

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG 1. TÍNH TÍCH PHÂN

- Câu 1.** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ và $F(1) = 1$. Tính $F(e)$.
- Lời giải**

$$F(e) - F(1) = \int_1^e f(x) dx = \int_1^e \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^e = 1$$

Ta có

$$\text{Vậy } F(e) = F(1) + 1 = 1 + 1 = 2.$$

- Câu 2.** Sử dụng ý nghĩa hình học của tích phân, tính:

a) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$

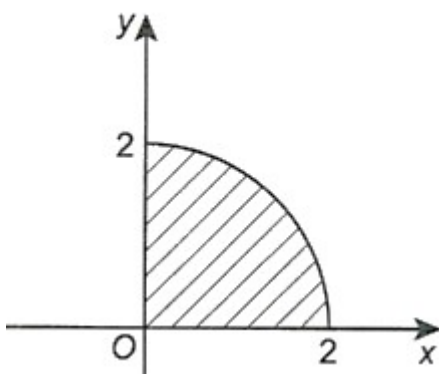
b) $\int_{-2}^2 \left(1 - \left| \frac{1}{2}x \right| \right) dx$

c) $\int_0^3 (2x+1) dx$

d) $\int_0^4 \sqrt{16-x^2} dx$

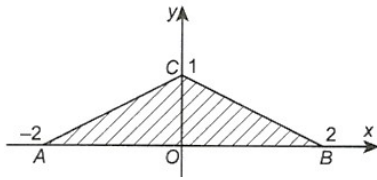
Lời giải

- a) Ta có $y = \sqrt{4-x^2}, 0 \leq x \leq 2$ là phương trình một phần tư của đường tròn tâm tại gốc toạ độ O , bán kính bằng 2 và nằm ở góc phần tư thứ I. Do đó, tích phân cần tính là một phần tư diện tích của hình tròn như Hình.



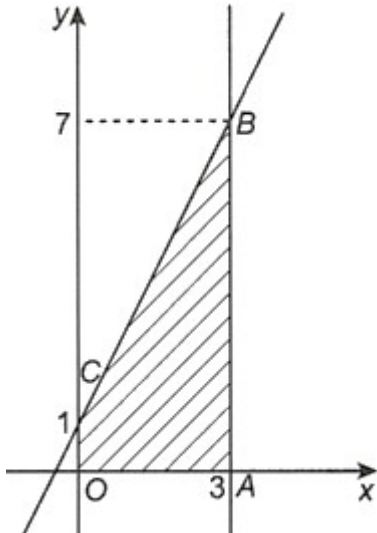
$$\text{Vậy } \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2^2 = \pi.$$

- b) Tích phân cần tính là diện tích của tam giác ABC , có đáy $AB = 4$, đường cao $CO = 1$.



Do đó $\int_{-2}^2 \left(1 - \left|\frac{1}{2}x\right|\right) dx = S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot OC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 = 2$

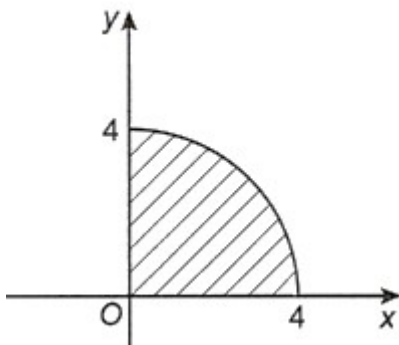
c) Tích phân cần tính là diện tích của hình thang vuông $OABC$, có đáy lớn $AB = 7$, đáy nhỏ $CO = 1$, đường cao $OA = 3$



Do đó

$$\int_0^3 (2x + 1) dx = S_{OABC} = \frac{1}{2} (AB + CO) OA = \frac{1}{2} \cdot (7 + 1) \cdot 3 = 12.$$

d) Tích phân cần tính là diện tích của $\frac{1}{4}$ hình tròn có tâm tại gốc tọa độ O và bán kính $R = 4$ (phần nằm ở góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng tọa độ) như Hình.



