PHÒNG GD & ĐT TAM ĐẢO
TRƯỜNG THCS ĐẠO TRÙ

ĐỀ CHÍNH

ĐỀ KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI LỚP 9 VÒNG I

Môn kiểm tra: Toán
Ngày thi: 10/11 /2023
Thời gian làm bài: 120 phút
(Không tính thời gian phát đề)

Bài 1: (5 điểm)

a. Cho biểu thức M= $\dfrac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a-b}-\dfrac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\dfrac{b}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}$ với a, b > 0 và a ≠b

Rút gọi M và tính giá trị biểu thức M biết $(1-a)(1-b)+2\sqrt{ab}=1$

b. Tìm các số nguyên a, b thoả mãn $\dfrac{5}{a+b\sqrt{2}}-\dfrac{4}{a-b\sqrt{2}}+18\sqrt{2}=3$

c. Cho a, b, c thỏa mãn $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=7$; $a+b+c=23$; $\sqrt{abc}=3$

Tính giá trị biểu thức H= $\dfrac{1}{\sqrt{ab}+\sqrt{c}-6}+\dfrac{1}{\sqrt{bc}+\sqrt{a}-6}+\dfrac{1}{\sqrt{ca}+\sqrt{b}-6}$

Bài 2: (4,5 điểm)

a. Tính giá trị của biểu thức **N=** $\dfrac{\sqrt{4+\sqrt{3}}+\sqrt{4-\sqrt{3}}}{\sqrt{4+\sqrt{13}}}+\sqrt{27-10\sqrt{2}}$

b. Cho a, b là số hữu tỉ thỏa mãn $(a^2+b^2-2)(a+b)^2+(1-ab)^2=-4ab$

Chứng minh $\sqrt{1+ab}$ là số hữu tỉ

c. Giải phương trình $x^2-x-4=2\sqrt{x-1}(1-x)$

Bài 3: (3,5 điểm)

a. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x;y) thoả mãn $x^5+y^2=xy^2+1$

b. Cho a, b, c>0 thỏa mãn abc=1 .

Chứng minh $\dfrac{1}{\sqrt{ab+a+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{bc+b+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{ca+c+2}}\le\dfrac{3}{2}$

Bài 4: (6 điểm) Cho nửa đường tròn (O;R) đường kính AB. Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa nửa đường tròn vẽ tiếp tuyến Ax với nửa đường tròn, trên Ax lấy M sao cho AM > R. Từ M vẽ tiếp tuyến MC với nửa đường tròn, từ C vẽ CH vuông góc với AB, CE vuông góc với AM. Đường thẳng vuông góc với AB tại O cắt BC tại N. Đường thẳng MO cắt CE, CA, CH lần lượt tại Q, K, P.

a) Chứng minh MNCO là hình thang cân

b) MB cắt CH tại I. Chứng minh KI song song với AB

c) Gọi G và F lần lượt là trung điểm của AH và AE. Chứng minh PG ^ QF

Bài 5: (1 điểm) Tìm số nguyên dương n lớn nhất để

A= $4^{27}+4^{2016}+4^{n}$ là số chính phương

Họ tên thí sinh.. SBD:................................

HƯỚNG DẪN CHẤM

<table>
<tr><th>Câu</th><th>Nội Dung</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td>Bài 1</td><td></td><td>4 đ</td></tr>
<tr><td>a/
1,5đ</td><td>-Rút gọn M= $\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ với a, b>0 và a $\neq$b
-Ta có
$(1-a)(1-b)+2\sqrt{ab}=1 \Leftrightarrow ab-a-b+1+2\sqrt{ab}=1$
$\Leftrightarrow ab=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^2=1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right|=1$
+ Nếu a>b>0
$\Rightarrow \sqrt{a}>\sqrt{b} \Rightarrow \sqrt{a}-\sqrt{b}>0; \sqrt{ab}>0 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}>0$
$\Rightarrow \left|\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right|=\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=1 \Rightarrow M=1$
+ nếu 0<a<b
$\Rightarrow \sqrt{a}<\sqrt{b} \Rightarrow \sqrt{a}-\sqrt{b}<0; \sqrt{ab}>0 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}<0$
$\Rightarrow \left|\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right|=\dfrac{-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \Rightarrow \dfrac{-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=1 \Rightarrow M=-1$</td><td>0,75

