (*P*) dựng $Ox \perp d$.
- +) Trong (*Q*) dựng $Oy \perp d$.

$$\widehat{((\alpha),(\beta))} = \widehat{(Ox,Oy)}.$$

- Khi đó:

- **Lưu ý:** Việc xác định điểm *O* có thể được thực hiện theo cách sau: Chọn điểm *M* trên (*Q*) sao cho dễ dàng xác định hình chiếu *H* của nó trên (*P*). Dựng $MO \perp d$ thì khi đó $\widehat{((\alpha),(\beta))} = \widehat{MOH}.$
- **Điều kiện hai mặt phẳng vuông góc**
- **Định lý 1:** Hai mặt phẳng vuông góc với nhau khi và chỉ khi trong mặt phẳng này có một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

$$\begin{cases} a \subset (P) \\ a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (Q).$$



3. TÍNH CHẤT CƠ BẢN VỀ HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

- **Định lý 2:** Với hai mặt phẳng vuông góc với nhau, bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

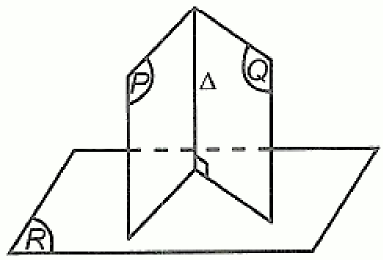
$$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ a \subset (P) \\ b = (P) \cap (Q) \\ a \perp b \end{cases} \Rightarrow a \perp (Q).$$

- **Nhận xét:** Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau. Nếu từ một điểm thuộc mặt phẳng (P) dựng một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (Q) thì đường thẳng này nằm trong (P).

$$\begin{cases} A \in (P) \\ (P) \perp (Q) \\ A \in a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow a \subset (P).$$

Định lý 3: Nếu hai mặt phẳng cắt nhau cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ 3 thì giao tuyến của chúng cũng vuông góc với mặt phẳng thứ 3.

$$\begin{cases}(P)\perp(R)\\(Q)\perp(R)\\(P)\cap(Q)=\Delta\end{cases}\Rightarrow \Delta\perp(R).$$



❹. HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG, HÌNH HỘP CHỮ NHẬT, HÌNH LẬP PHƯƠNG

a) Hình lăng trụ đứng

- **Hình lăng trụ đứng** là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với hai mặt đáy.
- Các mặt bên là các hình chữ nhật.
- Các mặt bên vuông góc với hai đáy.

b) Hình lăng trụ đều

- **Hình lăng trụ đều** là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

c) Hình hộp đứng

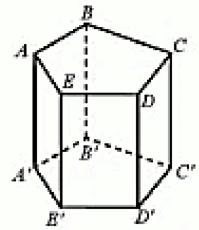
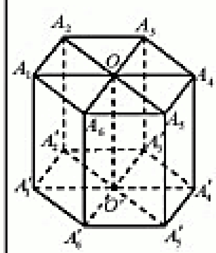
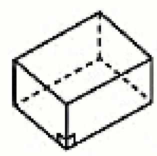
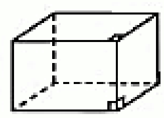
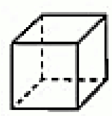
- **Hình hộp đứng** là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành.

d) Hình hộp chữ nhật

- **Hình hộp chữ nhật** là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.
- Tất cả các mặt đều là hình chữ nhật.
- Đường chéo $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ với a,b,c là 3 kích thước.

e) Hình lập phương

- **Hình lập phương** là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau.

Tên	Hình vẽ	Tính chất cơ bản
Hình lăng trụ đứng		– Cạnh bên vuông góc với hai đáy. – Mặt bên là các hình chữ nhật.
Hình lăng trụ đều		– Hai đáy là hai đa giác đều. – Mặt bên là các hình chữ nhật. – Cạnh bên và đường nối tâm hai đáy vuông góc với hai đáy.
Hình hộp đứng		– Bốn mặt bên là hình chữ nhật. – Hai đáy là hình bình hành.
Hình hộp chữ nhật		– Sáu mặt là hình chữ nhật. – Độ dài a, b, c của ba cạnh cùng đi qua một đỉnh gọi là ba kích thước của hình hộp chữ nhật. – Độ dài đường chéo d được tính theo ba kích thước: $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.
Hình lập phương		– Sáu mặt là hình vuông. – Độ dài đường chéo d được tính theo độ dài cạnh a: $d=a\sqrt{3}$.

❺. HÌNH CHÓP ĐỀU VÀ HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU

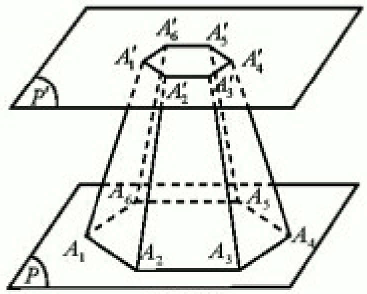
Hình chóp đều

- Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.
- Một hình chóp là đều khi và chỉ khi đáy của nó là một hình đa giác đều và hình chiếu của đỉnh trên mặt phẳng đáy là tâm của mặt đáy.
- +) Các cạnh bên của hình chóp đều tạo với đáy các góc bằng nhau.
- +) Các mặt bên của hình chóp đều là các tam giác cân bằng nhau.
- +) Các mặt bên của hình chóp đều tạo với đáy các góc bằng nhau

Hình chóp cụt đều

Định nghĩa

- Phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một mặt phẳng song song với đáy cắt các cạnh bên của hình chóp đều được gọi là hình chóp cụt đều.
- Trong hình chóp cụt đều $A_1A_2A_3\ldots A_6.A_1'A_2'A_3'\ldots A_6'$, ta gọi:
- Các điểm $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_6, A_1', A_2', A_3', \ldots, A_6'$ là các đỉnh.
- Đa giác $A_1A_2A_3\ldots A_6$ là đáy lớn, đa giác $A_1'A_2'A_3'\ldots A_6'$ là đáy nht. Đáy lớn và đáy nhỏ nằm trên hai mặt phẳng song song.



Hình 26

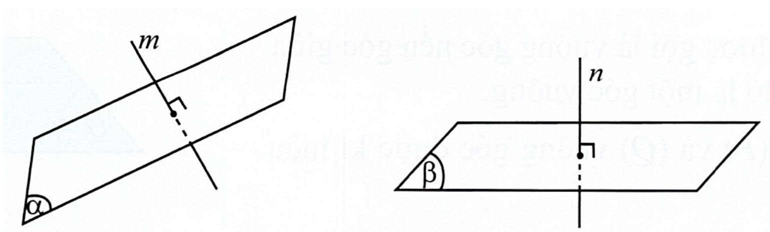
Ⓑ. Phân dạng toán cơ bản

Dạng ❶: Góc giữa hai mặt phẳng

Phương pháp

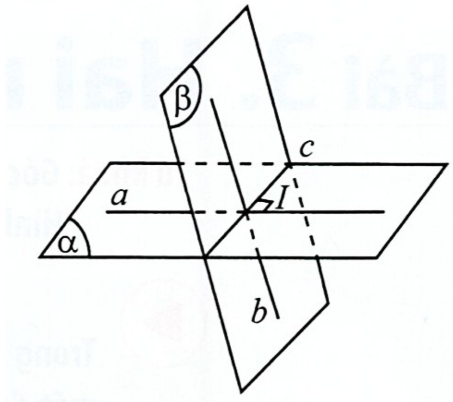
Định nghĩa

- Góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với (α) và (β), kí hiệu $((\alpha),(\beta))$.
- Ta có: $((\alpha),(\beta)) = (m,n)$ với $m \perp (\alpha), n \perp (\beta)$ (Hình 3).



Hình 3

- Người ta chứng minh được góc giữa hai mặt phẳng cắt nhau bằng góc giữa hai đường thẳng lần lượt nằm trong hai mặt phẳng và vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng.
- Cho $c = (\alpha) \cap (\beta)$: $((\alpha),(\beta)) = (a,b)$ với $a \subset (\alpha), b \subset (\beta), a \perp c, b \perp c$ (Hình 4).



Hình 4

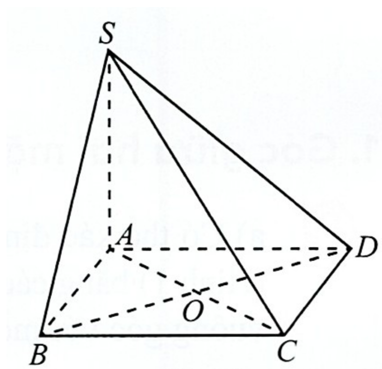
☞**Các ví dụ minh họa**

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính góc giữa hai mặt phẳng:

a) (SAC) và (SAD);

b) (SAB) và (SAD).

Lời giải



Hình 5

a) Ta có: $BO \perp SA$ và $BO \perp AC$, suy ra $BO \perp (SAC)$; $BA \perp SA$ và $BA \perp AD$, suy ra $BA \perp (SAD)$.

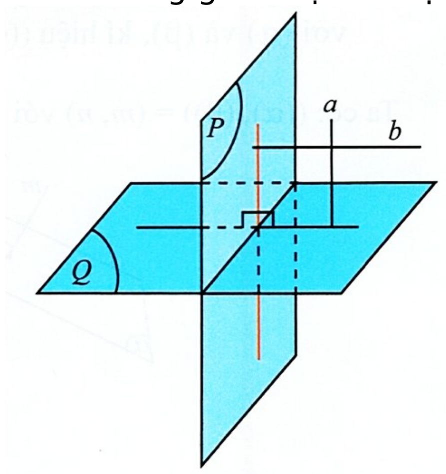
Do đó, nếu gọi góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SAD) là α thì $\alpha = (BO, BA) = \widehat{ABO} = 45^\circ$.

b) Ta có: $CB \perp SA$ và $CB \perp AB$, suy ra $CB \perp (SAB)$; $CD \perp SA$ và $CD \perp AD$, suy ra $CD \perp (SAD)$.

Do đó, nếu gọi góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) là β thì $\beta = (CB, CD) = \widehat{BCD} = 90^\circ$.

⬩Dạng ❷: Hai mặt phẳng vuông góc

- ***Phương pháp***
- **Định nghĩa**
- Hai mặt phẳng được gọi là vuông góc nếu góc giữa hai mặt phẳng đó là một góc vuông.
- Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc được kí hiệu là $(P)\perp(Q)$.



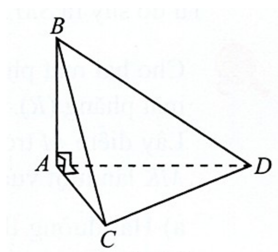
Hình 7

- **Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc**
- **Định lí 1**
- Điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng vuông góc là mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$ có AB,AC,AD đôi một vuông góc với nhau. Chứng minh rằng các mặt phẳng $(ABC),(BAD),(CAD)$ đôi một vuông góc với nhau.

Lời giải



Hình 9

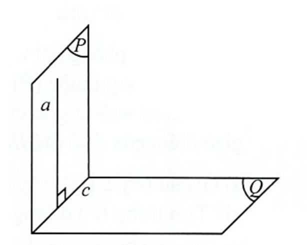
Ta có $AB\perp AC, AB\perp AD \Rightarrow AB\perp(CAD) \Rightarrow (ABC)\perp(CAD),(BAD)\perp(CAD)$.

Tương tự ta cũng có $CA\perp AB, CA\perp AD \Rightarrow CA\perp(BAD) \Rightarrow (CAD)\perp(BAD)$.

Vậy các mặt phẳng $(ABC),(BAD),(CAD)$ từng đôi một vuông góc với nhau.

⬩Dạng ❸: Tính chất cơ bản về hai mặt phẳng vuông góc

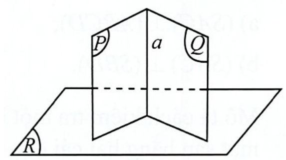
- ***Phương pháp***
- **Định lí 2**
- Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến cũng vuông góc với mặt phẳng kia.



Hình 12

Định lí 3

- Nếu hai mặt phẳng cắt nhau cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.



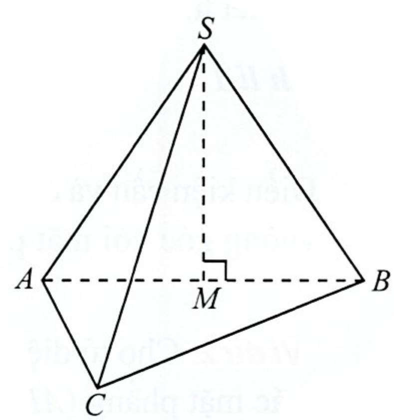
Hình 15

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là trung điểm của AB. Chứng minh $SM \perp (ABC)$.

Lời giải

Theo đề bài ta có $(SAB) \perp (ABC)$.



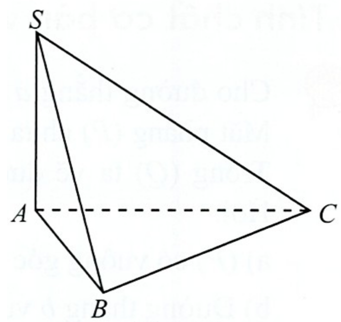
Hình 13

Ta có tam giác SAB đều và M là trung điểm của AB, suy ra $SM \perp AB$. Đường thẳng SM nằm trong (SAB) và vuông góc với giao tuyến AB của hai mặt phẳng (SAB) và (ABC).

Từ đó suy ra $SM \perp (ABC)$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh SA bằng a, đáy ABC là tam giác đều với cạnh bằng a. Cho biết hai mặt bên (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt đáy (ABC). Tính SB và SC theo a.

Lời giải

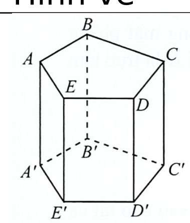
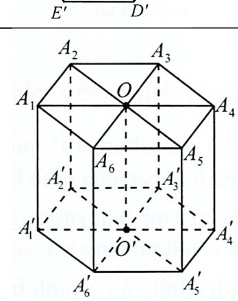
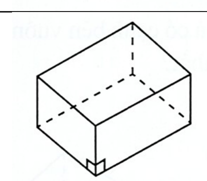


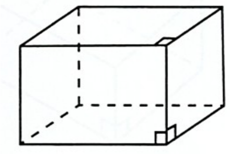
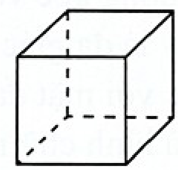
Hình 16

Ta có hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt đáy (ABC), theo Định lí 3, giao tuyến SA của (SAB) và (SAC) vuông góc với (ABC). Từ $SA \perp (ABC)$ ta có $SA \perp AB$ và $SA \perp AC$, suy ra tam giác SAB và SAC vuông cân tại S, suy ra $SB = SC = a\sqrt{2}$.

⬩Dạng ❹: Hình lăng trụ đứng, hình hộp chữ nhật, hình lập phương

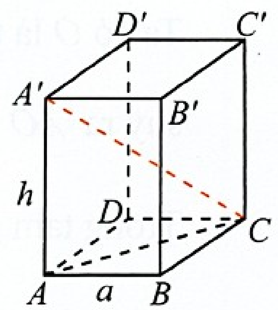
- ***Phương pháp***
- **Định nghĩa**
- Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.
- Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có mặt đáy là đa giác đều.
- Hình hộp đứng là hình hộp có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.
- Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có mặt đáy là hình chữ nhật.
- Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau.
- Sử dụng quan hệ song song và vuông góc giữa đường thẳng và mặt phẳng ta chứng minh được các tính chất sau đây của các hình vừa nêu:

Tên	Hình vẽ	Tính chất cơ bản
Hình lăng trụ đứng		- Cạnh bên vuông góc với hai đáy. - Mặt bên là các hình chữ nhật.
Hình lăng trụ đều		- Hai đáy là hai đa giác đều. - Mặt bên là các hình chữ nhật. - Cạnh bên và đường nối tâm hai đáy vuông góc với hai đáy.
Hình hộp đứng		- Bốn mặt bên là hình chữ nhật. - Hai đáy là hình bình hành.

Hình hộp chữ nhật		- Sáu mặt là hình chữ nhật. - Độ dài a,b,c của ba cạnh cùng đi qua một đỉnh gọi là ba kích thước của hình hộp chữ nhật. - Độ dài đường chéo d được tính theo ba kích thước: $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.
Hình lập phương		- Sáu mặt là hình vuông. - Độ dài đường chéo d được tính theo độ dài cạnh a : $d=a\sqrt{3}$.

☞**Các ví dụ minh họa**

Câu 1: Cho hình lăng trụ đều $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có cạnh đáy $AB=a$ và cạnh bên $AA'=h$ (Hình 19). Tính độ dài đường chéo $A'C$ theo a và h.



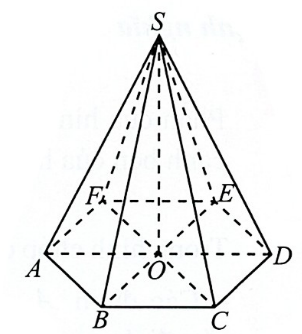
Hình 19

Lời giải

Đáy $ABCD$ của lăng trụ đều phải là tứ giác đều, suy ra $ABCD$ là hình vuông, vậy $AC=a\sqrt{2}$. Lăng trụ đều có cạnh bên vuông góc với đáy, suy ra $AA'\perp(ABCD)$, vậy $AA'\perp AC$. Trong tam giác $A'AC$ vuông tại A ta có: $A'C=\sqrt{A'A^2+AC^2}=\sqrt{h^2+2a^2}$.

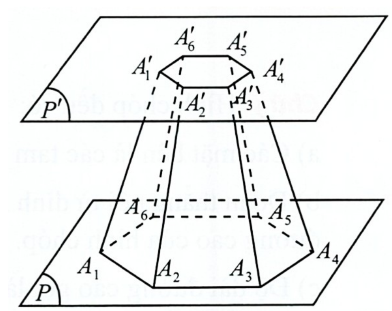
Dạng ❺: Hình chóp đều. Hình chóp cụt đều

- ***Phương pháp***
- **Hình chóp đều**
- **Định nghĩa**
- Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.



Hình 22

- **Chú ý:** Hình chóp đều có:
- Các mặt bên là các tam giác cân tại đỉnh hình chóp và bằng nhau.
- Đoạn thẳng nối từ đỉnh hình chóp đến tâm của đáy thì vuông góc với mặt đáy và gọi là đường cao của hình chóp.
- Độ dài đường cao gọi là chiều cao của hình chóp đều.
- **Hình chóp cụt đều**
- **Định nghĩa**
- Phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một mặt phẳng song song với đáy cắt các cạnh bên của hình chóp đều được gọi là hình chóp cụt đều.



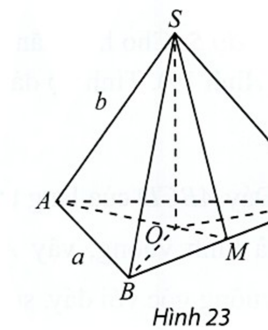
Hình 26

- Trong hình chóp cụt đều $A_1A_2A_3\cdots A_6 \cdot A'_1A'_2A'_3\cdots A'_6$, ta gọi:
- Các điểm $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_6, A'_1, A'_2, A'_3, \cdots, A'_6$ là các đỉnh.
- Đa giác $A_1A_2A_3\cdots A_6$ là đáy lớn, đa giác $A'_1A'_2A'_3\cdots A'_6$ là đáy nhỏ. Đáy lớn và đáy nhỏ nằm trên hai mặt phẳng song song.
- Cạnh của hai đa giác đáy là cạnh đáy. Các cạnh đáy tương ứng song song từng đôi một.
- Các hình thang cân $A_1A_2A'_2A'_1, A_2A_3A'_3A'_2, \cdots, A_6A_1A'_1A'_6$ là các mặt bên.
- Cạnh bên của mặt bên gọi là cạnh bên của hình chóp cụt đều. Hình chóp cụt đều có các cạnh bên bằng nhau, các mặt bên là những hình thang cân.
- Đoạn thẳng nối tâm hai đáy là đường cao. Độ dài đường cao là chiều cao.

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy $AB = a$ và cạnh bên $SA = b$ (Hình 23).

Tính độ dài đường cao SO theo a, b.



Hình 23

Lời giải

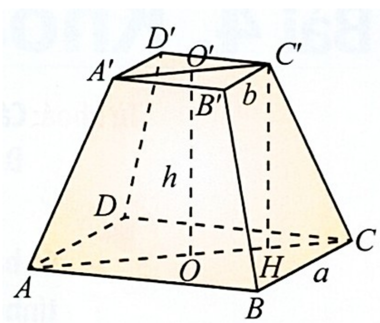
Ta có O là trọng tâm của tam giác đều ABC, suy ra $AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong tam giác SOA vuông tại O, ta có: $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{b^2 - \frac{3a^2}{9}} = \frac{\sqrt{9b^2 - 3a^2}}{3}$.

Câu 2: Cho hình chóp cụt tứ giác đều $ABCD \cdot A'B'C'D'$, đáy lớn $ABCD$ có cạnh bằng a, đáy nhỏ $A'B'C'D'$ có cạnh bằng b, chiều cao $OO' = h$ với O, O' lần lượt là tâm của hai đáy. Tính độ dài cạnh bên CC' của hình chóp cụt đó.

Lời giải

Trong hình thang vuông $OO'C'C$, vẽ đường cao $C'H \left(H \in OC\right)$ (Hình 27).



Hình 27

Ta có $OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}, O'C' = \frac{b\sqrt{2}}{2}$, suy ra $HC = \frac{(a-b)\sqrt{2}}{2}$.

Trong tam giác vuông $CC'H$, ta có

$$CC' = \sqrt{C'H^2 + HC^2} = \sqrt{h^2 + \frac{(a-b)^2}{2}}.$$

Ⓒ. Dạng toán rèn luyện

⬩Dạng ❶: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

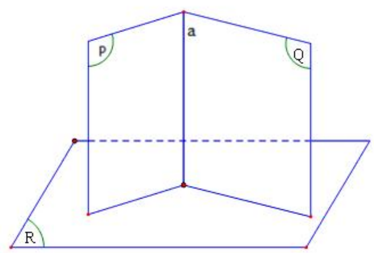
Câu 1: Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
C. Hai mặt phẳng song song khi và chỉ khi góc giữa chúng bằng 0^0.
D. Hai đường thẳng trong không gian cắt nhau khi và chỉ khi góc giữa chúng lớn hơn 0^0 và nhỏ hơn 90^0.

Lời giải

Chọn B

A sai vì hai mặt phẳng đó có thể cắt nhau.



C Sai vì hai đường thẳng đó có thể trùng nhau.

D Sai vì hai đường thẳng đó có thể cheo nhau.

Câu 2: Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Góc giữa hai mặt phẳng bằng góc giữa hai đường thẳng tùy ý nằm trong mỗi mặt phẳng.
B. Góc giữa hai mặt phẳng bằng góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.
C. Góc giữa hai mặt phẳng luôn là góc nhọn.
D. Góc giữa hai mặt phẳng bằng góc giữa hai vec tơ chỉ phương của hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

Lời giải

Chọn B

Câu 3: Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào **sai**?

A. Hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng nhau.
B. Hình chóp tứ giác đều có các cạnh bên bằng nhau.
C. Hình chóp tứ giác đều có đáy là hình vuông.
D. Hình chóp tứ giác đều có hình chiếu vuông góc của đỉnh lên đáy trùng với tâm của đáy.

Lời giải

Chọn A

Lý thuyết.

Câu 4: Cho các đường thẳng a,b và các mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$. Chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau

A. $\begin{cases} a\perp(\alpha) \\ a\subset(\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha)\perp(\beta)$.

B. $\begin{cases} a\perp b \\ a\perp(\alpha) \end{cases} \Rightarrow b//(\alpha)$.

C. $\begin{cases} a\perp b \\ a\subset(\alpha) \\ b\subset(\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha)\perp(\beta)$.