Vậy $\int_0^4 \sqrt{16 - x^2} dx = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 4^2 = 4\pi$

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x}, x > 0$. Tính giá trị của $f(4) - f(1)$.

Lời giải

$$f(4) - f(1) = \int_1^4 f'(x) dx = \int_1^4 \frac{\sqrt{x} - 1}{x} dx = \int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \right) dx$$

$$= (2\sqrt{x} - \ln x) \Big|_1^4 = 2 - 2 \ln 2.$$

Câu 4. Cho $\int_{-1}^2 g(x) dx = 6, G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ và $G(-1) = 8$. Tính $G(2)$.

Lời giải

Vì $G(x)$ là một nguyên hàm của $g(x)$ nên ta có $\int_{-1}^2 g(x) dx = G(2) - G(-1)$ hay $6 = G(2) - 8$. Suy ra $G(2) = 14$. $6 = G(2) - 8$. Suy ra $G(2) = 14$.

Câu 5. Cho $\int_0^1 [2f(x) - 1] dx = 3$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$.

Lời giải

Ta có: $\int_0^1 [2f(x) - 1] dx = 2 \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 1 dx = 3$ mà $\int_0^1 1 dx = 1$ nên $2 \int_0^1 f(x) dx - 1 = 3$ hay $\int_0^1 f(x) dx = 2$.

Câu 6. Cho $\int_{-2}^1 f(x) dx = 5$ và $\int_{-2}^1 g(x) dx = -4$. Tính:

a) $\int_{-2}^1 f(x) dx$

b) $\int_{-2}^1 -4f(x) dx$;

c) $\int_{-2}^1 \frac{-2g(x)}{3} dx$;

d) $\int_{-2}^1 [f(x) + g(x)] dx$;

e) $\int_{-2}^1 [f(x) - g(x)] dx$

g) $\int_{-2}^1 [3f(x) - 5g(x)] dx$

Lời giải

$$\text{a) } \int_1^{-2} f(x) dx = - \int_{-2}^1 f(x) dx = -5$$

$$\text{b) } \int_{-2}^1 -4f(x) dx = -4 \int_{-2}^1 f(x) dx = -4 \cdot 5 = -20$$

$$\text{c) } \int_{-2}^1 \frac{-2g(x)}{3} dx = \frac{-2}{3} \int_{-2}^1 g(x) dx = \frac{-2}{3} \cdot (-4) = \frac{8}{3}$$

$$\text{d) } \int_{-2}^1 [f(x) + g(x)] dx = \int_{-2}^1 f(x) dx + \int_{-2}^1 g(x) dx = 5 + (-4) = 1$$

$$\text{e) } \int_{-2}^1 [f(x) - g(x)] dx = \int_{-2}^1 f(x) dx - \int_{-2}^1 g(x) dx = 5 - (-4) = 9$$

$$\text{g) } \int_{-2}^1 [3f(x) - 5g(x)] dx = 3 \int_{-2}^1 f(x) dx - 5 \int_{-2}^1 g(x) dx = 3 \cdot 5 - 5 \cdot (-4) = 35$$

Câu 7.

Cho $\int_0^5 f(x) dx = 6$ và $\int_0^5 g(x) dx = 2$. Hãy tính:

$$\text{a) } \int_0^5 [2f(x) + 3g(x)] dx$$

$$\text{b) } \int_0^5 [2f(x) - 3g(x)] dx$$

Lời giải

$$\text{a) } \int_0^5 [2f(x) + 3g(x)] dx = 2 \int_0^5 f(x) dx + 3 \int_0^5 g(x) dx = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 2 = 18$$

$$\text{b) } \int_0^5 [2f(x) - 3g(x)] dx = 2 \int_0^5 f(x) dx - 3 \int_0^5 g(x) dx = 2 \cdot 6 - 3 \cdot 2 = 6$$

Câu 8.

