**HƯỚNG DẪN CHẤM**

**ĐỀ THI OLYMPIC KHU VỰC DHBB**

NĂM HỌC 2022 - 2023

**Môn: Toán – lớp 11**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu** | **Nội dung** | **Điểm** |
| **1** | Cho dãy số dương  thỏa đồng thời các điều kiện sau:  i)  ii) Tồn tại số thực dương  không đổi sao cho  .  Tính giới hạn của dãy số  . | **4,0** |
|  | Đặt . Từ giả thiết ta suy ra  là dãy tăng và bị chặn trên bởi M. Suy ra tồn tại giới hạn  . 0,5  Đặt  . Do tồn tại  nên  . 0,5 | **1,0** |
| Gọi  . 0,5  Do  nên  Ta có  . 0,5 | **1,0** |
| Suy ra  Suy ra  (1). 0,5  Tương tự,  0,5 | **1,0** |
| Suy ra  (2). 0,5  Từ (1) và (2) suy ra  0,5 | **1,0** |
| **2** | Cho hàm số  thỏa điều kiện  .  Chứng minh rằng nếu  là số nguyên tố thì hoặc là số nguyên tố hoặc là bình phương của một số nguyên tố. | **4,0** |
| Lấy bất kì  , giả sử  Suy ra  (1) 0,5  Với  thì  0,5 | **1,0** |
| Với  thì  0,5  Suy ra  Theo kết quả (1) ta có  (2) 0,5 | **1,0** |
| Giả sử không là số nguyên tố hoặc là không là bình phương của một số nguyên tố.  Khi đó tồn tại  để  0,5  Theo (2) thì  0,5 | **1,0** |
| Từ giả thiết suy ra  (do  nguyên tố)  Suy ra  ( do (1) ), vô lý. 0,5  Vậy ta có điều phải chứng minh. 0,5 | **1,0** |
| **3**  **3a** | Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn (O). Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại P . Đường tròn ngoại tiếp tam giác APD cắt đoạn thẳng AB tại điểm thứ hai là E (E khác A) đường tròn ngoại tiếp tam giác BPC cắt đoạn thẳng AB tại điểm thứ hai là F (F khác B) . Gọi I và J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ADE và BCF. Hai đoạn thẳng IJ và AC cắt nhau tại K.   1. Chứng minh rằng: 2. Chứng minh bốn điểm A,I,K,E cùng nằm trên một đường tròn. | **4,0** |
| Lấy E và F thuộc đường tròn sao cho:  Khi đó:  Áp dụng định lí Ptô-lê-mê cho hai tứ giác nội tiếp và ta có:  (1)  (2) | **1đ** |
| Mặt khác:  Do đó:  Suy ra:  (3)  Từ (1), (2), (3) ta có điều phải chứng minh. | **1,0** |
| **3b** | Tia EI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác APD tại điểm thứ hai là X (X khác E)  Tia FJ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BPC tại điểm thứ hai là Y (Y khác F)  Vẽ các đoạn thẳng PX, PY, XA và YB.  Ta suy ra :  (4)  Rõ ràng PX; PY là các đường phân giác của các góc | **1,0** |
| Do đó X,P,Y thẳng hàng; ta lại có : ;  Ta suy ra tam giác APX đồng dạng với tam giác BPY (5)  Gọi Z là giao điểm của XI với YJ  Từ (4) và (5) ta có:    Suy ra IJ song song với XY; và  Vậy A, I, K, E cùng thuộc một đường tròn. | **1,0** |
| **4** | Gọi là tổng lũy thừa bậc  của  số nguyên liên tiếp, với  là một số nguyên dương. Tìm tất cả các số nguyên dương  lớn hơn  sao cho chia hết cho . | **4,0** |
| Với  và , đặt  , theo đề ta tìm tất cả số nguyên dương  sao cho .  ***Bổ đề:*** Với  là số nguyên dương tùy ý,  *Chứng minh:*  Với a là số nguyên dương tùy ý, ta có :    Suy ra :  Do a là số nguyên tùy ý nên ta có điều cần chứng minh. | **1,0** |
| Trở lại bài toán:  **TH1**:  là số lẻ  Đặt  , , theo bổ đề ta có:    Mà  (do n lẻ).  Suy ra | **1,0** |
| **TH 2**: n chẵn  Đặt ; trong đó  và  là số lẻ; xét  Nhận thấy:   * Với  là số nguyên dương chẵn thì ; suy ra * Với  là số nguyên dương lẻ thì , do đó theo định lý Euler ta có:     Suy ra | **1,0** |
|  | Ta có từ  đến  có  số nguyên dương lẻ (do  chẵn).  Từ các điều trên, ta suy ra:    Từ đó, do  lẻ nên  không chia hết cho ; do đó không chia hết cho  (vì  chia hết cho ).  Vậy số nguyên dương thỏa đề bài khi và chỉ khi  là số lẻ. | **1,0** |
| **5** | Cho  và một bộ gồm  số thực bất kỳ  thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:  1/  2/  Tìm số nguyên dương  bé nhất mà với mọi cách cho bộ  số thực như thế, ta có thể phân hoạch bộ số đó thành tập hợp con đôi một rời nhau sao cho tổng tất cả các phần tử của mỗi tập con đó không lớn hơn . | **4,0** |
|  | + Xét bộ số thực  thỏa đề bài. Ta xây dựng thuật toán để phân hoạch bộ  số đó thành  tập thỏa yêu cầu đề bài, như sau:  Trước hết, nếu tồn tại  sao cho . (\*) .  Ta lập bộ số mới  gồm  số, bằng cách bỏ đi hai số của bộ số ban đầu và thay bằng một số mới bằng .  Nhận xét rằng, nếu ta tìm cách phân hoạch bộ  thỏa mãn đề bài thì ta có thể phân hoạch được bộ số ban đầu. | **1,0** |
| + Nếu bộ số  vẫn còn tính chất (\*), ta thực hiện tiếp tục như thế để tạo ra bộ số mới .  Tiếp tục thực hiện như thế cho đến khi không còn hai số nào mà tổng của nó bé hơn hay bằng  (Vì  là một số hữu hạn nên quá trình này sẽ dừng).  Gọi bộ số cuối cùng là  gồm các số: . Vì không còn hai số nào có tổng nhỏ hơn hay bằng 1 nên có không quá một số nhỏ hơn hay bằng 0.5. | **1,0** |
| Xét hai trường hợp:  TH1: Các số  đều lớn hơn 0,5. Khi đó:  , Suy ra .  Nếu vậy, ta có thể phân chia các số này như sau:  nếu  nếu | **1,0** |
| TH2: Tồn tại một số, giả sử là . Các số  đều lớn hơn 0,5. và  với .  ,  Suy ra .  Khi đó, ta lại phân chia tương tự như trên:  nếu  nếu  + Ta sẽ chỉ ra một trường hợp mà cả  tập con đều khác rỗng . Chẳng hạn, với mọi bộ số được cho như sau:  Với  dương và .  Khi đó, ta phải phân hoạch bộ số trên thành ít nhất  tập khác rỗng.( gồm một tập chứa 2 số là  và  số còn lại chia thành  tập)  + Kết luận:Vậy  là số thỏa đề bài. | **1,0** |

**Người ra đề:** *Nguyễn Thanh Thiên, Võ Tiến,*

*Tổ Toán, Trường THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm (Quảng Nam)*

Phone: 0905662875

Mail: [thanhthiennbkqn@gmail.com](mailto:thanhthiennbkqn@gmail.com)