D. $\begin{cases} (\alpha)\perp(\beta) \\ a\subset(\alpha) \\ b\subset(\beta) \end{cases} \Rightarrow a\perp b$.

Lời giải

Chọn A

Câu 5: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng?

A. Cho hai mặt phẳng vuông góc với nhau, nếu một đường thẳng nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng thì vuông góc với mặt phẳng kia.

B. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước

C. Nếu hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

D. Đường thẳng d là đường vuông góc chung của hai đườngthẳng chéo nhau a,b khi và chỉ khi d vuông góc với cả a và $b.$

Lời giải

Chọn A

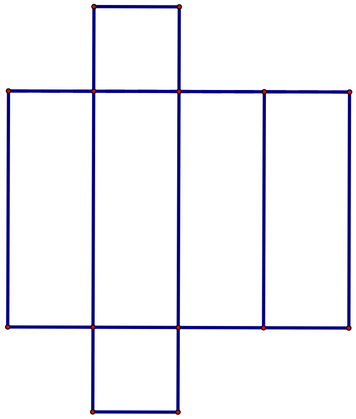
Câu 6: Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (α). có bao nhiêu mặt phẳng chứa a và vuông góc với (α).

A. 2.　　**B.** 0.　　**C.** Vô số.　　**D.** 1.

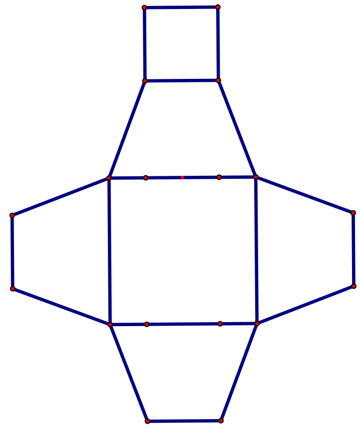
Lời giải

Chọn D

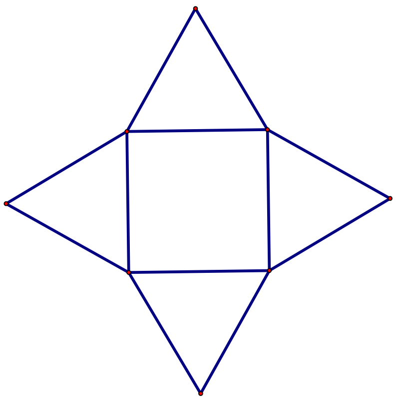
Câu 7: Mảnh bìa **phẳng** nào sau đây có thể xếp thành lăng trụ tứ giác đều?



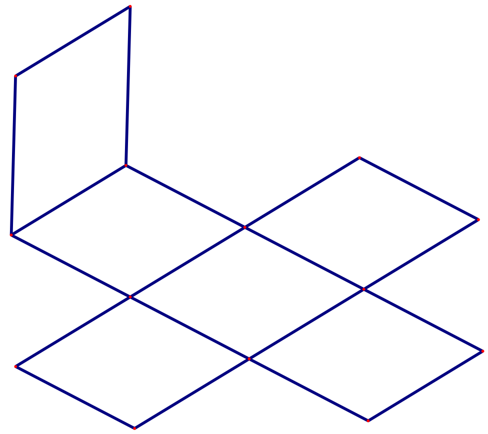
A.



B.



C.



D.

Lời giải

Chọn A

Câu 8: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. Nếu một đường thẳng nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với mặt phẳng kia thì hai mặt phẳng vuông góc nhau.
B. Nếu hai mặt phẳng cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.
C. Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này đều vuông góc với mặt phẳng kia.
D. Nếu hai mặt phẳng cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì chúng vuông góc với nhau.

Lời giải

Chọn A

Câu 9: Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (α). Có bao nhiêu mặt phẳng chứa a và vuông góc với (α)?

A. 2. **B.** 0. **C.** Vô số. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Câu 10: Có bao nhiêu mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây?

i) Hình hộp đứng có đáy là hình vuông là hình lập phương

ii) Hình hộp chữ nhật có tất cả các mặt là hình chữ nhật

iii) Hình lăng trụ đứng có các cạnh bên vuông góc với đáy

iv) Hình hộp có tất cả các cạnh bằng nhau là hình lập phương

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Có hai mệnh đề đúng là ii) và iii)

Câu 11: Trong không gian cho hai đường thẳng a,b và mặt phẳng (P), xét các phát biểu sau:

(I). Nếu $a//b$ mà $a\perp(P)$ thì luôn có $b\perp(P)$.

(II). Nếu $a\perp(P)$ và $a\perp b$ thì luôn có $b//(P)$.

(III). Qua đường thẳng a chỉ có duy nhất một mặt phẳng (Q) vuông góc với mặt phẳng (P).

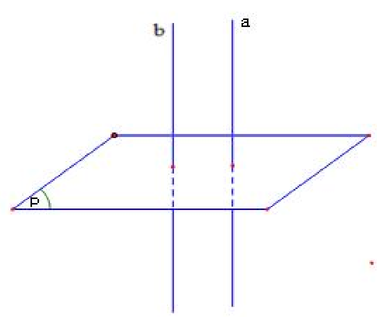
(IV). Qua đường thẳng a luôn có vô số mặt phẳng (Q) vuông góc với mặt phẳng (P).

Số khẳng định đúng trong các phát biểu trên là

A. 1.
B. 4.
C. 2.
D. 3.

Lời giải

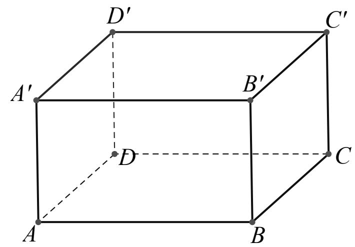
Chọn A



Khẳng định (I) đúng (Hình vẽ trên)

Khẳng định (II) sai vì nếu $a\perp(P)$ và $a\perp b$ thì $b//(P)$ hoặc $b\subset(P)$

Khẳng định (III) sai trong trường hợp đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P). Khi đó có vô số mặt phẳng chứa đường thẳng a và vuông góc với mặt phẳng (P). Ví dụ hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ thì qua đường thẳng AA' ta chỉ ra được ít nhất ba mặt phẳng cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.



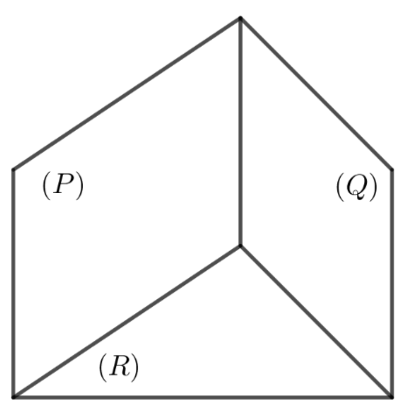
Khẳng định (IV) sai trong trường hợp đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P). Khi đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) thì qua đường thẳng a có duy nhất một mặt phẳng (Q) vuông góc với mặt phẳng (P).

Câu 12: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là khẳng định sai?

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
B. Nếu một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì cũng vuông góc với đường thẳng còn lại.
C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
D. Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

Lời giải

Chọn A



Hình ảnh minh họa hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với mặt phẳng (R) nhưng không song song với nhau.

Câu 13: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau và một điểm M không thuộc (P) và (Q). Qua M có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với (P) và (Q).

A. 3. **B.** Vô số. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

+ Qua M có duy nhất một đường thẳng d vuông góc với (P) và (Q).

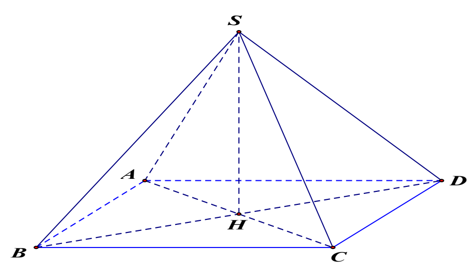
+ Mọi mặt phẳng chứa d đều vuông góc với (P) và (Q) nên có vô số mặt phẳng qua M vuông góc với (P) và (Q)

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ đều. Gọi H là trung điểm của cạnh AC. Tìm mệnh đề **sai?**

A. $(SAC)\perp(SBD)$. **B.** $SH\perp(ABCD)$. **C.** $(SBD)\perp(ABCD)$. **D.** $CD\perp(SAD)$.

Lời giải

Chọn D



Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O và $SA=SC$, $SB=SD$. Mệnh đề nào sau đây **sai?**

A. $SC\perp(SBD)$. **B.** $SO\perp(ABCD)$.

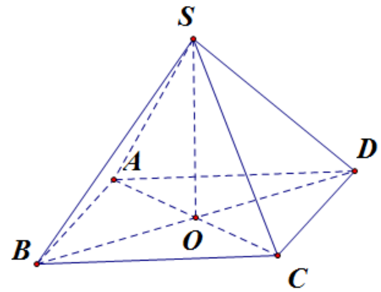
C. $(SBD)\perp(ABCD)$. **D.** $(SAC)\perp(ABCD)$.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết suy ra $SO\perp AC; SO\perp BD \Rightarrow SO\perp(ABCD)$ mà $SO\subset(SBD)$, $SO\subset(SAC)$

$\Rightarrow (SBD)\perp(ABCD); (SAC)\perp(ABCD)$. Vậy $SC\perp(SBD)$ là mệnh đề **sai.**

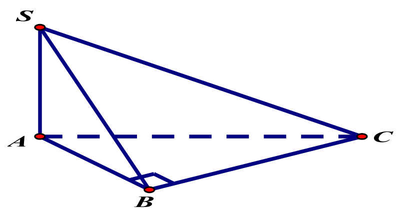


Câu 16: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B và cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $SA \perp BC$. **B.** $AB \perp BC$. **C.** $AB \perp SC$. **D.** $SB \perp BC$.

Lời giải

Chọn C



$SA \perp BC$ đúng vì $SA \perp (ABC)$.

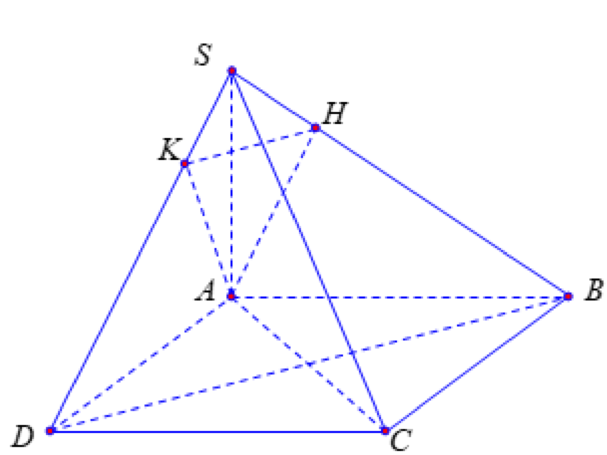
$AB \perp BC$ đúng vì ΔABC vuông tại B.

$SB \perp BC$ đúng vì $\begin{cases} AB \perp BC \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, hai mặt bên (SAB) và (SAD) vuông góc với mặt đáy. AH, AK lần lượt là đường cao của tam giác SAB, SAD. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $BC \perp AH$. **B.** $SA \perp AC$. **C.** $HK \perp SC$. **D.** $AK \perp BD$.

Lời giải



Ta có $\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\(SAD)\perp(ABCD)\end{cases}$ nên $SA\perp(ABCD)$

Suy ra $SA\perp AC$ (B đúng); $SA\perp BC$; $SA\perp BD$.

Mặt khác $BC\perp AB$ nên $BC\perp(SAB)$ suy ra $BC\perp AH$ (A đúng).

và $BD\perp AC$ nên $BD\perp(SAC)$ suy ra $BD\perp SC$;

Đồng thời $HK\,//\,BD$ nên $HK\perp SC$ (C đúng).

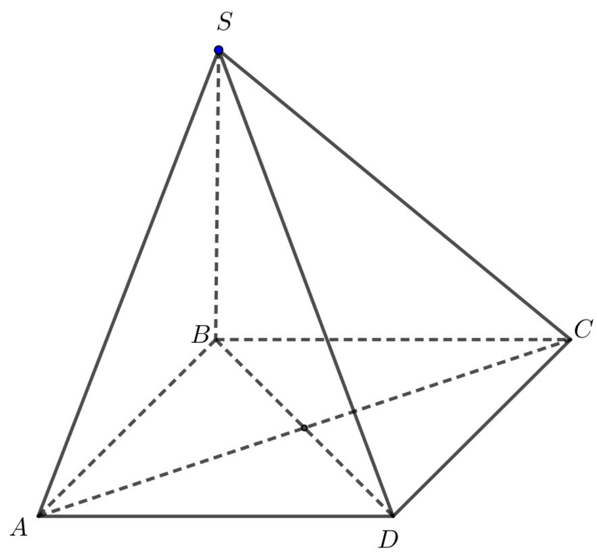
Vậy mệnh đề sai là $AK\perp BD$ (vì không đủ điều kiện chứng minh).

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi và SB vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Mặt phẳng nào sau đây vuông góc với mặt phẳng (SBD)?

A. (SBC). **B.** (SAD). **C.** (SCD). **D.** (SAC).

Lời giải

Chọn D



Ta có $\begin{cases}AC\perp BD\\AC\perp SB\end{cases}\Rightarrow AC\perp(SBD)\Rightarrow(SAC)\perp(SBD)$.

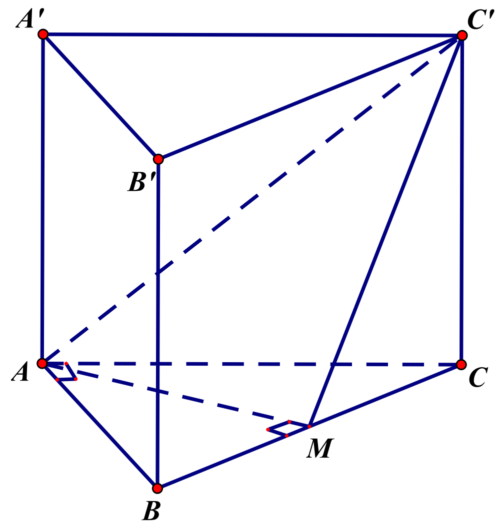
Câu 19: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm của BC, mệnh đề nào sau đây **sai** ?

A. $(ABB')\perp(ACC')$. **B.** $(AC'M)\perp(ABC)$.

C. $(AMC')\perp(BCC')$. **D.** $(ABC)\perp(ABA')$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $BC \perp AM$ và $BC \perp AA'$ nên $BC \perp (AA'M) \Rightarrow (ABC) \perp (AA'B'B)$.

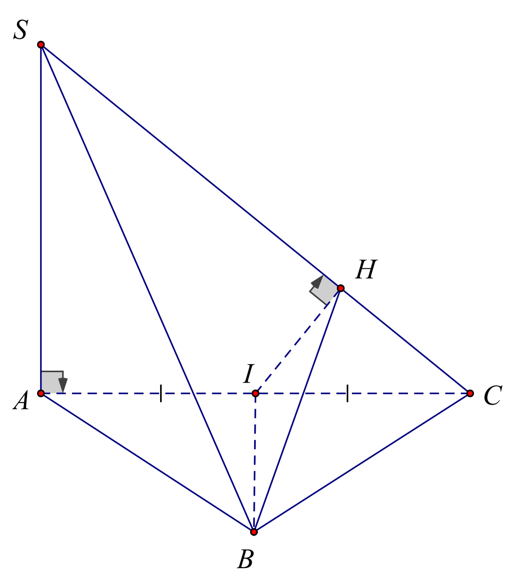
Nếu $(AC'M) \perp (ABC)$ thì suy ra $(AC'M) \equiv (AA'B'B)$: Vô lý.

Do đó B **sai**.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy, I là trung điểm AC, H là hình chiếu của I lên SC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $(BIH) \perp (SBC)$. **B.** $(SAC) \perp (SAB)$. **C.** $(SBC) \perp (ABC)$. **D.** $(SAC) \perp (SBC)$.

Lời giải

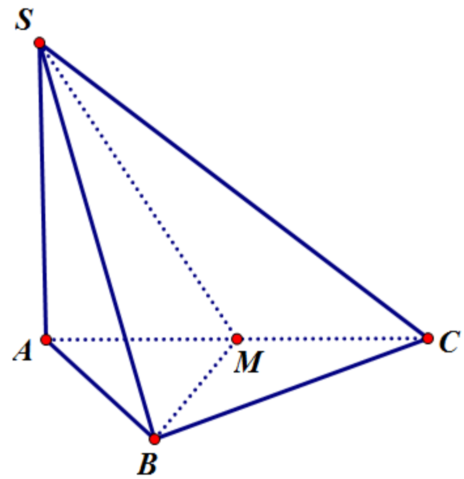


Ta có: $\begin{cases} BI \perp AC (\text{gt}) \\ BI \perp SA (SA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BI \perp (SAC) \supset SC \Rightarrow SC \perp BI$ (1).

Theo giả thiết: $SC \perp IH$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $SC \perp (BIH)$. Mà $SC \subset (SBC)$ nên $(BIH) \perp (SBC)$.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $SA \perp (ABC)$, gọi M là trung điểm của AC. Mệnh đề nào **sai** ?



A. $(SAB) \perp (SAC)$. **B.** $BM \perp AC$. **C.** $(SBM) \perp (SAC)$. **D.** $(SAB) \perp (SBC)$.

Lời giải

Chọn A

+ Có tam giác ABC là tam giác vuông cân tại B, M là trung điểm của AC $\Rightarrow BM \perp AC$

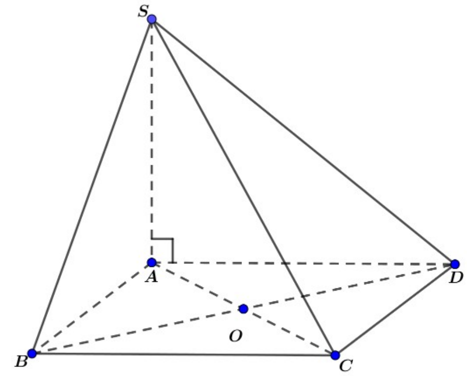
+ Có $\left.\begin{matrix} BM \perp AC \\ BM \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow BM \perp (SAC) \Rightarrow (SBM) \perp (SAC)$.

+ Có $\left.\begin{matrix} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$

Vậy A sai.

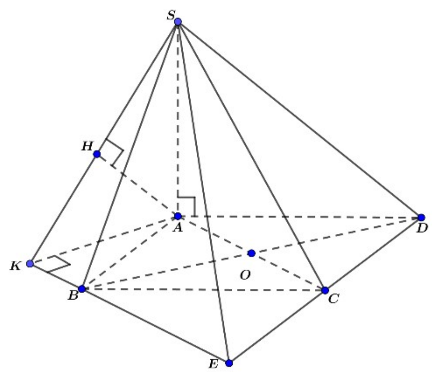
Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{6}$ (như hình vẽ). Mệnh đề nào sau đây là đúng?.

A. $(SBC) \perp (ABCD)$. **B.** $(SBC) \perp (SCD)$. **C.** $(SBC) \perp (SAD)$ **D.** $(SBC) \perp (SAB)$.



Lời giải

Chọn D



$\left.\begin{array}{l} BC \perp SA \ (\text{do } SA \perp (ABCD)) \\ BC \perp AB \ (\text{gt}) \\ SA \cap AB = A \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB)$ mà $BC \subset (SBC)$. Vậy $(SBC) \perp (SAB)$.

Câu 23: Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng $(AB'C)$ vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A. $(D'BC)$. **B.** $(B'BD)$. **C.** $(D'AB)$. **D.** $(BA'C')$.

Lời giải

Chọn B

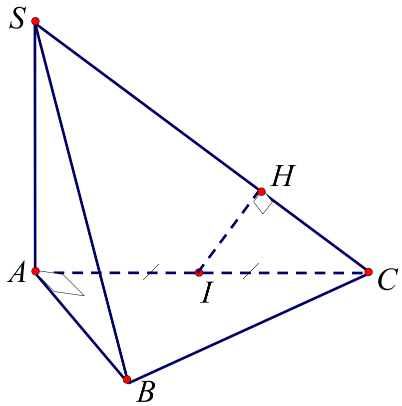
Ta có: $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AC \perp (BB'D)$ mà $AC \subset (AB'C) \Rightarrow (AB'C) \perp (BB'D)$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh bên SA vuông góc với (ABC). Gọi I là trung điểm cạnh AC, H là hình chiếu của I trên SC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $(SBC) \perp (IHB)$. **B.** $(SAC) \perp (SAB)$. **C.** $(SAC) \perp (SBC)$. **D.** $(SBC) \perp (SAB)$.

Lời giải

Chọn B.



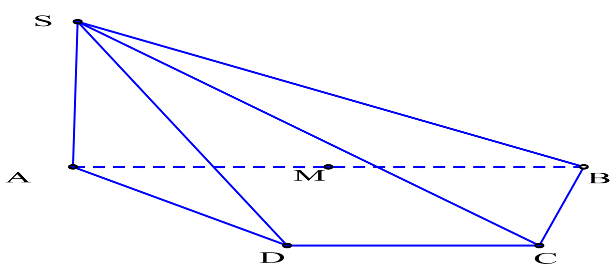
Vì $AB \perp (SAC)$ nên $(SAC) \perp (SAB)$.

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D. Biết $SA = AD = DC = a$, $AB = 2a$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $(SBD) \perp (SAC)$. **B.** $(SAB) \perp (SAD)$. **C.** $(SAC) \perp (SBC)$. **D.** $(SAD) \perp (SCD)$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow (SAB) \perp (SAD)$, suy ra phương án B đúng.

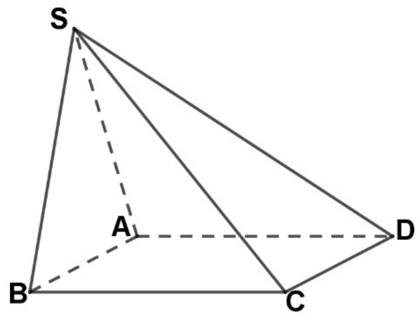
Lại có $AC^2 = AD^2 + DC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$.

Gọi M là trung điểm của AB. Khi đó $BC^2 = MB^2 + MC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{2}$. Ta thấy $AB^2 = AC^2 + CB^2 \Rightarrow BC \perp AC$.

Như vậy $\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow (SBC) \perp (SAC)$, suy ra phương án C đúng.

Ta có $\begin{cases} DC \perp AD \\ DC \perp SA \end{cases} \Rightarrow DC \perp (SAD) \Rightarrow (SCD) \perp (SAD)$, suy ra phương án D đúng.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy.Trong số các mặt phẳng chứa mặt đáy và các mặt bên của hình chóp, có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (SAB)?



A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

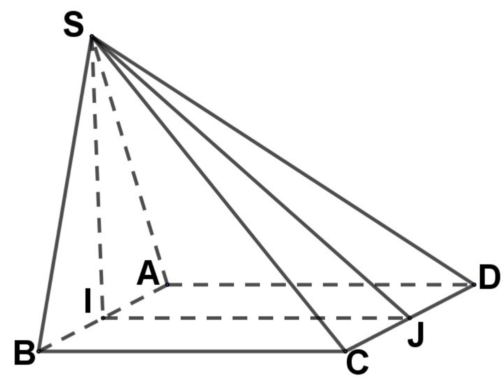
Chọn B

$$\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\(SAB)\cap(ABCD)=\mathrm{AB}\\ \mathrm{BC}\perp\mathrm{AB}\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)$$

$\Rightarrow (SBC)\perp(\mathrm{SAB})$

Tương tự suy ra $(SAD)\perp(SAB)$.