Cho các hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 3]$ và $\int_1^2 f(x) dx = \frac{1}{2}, \int_2^3 f(x) dx = \frac{3}{2}$,

$\int_1^3 g(x) dx = -1$. Tính:

$$\text{a) } \int_1^3 [2f(x) + g(x)] dx$$

$$\text{b) } \int_1^3 [5f(x) - 4] dx$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có } \int_1^3 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$$

$$\int_1^3 [2f(x) + g(x)] dx = 2 \int_1^3 f(x)dx + \int_1^3 g(x)dx = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

$$\text{b) } \int_1^3 [5f(x) - 4] dx = 5 \int_1^3 f(x)dx - \int_1^3 4dx = 5 \cdot 2 - (4x) \Big|_1^3 = 10 - 8 = 2$$

Câu 9. Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ đi qua điểm $(0; 2)$ và tiếp tuyến của đồ thị này tại mỗi điểm $(x; f(x))$ có hệ số góc là $2x - 3$. Tìm $f(4)$.

Lời giải

Theo giả thiết, ta có $f(0) = 2$ và $f'(x) = 2x - 3$.

$$\text{Từ đó, } f(4) = f(0) + \int_0^4 f'(x)dx = 2 + \int_0^4 (2x - 3)dx = 2 + (x^2 - 3x) \Big|_0^4 = 2 + 4 = 6$$

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^4 f(x)dx = -2$; $\int_0^5 f(t)dt = 4$. Tính $\int_4^5 f(x)dx$.

Lời giải

$$\int_0^5 f(x)dx = \int_0^5 f(t)dt = 4$$

$$\text{Ta có } \int_4^5 f(x)dx = \int_0^5 f(x)dx - \int_0^4 f(x)dx = 4 - (-2) = 6$$

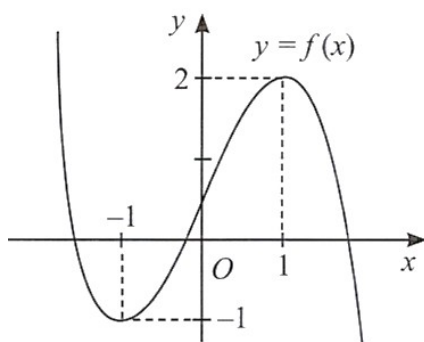
Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 5]$. Tính $\int_0^5 f(x)dx$, biết rằng $\int_0^3 f(x)dx = 4$; $\int_1^5 f(x)dx = 6$; $\int_1^3 f(x)dx = 3$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int_3^5 f(x)dx = \int_1^5 f(x)dx - \int_1^3 f(x)dx = 6 - 3 = 3$$

$$\text{Do đó, } \int_0^5 f(x)dx = \int_0^3 f(x)dx + \int_3^5 f(x)dx = 4 + 3 = 7$$

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Biết rằng đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Tính $\int_{-1}^1 f'(x)dx$.



Lời giải

$$\int_{-1}^1 f'(x) dx = f(1) - f(-1) = 2 - (-1) = 3$$

Câu 13. Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ đi qua điểm $(-1; 3)$ và tiếp tuyến của đồ thị này tại mỗi điểm $(x; f(x))$ có hệ số góc là $3x^2 - 4x + 1$. Tìm $f(2)$.

Lời giải

Theo giả thiết, ta có $f(-1) = 3$ và $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$.

$$f(2) = f(-1) + \int_{-1}^2 f'(x) dx = 3 + \int_{-1}^2 (3x^2 - 4x + 1) dx$$

Từ đó,

$$= 3 + (x^3 - 2x^2 + x) \Big|_{-1}^2 = 3 + 6 = 9.$$

Câu 14. Tính:

$$\text{a) } A = \int_{-1}^2 (x - 4x^2) dx + 4 \int_{-1}^2 (x^2 - 1) dx$$

$$\text{b) } B = \int_{-1}^0 (x^3 - 6x) dx + \int_0^1 (t^3 - 6t) dt$$

Lời giải

$$\text{a) } A = \int_{-1}^2 (x - 4x^2) dx + \int_{-1}^2 (4x^2 - 4) dx = \int_{-1}^2 (x - 4) dx = \left(\frac{x^2}{2} - 4x \right) \Big|_{-1}^2 = -\frac{21}{2};$$

$$\text{b) } B = \int_{-1}^0 (x^3 - 6x) dx + \int_0^1 (x^3 - 6x) dx = \int_{-1}^1 (x^3 - 6x) dx = \left(\frac{x^4}{4} - 3x^2 \right) \Big|_{-1}^1 = 0$$