0,25

0,25

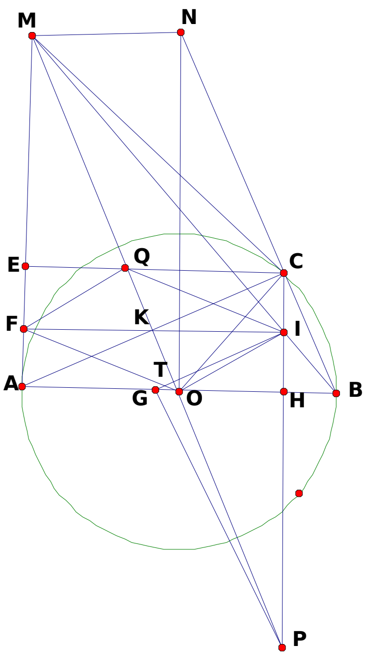
0,25</td></tr>
<tr><td>b/
1,5đ</td><td>$\dfrac{5}{a+b\sqrt{2}}-\dfrac{4}{a-b\sqrt{2}}+18\sqrt{2}=3$
$\Leftrightarrow 5a-5b\sqrt{2}-4a-4b\sqrt{2}+18\sqrt{2}\left(a^2-2b^2\right)=3\left(a^2-2b^2\right)$
$\Leftrightarrow 5a-5b\sqrt{2}-4a-4b\sqrt{2}+18a^2\sqrt{2}-36b^2\sqrt{2}=3a^2-6b^2$
$\Leftrightarrow 18a^2\sqrt{2}-36b^2\sqrt{2}-9b\sqrt{2}=3a^2-6b^2-a$
$\Leftrightarrow \left(18a^2-36b^2-9b\right)\sqrt{2}=3a^2-6b^2-a$
-Nếu $18a^2-36b^2-9b\neq 0 \Rightarrow \sqrt{2}=\dfrac{3a^2-6b^2-a}{18a^2-36b^2-9b}$</td><td>0,5</td></tr>
</table>

	Vì a, b nguyên nên $\frac{3a^2-6b^2-a}{18a^2-36b^2-9b}\in Q\Rightarrow\sqrt{2}\in Q$ $\Rightarrow$ Vô lý vì $\sqrt{2}$ là số vô tỉ -Vậy ta có $18a^2-36b^2-9b=0\Rightarrow\begin{cases}18a^2-36b^2-9b=0\\3a^2-6b^2-a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a^2-6b^2=\frac{3}{2}b\\3a^2-6b^2=a\end{cases}\Leftrightarrow a=\frac{3}{2}b$ Thay a=$\frac{3}{2}b$ vào $3a^2-6b^2-a=0$ t a có $3\cdot\frac{9}{4}b^2-6b^2-\frac{3}{2}b=0\Leftrightarrow 27b^2-24b^2-6b=0\Leftrightarrow 3b(b-2)=0$ Ta có b=0 (loại) ; b=2 (thoã mãm) , vậy a=3. Kết luận	0,25 0,75
c/ **2 đ**	Ta có $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2=a+b+c+2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)$ mà $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=7$; $a+b+c=23$ nên $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=13$ Ta có $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=7\Rightarrow\sqrt{c}-6=-\sqrt{a}-\sqrt{b}+1$ nên $\sqrt{ab}+\sqrt{c}-6=\sqrt{ab}-\sqrt{a}-\sqrt{b}+1=\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{b}-1\right)$ Tương tự $\sqrt{bc}+\sqrt{a}-6=\left(\sqrt{b}-1\right)\left(\sqrt{c}-1\right);\sqrt{ac}+\sqrt{b}-6=\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{c}-1\right)$ Vậy H=$\frac{1}{\sqrt{ab}+\sqrt{c}-6}+\frac{1}{\sqrt{bc}+\sqrt{a}-6}+\frac{1}{\sqrt{ca}+\sqrt{b}-6}$ $=\frac{1}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{b}-1\right)}+\frac{1}{\left(\sqrt{b}-1\right)\left(\sqrt{c}-1\right)}+\frac{1}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{c}-1\right)}$ $=\frac{\sqrt{c}-1+\sqrt{a}-1+\sqrt{b}-1}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{b}-1\right)\left(\sqrt{c}-1\right)}$ $=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)-3}{\sqrt{abc}+\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)-\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)-1}=\frac{7-3}{3+7-13-1}=-1$	0,25 0,75 1,0
Bài 2		**4,5 đ**
a/ **1,5đ**	N=$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{4+\sqrt{3}}+\sqrt{4-\sqrt{3}})}{\sqrt{8+2\sqrt{13}}}+\sqrt{25-10\sqrt{2}+2}$	0,25 0,5