$\left((SCD);(SAB)\right)=\widehat{ISJ}\neq 90^0$



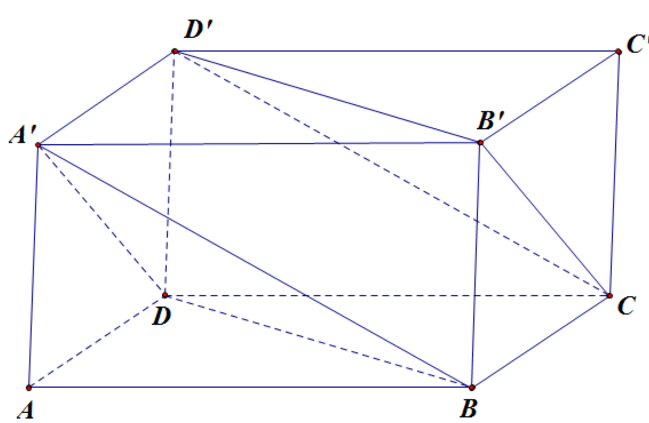
Vậy có 3 mặt phẳng $(ABCD);(SAD);(SBC)$ vuông góc với (SAB).

Câu 27: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, khẳng định nào **đúng** về hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(CB'D')$.

A. $(A'BD)\perp(CB'D')$. **B.** $(A'BD)//(CB'D')$.

C. $(A'BD)\equiv(CB'D')$. **D.** $(A'BD)\cap(CB'D')=BD'$.

Lời giải



Ta có $CD'//A'B$ mà $A'B\subset(A'BD)$ nên $CD'//(A'BD)$.

$CB'//A'D$ mà $A'D\subset(A'BD)$ nên $CB'//(A'BD)$.

Vậy $(CB'D')$ chứa hai đường thẳng CD', CB' cắt nhau và cùng song song với $(A'BD)$ từ đó ta có $(A'BD)//(CB'D')$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $SA = SC$. Khẳng định nào sau đây đúng?

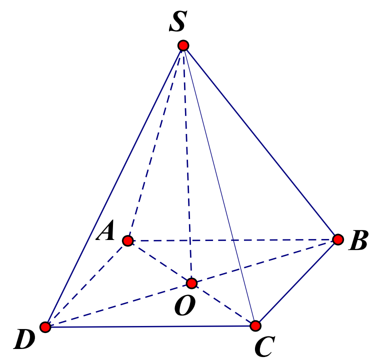
A. Mặt phẳng (SBD) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

B. Mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

C. Mặt phẳng (SAD) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

D. Mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải



Gọi $O = AC \cap BD$.

Tứ giác $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$ (1).

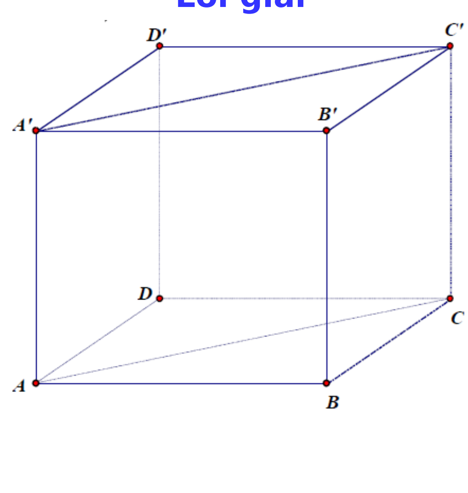
Mặt khác tam giác SAC cân tại S nên $SO \perp AC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AC \perp (SBD)$ nên $(SBD) \perp (ABCD)$.

Câu 29: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa mặt phẳng $(ABCD)$ và $(ACC'A')$.

A. 45°. **B.** 60°. **C.** 30°. **D.** 90°.

Lời giải



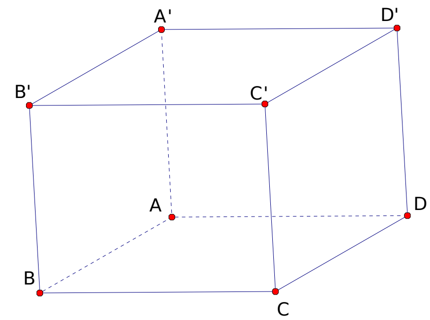
Do $AA' \perp (ABCD) \Rightarrow (ACC'A') \perp (ABCD)$.

Câu 30: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ bằng

A. 45°. **B.** 60°. **C.** 0°. **D.** 90°.

Lời giải

Chọn C



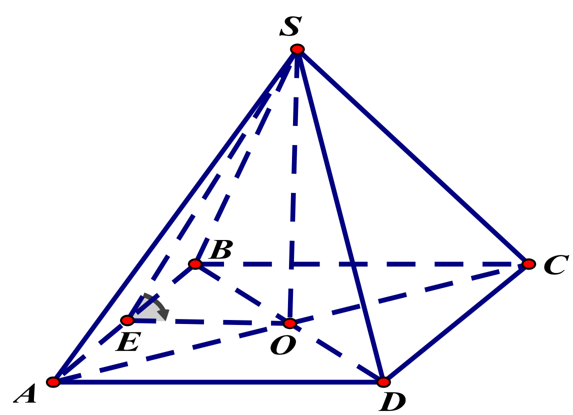
Ta thấy hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ là hai mặt đáy của hình lập phương nên chúng song song với nhau.

Vậy góc giữa $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ bằng $\left(\widehat{(ABCD),(A'B'C'D')}\right)=0^\circ$.

Câu 31: Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$ và chiều cao bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tang của góc nhị diện $[S,AB,O]$

A. 1. **B.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

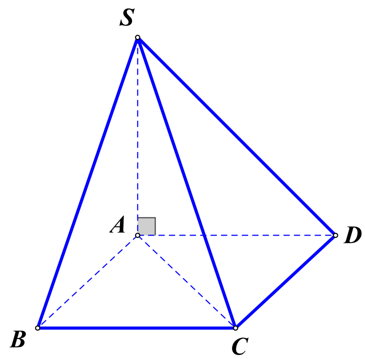
Lời giải



Góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $\widehat{SEO}$; $EO=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Xét ΔSEO vuông tại O, ta có $\tan\widehat{SEO}=\frac{SO}{EO}=1$.

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với mặt đáy (tham khảo hình vẽ bên). Góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng



A. Góc $\widehat{SDA}$. **B.** Góc $\widehat{SCA}$. **C.** Góc $\widehat{SCB}$. **D.** Góc $\widehat{ASD}$.

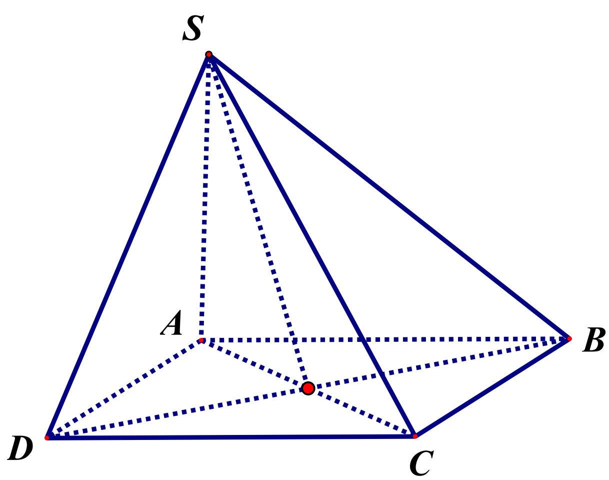
Lời giải

Ta có $\begin{cases} CD \perp (SAD) \\ (ABCD) \cap (SCD) = CD \end{cases} \Rightarrow ((ABCD),(SCD)) = \widehat{SDA}$.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình vuông có cạnh $2a$, $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với đáy. Góc nhị diện $[S, BD, A]$?

A. 90^0. **B.** 30^0. **C.** 45^0. **D.** 60^0.

Lời giải



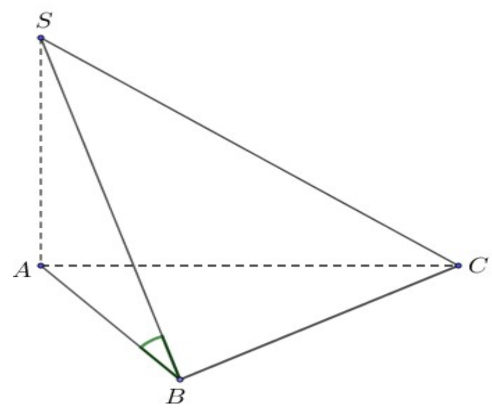
Từ A ta kẻ đường vuông góc tới BD, thì chân đường vuông góc là tâm O của hình vuông, từ đây dễ thấy $SO \perp BD$, nên góc giữa hai mặt phẳng là góc SOA.

Xét tam giác ΔSOA có $\tan SOA = \frac{SA}{OA} = \frac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3}$. Vậy góc cần tìm bằng 60^0.

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông cân tại B, $AB = BC = a$, $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABC)$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là

A. 45°. **B.** 60°. **C.** 90°. **D.** 30°.

Lời giải

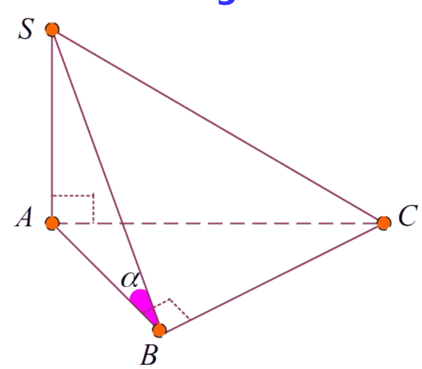


Ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SA$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc $\widehat{SBA}$. $\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ$.

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $SA \perp (ABC)$, $SA = \sqrt{3}$ cm, $AB = 1$ cm, $BC = \sqrt{2}$ cm. Mặt bên (SBC) hợp với đáy một góc bằng:

A. 30°. **B.** 90°. **C.** 60°. **D.** 45°.

Lời giải



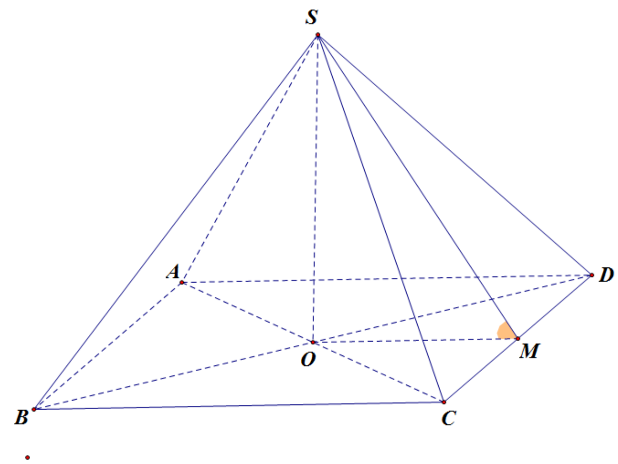
Theo giả thiết vì $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp AB$, $SA \perp BC$. Mặt khác $BC \perp AB$ nên $BC \perp SB$. Vậy góc giữa (SBC) và đáy là góc $\widehat{SBA} = \alpha$.

Trong tam giác vuông SAB ta có: $\tan \alpha = \frac{SA}{AB} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$.

Câu 36: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{3}$, đường cao bằng $\frac{3a}{2}$. Góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng:

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 75°.

Lời giải



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$; M là trung điểm của CD.

Góc giữa mặt bên và mặt đáy là $\widehat{SMO}$.

Ta có $OM = \frac{1}{2}AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

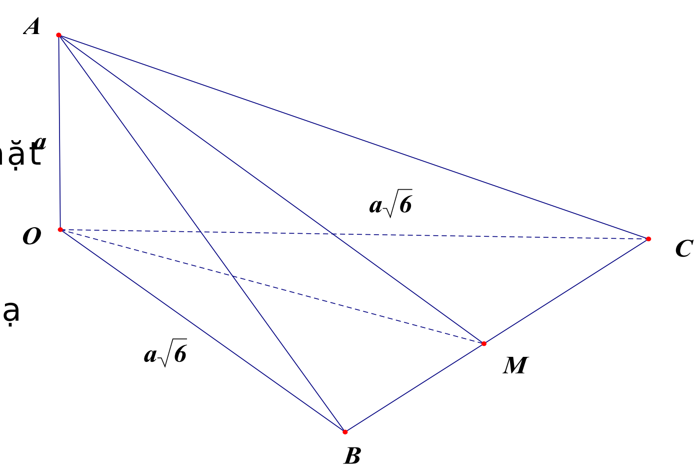
Xét tam giác SOM vuông tại O, ta có $\tan\widehat{SMO} = \frac{SO}{OM} = \frac{\frac{3}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SMO} = 60^\circ$.

Câu 37: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OB = OC = a\sqrt{6}$, $OA = a$. Khi đó góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC) bằng

A. 90^0 **B.** 60^0 **C.** 45^0 **D.** 30^0

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm của BC. Suy ra $OM \perp BC$. Nên góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC) chính là góc $\widehat{OMA}$.

Ta có: Tam giác OBC vuông cân tại O nên $OM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{OB^2 + OC^2} = a\sqrt{3}$

Xét tam giác OAM vuông tại O có $\tan\widehat{OMA} = \frac{OA}{OM} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Suy ra $\widehat{OMA} = 30^0$

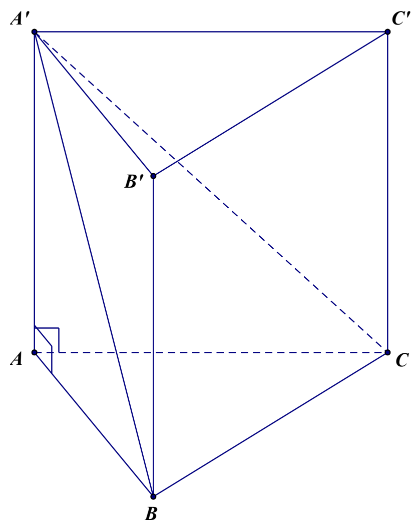
Vậy, góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC) bằng 30^0

Câu 38: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có diện tích đáy bằng $\sqrt{3}a^2$ (đvdt), diện tích tam giác $A'BC$ bằng $2a^2$ (đvdt). Tính góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC)?

A. 120°. **B.** 60°. **C.** 30°. **D.** 45°.

Lời giải

Chọn C



+) Ta có ΔABC là hình chiếu vuông góc của $\Delta A'BC$ trên mặt phẳng (ABC)

+) Gọi φ là góc giữa $(A'BC)$ và (ABC).

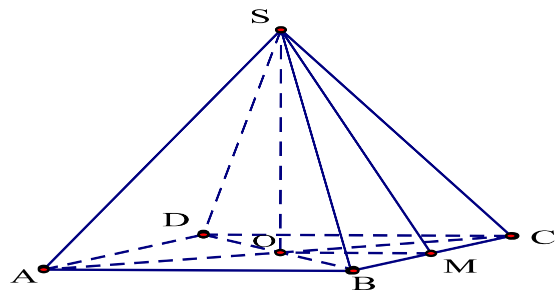
Ta có: $\cos\varphi = \dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'BC}} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2a^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = 30^\circ$.

Câu 39: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{3}$, đường cao bằng $\dfrac{3a}{2}$. Góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng

A. 45°.
B. 30°.
C. 60°.
D. 75°.

Lời giải

Chọn C



Gọi $O = AC \cap BD$ thì $SO \perp (ABCD)$.

Gọi M là trung điểm của BC thì $\widehat{SMO}$ là góc cần tìm.

Xét ΔSMO vuông tại O có:

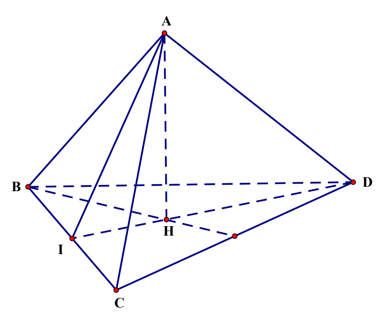
$$\tan \widehat{SMO} = \frac{SO}{OM} = \frac{\frac{3a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SMO} = 60^\circ.$$

Câu 40: Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a. Côsin của góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng

A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải

Chọn D



Hình chóp tứ giác đều $ABCD$ có H là trọng tâm của tam giác đáy BCD và DH cắt BC tại I

Ta có $AH \perp (BCD)$

Tam giác BCD đều và H là trọng tâm của tam giác BCD nên $DI \perp BC$.

$$\begin{cases} AH \perp BC \\ DI \perp BC \end{cases} \Rightarrow AI \perp BC$$

$\Rightarrow$ góc giữa mặt bên (ABC) và mặt đáy (BCD) là $\widehat{AID}$

Tam giác ABC đều có AI là đường trung tuyến nên $AI=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Tam giác BCD đều có H là trọng tâm nên $IH=\frac{1}{3}DI=\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

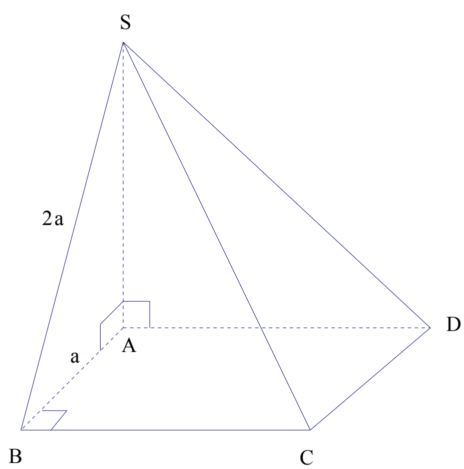
$AH\perp(BCD)$ nên tam giác AIH vuông tại H. Khi đó $\cos\widehat{AIH}=\frac{IH}{AH}=\frac{1}{3}$

Câu 41: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh AB $=a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SB=2a$. Góc giữa mặt phẳng (SBC) mặt phẳng đáy bằng

A. 90°. **B.** 60°. **C.** 45°. **D.** 30°.

Lời giải

Chọn B



Ta có $BC\perp AB$

$BC\perp SA$ vì $SA\perp(ABCD)$.

$\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp SB$.

$(SBC)\cap(ABCD)=BC$

$SB\subset(SBC)$, $SB\perp BC$

$AB\subset(ABCD)$, $AB\perp BC$

$\Rightarrow$ góc giữa mặt phẳng (SBC) mặt phẳng $(ABCD)$ bằng góc giữa SB, AB bằng góc $\widehat{SBA}$.

$$\Delta_v SAB : \cos \widehat{SBA} = \frac{AB}{SB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^0$$.

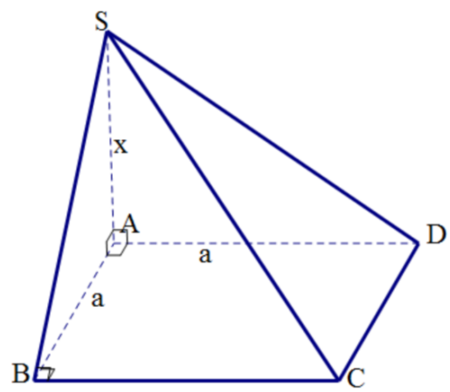
Vậy góc giữa mặt phẳng (SBC) mặt phẳng đáy bằng 60^o.

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, đường cao $SA = x$. Góc giữa (SBC) và mặt đáy bằng 60^0. Khi đó x bằng

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn B



$\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$. Ta có $\begin{cases} (SBC) \cap (ABCD) = BC \\ (SAB) \perp BC \\ (SAB) \cap (SBC) = SB \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \end{cases}$

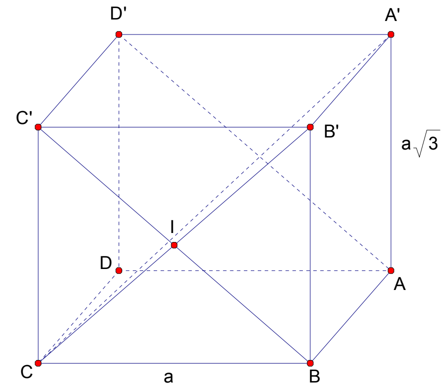
Suy ra góc giữa (SBC) và mặt đáy bằng góc $S\hat{B}A = 60^0$. Do đó $\tan 60^0 = \frac{x}{a} \Rightarrow x = a\sqrt{3}$.

Câu 43: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $BC = a, BB' = a\sqrt{3}$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'C)$ và $(ABC'D')$ bằng

A. 60^o. **B.** 45^o. **C.** 30^o. **D.** 90^o.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $\left((A'B'C);(ABC'D')\right)=\left(BC';B'C\right)$

Gọi I là giao điểm của hai đường chéo BC' và $B'C$.

+) $\tan\widehat{CB'B}=\dfrac{CB}{BB'}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow \widehat{CB'B}=30^\circ$.

Tam giác IBB' cân tại I, suy ra: $\widehat{BIB'}=120^\circ \Rightarrow \widehat{CIB}=60^\circ$.

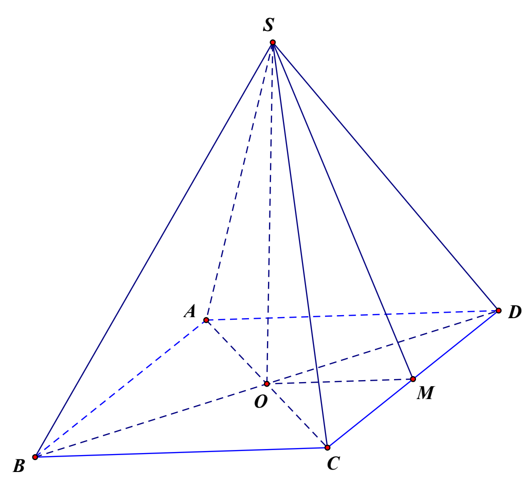
Vậy $\left((A'B'C);(ABC'D')\right)=60^\circ$.

Câu 44: Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a. Tính cosin của góc giữa một mặt bên và mặt đáy.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Giả sử $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a.

Gọi $O=AC\cap BD$ và M là trung điểm của cạnh CD $\Rightarrow OM=\dfrac{a}{2}$ và $SM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} CD \perp SO \\ CD \perp OM \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOM) \Rightarrow CD \perp SM$.

Vậy $((SCD),(ABCD)) = (OM, SM) = \widehat{SMO}$.

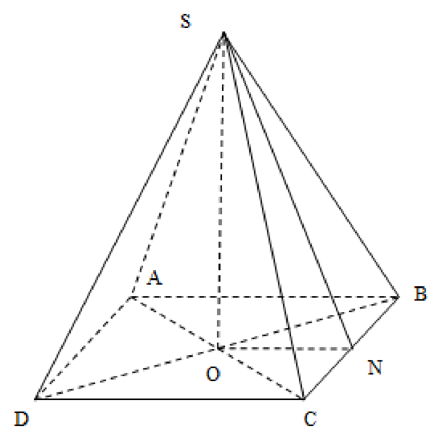
Xét tam giác vuông SOM ta có $\cos\widehat{SOM} = \dfrac{OM}{SM} = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 45: Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng $3a$. Gọi α là góc giữa mặt bên và mặt đáy, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$. **C.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{14}}{14}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là giao điểm của AC và BD, N là trung điểm của BC.

$\alpha = ((SBC),(ABCD)) = (SN, ON) = \widehat{SNO}$

$OB = \dfrac{1}{2}BD = \sqrt{2}a$

Xét ΔSOB vuông tại O: $SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = a\sqrt{7}$

Xét ΔSON vuông tại O: $SN = \sqrt{SO^2 + ON^2} = 2\sqrt{2}a$

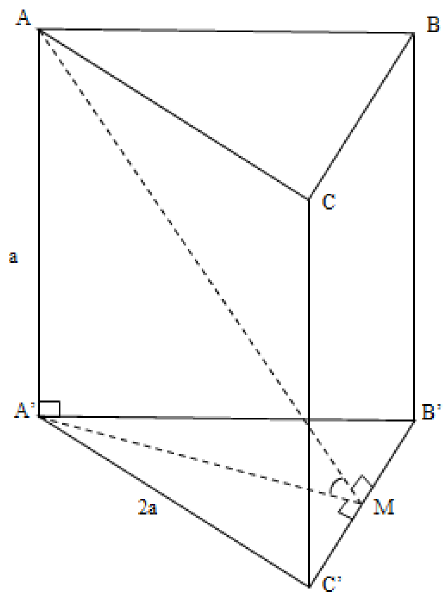
Xét ΔSON vuông tại O: $\cos\alpha = \dfrac{ON}{SN} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

Câu 46: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng a. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'B'C')$.