Câu 15. Tính:

1) $\int_1^2 (2x - 3)^2 dx$	2) $\int_1^4 (x^2 + 6\sqrt{x}) dx$	3) $\int_1^2 x^2 dx$	4) $\int_2^3 3x^2 dx$
5) $\int_0^1 e^t dt$	6) $\int_2^3 6x dx$	7) $\int_0^1 e^t dt$	8) $\int_0^1 (x^2 + x) dx$

9) $\int_0^1 (1-2x)^2 dx$	10) $\int_1^4 \frac{x-2}{\sqrt{x}} dx$	11) $\int_0^1 x^6 dx$	12) $\int_1^4 \frac{x^3}{\sqrt{x}} dx$
13) $\int_0^1 2 dx$	14) $\int_0^1 \frac{2x}{3} dx$	15) $\int_0^1 x^4 dx$	16) $\int_1^3 2\sqrt[3]{x} dx$
17) $\int_1^9 (x\sqrt{x} - 2) dx$	18) $\int_0^2 (3x-2)(3x+2) dx$	19) $\int_1^2 (5t^2 - 2) dt$	20) $\int_{-1}^1 (x-2)(x^2+2x+4) dx$
21) $\int_0^1 (4x^3 + 3x^2 - 2) dx$	22) $\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$	23) $\int_1^3 x^{\sqrt{2}} dx$	24) $\int_1^2 \frac{1}{4x^2} dx$
25) $\int_{-1}^2 (3x^2 - 8x) dx$	26) $\int_{-1}^1 (x+1)(x^2 - x + 1) dx$		

Lời giải

1)
$$\int_1^2 (2x-3)^2 dx = \int_1^2 (4x^2 - 12x + 9) dx = 4 \int_1^2 x^2 dx - 12 \int_1^2 x dx + \int_1^2 9 dx$$

$$= \left(\frac{4}{3} x^3 \right) \Big|_1^2 - (6x^2) \Big|_1^2 + (9x) \Big|_1^2 = \frac{1}{3}$$

2)
$$\int_1^4 (x^2 + 6\sqrt{x}) dx = \int_1^4 x^2 dx + 6 \int_1^4 x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^4 + 6 \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_1^4 = \frac{4^3 - 1}{3} + 4(2^3 - 1) = 49.$$

3)
$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{1}{3}(2^3 - 1^3) = \frac{7}{3}$$

4)
$$\int_2^3 3x^2 dx = x^3 \Big|_2^3 = 3^3 - 2^3 = 27 - 8 = 19$$

5)
$$\int_0^1 e^t dt = e^t \Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

6)
$$\int_2^3 6x dx = 3x^2 \Big|_2^3 = 3(3^2 - 2^2) = 3(9 - 4) = 15$$

7)
$$\int_0^1 e^t dt = e^t \Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

8) Ta có:
$$\int_0^1 (x^2 + x) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 x dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \left(\frac{1}{3} - 0 \right) + \left(\frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{5}{6}$$

$$9) \int_0^1 (1-2x)^2 dx = \int_0^1 (1-4x+4x^2) dx = \left(x - 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

$$10) \int_1^4 \frac{x-2}{\sqrt{x}} dx = \int_1^4 \left(\frac{x}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx = \int_1^4 \left(\sqrt{x} - 2 \cdot x^{-\frac{1}{2}} \right) dx = \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 2 \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right) \Big|_1^4 = \frac{2}{3}.$$