	$= \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{4+\sqrt{3}}+\sqrt{4-\sqrt{3}})}{\sqrt{(4+\sqrt{3})+2\sqrt{4+\sqrt{3}}\sqrt{4-\sqrt{3}}+(4+\sqrt{3})}}+\sqrt{(5-\sqrt{2})^2}$ $=\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{4+\sqrt{3}}+\sqrt{4-\sqrt{3}})}{\sqrt{(\sqrt{4+\sqrt{3}}+\sqrt{4-\sqrt{3}})^2}}+\sqrt{(5-\sqrt{2})^2}=\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{4+\sqrt{3}}+\sqrt{4-\sqrt{3}})}{\sqrt{4+\sqrt{3}}+\sqrt{4-\sqrt{3}}}+\lvert 5-\sqrt{2}\rvert=\sqrt{2}+5-$	0,5
b/ **1,5đ**	$(GT)\Rightarrow \left[(a+b)^2-2(ab+1)\right](a+b)^2+(1+ab)^2=0$ $\Leftrightarrow (a+b)^4-2(a+b)^2(1+ab)+(1+ab)^2=0$ $\Leftrightarrow \left[(a+b)^2-(1+ab)\right]^2=0\Rightarrow (a+b)^2-(1+ab)=0$ $\Leftrightarrow (a+b)^2=1+ab\Leftrightarrow \lvert a+b\rvert=\sqrt{1+ab}\in Q;vi:a;b\in Q.KL$	0,25 0,5 0,25 0,5
c/ **1,5đ**	Điều kiện: $x\ge 1$ (*). $x^2-x-4=2\sqrt{x-1}(1-x)$ Ta có: $\Leftrightarrow x^2+2x\sqrt{x-1}+x-1-2(x+\sqrt{x-1})-3=0$ $\Leftrightarrow (x+\sqrt{x-1})^2-2(x+\sqrt{x-1})-3=0$ Đặt $x+\sqrt{x-1}=y$ (Điều kiện: $y\ge 1\ (**)$), phương trình trở thành $y^2-2y-3=0$. $y^2-2y-3=0\Leftrightarrow (y+1)(y-3)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1\\ y=3\end{array}\right.$ +Với $y=-1$ không thỏa mãn điều kiện (**). + Với $y=3$ ta có phương trình: $x+\sqrt{x-1}=3\Leftrightarrow \sqrt{x-1}=3-x\Leftrightarrow \begin{cases}1\le x\le 3\\ x-1=9-6x+x^2\end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases}1\le x\le 3\\ x^2-7x+10=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}1\le x\le 3\\ \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=5\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=2$ Vậy phương trình có nghiệm $x=2$.	0,5 0,25 0,5