A. 30°. **B.** 60°. **C.** 45°. **D.** 90°.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm $B'C'$. Do lăng trụ đều nên ta có: $A'M \perp B'C'$, $AM \perp B'C'$.

Do đó góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'B'C')$ là góc $\widehat{AMA'}$.

Lại có tam giác đều $A'B'C'$ nên $A'M = 2a\dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Từ đó: $\tan\widehat{AMA'} = \dfrac{AA'}{A'M} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

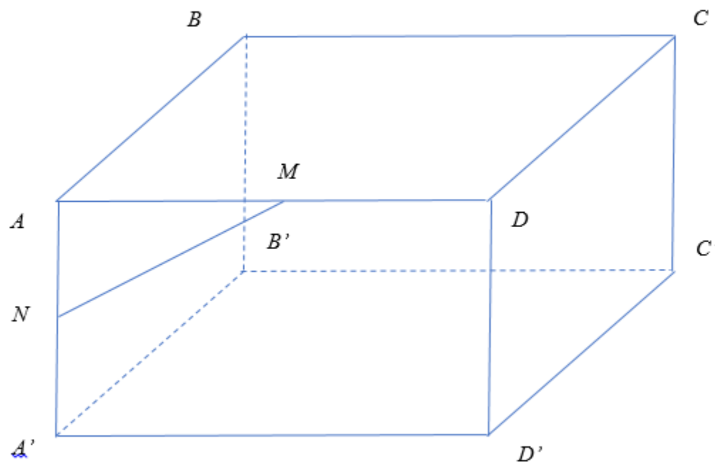
Vậy góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'B'C')$ bằng 30°.

Câu 47: Cho hình hộp chữ nhật $ABCB.A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = a\sqrt{3}, AA' = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, AA'. Góc giữa hai đường thẳng MN và BB' bằng

A. 45°. **B.** 90°. **C.** 60°. **D.** 30°.

Lời giải

Chọn C



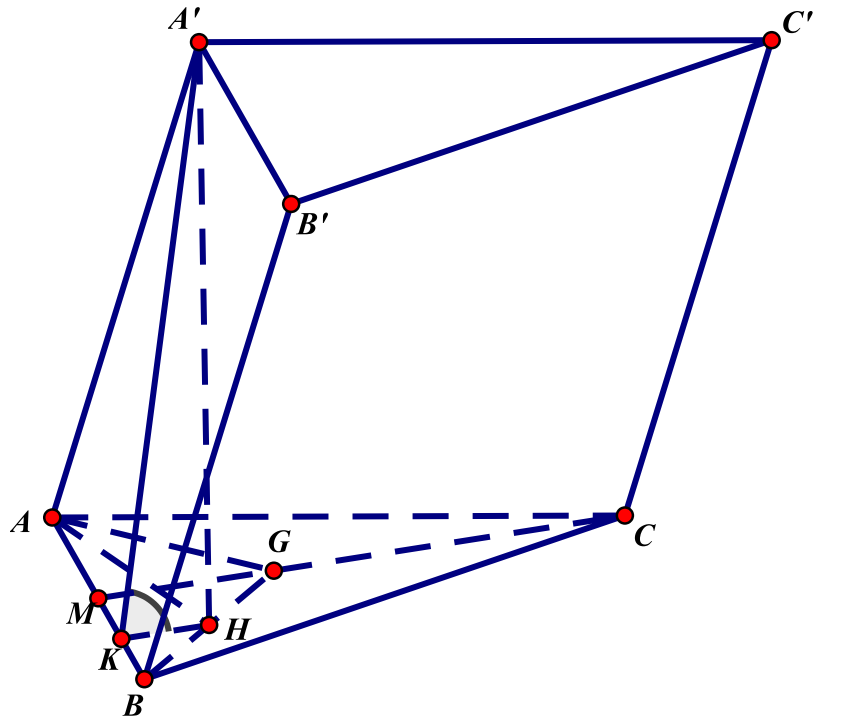
Vì $AA'//BB'$ nên góc giữa hai đường thẳng MN và BB' bằng góc giữa MN và AA' và bằng góc $\widehat{ANM}$.

Xét tam giác ANM vuông tại A, ta có: $\tan \widehat{ANM} = \frac{AM}{AN} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{2}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{ANM} = 60°$.

Câu 48: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a, cạnh bên $AA' = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của đoạn BG (với G là trọng tâm tam giác ABC). Tính cosin của góc φ giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(ABB'A')$.

A. $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{95}}$. **B.** $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{165}}$. **C.** $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{134}}$. **D.** $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{126}}$.

Lời giải



- Gọi H là trung điểm BG, theo giả thiết $A'H \perp (ABC)$.
- Gọi M, K lần lượt là trung điểm của AB và BM

$\Rightarrow \begin{cases} CM \perp AB \\ HK // CM \end{cases} \Rightarrow HK \perp AB \Rightarrow (A'HK) \perp AB$

$\Rightarrow \widehat{A'KH} = \varphi$ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(ABB'A')$

- Ta có: $AB = a$, $AG = BG = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AH^2 = \dfrac{AB^2 + AG^2}{2} - \dfrac{BG^2}{4} = \dfrac{7a^2}{12}$

$\Rightarrow A'H^2 = A'A^2 - AH^2 = \dfrac{41a^2}{12}$; $HK = \dfrac{1}{2}GM = \dfrac{a\sqrt{3}}{12} \Rightarrow A'K^2 = A'H^2 + HK^2 = \dfrac{165a^2}{48}$

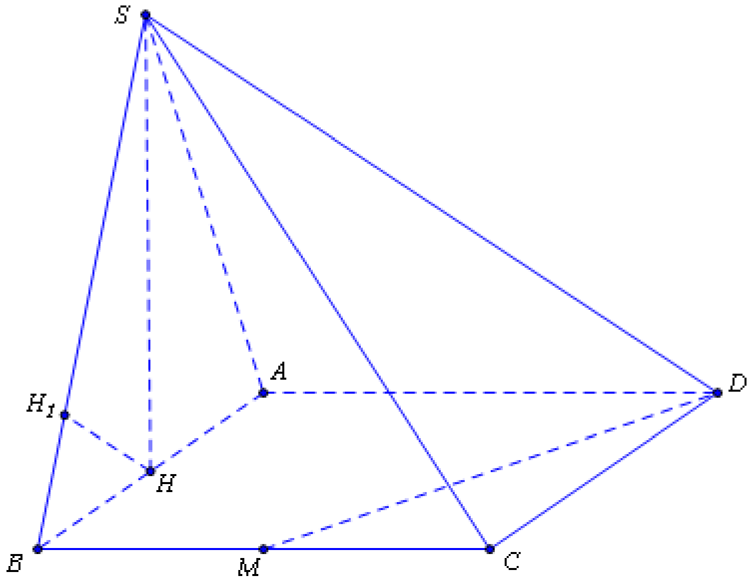
$\Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{HK}{A'K} = \dfrac{1}{\sqrt{165}}$.

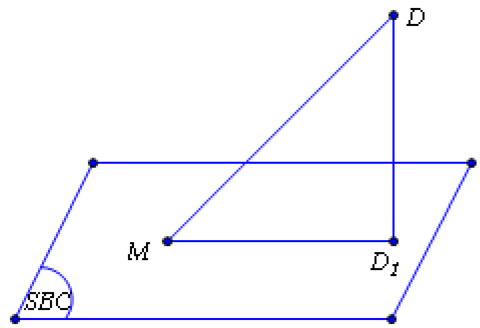
Câu 49: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính sin của góc tạo bởi đường MD và mặt phẳng (SBC).

A. $\dfrac{\sqrt{13}}{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{13}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$.

Lời giải

Chọn C





Gọi D_1 là hình chiếu vuông góc của D trên (SBC).

Gọi α là góc tạo bởi đường MD và mặt phẳng (SBC). Khi đó:

$\sin\alpha = \dfrac{DD_1}{MD}$.

Ta có $MD = \sqrt{CD^2 + CM^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Gọi H là chân đường cao kẻ từ S của ΔSAB. Khi đó do tam giác SAB đều và

$(SAB)\perp(ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$ và $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Kẻ $HH_1 \perp SB \Rightarrow HH_1 \perp (SBC) \Rightarrow d\left(H,(SBC)\right) = HH_1$ và ta có

$$\frac{1}{HH_1^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{BH^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} \Rightarrow HH_1 = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Ta có $DD_1 = d\left(D,(SBC)\right) = d\left(A,(SBC)\right) = 2d\left(H,(SBC)\right) = 2HH_1 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

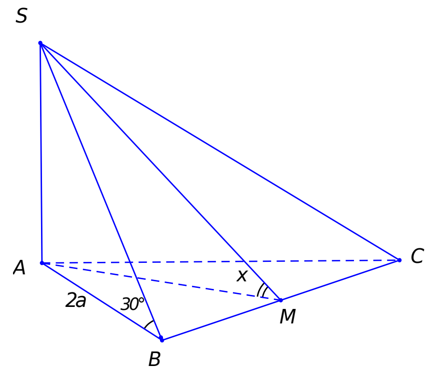
Do đó $\sin\alpha = \dfrac{DD_1}{MD} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

Câu 50: Cho hình chop $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC đều cạnh $2a$, SB tạo với mặt phẳng đáy một góc 30°. Khi đó $\text{mp}(SBC)$ tạo với đáy một góc x. Tính $\tan x$.

A. $\tan x = 2$. **B.** $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\tan x = \frac{3}{2}$. **D.** $\tan x = \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow AB$ là hình chiếu của AB lên (ABC).

Do đó $\widehat{SBA} = (\widehat{SB; (ABC)}) = 30^\circ$, $SA = AB \tan 30^\circ = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Gọi M là trung điểm của BC, ta có

ΔABC đều cạnh $2a \Rightarrow AM = \frac{2a\sqrt{3}}{2}$

Và $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ AM \perp BC \\ SM \perp BC \end{cases} \Rightarrow \widehat{SMA} = (\widehat{SBC; ABC}) = x$.

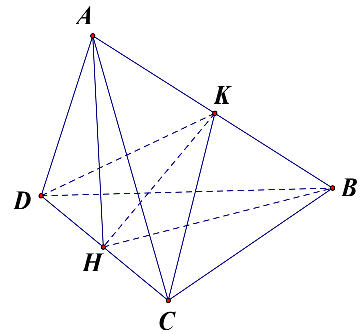
Vậy $\tan x = \frac{SA}{AM} = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2}{2a\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$.

Câu 51: Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC = AD = BC = BD = a,$ $CD = 2x$. Tìm giá trị của x để hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc với nhau.

A. $x = \frac{a}{3}$. **B.** $x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $x = \frac{a}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H, K lần lượt là trung điểm của CD và AB.

Do tam giác ACD cân tại A nên $AH \perp CD$ mà $(ACD) \perp (BCD)$ $\Rightarrow AH \perp (BCD) \Rightarrow AH \perp HB$ $\Rightarrow AB = \sqrt{HA^2 + HB^2} = \sqrt{2(a^2 - x^2)}$ và $HK = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\sqrt{2(a^2 - x^2)}}{2}$.

Do các tam giác ABC, ABD cân tại C và D nên $CK \perp AB, DK \perp AB \Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) là góc (KC, KD). Khi đó: $(ABC) \perp (ABD) \Leftrightarrow \widehat{CKD} = 90^\circ \Leftrightarrow KH = \dfrac{CD}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2(a^2 - x^2)}}{2} = x \Leftrightarrow x = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

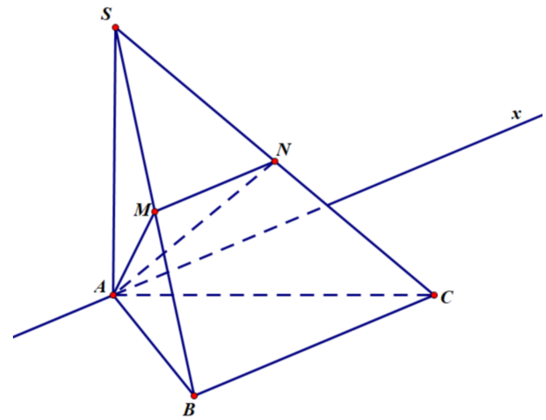
Vậy $x = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 52: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABC), $AB = a$, $SA = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC. Côsin của góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và (ABC) bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $MN//BC$ (tính chất đường trung bình) $\Rightarrow MN//(ABC) \Rightarrow (AMN) \cap (ABC) = Ax$.

Dễ thấy, $BC \perp (SAB) \Rightarrow Ax \perp (SAB) \Rightarrow \begin{cases} Ax \perp AB \\ Ax \perp AM \end{cases}$. Vậy góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và (ABC) là $\widehat{MAB}$. Vì tam giác SAB vuông, nên $\widehat{MAB} = \widehat{SBA}$. Ta có:

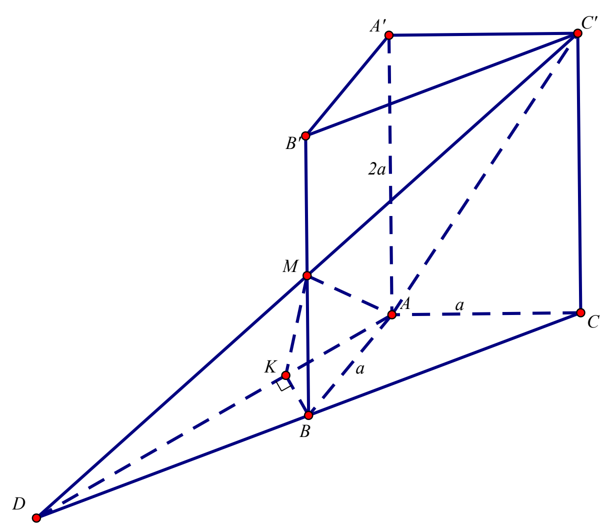
$\cos\widehat{MAB} = \cos\widehat{SBA} = \dfrac{AB}{SB} = \dfrac{a}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{a}{a\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 53: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên $AA' = 2a$, $AB = AC = a$, góc $\widehat{BAC} = 120^0$. Gọi M là trung điểm BB' thì côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và $(AC'M)$ là

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{31}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{15}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{93}}{31}$.

Lời giải

Chọn D

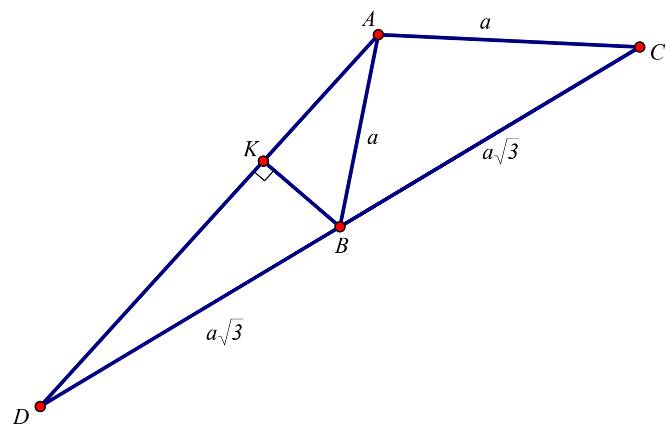


Kéo dài BC cắt $C'M$ tại D, khi đó giao tuyến của (ABC) và $(AC'M)$ là AD.

Do M là trung điểm của BB' suy ra $DB = BC = \sqrt{a^2 + a^2 - 2a^2\cos 120} = a\sqrt{3}$

Trong mặt phẳng (ABC) kẻ $BK \perp AD, K \in AD$.

Gọi φ là góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và $(AC'M)$. Ta có $\cos\varphi = \dfrac{BK}{MK}$.



Do tam giác ABC cân tại A và góc $\widehat{BAC} = 120^0$ nên $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 30^0$ suy ra $\widehat{ABD} = 150^0$.

Ta có $AD^2 = BD^2 + AB^2 - 2BD.AB.\cos 150^0 = 3a^2 + a^2 + 2a^2\sqrt{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 7a^2$.

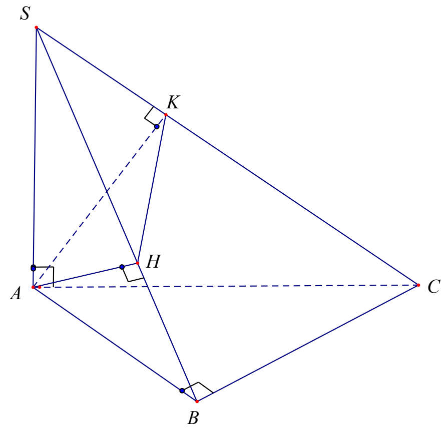
Suy ra $AD = a\sqrt{7} \Rightarrow \sin\widehat{DAB} = \dfrac{\sin 150^0.a\sqrt{3}}{a\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \Rightarrow$ $BK = AB.\sin\widehat{DAB} = a\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$.

$\Rightarrow MK = \sqrt{BM^2 + BK^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{3a^2}{28}} = \dfrac{a\sqrt{31}}{2\sqrt{7}}$. Vậy $\cos\varphi = \dfrac{BK}{MK} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}}{\dfrac{a\sqrt{31}}{2\sqrt{7}}} = \dfrac{\sqrt{93}}{31}$.

Câu 54: Hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B có $AB = a$, $AC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = 2a.$ Gọi φ là góc tạo bởi hai mặt phẳng $(SAC),(SBC)$. Tính $\cos\varphi = ?$

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$.

Lời giải



Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$

Mặt khác $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$ (1).

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các cạnh SB, SC khi đó ta có.

$AH \perp SC$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$ (3).

Mặt khác ta lại có $AK \perp SC$ (4).

Từ (3) và (4) ta có $SC \perp (AHK) \Rightarrow SC \perp HK$.

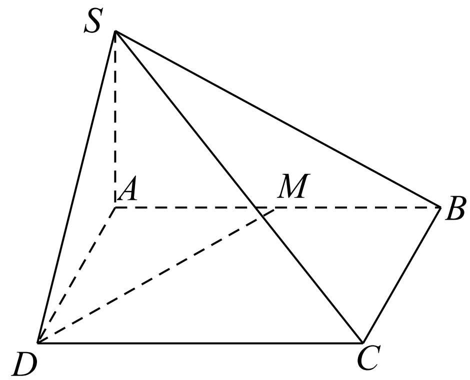
Vậy $((SAC),(SBC)) = (AK, HK) = \widehat{AKH}$.

Do $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp HK$ hay tam giác AHK vuông tại H.

Ta có $AH = \dfrac{AB.SA}{\sqrt{AB^2 + SA^2}} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$; $AK = \dfrac{AC.SA}{\sqrt{AC^2 + SA^2}} = a\sqrt{2} \Rightarrow HK = \dfrac{a\sqrt{30}}{5}$.

Vậy $\cos AKH = \dfrac{HK}{AK} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

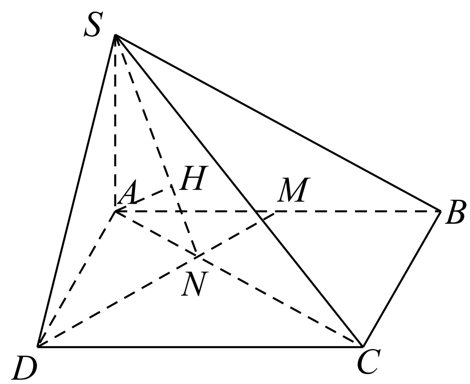
Câu 55: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a\sqrt{2}$, $AD = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB (tham khảo hình vẽ).



Góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SDM) bằng

A. 45°. **B.** 60°. **C.** 30°. **D.** 90°.

Lời giải

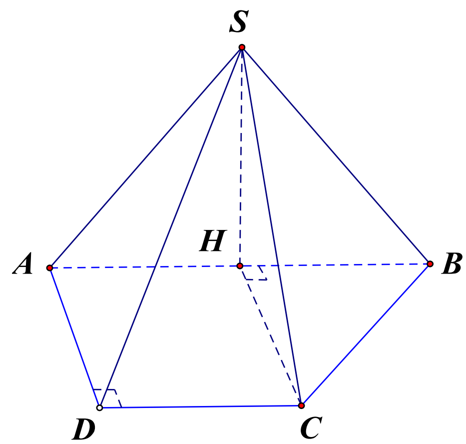


Gọi $N = AC \cap DM$. Ta có $\frac{AM}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, do đó hai tam giác ABC và DAM đồng dạng, suy ra $\widehat{AMN} + \widehat{MAN} = 90^\circ$. Vậy $AC \perp DM \Rightarrow DM \perp (SAC)$ mà $DM \subset (SDM)$ nên góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SDM) là 90°.

Câu 56: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, $AD = DC = a$. Biết SAB là tam giác đều cạnh $2a$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC).

A. $\frac{2}{\sqrt{7}}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{6}}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$. **D.** $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$.

Lời giải



Theo giả thuyết H là hình chiếu của C lên AB nên hình chiếu của mặt phẳng (SBC) lên mặt phẳng (SAB) là (SBH). Đặt $\alpha = \left((SBC),(SAB)\right)$ ta có: $\cos\alpha = \frac{S_{\Delta SBH}}{S_{\Delta SBC}}$.

Mặt khác ta có:

$S_{\Delta SHB} = \frac{1}{2}a.a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

$SB = SC = 2a; BC = a\sqrt{2}$.

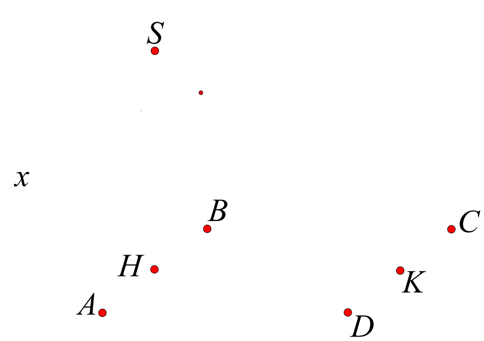
$S_{\Delta SBC} = \sqrt{\frac{a\left(4+\sqrt{2}\right)}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{a\left(4-\sqrt{2}\right)}{2}} = \frac{a^2\sqrt{7}}{2}$.

Vậy $\cos\alpha = \frac{S_{\Delta SBH}}{S_{\Delta SBC}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

Câu 57: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tam giác đều SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD. Ta có $\tan$ của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



Ta có: H là trung điểm AB thì $SH \perp AB$ (vì tam giác SAB đều)

Mà $\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\(SAB)\cap(ABCD)=AB\end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Mặt khác $\begin{cases}AB \parallel CD\\S\in(SAB)\cap(SCD)\end{cases} \Rightarrow (SAB)\cap(SCD)=Sx \,//\, AB \,//\, CD$

Mà $Sx \perp (SHK) \Rightarrow \begin{cases}Sx \perp SH\\Sx \perp SK\end{cases}$, với K là trung điểm CD.