$$11) \int_0^1 x^6 dx = \frac{x^7}{7} \Big|_0^1 = \frac{1}{7}$$

$$12) \int_1^4 \frac{x^3}{\sqrt{x}} dx = \int_1^4 x^{\frac{5}{2}} dx = \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} \Big|_1^4 = \frac{256}{7} - \frac{2}{7} = \frac{254}{7}$$

$$13) \int_0^1 -2 dx = -2x \Big|_0^1 = -2$$

$$14) \int_0^1 \frac{2x}{3} dx = \frac{x^2}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$15) \int_0^1 x^4 dx = \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{1}{5}$$

$$16) \int_1^3 2\sqrt[3]{x} dx = 2 \int_1^3 x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{2} x^{\frac{4}{3}} \Big|_1^3 = \frac{9\sqrt[3]{3} - 3}{2}$$

$$17) \int_1^9 (x\sqrt{x} - 2) dx = \int_1^9 \left(\frac{3}{x^2} - 2 \right) dx = \left(\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - 2x \right) \Big|_1^9 = \frac{404}{5}$$

$$18) \int_0^2 (3x-2)(3x+2) dx = \int_0^2 (9x^2 - 4) dx = (3x^3 - 4x) \Big|_0^2 = 16$$

$$19) \int_1^2 t^2 (5t^2 - 2) dt = \int_1^2 (5t^4 - 2t^2) dt = \left(t^5 - 2 \cdot \frac{t^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \frac{79}{3}$$

$$20) \int_{-1}^1 (x-2)(x^2+2x+4) dx = \int_{-1}^1 (x^3 - 8) dx = \left(\frac{x^4}{4} - 8x \right) \Big|_{-1}^1 = -16$$

$$21) \int_0^1 (4x^3 + 3x^2 - 2) dx = \int_0^1 4x^3 dx + \int_0^1 3x^2 dx - \int_0^1 2 dx$$

$$= x^4 \Big|_0^1 + x^3 \Big|_0^1 - 2x \Big|_0^1$$

$$= (1^4 - 0^4) + (1^3 - 0^3) - (2 \cdot 1 - 2 \cdot 0) = 0.$$

$$22) \int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \int_1^4 x^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$23) \int_1^3 x^{\sqrt{2}} dx = \frac{x^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1} \Big|_1^3 = \frac{3^{\sqrt{2}+1} - 1}{\sqrt{2}+1}$$

$$24) \int_1^2 \frac{1}{4x^2} dx = \frac{1}{4} \int_1^2 x^{-2} dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{-1} x^{-1} \Big|_1^2 = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x} \Big|_1^2 = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{1}{8};$$

$$25) \int_{-1}^2 (3x^2 - 8x) dx = \int_{-1}^2 3x^2 dx - \int_{-1}^2 8x dx = 3 \int_{-1}^2 x^2 dx - 8 \int_{-1}^2 x dx$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 - 8 \cdot \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^2 = [2^3 - (-1)^3] - 4[2^2 - (-1)^2] = -3;$$

$$26) \int_{-1}^1 (x+1)(x^2 - x + 1) dx = \int_{-1}^1 (x^3 + 1) dx = \int_{-1}^1 x^3 dx + \int_{-1}^1 1 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^1 + x \Big|_{-1}^1 = 2$$

Câu 16. Tính:

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$	2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx$	3) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 x} dx$	4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$
5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - 2) dx$	6) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (3 \cos x + 2) dx$	7) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) dx$	8) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx$
9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \cos x + 2 \sin x) dx$	10) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$	11) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\sin x + \cos x) dx$	12) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{-1}{\cos^2 x} dx$
13) $\int_0^{\pi} (2 \cos x + 1) dx$	14) $\int_0^{\pi} (1 + \cot x) \sin x dx$	15) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx$	16) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \cos x dx$
17) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \sin x - \cos x) dx$	18) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 (2 \tan^2 x + 5) dx$	19) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-2}{3 \sin^2 x} dx$	20) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sqrt{3}}{\sin^2 x} \right) dx$

21) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos^3 x - 3}{\cos^2 x} dx$	22) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin^2 x}{1 - \cos^2 x} dx$	23) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) dx$	
24) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x + \cos x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) dx$			

Lời giải

$$1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$2) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$3) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$4) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$$

$$5) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - 2) dx = (-\cos x - 2x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \pi$$

$$6) \int_0^{\frac{\pi}{4}} (3\cos x + 2) dx = (3\sin x + 2x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$7) \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x + \cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -\cos \frac{\pi}{4} - (-\cos 0) + \sin \frac{\pi}{4} - \sin 0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - (-1) + \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 = 1.$$

$$8) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx = -\cot x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} - \tan x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -\cot \frac{\pi}{4} - \left(-\cot \frac{\pi}{6} \right) - \tan \frac{\pi}{4} - \left(-\tan \frac{\pi}{6} \right)$$

$$= -1 + \sqrt{3} - 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} = -2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$9) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \cos x + 2 \sin x) dx = (3 \sin x - 2 \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 5$$

$$10) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x} dx = \tan x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} + \cot x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = 2 - \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$11) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\sin x + \cos x) dx = (-\cos x + \sin x) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} - 1$$

$$12) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{-1}{\cos^2 x} dx = - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx = -\tan x \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = -1 - 1 = -2$$

$$13) \int_0^{\pi} (2 \cos x + 1) dx = (2 \sin x + x) \Big|_0^{\pi} = \pi$$

$$14) \int_0^{\pi} (1 + \cot x) \sin x dx = \int_0^{\pi} (\sin x + \cos x) dx = (-\cos x + \sin x) \Big|_0^{\pi} = 2$$

$$15) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = (\tan x - x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$16) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \cos x dx = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = -(\sin x) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = - \left[\sin \frac{\pi}{2} - \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = -2$$

$$17) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \sin x - \cos x) dx = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = (-3 \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -3(0 - 1) - (1 - 0) = 2.$$

$$18) \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 (2 \tan^2 x + 5) dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 [2(1 + \tan^2 x) + 3] dx = 2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 3 dx$$

$$= (2 \tan x) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^0 + (3x) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^0 = \frac{3\pi + 8}{4}$$

$$19) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-2}{3 \sin^2 x} dx = -\frac{2}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\frac{2}{3} (-\cot x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} \left(\cot \frac{\pi}{2} - \cot \frac{\pi}{4} \right) = \frac{2}{3} (0 - 1) = -\frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned}
20) \quad & \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sqrt{3}}{\sin^2 x} \right) dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x} dx + \sqrt{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x} dx = (\tan x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \sqrt{3} (-\cot x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \\
& = \left(\tan \frac{\pi}{3} - \tan \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{3} \left(\cot \frac{\pi}{3} - \cot \frac{\pi}{4} \right) \\
& = (\sqrt{3} - 1) - \sqrt{3} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - 1 \right) = 2\sqrt{3} - 2.
\end{aligned}$$

$$21) \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos^3 x - 3}{\cos^2 x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx - 3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx = 2 \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - 3 \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 3.$$

$$22) \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin^2 x}{1 - \cos^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 x} dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx = -\cot x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 + \frac{\pi}{4}$$

$$23) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) dx = (-\cos x + \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

$$24) \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x + \cos x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = (-\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (\sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -(0 - 1) + (1 - 0) = 2$$

Câu 17. Tính:

1) $\int_0^2 e^{-5x} dx$	2) $\int_0^1 3^{x+2} dx$	3) $\int_{-1}^1 3^{2x} dx$	4) $\int_0^1 e^x dx$
5) $\int_0^1 2^x dx$	6) $\int_0^1 (3 \cdot 2^x - e^x) dx$	7) $\int_0^1 (3^x - 2e^x) dx$	8) $\int_0^1 \frac{(e^x - 1)^2}{2e^x} dx$
9) $\int_0^1 e^{-2x} dx$	10) $\int_{-1}^0 \frac{1}{2^{3x}} dx$;	11) $\int_0^1 (2^{2x} \cdot 3^{x-1}) dx$	12) $\int_0^1 \frac{2^{x+1}}{3^x} dx$
13) $\int_1^3 e^{x-2} dx$	14) $\int_0^1 (2^x - 1)^2 dx$;	15) $\int_0^1 \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1} dx$	16) $\int_{-1}^0 5^{2x-1} dx$
17) $\int_0^2 2^{x+3} dx$	18) $\int_0^1 (3x^2 - 2e^x) dx$	19) $\int_0^2 (e^x - 4x^3) dx$	20) $\int_0^1 \frac{8^x + 1}{2^x + 1} dx$;