		0,25
Bài 3		**3,5 đ**
a/ **1,75đ**	Ta có $x^5+y^2=xy^2+1 \Leftrightarrow (x^5-1)-(xy^2-y^2)=0$ $\Leftrightarrow (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)-y^2(x-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1-y^2)=0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x^4+x^3+x^2+x+1=y^2 \end{array}\right.$ -*Nếu $x-1=0 \Rightarrow x=1$ ta có $1+y^2=y^2+1$ đúng với mọi y nguyên Vậy ngiệm của PT là (1;y∈Z) *Nêu $x^4+x^3+x^2+x+1=y^2 \Rightarrow 4x^4+4x^3+4x^2+4x+4=(2y)^2$ Ta có $(2y)^2-(2x^2+x)^2=4x^4+4x^3+4x^2+4x+4-4x^4-4x^3-x^2$ $=3x^2+4x+4=3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{8}{3}>0$ Vậy ta có $(2x^2+x)^2<(2y)^2$ * Ta có $(2x^2+x+2)^2-(2y)^2=5x^2\geq 0$, Vậy ta có $(2y)^2\geq(2x^2+x+2)^2$ ** Từ * và ** ta có $(2x^2+x)^2<(2y)^2\leq(2x^2+x+2)^2 \Rightarrow (2y)^2=(2x^2+x+1)^2$; $(2y)^2=(2x^2+x+2)^2$ Nếu $(2y)^2=(2x^2+x+1)^2 \Leftrightarrow -x^2+2x+3=0 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0$ $\Leftrightarrow (x+1)(x-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$ + nếu $x=-1 \Rightarrow y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1$ +Nếu $x=3 \Rightarrow y^2=121 \Rightarrow y=\pm 11$ -Nếu $(2y)^2=(2x^2+x+2)^2 \Leftrightarrow -5x^2=0 \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1$. Kết luận	0,25 0,25 1đ

		0,25
b/ **1,75đ**	Ta có $3\left(x^2+y^2+z^2\right)-(x+y+z)^2=...=(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2\geq 0$ $\Rightarrow (x+y+z)^2\leq 3\left(x^2+y^2+z^2\right)$ nên với x,y,z>0 ta có $x+y+z\leq\sqrt{3\left(x^2+y^2+z^2\right)}$, áp dụng ta có $\frac{1}{\sqrt{ab+a+2}}+\frac{1}{\sqrt{bc+b+2}}+\frac{1}{\sqrt{ca+c+2}}\leq\sqrt{3\left(\frac{1}{ab+a+2}+\frac{1}{bc+b+2}+\frac{1}{ca+c+2}\right)}$ -Với x,y>0 ta có $x+y\geq 2\sqrt{xy}\Rightarrow (x+y)^2\geq 4xy\Rightarrow\frac{1}{x+y}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ áp dụng ta có $\frac{1}{ab+a+2}=\frac{1}{ab+1+a+1}=\frac{1}{ab+abc+a+1}=\frac{1}{ab(c+1)+(a+1)}$ $\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{ab(c+1)}+\frac{1}{a+1}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{abc}{ab(c+1)}+\frac{1}{a+1}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{c}{c+1}+\frac{1}{a+1}\right)$ Vây ta có $\frac{1}{ab+a+2}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{c}{c+1}+\frac{1}{a+1}\right)$ Tương tự ta có $\frac{1}{bc+b+2}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{a}{a+1}+\frac{1}{b+1}\right)$; $\frac{1}{ca+c+2}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{b}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right)$ nên $\sqrt{3\left(\frac{1}{ab+a+2}+\frac{1}{bc+b+2}+\frac{1}{ca+c+2}\right)}$ $\leq\sqrt{3\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{c}{c+1}+\frac{1}{a+1}+\frac{a}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right)}=\frac{3}{2}$ Vậy $\frac{1}{\sqrt{ab+a+2}}+\frac{1}{\sqrt{bc+b+2}}+\frac{1}{\sqrt{ca+c+2}}\leq\frac{3}{2}$ dấu “=” có khi a=b=c=1	0,5 0,5 0,5 0,25
Bài 4		**6 đ**