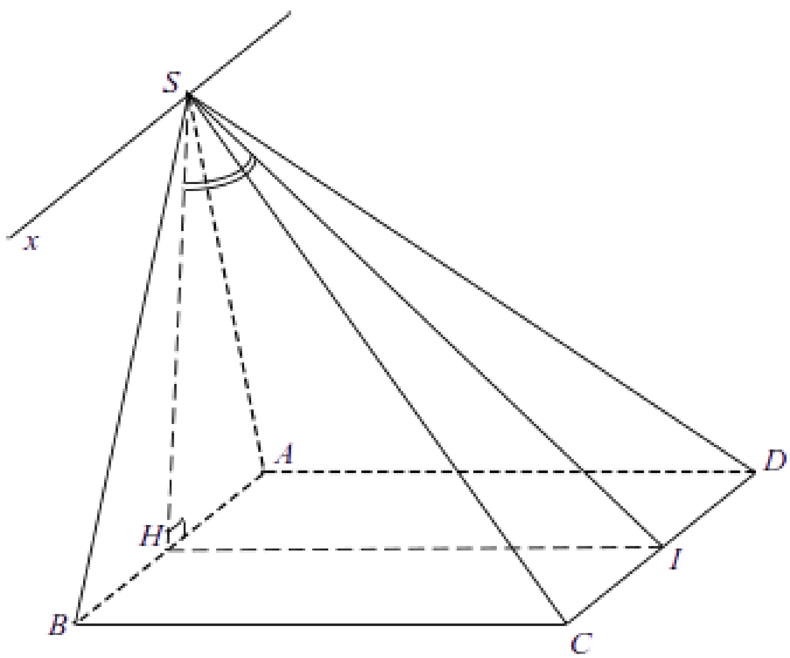
$\Rightarrow \left(\widehat{(SAB),(SCD)}\right)=\widehat{HSK}$.

Khi đó $\tan\widehat{HSK}=\dfrac{HK}{SH}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 58: Trong không gian cho tam giác đều SAB và hình vuông $ABCD$ cạnh a nằm trên hai mặt phẳng vuông góc. Góc φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\varphi=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\tan\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\tan\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\tan\varphi=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm của AB $\Rightarrow SH$ là trung tuyến đồng thời là đường cao của tam giác SAB

Ta có: $\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\ AB=(SAB)\cap(ABCD)\\ SH\subset(SAB),SH\perp AB\end{cases}\Rightarrow SH\perp(ABCD)$

Gọi I là trung điểm của CD $\Rightarrow HI$ là đường trung bình của hình vuông $ABCD$

$\Rightarrow HI=a,\ HI\perp CD$

Do $\begin{cases}CD\perp SH\\ CD\perp HI\end{cases}\Rightarrow CD\perp(SHI)\Rightarrow CD\perp SI$

Lại có $\begin{cases}S\in(SAB)\cap(SCD)\\ AB\subset(SAB);\ CD\subset(SCD)\\ AB//CD\end{cases}\Rightarrow Sx=(SAB)\cap(SCD)$ với $Sx//AB//CD$

Ta có: $\begin{cases}Sx//AB\\ AB\perp SH\end{cases}\Rightarrow SH\perp Sx$. Chứng minh tương tự: $Sx\perp SI$.

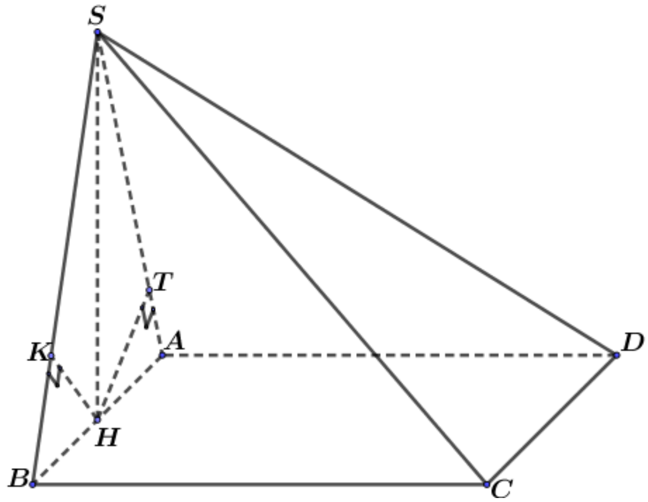
Khi đó: $\begin{cases}Sx=(SCD)\cap(SAB)\\ SH\subset(SAB),SH\perp AB\\ SI\subset(SCD),SI\perp CD\end{cases}\Rightarrow\widehat{\left[(SAB),(SCD)\right]}=\widehat{(SH,SI)}=\widehat{HSI}=\varphi$

Xét ΔSHI có: $\tan\varphi=\dfrac{HI}{SH}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 59: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a$; $AD=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Mặt bên SAB là tam giác cân đỉnh S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $\widehat{ASB}=120^\circ$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) bằng:

A. 60°. **B.** 30°. **C.** 45°. **D.** 90°.

Lời giải



Gọi H là trung điểm của AB, theo đề ra ta được $SH \perp (ABCD)$.

Dựng T, K lần lượt là hình chiếu của H lên SA, $SB \Rightarrow HT \perp (SAD)$ và $HK \perp (SBC)$.

Vậy $\left(\widehat{(SAD);\ (SBC)}\right) = \left(\widehat{HT;\ HK}\right)$.

Xét tứ giác $SKHT$ có hai góc vuông đối diện nhau nên $SKHT$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{KHT} = 60^\circ$ do $\widehat{ASB} = 120^\circ$.

Vậy $\left(\widehat{(SAD);\ (SBC)}\right) = \left(\widehat{HT;\ HK}\right) = \widehat{KHT} = 60^\circ$.

Câu 60: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SA = a$ (tham khảo hình vẽ bên dưới). Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng?

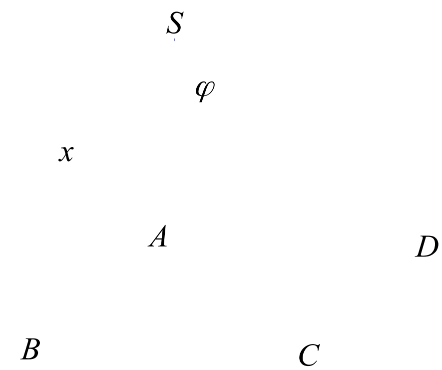
S

A D

B C

A. 60°. **B.** 45°. **C.** 30°. **D.** 90°.

Lời giải



Ta có $\begin{cases} CD \perp (SAD) \\ CD \,//\, Sx \end{cases} \Rightarrow Sx \perp (SAD) \Rightarrow \begin{cases} Sx \perp SA \\ Sx \perp SD \end{cases}$ và $(SAB) \cap (SCD) = Sx \,//\, AB \,//\, CD$

$\Rightarrow ((SAB),(SCD)) = \widehat{ASD} = \varphi$.

Tam giác SAD vuông tại A có $SA = AD = a$ $\Rightarrow \Delta SAD$ vuông cân tại A

$\Rightarrow \varphi = 45^\circ$

Vậy $((SAB),(SCD)) = 45^\circ$.

⁌Dạng ❷: Câu trắc nghiệm đúng, sai

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Biết SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Khi đó:

a) $((SAB),(ABCD)) = 90^\circ$

b) $((SBC),(ABCD)) = \widehat{SAB}$

c) $((SBC),(ABCD)) = 60^\circ$

d) $((SBD),(ABCD)) \approx 69,43^\circ$

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng b) Sai

Ta có: $\begin{cases} SA \perp (ABCD) \\ SA \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \perp (ABCD)$ hay $((SAB),(ABCD)) = 90^\circ$.

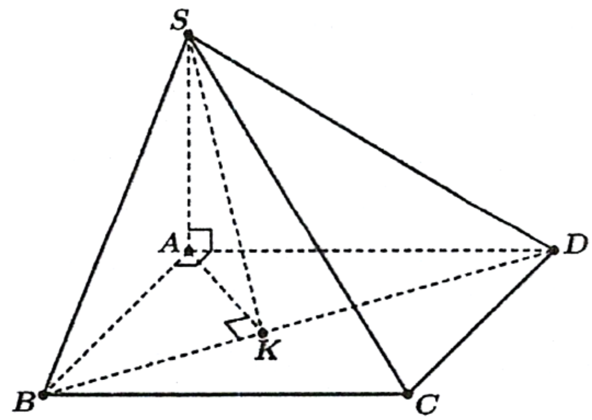
Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA (\text{ do } SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.

Khi đó: $\begin{cases} BC = (SBC) \cap (ABCD) \\ AB \perp BC, SB \perp BC \\ AB \subset (ABCD), SB \subset (SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow ((SBC),(ABCD)) = (SB, AB) = \widehat{SBA}$ (góc $\widehat{SBA}$ nhọn vì $\widehat{SAB} = 90^\circ$)

Tam giác SAB vuông tại A có: $\tan \widehat{SBA} = \dfrac{SA}{AB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ$.

Vậy $((SBC),(ABCD)) = \widehat{SBA} = 60^\circ$.



Kẻ đường cao AK của tam giác ABD.

Ta có: $\begin{cases} BD \perp AK \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAK) \Rightarrow BD \perp SK$.

Khi đó: $\begin{cases} (SBD) \cap (ABCD) = BD \\ AK \perp BD, SK \perp BD \\ AK \subset (ABCD), SK \subset (SBD) \end{cases}$

$\Rightarrow ((SBD),(ABCD)) = (SK, AK) = \widehat{SKA}$ (góc $\widehat{SKA}$ nhọn vì $\widehat{SAK} = 90^\circ$)

Tam giác ABD vuông tại A có đường cao AK nên

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Tam giác SAK vuông tại A có: $\tan \widehat{SKA} = \dfrac{SA}{AK} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = 2 \Rightarrow \widehat{SKA} \approx 63,43^\circ$.

Vậy $((SBD),(ABCD)) = \widehat{SKA} \simeq 63,43^\circ$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khi đó:

a) $((SCD),(ABCD)) = 45^\circ$.

b) $((SBD),(ABCD)) = \widehat{SOA}$

c) $((SBD),(ABCD)) \approx 58,74^\circ$.

d) $(SBD) \perp (SAC)$

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Sai b) Đúng

a) Ta có: $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA (\text{ do } SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$.

Khi đó: $\begin{cases} (SCD) \cap (ABCD) = CD \\ AD \perp CD, SD \perp CD \\ AD \subset (ABCD), SD \subset (SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow ((SCD),(ABCD)) = (SD, AD) = \widehat{SDA}.$

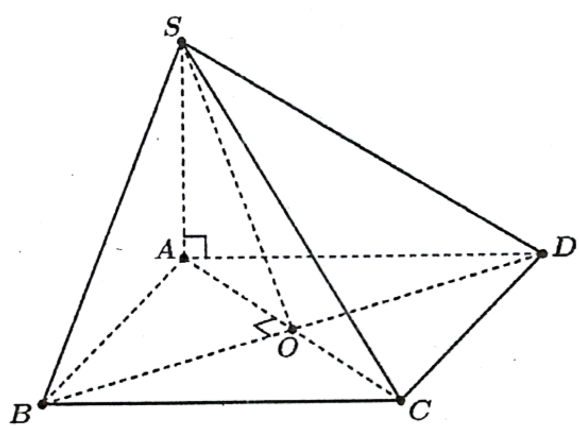
Tam giác SAD vuông tại A có: $\tan \widehat{SDA} = \dfrac{SA}{AD} = \dfrac{a}{a} = 1 \Rightarrow \widehat{SDA} = 45^\circ$.

Vậy $((SCD),(ABCD)) = \widehat{SDA} = 45^\circ$.

b) Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$.

Ta coù $\begin{cases} BD \perp AC \text{ (hai ñöôøng cheùo trong hình vuoâng)} \\ BD \perp SA (\text{ do } SA \perp (ABCD)) \end{cases}$

$\Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SO.$



$\begin{cases} (SBD) \cap (ABCD) = BD \\ OA \perp BD, SO \perp BD \\ OA \subset (ABCD), SO \subset (SBD) \end{cases}$

Khi đó

$\Rightarrow ((SBD),(ABCD)) = (SO, OA) = \widehat{SOA}$

Hình vuông $ABCD$ có đường chéo $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow OA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác SAO vuông tại A có: $\tan \widehat{SOA} = \frac{SA}{OA} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow \widehat{SOA} \approx 54,74^\circ$.

Vậy $((SBD),(ABCD)) = \widehat{SOA} \approx 54,74^\circ$.

c) Theo câu b) thì $BD \perp (SAC)$, mà $BD \subset (SBD)$ nên $(SBD) \perp (SAC)$.

Câu 3: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, tâm của đáy là O với $SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm cạnh AD và BC. Khi đó:

a) $(SMN) \perp (ABCD)$

b) $(SAD) \perp (SMN)$

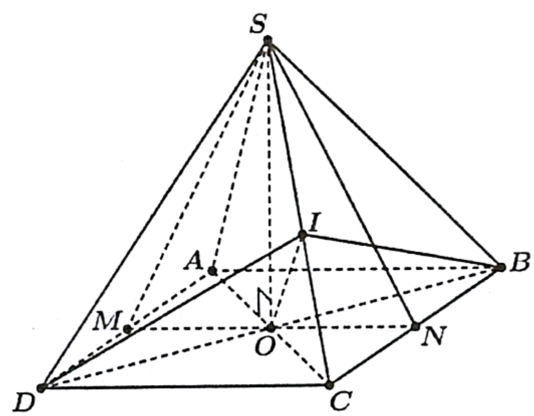
c) $((SBC),(ABCD)) = 30^\circ$

d) $((SBC),(SCD)) \approx 80,52^\circ$.

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Sai

Vì $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có O là tâm của đáy nên $SO \perp (ABCD)$.
Mặt khác MN là đường trung bình của hình vuông $ABCD$ nên MN qua O.



Vậy $SO \subset (SMN) \Rightarrow (SMN) \perp (ABCD)$.

Ta có: $\begin{cases} AD \perp MN \\ AD \perp SO \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SMN)$,

mà $AD \subset (SAD) \Rightarrow (SAD) \perp (SMN)$.

Ta có: $\begin{cases} BC // AD \\ AD \perp (SMN) \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (SMN) \Rightarrow BC \perp MN$.

Khi đó: $\begin{cases} (SBC)\cap(ABCD)=BC \\ ON\perp BC, SN\perp BC \\ ON\subset(ABCD), SN\subset(SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow ((SBC),(ABCD))=(SN,ON)=\widehat{SNO}$.

Vì ON là đường trung bình tam giác ABC nên $ON=\frac{AB}{2}=\frac{a}{2}$.

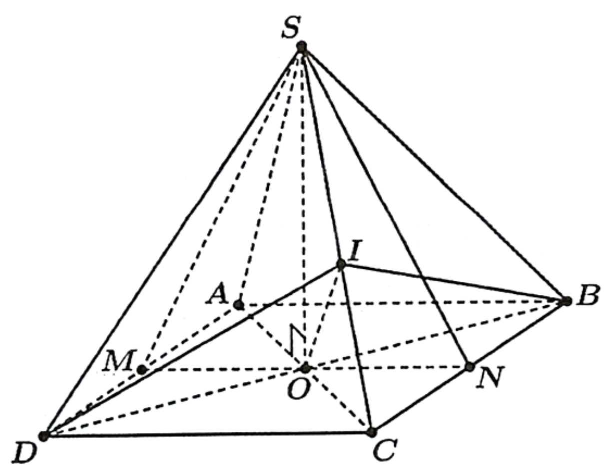
Tam giác SON vuông tại O có: $\tan\widehat{SNO}=\frac{SO}{ON}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}}=\sqrt{3}\Rightarrow \widehat{SNO}=60^\circ$.

Vậy $((SBC),(ABCD))=\widehat{SNO}=60^\circ$.

Kẻ đường cao DI của tam giác SCD.

Ta có: $\begin{cases} SC\perp DI \\ SC\perp BD(\text{ do } BD\perp(SAC)) \end{cases}\Rightarrow SC\perp(IBD)\Rightarrow SC\perp BI$.

Mặt khác $SC=(SBC)\cap(SCD)$ nên $((SBC),(SCD))=(ID,IB)$.



Ta có $IO\perp BD$ và O là trung điểm BD

nên ΔIBD cân tại I và $\widehat{OIB}=\widehat{OID}=\frac{1}{2}\widehat{BID}$.

Vì $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $OC=\frac{AC}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}=OD$.

Tam giác SOC có đường cao

$OI=\frac{SO\cdot OC}{\sqrt{SO^2+OC^2}}=\frac{a\sqrt{30}}{10}$

Tam giác IOD vuông tại O có:

$\tan \widehat{OID} = \dfrac{OD}{OI} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{a\sqrt{30}}{10}} = \dfrac{\sqrt{15}}{3}; \tan \widehat{BID} = \dfrac{2\tan \widehat{OID}}{1 - \tan^2 \widehat{OID}} = -\sqrt{15} < 0$ nên $\widehat{BID}$ là góc tù.

Vậy $((SBC),(SCD)) = (ID, IB) = 180^\circ - \widehat{BID} \approx 75,52^\circ$.

Câu 4: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A, biết $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và $\left((ACB'),(ABC)\right) = 60^\circ$. Khi đó:

a) $A'A \perp (ABC)$

b) $\left((ACB'),(ABB'A')\right) = 60^\circ$.

c) $\left((ACC'A'),(BCC'B')\right) = 30^\circ$

d) Tổng diện tích ba mặt bên của hình lăng trụ đã cho bằng $(3\sqrt{3}+3)a^2$

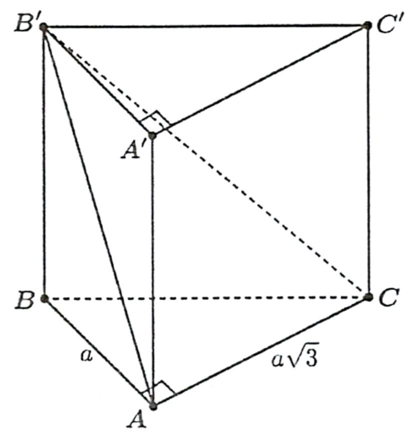
Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Đúng

Vì $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên $A'A \perp (ABC) \Rightarrow A'A \perp AC$.

Mặt khác $AB \perp AC$.

Vì vậy $AC \perp (ABB'A')$, mà $AC \subset (ACB')$ nên $(ACB') \perp (ABB'A')$.



Ta có: $\begin{cases} CC' = (ACC'A') \cap (BCC'B') \\ AC \perp CC', BC \perp CC' \\ AC \subset (ACC'A'), BC \subset (BCC'B') \end{cases}$

$\Rightarrow \left((ACC'A'),(BCC'B')\right) = (AC, BC) = \widehat{ACB}$

Tam giác ABC vuông tại A có: $\tan \widehat{ACB} = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{ACB} = 30^\circ$.

Vậy $\left((ACC'A'),(BCC'B')\right) = \widehat{ACB} = 30^\circ$.

Ta có: $\begin{cases} AC = (ACB') \cap (ABC) \\ AB \perp AC, AB' \perp AC \\ AB \subset (ABC), AB' \subset (ACB') \end{cases}$

$\Rightarrow \left((ACB'),(ABC)\right) = (AB', AB) = \widehat{BAB'} = 60^\circ$.

Tam giác ABB' vuông tại B có:

$BB' = AB \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Tam giác ABC vuông tại A có:

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a$.

Tổng diện tích các mặt bên của hình lăng trụ:

$a \cdot a\sqrt{3} + 2a \cdot a\sqrt{3} + a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3} = (3\sqrt{3} + 3)a^2$

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Khi đó:

a) $((SAC),(SBD)) = 90^\circ$

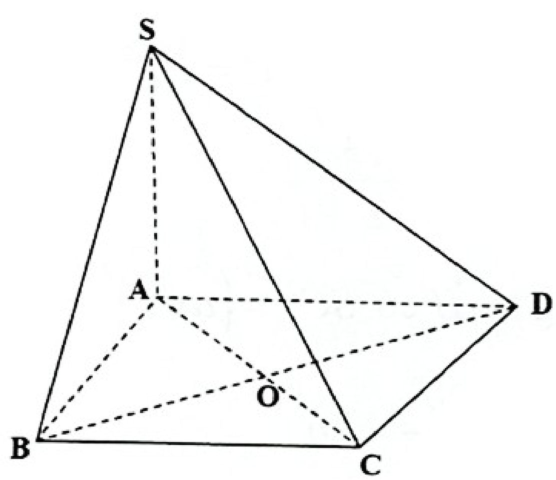
b) $((SAC),(SBD)) = 45^\circ$.

c) $(SAB) \perp (SBC)$.

d) $(SCD) \perp (SAD)$.

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Đúng



$$\begin{cases} BD \perp (SAC) \\ BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow (SAC) \perp (SBD).$$

$$\begin{cases} BC \perp (SAB) \\ BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \perp (SBC).$$

$$\begin{cases} CD \perp (SAD) \\ CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SAD) \perp (SCD).$$

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H và I lần lượt là trung điểm của AB và BC. Khi đó:

a) $SH \perp (ABCD)$

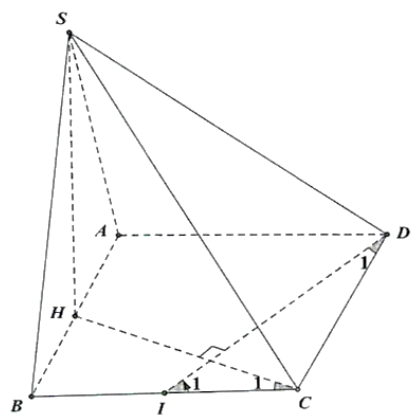
b) $AD \perp (SAB)$

c) $\left((SAB),(SAD)\right) = 90^\circ$

d) $(SHC) \perp (SDI)$

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Đúng



Ta có $\begin{cases} (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ (SAB) \perp (ABCD) \\ SH \subset (SAB), SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Ta có $\begin{cases} AD \perp AB(gt) \\ AD \perp SH(SH \perp (ABCD)) \\ AB, SH \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB),$

mà $AD \subset (SAD) \Rightarrow (SAD) \perp (SAB)$.

Ta lại có: $\Delta BCH = \Delta CDI$ (c.g.c) $\Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{D}_1$, mà $\hat{D}_1 + \hat{I}_1 = 90^\circ \Rightarrow \hat{C}_1 + \hat{I}_1 = 90^\circ$

$\Rightarrow HC \perp DI$

$$\begin{cases} DI \perp CH \\ DI \perp SH\,(SH \perp (ABCD)) \\ CH, SH \subset (SHC) \end{cases} \Rightarrow DI \perp (SHC), \text{ mà } DI \subset (SDI)$$

Như vậy

$\Rightarrow (SDI) \perp (SHC)$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A và $I \perp (ABC)$. Khi đó:

a) $(SAC) \perp (ABC)$.

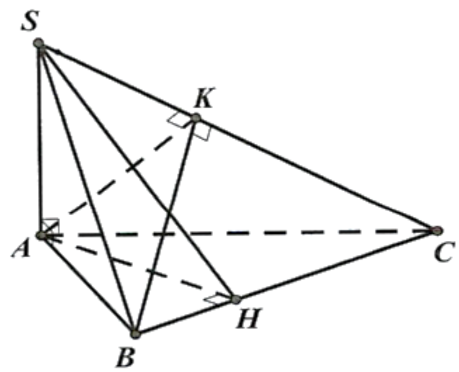
b) Gọi H là hình chiếu của A trên BC. Khi đó: $(SAH) \perp (SBC)$.

c) $(AB, SC) = 60^\circ$

c) Gọi K là hình chiếu của A trên SC. Khi đó: $((ABK),(SBC)) = 60^\circ$.

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Sai



Chứng minh: $(SAC) \perp (ABC)$.

$$\begin{cases} SA \perp (ABC) \\ (SAC) \supset SA \end{cases} \Rightarrow (SAC) \perp (ABC)$$

Dễ thấy $\begin{cases} BC \perp (SAH) \\ (SBC) \supset BC \end{cases} \Rightarrow (SBC) \perp (SAH)$.

Do $AK \perp SC$ và $AB \perp (SAC) \Rightarrow AB \perp SC$, nên $SC \perp (ABK)$.