Lời giải

$$1) \int_0^2 e^{-5x} dx = \int_0^2 (e^{-5})^x dx = \frac{(e^{-5})^x}{\ln e^{-5}} \Big|_0^2 = -\frac{e^{-5x}}{5} \Big|_0^2 = -\frac{1}{5e^{10}} + \frac{1}{5}$$

$$2) \int_0^1 3^{x+2} dx = 9 \int_0^1 3^x dx = \frac{3^{x+2}}{\ln 3} \Big|_0^1 = \frac{18}{\ln 3}$$

$$3) \int_{-1}^1 3^{2x} dx = \int_{-1}^1 9^x dx = \frac{9^x}{\ln 9} \Big|_{-1}^1 = \frac{80}{9 \ln 9}$$

$$4) \int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

$$5) \int_0^1 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_0^1 = \frac{2^1}{\ln 2} - \frac{2^0}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}$$

$$6) \int_0^1 (3 \cdot 2^x - e^x) dx = \int_0^1 3 \cdot 2^x dx - \int_0^1 e^x dx = 3 \int_0^1 2^x dx - \int_0^1 e^x dx$$

$$= \frac{3}{\ln 2} - (e - 1) = \frac{3}{\ln 2} - e + 1.$$

$$7) \int_0^1 (3^x - 2e^x) dx = \int_0^1 3^x dx - 2 \int_0^1 e^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} \Big|_0^1 - 2e^x \Big|_0^1 = \frac{2}{\ln 3} - 2e + 2$$

$$8) \int_0^1 \frac{(e^x - 1)^2}{2e^x} dx = \int_0^1 \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{2e^x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (e^x - 2 + e^{-x}) dx$$

$$= \frac{1}{2} (e^x - 2x - e^{-x}) \Big|_0^1 = \frac{e - 2 - e^{-1}}{2}.$$

$$9) \int_0^1 e^{-2x} dx = \int_0^1 (e^{-2})^x dx = \frac{(e^{-2})^x}{\ln(e^{-2})} \Big|_0^1 = -\frac{1}{2} e^{-2x} \Big|_0^1 = -\frac{1}{2e^2} + \frac{1}{2}$$

$$10) \int_{-1}^0 \frac{1}{2^{3x}} dx = \int_{-1}^0 (2^{-3})^x dx = \frac{(2^{-3})^x}{\ln(2^{-3})} \Big|_{-1}^0 = \frac{-2^{-3x}}{3 \ln 2} \Big|_{-1}^0 = \frac{-1}{3 \ln 2} + \frac{8}{3 \ln 2} = \frac{7}{3 \ln 2}$$

$$11) \int_0^1 (2^{2x} \cdot 3^{x-1}) dx = \frac{1}{3} \int_0^1 12^x dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{12^x}{\ln 12} \Big|_0^1 = \frac{4}{\ln 12} - \frac{1}{3 \ln 12} = \frac{11}{3 \ln 12}$$

$$\int_0^1 \frac{2^{x+1}}{3^x} dx = 2 \int_0^1 \left(\frac{2}{3}\right)^x dx = 2 \cdot \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln \frac{2}{3}} \Big|_0^1 = \frac{\frac{4}{3}}{\ln \frac{2}{3}} - \frac{2}{\ln \frac{2}{3}} = -\frac{2}{3(\ln 2 - \ln 3)}$$

