

Bài 3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

PHẦN A. LÝ THUYẾT VÀ VÍ DỤ SÁCH GIÁO KHOA

1. ĐỊNH NGHĨA

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D .

- Số M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \leq M$ với mọi $x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$.

Kí hiệu $M = \max_{x \in D} f(x)$ hoặc $M = \max_D f(x)$.

- Số m được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \geq m$ với mọi $x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = m$.

Kí hiệu $m = \min_{x \in D} f(x)$ hoặc $m = \min_D f(x)$.

Chú ý

- Ta quy ước rằng khi nói giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ (mà không nói "trên tập D ") thì ta hiểu đó là giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên tập xác định của hàm số.

- Để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên tập D , ta thường lập bảng biến thiên của hàm số trên tập D để kết luận.

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Giải

Tập xác định của hàm số là $[-1; 1]$.

Cách 1. Sử dụng định nghĩa.

Ta có:

- $f(x) = \sqrt{1 - x^2} \geq 0$; dấu bằng xảy ra khi $1 - x^2 = 0$, tức là khi $x = -1$ hoặc $x = 1$.

Do đó $\min_{[-1; 1]} f(x) = f(-1) = f(1) = 0$.

- $f(x) = \sqrt{1 - x^2} \leq 1$; dấu bằng xảy ra khi $1 - x^2 = 1$, tức là khi $x = 0$. Do đó $\max_{[-1; 1]} f(x) = f(0) = 1$.

Cách 2. Sử dụng bảng biến thiên.

Với $x \in (-1; 1)$, ta có: $y' = \frac{(1 - x^2)'}{2\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}; y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Lập bảng biến thiên của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$:

x	-1	0	1		
y'		+	0	-	
y		0	1	0	

Từ bảng biến thiên, ta được: $\min_{[-1;1]} f(x) = f(-1) = f(1) = 0; \max_{[-1;1]} f(x) = f(0) = 1$.

Chú ý. Trong thực hành, ta cũng dùng các kí hiệu $\min_D y, \max_D y$ để chỉ giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất (nếu có) của hàm số $y = f(x)$ trên tập D . Do đó, trong Ví dụ 1 ta có thể viết:

$$\min_{[-1;1]} y = y(-1) = y(1) = 0; \max_{[-1;1]} y = y(0) = 1.$$

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $y = x - 2 + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Giải

Ta có: $y' = 1 - \frac{1}{x^2}; y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (vì $x > 0$).

Tính các giới hạn:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - 2 + \frac{1}{x} \right) = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 2 + \frac{1}{x} \right) = +\infty.$$

16

Lập bảng biến thiên của hàm số trên khoảng $(0; +\infty)$:

x	0	1	$+\infty$		
y'		-	0	+	
y	$+\infty$		0		$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta được: $\min_{(0; +\infty)} y = y(1) = 0$; hàm số không có giá trị lớn nhất trên khoảng $(0; +\infty)$.

2. CÁCH TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ TRÊN MỘT ĐOẠN

Giả sử $y = f(x)$ là hàm số liên tục trên $[a; b]$ và có đạo hàm trên $(a; b)$, có thể trừ ra tại một số hữu hạn điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm. Giả sử chỉ có hữu hạn điểm trong đoạn $[a; b]$ mà đạo hàm $f'(x)$ bằng 0.

Các bước tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$:

1. Tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a; b)$, tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc không tồn tại.
2. Tính $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a)$ và $f(b)$.
3. Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên. Ta có:

$$M = \max_{[a;b]} f(x); m = \min_{[a;b]} f(x).$$

Ví dụ 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 3$ trên đoạn $[0; 4]$.

Giải

Ta có: $y' = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2); y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \sqrt{2}$ (vì $x \in [0; 4]$);

$$y(0) = 3; y(4) = 195; y(\sqrt{2}) = -1.$$

Do đó: $\max_{[0;4]} y = y(4) = 195; \min_{[0;4]} y = y(\sqrt{2}) = -1$.

Ví dụ 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin x + \cos x$ trên đoạn $[0; 2\pi]$.

Giải

Ta có: $y' = \cos x - \sin x; y' = 0 \Leftrightarrow \cos x = \sin x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$ hoặc $x = \frac{5\pi}{4}$ (vì $x \in [0; 2\pi]$);

$$y(0) = 1; y(2\pi) = 1; y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}; y\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}.$$

Do đó: $\max_{[0;2\pi]} y = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}; \min_{[0;2\pi]} y = y\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$.