Vậy ta có $\begin{cases} SC \perp (ABK) \\ (SBC) \supset SC \end{cases} \Rightarrow (SBC) \perp (ABK)$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCDs$ là hình thoi tâm O cạnh a, góc $ABC = 60^\circ$. Tam giác SAC đều, tam giác SBD cân tại S. Khi đó:

a) $(SAC) \perp (ABCD)$.

b) $((SBD),(ABCD))=60^{\circ}$

c) $SO=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

d) $((SCD),(ABCD))\approx 60,43^{\circ}$

Lời giải

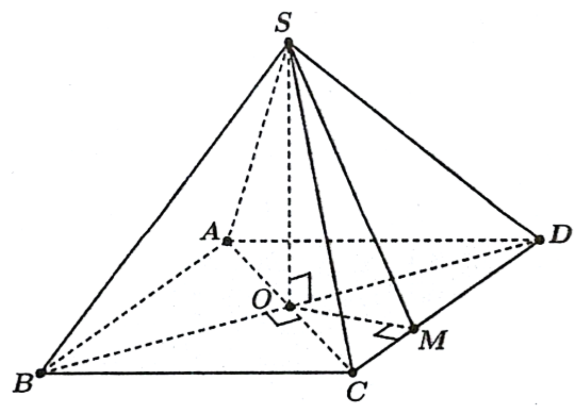
a) Đúng b) Sai c) Sai d) Sai

Tam giác SAC đều có O là trung điểm AC nên $SO\perp AC(1)$;

tam giác SBD cân tại S có O là trung điểm BD nên $SO\perp BD$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $SO\perp(ABCD)$.

Mặt khác SO chứa trong hai mặt phẳng $(SAC),(SBD)$ nên $(SAC)\perp(ABCD)$, $(SBD)\perp(ABCD)$.



Các tam giác ABC, ACD lần lượt cân tại B và D, mà $\widehat{ABC}=\widehat{ADC}=60^{\circ}$. nên hai tam giác ABC, ACD đều cạnh a.

Kẻ đường cao OM của tam giác OCD.

Ta có: $\begin{cases} CD\perp OM \\ CD\perp SO \end{cases}\Rightarrow CD\perp(SOM)\Rightarrow CD\perp SM$.

Khi đó:

$$\begin{cases} (SCD)\cap(ABCD)=CD \\ OM\perp CD, SM\perp CD \\ OM\subset(ABCD), SM\subset(SCD) \end{cases}\Rightarrow ((SCD),(ABCD))=(SM,OM)=\widehat{SMO}.$$

Tam giác SAC đều nên $SO=\dfrac{AC\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có: $OC=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{a}{2}, OD=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác OCD vuông tại O, đường cao OM nên $\frac{1}{OM^2}=\frac{1}{OC^2}+\frac{1}{OD^2}$

$\Rightarrow OM=\frac{OC\cdot OD}{\sqrt{OC^2+OD^2}}=\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Tam giác SOM vuông tại O có: $\tan\widehat{SMO}=\frac{SO}{OM}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{4}}=2\Rightarrow\widehat{SMO}\approx 63,43^\circ$.

Vậy $((SCD),(ABCD))=\widehat{SMO}\approx 63,43^\circ$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD), SA=a\sqrt{2}$, $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D với $AB=2a, AD=DC=a$. Khi đó:

a) $BC\perp SC$

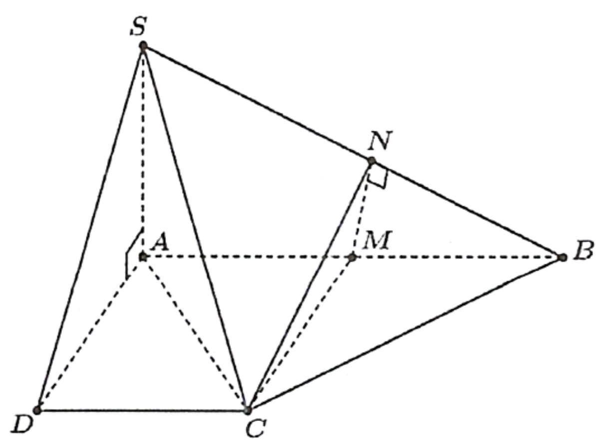
b) $((SBC),(ABC))=45^\circ$

c) $SC=2a, BC=a\sqrt{3}$

d) $((SBC),(SAB))=60^\circ$

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Đúng



Gọi M là trung điểm AB, khi đó $AMCD$ là hình vuông, đường chéo $AC=a\sqrt{2}$.

Tam giác ACB có trung tuyến CM thoả mãn $CM=\frac{AB}{2}$ nên ACB là tam giác vuông tại C.

Ta có: $\begin{cases} AC\perp BC \\ SA\perp BC(\text{ do } SA\perp(ABCD)) \end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAC)\Rightarrow BC\perp SC$.

Khi đó: $\begin{cases}(SBC)\cap(ABC)=BC\\ AC\perp BC, SC\perp BC\\ AC\subset(ABC), SC\subset(SBC)\end{cases}\Rightarrow((SBC),(ABC))=(SC,AC)=\widehat{SCA}$.

Tam giác SAC vuông tại A có: $\tan\widehat{SCA}=\dfrac{SA}{AC}=\dfrac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}}=1\Rightarrow\widehat{SCA}=45^\circ$.

Vậy $((SBC),(ABC))=\widehat{SCA}=45^\circ$.

Trong tam giác SAB, kẻ MN vuông góc với SB tại N.

Ta có: $\begin{cases}CM\perp AB\\ CM\perp SA\end{cases}\Rightarrow CM\perp(SAB)\Rightarrow CM\perp SB$.

Vì $\begin{cases}SB\perp CM\\ SB\perp MN\end{cases}\Rightarrow SB\perp(CMN)\Rightarrow SB\perp CN$.

Khi đó: $\begin{cases}(SBC)\cap(SAB)=SB\\ CN\perp SB, MN\perp SB\\ CN\subset(SBC), MN\subset(SAB)\end{cases}$

$\Rightarrow((SBC),(SAB))=(CN,MN)=\widehat{CNM}$

Ta có: $SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=2a, BC=\sqrt{BM^2+CM^2}=a\sqrt{2}$.

Tam giác SBC vuông tại C có: $\dfrac{1}{CN^2}=\dfrac{1}{SC^2}+\dfrac{1}{BC^2}\Rightarrow CN=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác CMN vuông tại M có: $\sin\widehat{CNM}=\dfrac{CM}{CN}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\widehat{CNM}=60^\circ$.

Vậy $((SBC),(SAB))=\widehat{CNM}=60^\circ$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AB=SB=a, SO=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Khi đó:

a) $AC\perp(SBD)$

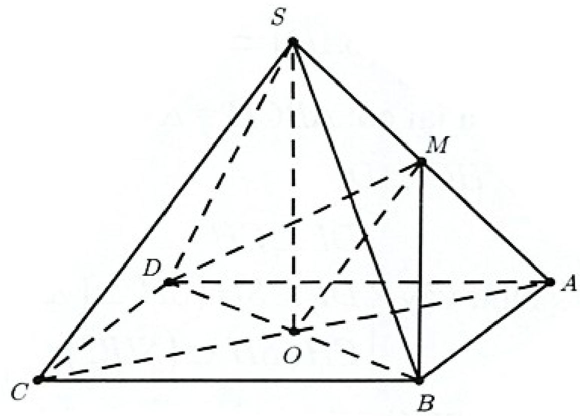
b) $((SAC),(SBD))=60^\circ$.

c) $BD=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

d) $(SAB)\perp(SAD)$.

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Đúng



a) Chứng minh $(SAC)\perp(SBD)$.

Dễ thấy $SO\perp(ABCD)\Rightarrow SO\perp AC(1)$.

Lại có $ABCD$ là hình thoi, nên $AC\perp BD(2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $AC\perp(SBD)$.

Vậy $\begin{cases}AC\perp(SBD)\\(SAC)\supset AC\end{cases}\Rightarrow(SAC)\perp(SBD)$.

Do $SO\perp BD\Rightarrow SD=SB=a$.

Gọi M là trung điểm của SA. Ta có ΔABD cân tại B nên $BM\perp SA, \Delta ADS$ cân tại D nên $DM\perp SA$.

Khi đó góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) bằng hoặc bù với góc $\widehat{BMD}$.

Ta có $OB=\sqrt{SB^2-SO^2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}\Rightarrow BD=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Do $OM\perp SA\Rightarrow\Delta SOA$ vuông cân tại $O\Rightarrow SA=SO\sqrt{2}=\frac{2a\sqrt{3}}{3}\Rightarrow AM=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Khi đó $DM=BM=\sqrt{AB^2-MA^2}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Lại có $BD^2=BM^2+DM^2=\frac{4}{3}\Rightarrow\Delta MBD$ vuông cân tại M.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) bằng 90°.

Suy ra $(SAB)\perp(SAD)$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại B, SA vuông góc với đáy, M là trung điểm của AC. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $(SAB)\perp(SAC)$.

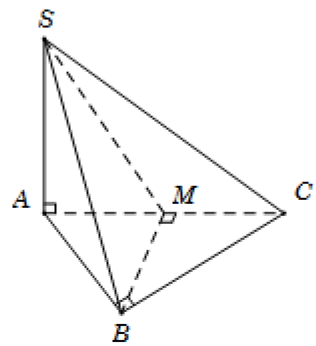
b) $BM\perp AC$.

c) $(SAB)\perp(SBC)$.

d) $(SBM)\perp(SAC)$.

Lời giải

a) Sai b) Đúng c) Đúng d) Đúng



Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ đều. Gọi là O giao điểm của AC và BD. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $(SAC)\perp(SBD)$.

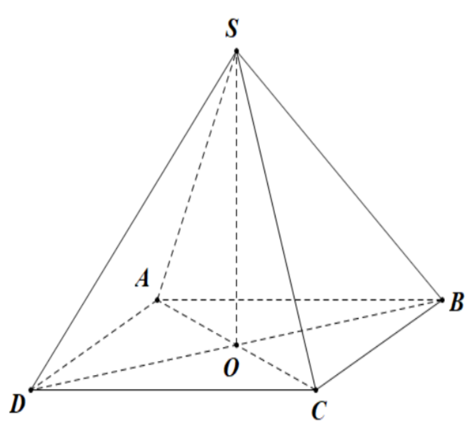
b) $SO\perp(ABCD)$.

c) $(SBD)\perp(ABCD)$.

d) $CD\perp(SAD)$.

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Đúng d) Sai



Do $\begin{cases} AC \perp BD \\ SO \perp BD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BD \perp (SAC) \\ BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow (SAC) \perp (SBD)$, đúng

Do hình chóp $S.ABCD$ đều nên $SO \perp (ABCD)$. đúng

Do $\begin{cases} SO \perp (ABCD) \\ SO \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow (SBD) \perp (ABCD)$, đúng

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $(SCD) \perp (SAD)$.

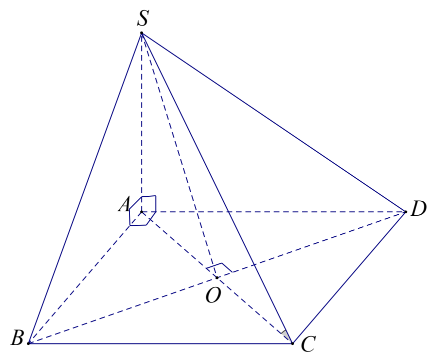
b) $(SDC) \perp (SAO)$.

c) $(SBC) \perp (SAB)$.

d) $(SBD) \perp (SAC)$.

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Đúng



$(SCD) \perp (SAD)$ vì $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$.

$(SBC) \perp (SAB)$ vì $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

$(SBD) \perp (SAC)$ vì $\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh bên SA vuông góc với đáy Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $(SBC) \perp (SAB)$.

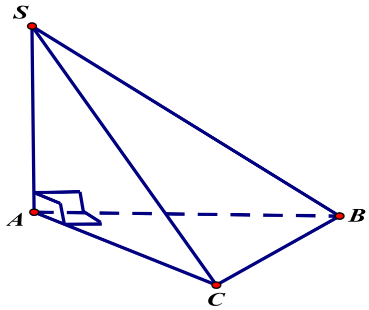
b) $(ABC) \perp (SBC)$.

c) $(SAC) \perp (SBC)$.

d) $(SAC)\perp(SAB)$.

Lời giải

a) Sai b) Sai c) Sai d) Đúng



$\begin{cases} AC\perp AB \\ AC\perp SA \end{cases}$

$\Rightarrow AC\perp(SAB)$

$\begin{cases} AC\perp(SAB) \\ AC\subset(SAC) \end{cases}$

$\Rightarrow (SAC)\perp(SAB)$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $(SBC)\perp(SAB)$.

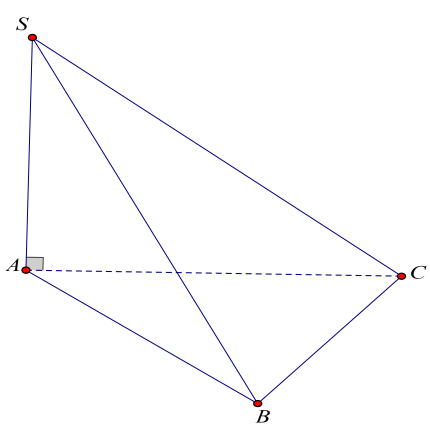
b) $(SAC)\perp(SAB)$.

c) $(SAC)\perp(SBC)$.

d) $(ABC)\perp(SBC)$.

Lời giải

a) Sai b) Đúng c) Sai d) Sai



Ta có:

$\left.\begin{array}{l} SA \perp (ABC) \\ AC \subset (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow AC \perp SA$. Mà $AC \perp AB$ (do ABC là tam giác vuông tại A).

$\left\{\begin{array}{l} AC \perp (SAB) \\ AC \subset (SAC) \end{array}\right. \Rightarrow (SAC) \perp (SAB)$.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm AC. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $BM \perp AC.$

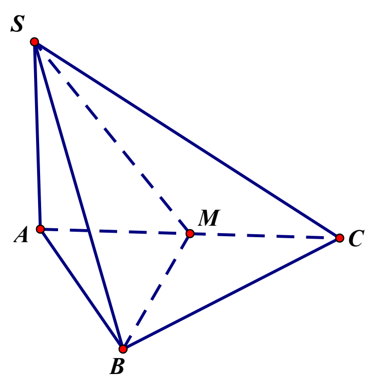
b) $(SBM) \perp (SAC).$

c) $(SAB) \perp (SBC).$

d) $(SAB) \perp (SAC).$

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Đúng d) Sai



Ta có:

+) $\left.\begin{array}{l} BM \perp AC \\ BM \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow BM \perp (SAC)$ do đó **a;b** đúng.

+) $\left.\begin{array}{l} BC \perp BA \\ BC \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$ do đó **c** đúng.

Câu 17: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm I, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $(SCD) \perp (SAD)$.

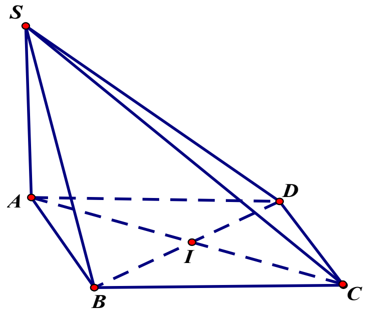
b) $(SDC) \perp (SAI)$.

c) $(SBC) \perp (SAB)$.

d) $(SBD) \perp (SAC)$

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Đúng



+ Ta có: $(SCD)\perp(SAD)$ vì $\begin{cases} CD\perp AD \\ CD\perp SA \end{cases} \Rightarrow CD\perp(SAD)$

+ $(SBC)\perp(SAB)$ vì $\begin{cases} BC\perp SA \\ BC\perp AB \end{cases} \Rightarrow BC\perp(SAB)$

+ $(SBD)\perp(SAC)$ vì $\begin{cases} BD\perp SA \\ BD\perp AC \end{cases} \Rightarrow BD\perp(SAC)$.

+ Không có đường thẳng nào nằm trong mp (SDC) vuông góc với (SAI).

Câu 18: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh bên SA vuông góc với đáy Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $(SBC)\perp(SAB)$.

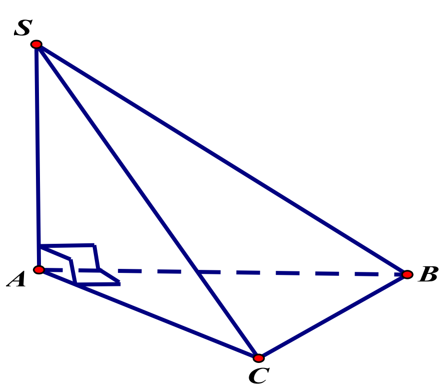
b) $(SAC)\perp(SAB)$.

c) $(SAC)\perp(SBC)$.

d) $(ABC)\perp(SBC)$.

Lời giải

a) Sai b) Đúng c) Sai d) Sai



$$\begin{cases} AC \perp AB \\ AC \perp SA \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SAB)$$.

Ta có:

$$\begin{cases} AC \perp (SAB) \\ AC \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow (SAC) \perp (SAB)$$.

Câu 19: Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) cùng vuông góc với (DBC). Gọi BE và DF là hai đường cao của tam giác BCD, DK là đường cao của tam giác ACD. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $(ABE) \perp (ADC)$**.**

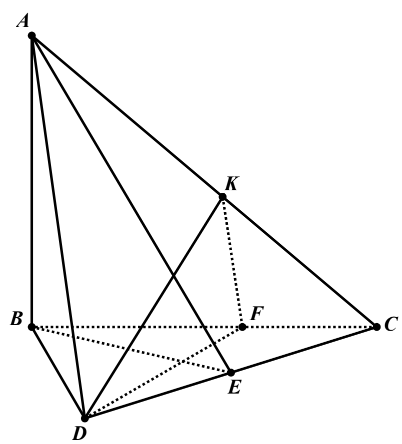
b) $(ABD) \perp (ADC)$**.**

c) $(ABC) \perp (DFK)$**.**

d) $(DFK) \perp (ADC)$**.**

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Đúng



Vì hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) cùng vuông góc với (DBC) nên $AB \perp (DBC)$.

Ta có:

+ $\begin{cases} CD \perp BE \\ CD \perp AB \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABE) \Rightarrow (ABE) \perp (ADC)$ nên **a** đúng.

+ $\begin{cases} DF \perp BC \\ DF \perp AB \end{cases} \Rightarrow DF \perp (ABC) \Rightarrow (ABC) \perp (DFK)$ nên **c** đúng.

+ $\begin{cases} AC \perp DK \\ AC \perp DF \end{cases} \Rightarrow AC \perp (DFK) \Rightarrow (DFK) \perp (ADC)$ nên **d** đúng.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, SA vuông góc đáy. Gọi M là trung điểm AC. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $BM \perp AC$.

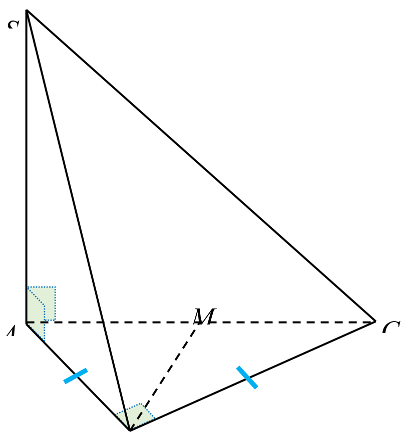
b) $(SBM) \perp (SAC)$.

c) $(SAB) \perp (SBC)$.

d) $(SAB) \perp (SAC)$.

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Đúng d) Sai



- $\triangle ABC$ vuông cân tại B $\Rightarrow$ $BM \perp AC$ (1). Do đó đáp án a đúng.
- $SA \perp (ABC)$ $\Rightarrow$ $SA \perp BM$ (2)

Từ (1) và (2): $BM \perp (SAC)$ $\Rightarrow$ $(SBM) \perp (SAC)$. Do đó đáp án b đúng.

- $SA \perp (ABC)$ $\Rightarrow$ $SA \perp BC$ (3)

$\triangle ABC$ vuông tại B $\Rightarrow$ $AB \perp BC$ (4)

Từ (3) và (4): $BC \perp (SAB)$ $\Rightarrow$ $(SBC) \perp (SAB)$. Do đó đáp án c đúng.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm cạnh AC. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $BM \perp AC$.

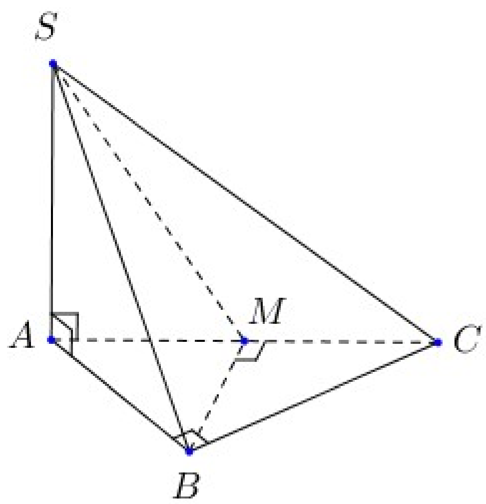
b) $(SBM) \perp (SAC)$.

c) $(SAB) \perp (SAC)$.

d) $(SAB) \perp (SBC)$.

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Đúng



● Tam giác ABC cân tại B có M là trung điểm $AC \Rightarrow BM \perp AC.$ Do đó a đúng.

● Ta có $\begin{cases} BM \perp AC \\ BM \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BM \perp (SAC) \Rightarrow (SBM) \perp (SAC)$. Do đó b đúng.

● Ta có $\begin{cases} BC \perp BA \\ BC \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$. Do đó d đúng.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C. Tam giác SAC đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi H là trung điểm cạnh AC, K là hình chiếu của H trên AB. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $(SAC) \perp (SBC).$

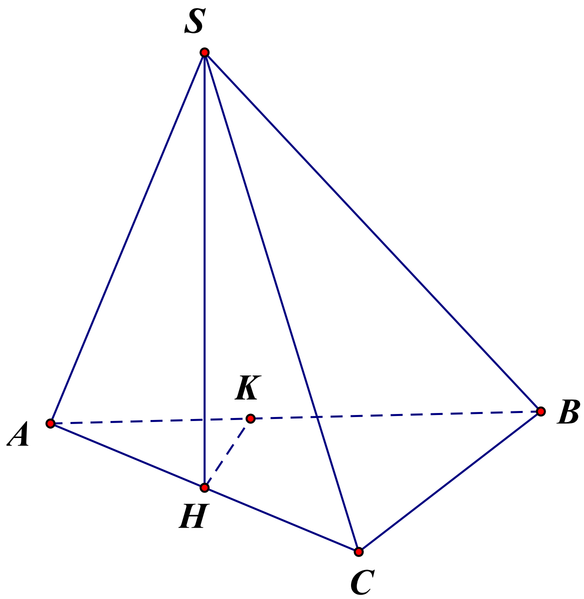
b) $(SHK) \perp (ABC).$.

c) $(SAB) \perp (SHK).$

d) $(SAB) \perp (SAC).$

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Đúng d) Sai



● Ta có: $\begin{cases} SH \perp (ABC) \\ SH \subset (SHK) \end{cases} \Rightarrow (SHK) \perp (ABC).$ Do đó b đúng.

● Ta có $\begin{cases} (SAC) \cap (ABC) = AC \\ (SAC) \perp (ABC) \\ BC \perp AC \\ BC \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow (SBC) \perp (SAC)$. Do đó a đúng.

● Ta có $\begin{cases} AB \perp HK \\ AB \perp SH \ (\text{do } SH \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHK) \Rightarrow (SAB) \perp (SHK)$. Do đó c đúng.