<table>
<tr><td></td><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>a/

2đ</td><td>-Ta có ΔACB nội tiếp đường tròn (vì...) mà AB là đường kính nên ΔACB vuông tại C $\Rightarrow AC \perp BN$
Ta có MA=MC (.....), OA=OC (....) nên MO là trung trực của AC
$\Rightarrow MO \perp AC \Rightarrow MO // NB \Rightarrow \widehat{MOA} = \widehat{NBO}$
-Ta có OA$\perp MA$ (....)$\Rightarrow \widehat{MAO} = \widehat{NOB} = 90^0$; xét ΔMAO và ΔNOB có
$\widehat{MAO} = \widehat{NOB} = 90^0; \widehat{MOA} = \widehat{NBO}; OA = OB = R \Rightarrow \Delta MAO = \Delta NOB \Rightarrow MO = NB$
-Ta có $MO // NB; MO = NB \Rightarrow MNBO$ là hình bình hành.Ta có $\Delta MAO =$ ΔNOB (cm trên) nên ta có NO=MA, mà MA=MC (...) nên NO=MC vậy MNBO là hình thang cân</td><td>0,5

0,75

0,75</td></tr>
<tr><td>b/

2đ</td><td>-Xét ΔCHB và ΔMAO có $\widehat{MAO} = \widehat{NOB} = 90^0; \widehat{CBH} = \widehat{MOA}$ (cm trên)
$\Rightarrow \Delta CHB \sim \Delta MAO \Rightarrow \frac{CH}{MA} = \frac{HB}{AO} = \frac{HB}{R}$
-Ta có $CH \perp AB$ (gt) ; MA$\perp$AB (...)
$\Rightarrow CH // MA \Rightarrow IH // MA \Rightarrow \frac{IH}{MA} = \frac{HB}{AB} = \frac{HB}{2R}$
-Nên ta có $\Rightarrow \frac{CH}{MA} = \frac{HB}{R} = 2 \cdot \frac{HB}{2R} = 2 \cdot \frac{IH}{MA} = \frac{2IH}{MA} \Rightarrow CH = 2IH \Rightarrow IC = IH$.
-Chi ra KI là đường trung bình của tam giác ACH $\Rightarrow KI // AB$</td><td>0,5

0,5

0,5

0,5</td></tr>
</table>

c/ 2đ	-Chưng minh FQIO là hình bình hành $\Rightarrow QF // IO$ -Chưng minh O là trục tâm tam giác GIP $\Rightarrow PG \perp OI \Rightarrow PG \perp QF$	0,75 0,75 0,5
Bài 5		**1đ**
	* $A = 4^{27} + 4^{2016} + 4^{n} = (2^{27})^{2}(1 + 4^{1989} + 4^{n-27})$ Vì A và $(2^{27})^{2}$ là số chính phương nên $1 + 4^{1989} + 4^{n-27}$ là số chính phương Ta có $1 + 4^{1989} + 4^{n-27} > 4^{n-27} = (2^{n-27})^{2}$ *mà $1 + 4^{1989} + 4^{n-27}$ là số chính phương nên ta có $1 + 4^{1989} + 4^{n-27} \geq (2^{n-27} + 1)^{2} \Leftrightarrow 2^{n-27} \leq 2^{3977} \Leftrightarrow n \leq 4004$ Với n=4004 ta có A= $A = 4^{27} + 4^{2016} + 4^{4004} = (2^{27} + 2^{4004})^{2}$ là số chính phương Vậy n=4004 thì A=$4^{27}+4^{2016}+4^{n}$ là số chính phương	0,25 0,5 0,25