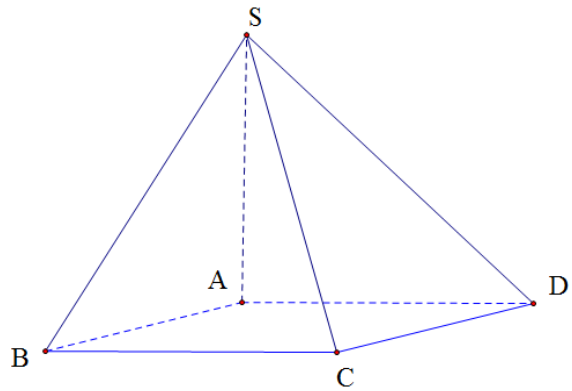
Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $SA \perp (ABCD)$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $(SBC) \perp (SAB)$.

b) $(SCD) \perp (SAD)$.

c) $(SAC) \perp (SBD)$.

d) $(SBC) \perp (SCD)$.



Lời giải

a) Sai b) Sai c) Đúng d) Sai

Ta có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$. (1)

Do tứ giác $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BD \perp (SAC) \Rightarrow (SBD) \perp (SAC)$.

Câu 24: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $(ABCD) \perp (AA'C'C)$.

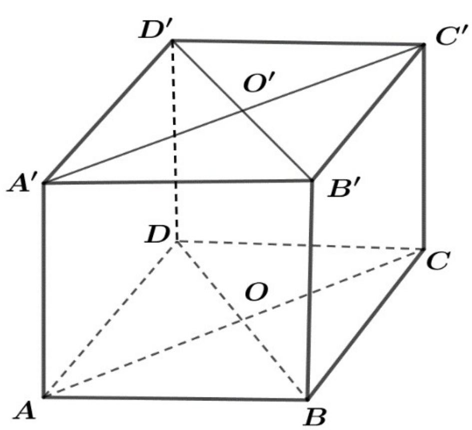
b) $(AA'C'C) \perp (BB'D'D)$.

c) $(AA'B'B) \perp (BB'C'C)$.

d) $(AA'B'B) \perp (BB'D'D)$.

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Đúng d) Sai



+) $\begin{cases} AA' \perp (ABCD) \\ AA' \subset (AA'C'C) \end{cases} \Rightarrow (ABCD) \perp (AA'C'C)$ Þ khẳng định a đúng.

+) $\begin{cases} BD \perp (AA'C'C) \\ BD \subset (BB'D'D) \end{cases} \Rightarrow (BB'D'D) \perp (AA'C'C)$ Þ khẳng định b đúng.

+) $\begin{cases} AB \perp (BB'C'C) \\ AB \subset (AA'C'C) \end{cases} \Rightarrow (AA'B'B) \perp (BB'C'C)$ Þ khẳng định c đúng.

+) $((AA'B'B),(BB'D'D)) = (AB, BD) = \widehat{ABD} = 45^0$ Þ khẳng định d sai.

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông và có mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng

đáy, tam giác SAB là tam giác đều. Gọi I và E lần lượt là trung điểm của cạnh AB và BC; H là hình chiếu vuông góc của I lên cạnh SC. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Mặt phẳng (SAI) vuông góc với mặt phẳng (SBC).

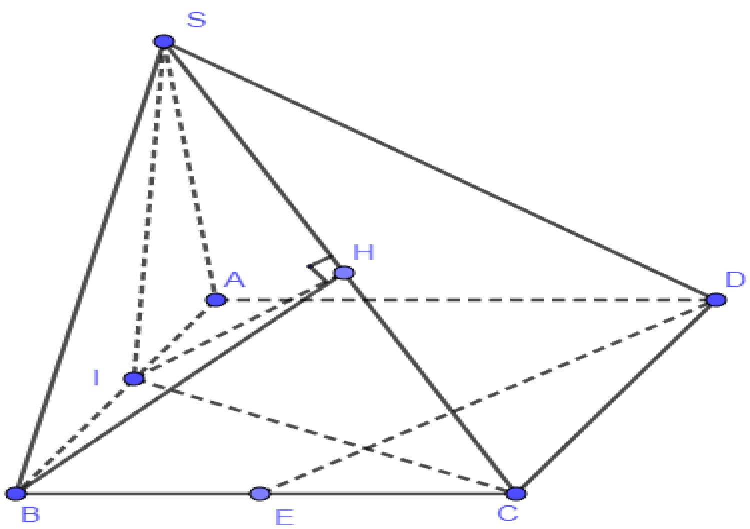
b) Góc giữa hai mặt phẳng (SIC) và (SBC) là góc giữa hai đường thẳng IH và BH.

c) Mặt phẳng (SIC) vuông góc với mặt phẳng (SDE).

d) Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SIC) là góc $\widehat{BIC}$.

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Đúng



Ta có

$$\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\(SAB)\cap(ABCD)=AB\\SI\perp AB\\SI\subset(SAB)\end{cases}\Rightarrow SI\perp(ABCD)\Rightarrow SI\perp BC$$

Khi đó

$$\begin{cases}BC\perp SI\\BC\perp AB\\SI\cap AB=I\\BC\subset(SBC)\end{cases}\Rightarrow(SBC)\perp(SAI)$$

Ta có

$\Delta BIC=\Delta CED\Rightarrow\widehat{BIC}=\widehat{CED}$. Mà $\widehat{BIC}+\widehat{BCI}=90^0\Rightarrow\widehat{CED}+\widehat{BCI}=90^0\Rightarrow IC\perp ED$

Do đó, ta có $\begin{cases}ED\perp IC\\ED\perp SI\\ED\subset(SDE)\end{cases}\Rightarrow(SDE)\perp(SIC)$.

Ta có

$$\begin{cases}(SIC)\cap(SAB)=SI\\IC\subset(SIC),IC\perp SI\\AB\subset(SAB),AB\perp SI\end{cases}\Rightarrow\left(\widehat{(SIC),(SAB)}\right)=\left(\widehat{AB,IC}\right)=\widehat{BIC}$$.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại $B.$ Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm $AC.$ Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $(SAB)\perp(SBC).$

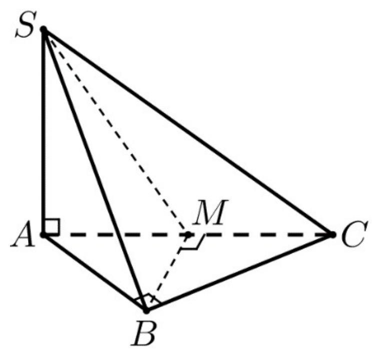
b) $(SAC)\perp(ABC).$

c) $(SBM)\perp(SMC).$

d) $(SAB)\perp(SAC).$

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Đúng d) Sai



+ Mệnh đề a đúng vì dễ dàng chứng minh được BC ^ (SAB).

+ Mệnh đề b đúng vì SA ^ (ABC).

+ Mệnh đề c đúng vì dễ dàng chứng minh được BM ^ (SAC).

+ Ta có: $(SAB)\cap(SAC)=SA$

$AB \perp SA$ (do $SA \perp (ABC)$

$AC \perp SA$ (do $SA \perp (ABC)$

$\Rightarrow \left(\widehat{(SAB);(SAC)}\right)=\left(\widehat{AB;AC}\right)=\widehat{BAC}<90^\circ$

Vậy mệnh đề d sai.

Câu 27: Cho tứ diện ABCD có $AB \perp (BCD)$. Trong ΔBCD vẽ các đường cao BE và DF cắt nhau ở O. Trong (ADC) vẽ $DK \perp AC$ tại K. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $(ADC)\perp(ABE)$.

b) $(ADC)\perp(DFK)$.

c) $(ADC)\perp(ABC)$.

d) $(BDC)\perp(ABE)$.

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Đúng

Ta có $\left.\begin{matrix} CD \perp BE \\ CD \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} CD \perp (ABE) \\ CD \subset (ADC) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (ADC)\perp(ABE)$.

Vậy **a** đúng.

$\left.\begin{matrix} DF \perp BC \\ DF \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} DF \perp (ABC) \\ AC \subset (ABC) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} DF \perp AC \\ DK \perp AC \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} AC \perp (DFK) \\ AC \subset (ADC) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (ADC)\perp(DFK)_s$

Vậy **b đúng**.

Ta có $\left.\begin{matrix} CD \perp BE \\ CD \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} CD \perp (ABE) \\ CD \subset (BDC) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (BDC) \perp (ABE)$.

Vậy **d đúng**.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $(SAC) \perp (SBD)$.

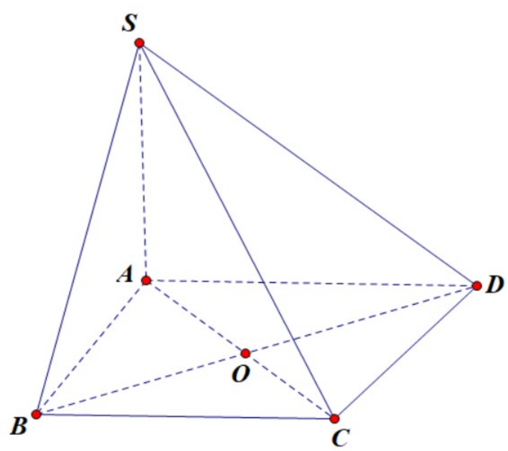
b) $(SAB) \perp (SBC)$.

c) $(SCD) \perp (SAD)$**.**

d) $(SBC) \perp (SCD)$**.**

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Đúng d) Sai



$$\begin{cases} BD \perp (SAC) \\ BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow (SAC) \perp (SBD).$$

$$\begin{cases} BC \perp (SAB) \\ BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \perp (SBC).$$

$$\begin{cases} CD \perp (SAD) \\ CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SAD) \perp (SCD).$$

•Dạng ❸: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(AC'D')$.

Trả lời: 60°

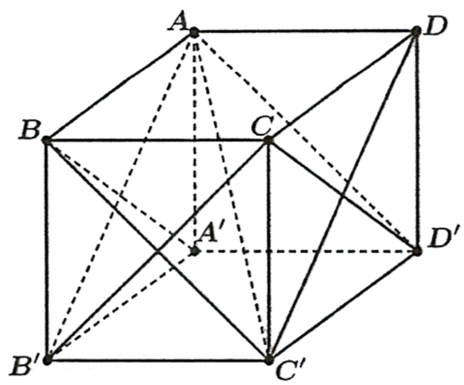
Lời giải

Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $BC \perp (ABB'A') \Rightarrow BC \perp AB'$. (1)

Mặt khác $A'B \perp AB'$ (hai đường chéo trong hình vuông). (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AB' \perp (BCD'A')$.

Mà $AB' \subset (ADC'B')$ nên $(ADC'B') \perp (BCD'A')$.



Nhận xét: $(AB'C') \equiv (ADC'B'), (AC'D') \equiv (ABC'D')$.

Ta có: $\begin{cases} CD' \perp C'D \\ CD' \perp AD \left(\text{do } AD \perp (CDD'C') \right) \end{cases} \Rightarrow CD' \perp (ADC'B')$.(3)

Tương tự: $\begin{cases} B'C \perp BC' \\ B'C \perp AB \left(\text{do } AB \perp (BCC'B') \right) \end{cases} \Rightarrow B'C \perp (ABC'D')$.(4)

Từ (3) và (4) suy ra $\left((AB'C'), (AC'D') \right) = (CD', CB')$.

Giả sử cạnh hình lập phương bằng a.

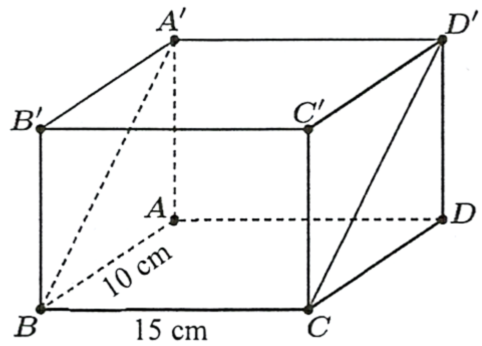
Ta có $CB' = CD' = B'D' = a\sqrt{2}$ (đường chéo trong hình vuông).

Suy ra tam giác $CB'D'$ đều.

Do vậy $\left((AB'C'), (AC'D') \right) = (CD', CB') = \widehat{B'CD'} = 60^\circ$.

Câu 2: Một khối gỗ có dạng hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Biết rằng $AB = 10\,cm, BC = 15\,cm$ và góc hai mặt phẳng $(BCD'A'), (ABCD)$ bằng 30°.

Tính tổng diện tích tất cả các mặt của khối gỗ đó.



Trả lời: $588,68cm^2$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} BC = (BCD'A') \cap (ABCD) \\ BC \perp AB \\ BC \perp A'B \left(\text{do } BC \perp (ABB'A')\right) \end{cases}$

$\Rightarrow \left((BCD'A'),(ABCD)\right) = (AB, A'B) = \widehat{ABA'} = 30^\circ$.

Tam giác $A'AB$ vuông tại A có: $\tan \widehat{ABA'} = \dfrac{AA'}{AB} \Rightarrow AA' = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}cm$.

Tổng diện tích của sáu mặt khối gỗ là:

$$2\left(10\cdot 15 + 10\cdot \frac{10\sqrt{3}}{3} + 15\cdot \frac{10\sqrt{3}}{3}\right) \approx 588,68cm^2.$$

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a, AD = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Hãy tính:

a) Góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$.

b) Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAD).

Trả lời: a) $((SCD),(ABCD)) = 30^\circ$; b) $((SBC),(SAD)) = 45^\circ$.

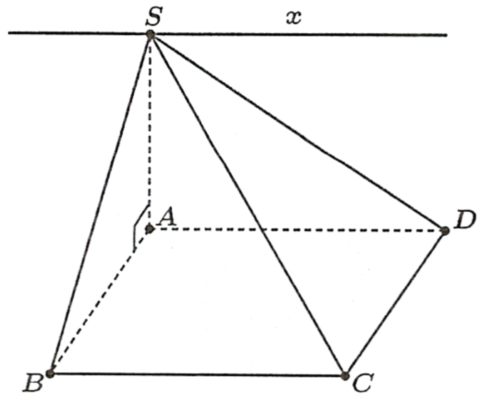
Lời giải

a) Ta có: $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA (\text{do } SA \perp (ABCD)) \end{cases}$

$\Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD.$

Khi đó: $\begin{cases} (SCD) \cap (ABCD) = CD \\ AD \perp CD, SD \perp CD \\ AD \subset (ABCD), SD \subset (SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow ((SCD),(ABCD)) = (SD, AD) = \widehat{SDA}$



Tam giác SAD vuông tại A có:

$$\tan \widehat{SDA} = \frac{SA}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{SDA} = 30^\circ$$

Vậy $((SCD),(ABCD)) = \widehat{SDA} = 30^\circ$.

b) Ta có: $\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBC) \\ AD // BC \\ AD \subset (SAD), BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = Sx // AD // BC$

Ta có: $\begin{cases} SA \perp AD \\ Sx // AD \end{cases} \Rightarrow SA \perp Sx$;

$$\begin{cases} Sx \perp SA \\ Sx \perp AB (\text{ do } Sx // AD, AD \perp AB) \end{cases} \Rightarrow Sx \perp (SAB) \Rightarrow Sx \perp SB.$$

Khi đó: $\begin{cases} (SBC) \cap (SAD) = Sx \\ SB \perp Sx, SA \perp Sx \\ SB \subset (SBC), SA \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow ((SBC),(SAD)) = (SB, SA) = \widehat{ASB}$.

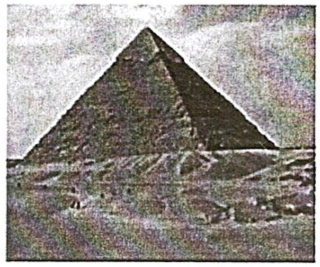
Tam giác SAB vuông cân tại A nên $\widehat{ASB} = 45^\circ$.

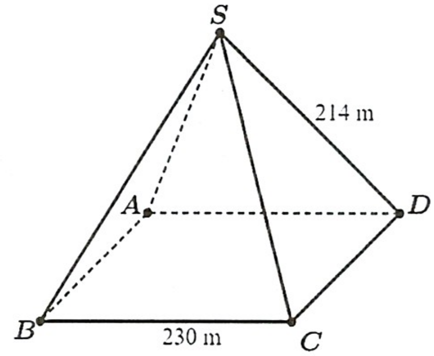
Vậy $((SBC),(SAD)) = \widehat{ASB} = 45^\circ$.

Câu 4: Kim tự tháp Kheops - Ai Cập có dạng hình chóp đều, đáy là hình vuông, mỗi cạnh bên của kim tự tháp dài $214m$, cạnh đáy của nó dài $230m$.

a) Tìm góc giữa mặt bên và mặt đáy của kim tự tháp (tính theo độ, kết quả được làm trong đến hàng phần chục).

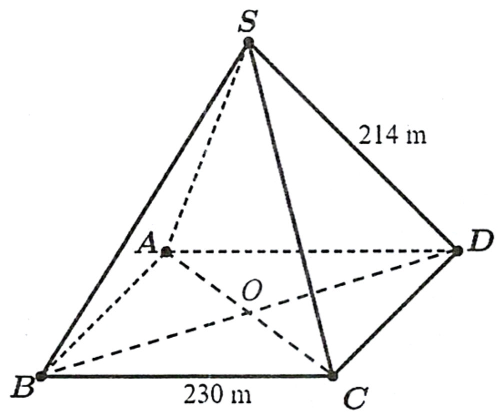
b) Cho biết thể tích của khối chóp là $V = \frac{1}{3}Sh$, trong đó S là diện tích mặt đáy, h là chiều cao của hình chóp. Tính thể tích của khối kim tự tháp trên (tính theo m^3, kết quả làm tròn đến hàng trăm).





Trả lời: a) $\approx 50,42^{\circ}$ b) $\approx 2452600\left(m^3\right).$

Lời giải



a) Giả sử kim tự tháp có đỉnh S và hình vuông đáy $ABCD$ tâm O. Gọi M là trung điểm CD.

OM là đường trung bình của tam giác BCD nên ta có:

$$\begin{cases} OM // BC \\ OM = \dfrac{BC}{2} = 115m \end{cases}$$

mà $BC \perp CD$ nên $OM \perp CD$. (1)

Vì $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có O là tâm của đáy nên $SO \perp (ABCD)$ $\Rightarrow SO \perp CD$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $CD \perp (SOM) \Rightarrow CD \perp SM$.

Mặt khác $CD = (SCD) \cap (ABCD)$.

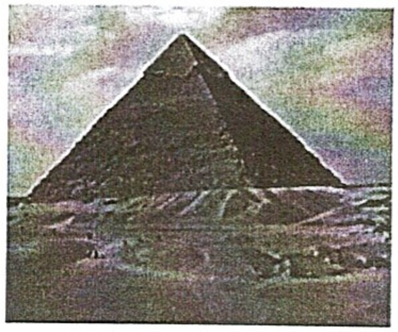
Vì vậy $((SCD),(ABCD)) = (SM,OM) = \widehat{SMO}.$

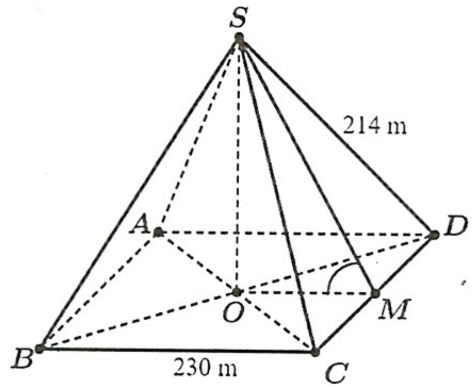
Vì BD là đường chéo hình vuông $ABCD$ nên $BD = 230\sqrt{2}\,m \Rightarrow OB = 115\sqrt{2}\,m$.

Suy ra $SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{19346}\,(m)$.

Tam giác SMO vuông tại O có:

$\tan \widehat{SMO} = \dfrac{SO}{OM} = \dfrac{\sqrt{19346}}{115} \Rightarrow \widehat{SMO} \approx 50,42^{\circ}$





b) Chiều cao của kim tự tháp: $h = SO = \sqrt{19346}\, m$.

Diện tích đáy kim tự tháp: $S = 230^2\, m^2$.

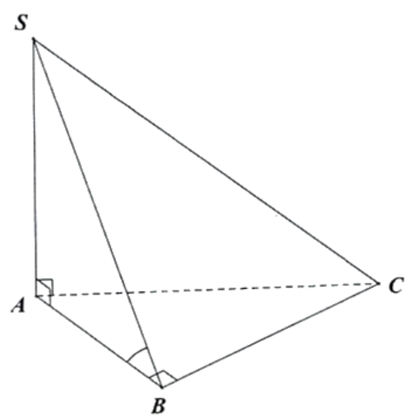
Thể tích của khối kim tự tháp là:

$V = \dfrac{1}{3}Sh = \dfrac{1}{3} \cdot 230^2 \cdot \sqrt{19346} \approx 2452600\left(m^3\right).$

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Xác định góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC)?

Trả lời: $(SB, AB) = \widehat{SBA}$

Lời giải



Do AB là hình chiếu của SB trên (ABC) mà $AB \perp BC \Rightarrow SB \perp BC$ (định lí 3 đường vuông góc)

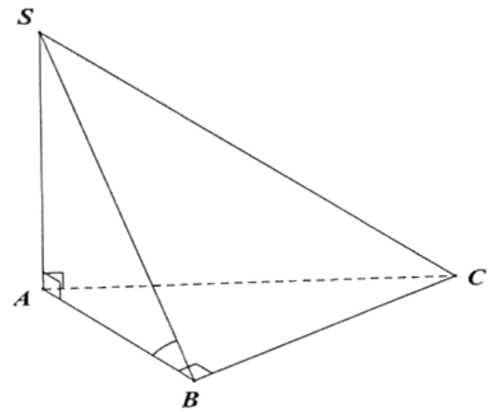
Ta có $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SB \subset (SBC); SB \perp BC \\ AB \subset (ABC); AB \perp BC \end{cases}$

Góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) là $(SB,AB)=\widehat{SBA}$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại $B, SA\perp(ABC)$, $AB=BC=a, SA=a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC)?

Trả lời: 60°

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} SA\perp BC(\text{ do } SA\perp(ABC)) \\ AB\perp BC(gt) \end{cases}$

$\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp SB$

Xét 2 mặt phẳng (SBC) và (ABC) ta có:

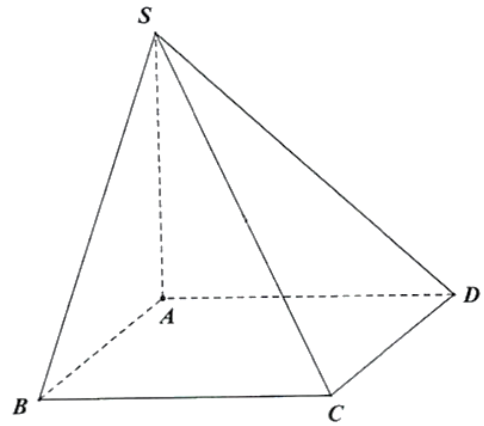
$$\begin{cases} (SBC)\cap(ABC)=BC \\ SB\perp BC, SB\subset(SBC) \\ AB\perp BC, AB\subset(ABC) \\ SB\cap AB=\{B\} \end{cases} \Rightarrow ((SBA),(ABC))=(SB,AB)=\widehat{SBA}$$.

Xét tam giác SAB vuông tại A, có $\tan\widehat{SBA}=\dfrac{SA}{AB}=\sqrt{3}\Rightarrow\widehat{SBA}=60^\circ$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Xác định góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$?

Trả lời: $\widehat{SDA}$

Lời giải



$(SCD) \cap (ABCD) = CD$

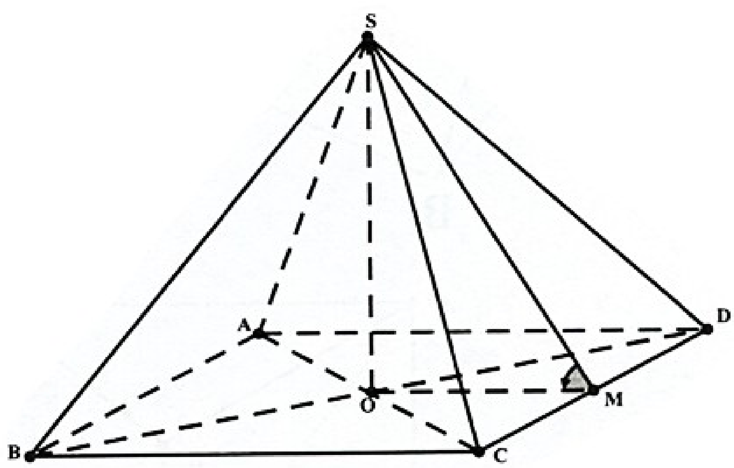
Ta có: $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp SD$

nên góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ là góc giữa AD và SD là góc $\widehat{SDA}$.

Câu 8: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng đáy $2a$, đường cao bằng $a\sqrt{2}$. Tính $\tan\varphi$ của góc giữa mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$.

Trả lời: $\tan\varphi = \sqrt{2}$

Lời giải



Gọi $O = AC \cap BD, M$ là trung điểm CD.

Ta có: $\begin{cases} (SCD) \cap (SCD) = CD \\ OM \perp CD \\ SM \perp CD \end{cases}$

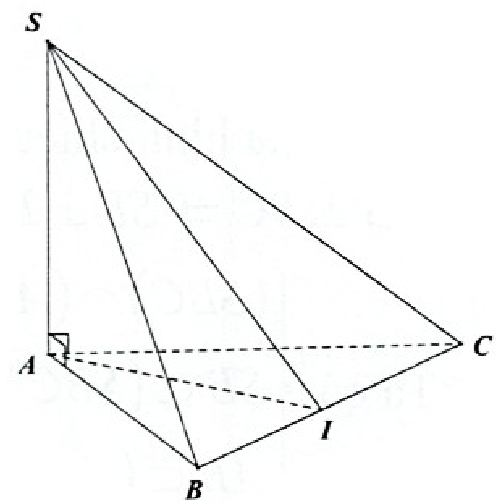
$\Rightarrow \varphi = (OM, SM) = \widehat{SMO}$.

Trong tam giác vuông SMO ta có: $\tan\widehat{SMO}=\dfrac{SO}{OM}=\dfrac{a\sqrt{2}}{a}=\sqrt{2}\Rightarrow\tan\varphi=\sqrt{2}$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC),SA=1$ và đáy ABC là tam giác đều với độ dài cạnh bằng 2. Tính góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC).

Trả lời: 30°.

Lời giải



Gọi I là trung điểm của BC. Khi đó, ta có

$$\left.\begin{matrix}BC\perp SA\\ BC\perp AI\end{matrix}\right\}\Rightarrow BC\perp(SIA)\Rightarrow BC\perp SI$$

Ta có

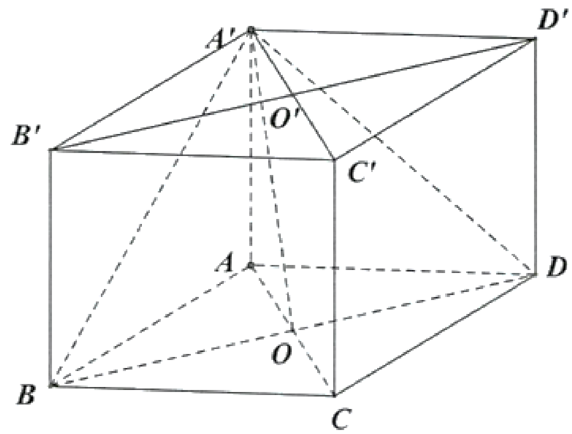
$$\begin{cases}(SBC)\cap(ABC)=BC\\ SI\perp BC\\ AI\perp BC\\ SI\subset(SBC)\\ AI\subset(ABC)\end{cases}\Rightarrow((SBC),(ABC))=(SI,AI)=\widehat{SIA}$$

$\tan\widehat{SIA}=\dfrac{SA}{IA}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Suy ra $\widehat{SIA}=30^{\circ}$ nên $((SBC),(ABC))=30^{\circ}$.

Câu 10: Cho hình lập phương $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có O,O' lần lượt là tâm của các hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Xác định góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$?

Trả lời: $\widehat{A'OA}$

Lời giải



Ta có $ABCD$ là hình vuông nên $AO \perp BD$, đồng thời $BD \perp A'A \Rightarrow BD \perp (A'AO) \Rightarrow BD \perp A'O$

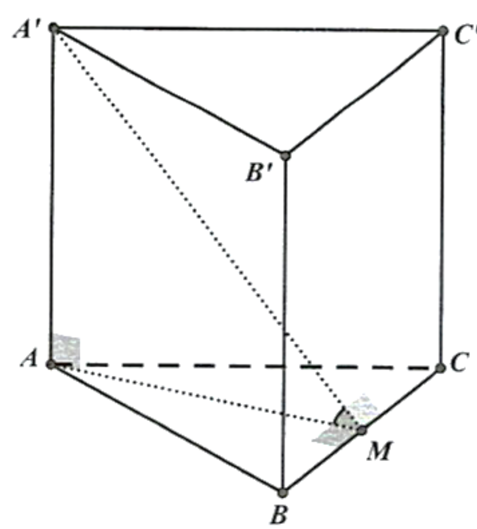
Ta có: $\begin{cases} (A'BD) \cap (ABCD) = BD \\ AO \perp BD \\ A'O \perp BD \end{cases}$

$\Rightarrow ((A'BD);(ABCD)) = (A'O;AO) = \widehat{A'OA}.$

Câu 11: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $\frac{3a}{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'C)$ và (ABC)?

Trả lời: $\varphi = 60^\circ$

Lời giải



Ta có $(ABC) \cap (A'BC) = BC$.

Gọi trung điểm của cạnh BC là M.

Tam giác ABC đều nên ta có: $AM \perp BC(1)$.

$ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đều nên $AA' \perp (ABC) \Rightarrow AA' \perp BC$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra $BC \perp (AA'M) \Rightarrow BC \perp A'M$.

Suy ra: góc φ giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) là góc giữa hai đường thẳng AM và $A'M$.

Vì tam giác $A'AM$ vuông tại A nên suy ra $\varphi = \widehat{A'MA}$.

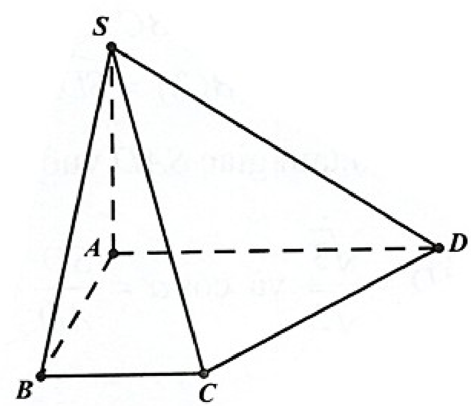
Ta có: $$\tan\varphi = \frac{AA'}{AM} = \frac{\frac{3a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}$$. Suy ra $\varphi = 60^\circ$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang vuông tại $A, AB = BC = a; AD = 2AB$ và hai mặt bên $(SAB),(SAD)$ cùng vuông góc với mặt đáy và $SA = a\sqrt{2}$.

Tính tang của góc φ giữa (SBC) và $(ABCD)$.

Trả lời: $\sqrt{2}$

Lời giải



(SBC) và $(ABCD)$.

$(SBC) \cap (ABCD) = BC, SB \perp BC, AB \perp BC$.

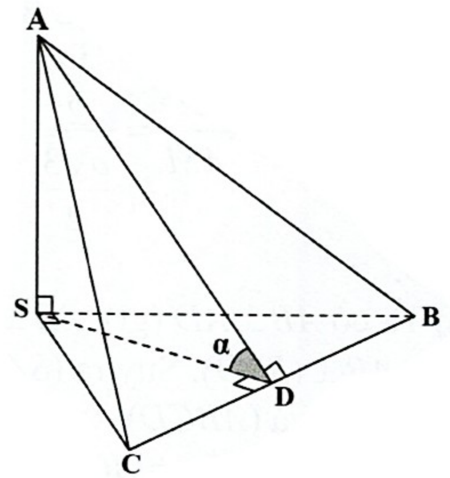
Góc cần tìm là $\widehat{SBA}$.

Trong tam giác vuông $$SBA: \tan\widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \sqrt{2}$$.

Câu 13: Cho tứ diện $S.ABC$ có các cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc và $SA = SB = SC = 1$. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

Trả lời: $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Lời giải



Gọi D là trung điểm cạnh BC.

Ta có $\begin{cases} SA \perp SB \\ SA \perp SC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SBC) \Rightarrow SA \perp BC$.

Mà $SD \perp BC$ nên $BC \perp (SAD)$.

$\Rightarrow ((SBC),(ABC)) = \widehat{SDA} = \alpha$.

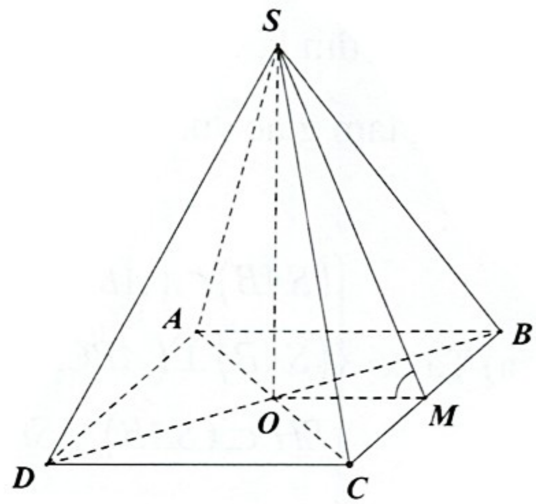
Khi đó tam giác SAD vuông tại S có $SD = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

$AD = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ và $\cos\alpha = \frac{SD}{AD} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$.

Trả lời: 60°

Lời giải



Do $SO \perp (ABCD)$ nên $SO \perp BC$.

Gọi M là trung điểm BC, suy ra $OM \perp BC$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp OM \\ BC \perp SO \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOM) \Rightarrow BC \perp SM$

Do đó $((SBC),(ABCD)) = (SM, OM)$

Xét tam giác vuông SOM, có $\tan \widehat{SMO} = \frac{SO}{OM} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SMO} = 60^\circ$.

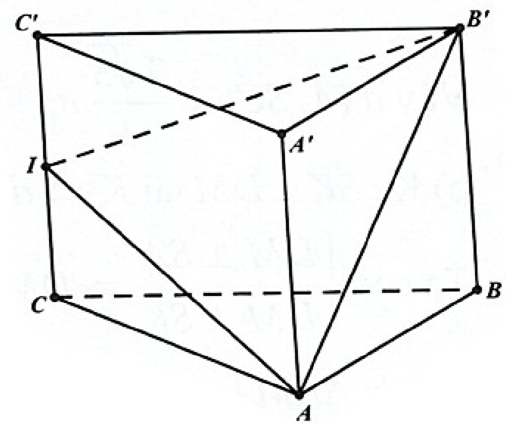
Vậy mặt phẳng (SBC) hợp với mặt đáy $(ABCD)$ một góc 60°.

Câu 15: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy ABC là tam giác cân $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ, BB' = a, I$ là trung điểm của CC'. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$.

Trả lời: $\cos\varphi = \frac{S_{ABC}}{S_{AB'I}} = \sqrt{\frac{3}{10}}$

Lời giải

Ta thấy tam giác ABC là hình chiếu vuông góc của tam giác $AB'I$ lên mặt phẳng (ABC). Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AB'). Theo công thức hình chiếu ta có: $\cos\varphi = \frac{S_{ABC}}{S_{AB'I}}$.



Ta có: $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin 120^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$AI = \sqrt{AC^2 + CI^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ $AB' = \sqrt{AB^2 + BB'^2} = a\sqrt{2}$, $IB' = \sqrt{B'C'^2 + IC'^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}$.

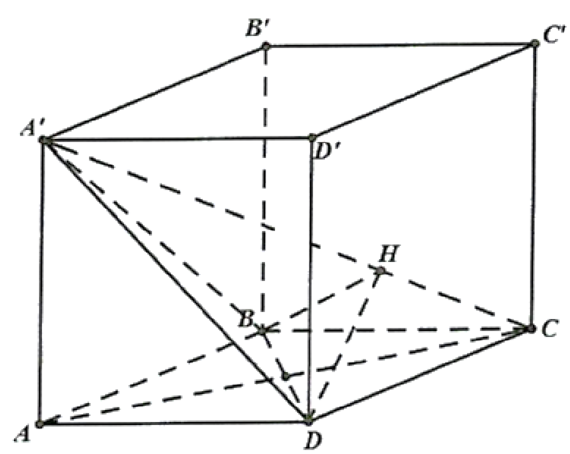
Suy ra: Tam giác $AB'I$ vuông tại A nên $S_{AB'I} = \frac{1}{2} \cdot AB' \cdot AI = \frac{a^2\sqrt{10}}{4}$.

Vậy $\cos\varphi = \frac{S_{ABC}}{S_{AB'I}} = \sqrt{\frac{3}{10}}$.

Câu 16: Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'BC'D'$ có cạnh bằng a. Tính số đo của góc giữa $(BA'C)$ và $(DA'C)$.

Trả lời: $((BA'C),(DA'C)) = 60^\circ$

Lời giải



+ Kẻ $BH \perp A'C, (H \in A'C) (1)$.

+ Mặt khác, ta có: $BD \perp AC$ (gt), $AA' \perp (ABCD)$
$\Rightarrow AA' \perp BD \Rightarrow BD \perp (ACA') \Rightarrow BD \perp A'C$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $A'C \perp (BDH) \Rightarrow A'C \perp DH$.

Do đó, $((BA'C),(DA'C)) = (HB,HD) = \widehat{BHD}$.

+ Xét tam giác vuông BCA' có:

$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{BA'^2} = \frac{3}{2a^2}$

$\Rightarrow BH = a\cdot\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow DH = a\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}$

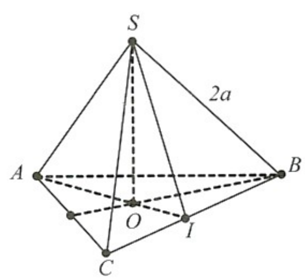
+ Ta có: $\cos\widehat{BHD} = \frac{2\cdot BH^2 - BD^2}{2BH^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BHD} = 120^\circ$.

Vậy $((BA'C),(DA'C)) = 60^\circ$.

Câu 17: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có đáy tâm O cạnh a, cạnh bên $2a$. Tính góc tạo bởi mặt bên và mặt đáy.

Trả lời: $81,4^\circ$

Lời giải



Ta chọn mặt bên đại diện là (SBC). Gọi I là trung điểm BC.

Ta có: $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ \text{Trong}(ABC), OI \perp BC \\ \text{Trong}(SBC), SI \perp BC \end{cases}$

$\Rightarrow ((SBC),(ABC)) = (OI,SI) = \widehat{SIO}$

Ta có: $OI = \frac{1}{3} \cdot AI = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}; OB = 2OI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$;

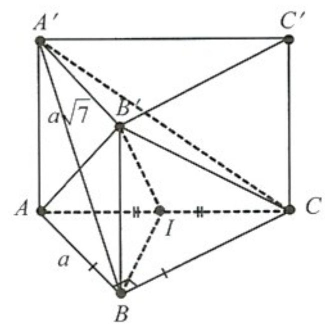
$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{33}}{3}a$.

Xét tam giác SOI vuông tại O: $\tan \widehat{SIO} = \frac{SO}{OI} = \frac{\frac{\sqrt{33}}{3}a}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} = 2\sqrt{11} \Rightarrow \widehat{SOI} \approx 81,4^\circ$.

Câu 18: Cho lăng trụ đứng $ABC \cdot A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại B với $AB = a$, $A'B = a\sqrt{7}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C),(ABC)$.

Trả lời: $73,9^\circ$

Lời giải



Gọi I là trung điểm AC.

Ta có: $\begin{cases} (AB'C) \cap (ABC) = AC \\ \text{Trong } (ABC), BI \perp AC \\ \text{Trong } (AB'C), B'I \perp AC \end{cases} \Rightarrow ((AB'C),(ABC)) = (B'I, BI) = \widehat{B'IB}$

Ta có: $BI = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}; BB' = \sqrt{(a\sqrt{7})^2 - a^2} = \sqrt{6}a$

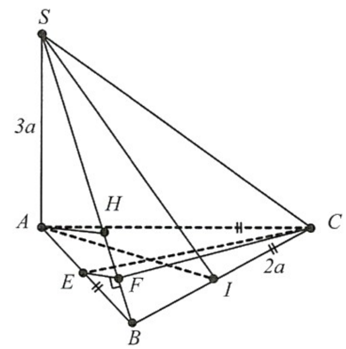
Xét $\Delta B'BI$ vuông tại B: $\tan \widehat{B'IB} = \frac{BB'}{BI} = \frac{\sqrt{6}a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \widehat{B'IB} \approx 73,9^\circ$.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy tam giác đều cạnh $2a$, hai mặtt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = 3a$.

Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAB).

Trả lời: $64,3^\circ$

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} CE \perp AB \\ CE \perp SA \end{cases} \Rightarrow CE \perp (SAB) \Rightarrow CE \perp SB$.

Kẻ $EF \perp SB \Rightarrow SB \perp CF \Rightarrow ((SBC),(SAB)) = (CF, EF) = \widehat{CFE}$

Ta có: $CE = \dfrac{2a\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}a$

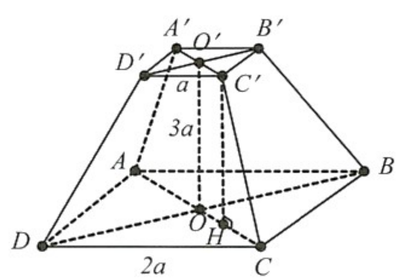
$$EF = \frac{1}{2}AH = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AB^2}}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(3a)^2}+\frac{1}{(2a)^2}}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}a$$

Xét ΔCEF vuông tại E: $\tan\widehat{CFE} = \dfrac{CE}{EF} = \dfrac{\sqrt{3}a}{\frac{3\sqrt{13}}{13}a} = \dfrac{\sqrt{39}}{3} \Rightarrow \widehat{CFE} \approx 64,3^\circ$.

Câu 20: Cho hình chóp cụt tứ giác đều có cạnh đáy nhỏ là a, cạnh đáy lớn là $2a$ và chiều cao là $3a$. Tính độ dài cạnh bên.

Trả lời: $\dfrac{\sqrt{38}}{2}a$

Lời giải



Kẻ $C'H \perp OC$

Ta có: $HC = OC - OH = \dfrac{2a\sqrt{2}}{2} - \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow C'C = \sqrt{C'H^2 + HC^2} = \sqrt{(3a)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{38}}{2}a$$

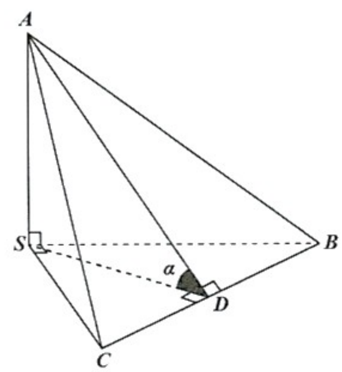
Vậy độ dài cạnh bên của hình chóp cụt đã cho là $\frac{\sqrt{38}}{2}a$.

Câu 21: Cho tứ diện $S.ABC$ có các cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc và $SA = SB = SC = 1$.

Tính cô-sin của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC)?

Trả lời: $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Lời giải



Gọi D là trung điểm cạnh BC.

Ta có $\begin{cases} SA \perp SB \\ SA \perp SC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SBC) \Rightarrow SA \perp BC.$ Mà $SD \perp BC$ nên $BC \perp (SAD)$.

$\Rightarrow ((SBC),(ABC)) = \widehat{SDA} = \alpha.$ Khi đó tam giác SAD vuông tại S

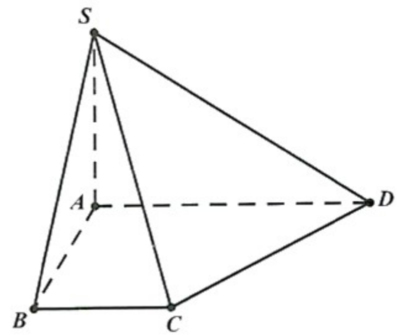
có $SD = \frac{1}{\sqrt{2}}; AD = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ và $\cos\alpha = \frac{SD}{AD} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang vuông tại $A, AB = BC = a; AD = 2AB$ và hai mặt bên $(SAB),(SAD)$ cùng vuông góc với mặt đáy và $SA = a\sqrt{2}$.

Tính tang của góc φ giữa (SBC) và $(ABCD)$.

Trả lời: $\sqrt{2}$

Lời giải



$(SBC)\cap(ABCD)=BC, SB\perp BC, AB\perp BC$.

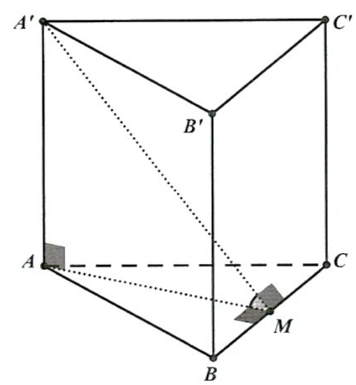
Góc cần tìm là $\widehat{SBA}$

Trong tam giác vuông $SBA:\tan\widehat{SBA}=\frac{SA}{AB}=\sqrt{2}$.

Câu 23: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $\frac{3a}{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC)?

Trả lời: $\varphi=60^\circ$

Lời giải



Ta có $(ABC)\cap(A'BC)=BC$.

Gọi trung điểm của cạnh BC là M.

Tam giác ABC dều nên ta có: $AM\perp BC$ (1).

$ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đều nên $AA'\perp(ABC)\Rightarrow AA'\perp BC$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra $BC\perp(AA'M)\Rightarrow BC\perp A'M$.

Suy ra: góc φ giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) là góc giữa hai đường thẳng AM và $A'M$. Vì tam giác $A'AM$ vuông tại A nên suy ra $\varphi=\widehat{A'MA}$.

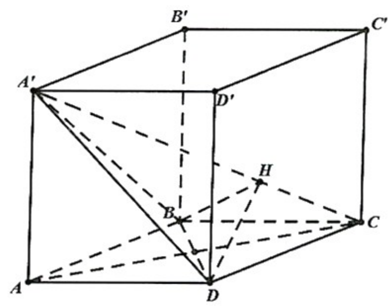
Ta có: $\tan\varphi = \dfrac{AA'}{AM} = \dfrac{\frac{3a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}$.

Suy ra $\varphi = 60^\circ$.

Câu 24: Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'BC'D'$ có cạnh bằng a. Tính số đo của góc giữa $(BA'C)$ và $(DA'C)$.

Trả lời: $((BA'C),(DA'C)) = 60^\circ$

Lời giải



+ Kẻ $BH \perp A'C, (H \in A'C) (1)$

+ Mặt khác, ta có: $BD \perp AC$ (gt),

$AA' \perp (ABCD) \Rightarrow AA' \perp BD$

$\Rightarrow BD \perp (ACA') \Rightarrow BD \perp A'C (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $A'C \perp (BDH) \Rightarrow A'C \perp DH$.

Do đó, $((BA'C),(DA'C)) = (HB, HD)$.

+ Xét tam giác vuông BCA' có:

$\dfrac{1}{BH^2} = \dfrac{1}{BC^2} + \dfrac{1}{BA'^2} = \dfrac{3}{2a^2} \Rightarrow BH = a \cdot \sqrt{\dfrac{2}{3}} \Rightarrow DH = a \cdot \sqrt{\dfrac{2}{3}}$

+ Ta có: $\cos\widehat{BHD} = \dfrac{2BH^2 - BD^2}{2BH^2} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BHD} = 120^\circ$.

Vậy $((BA'C),(DA'C)) = 60^\circ$.