12)

$$\int_1^3 e^{x-2} dx = \int_1^3 \frac{e^x}{e^2} dx = \frac{e^x}{e^2} \Big|_1^3 = e - \frac{1}{e};$$

13)

$$\int_0^1 (2^x - 1)^2 dx = \int_0^1 (4^x - 2 \cdot 2^x + 1) dx = \left(\frac{4^x}{\ln 4} - 2 \cdot \frac{2^x}{\ln 2} + x \right) \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{2 \ln 2};$$

14)

$$\int_0^1 \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1} dx = \int_0^1 (e^x - 1) dx = (e^x - x) \Big|_0^1 = (e - 1) - 1 = e - 2$$

15)

$$\int_{-1}^0 5^{2x-1} dx = \frac{1}{5} \int_{-1}^0 5^{2x} dx = \frac{1}{5} \int_{-1}^0 25^x dx = \frac{25^x}{5 \ln 25} \Big|_{-1}^0 = \frac{24}{125 \ln 25}$$

16)

$$\int_0^2 2^{x+3} dx = \int_0^2 2^x \cdot 2^3 dx = 8 \int_0^2 2^x dx = 8 \cdot \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_0^2 = \frac{8}{\ln 2} (4 - 1) = \frac{24}{\ln 2}$$

17)

$$\int_0^1 (3x^2 - 2e^x) dx = 3 \int_0^1 x^2 dx - 2 \int_0^1 e^x dx = x^3 \Big|_0^1 - 2e^x \Big|_0^1 = 3 - 2e$$

18)

$$\int_0^2 (e^x - 4x^3) dx = (e^x - x^4) \Big|_0^2 = e^2 - 17$$

19)

$$\int_0^1 \frac{8^x + 1}{2^x + 1} dx = \int_0^1 \frac{2^{3x} + 1}{2^x + 1} dx = \int_0^1 (4^x - 2^x + 1) dx = \left(\frac{4^x}{\ln 4} - \frac{2^x}{\ln 2} + x \right) \Big|_0^1 = 1 + \frac{1}{2 \ln 2}$$

20)

Câu 18. Tính:

1) $\int_2^4 \frac{2}{x} dx$	2) $\int_1^2 \frac{2}{3x} dx$	3) $\int_1^2 \frac{1-2x}{x^2} dx$	4) $\int_1^2 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx$
5) $\int_1^4 \frac{x-4}{\sqrt{x}+2} dx$	6) $\int_{-e}^{-1} \frac{2}{x} dx$	7) $\int_1^e \frac{1}{t} dt$	8) $\int_1^2 \frac{3x^3 + 5x^2 - 6x + 4}{2x} dx$
9) $\int_1^e \frac{x^2 - 3\sqrt{x} + x \cdot 2^x}{x} dx$	10) $\int_1^2 \frac{(1+\sqrt{x})^2}{x} dx$	11) $\int_0^1 \frac{4^x - 1}{2^x - 1} dx$	12) $\int_1^2 \frac{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{x^2} dx$
13) $\int_1^2 \frac{xe^x + 1}{x} dx$			

Lời giải

$$1) \int_2^4 \frac{2}{x} dx = 2 \int_2^4 \frac{1}{x} dx = 2 \ln |x| \Big|_2^4 = 2(\ln 4 - \ln 2) = 2 \ln 2$$

1)

$$2) \int_1^2 \frac{2}{3x} dx = \frac{2}{3} \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \frac{2}{3} \ln |x| \Big|_1^2 = \frac{2}{3} \ln 2$$

$$3) \int_1^2 \frac{1-2x}{x^2} dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \right) dx = \left[-\frac{1}{x} - 2 \ln x \right]_1^2 = -\frac{1}{2} - 2 \ln 2$$

$$4) \int_1^2 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx = \int_1^2 \left(x + 2 + \frac{1}{x} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x + \ln x \right]_1^2 = \frac{7}{2} + \ln 2$$

$$5) \int_1^4 \frac{x-4}{\sqrt{x}+2} dx = \int_1^4 (\sqrt{x}-2) dx = \int_1^4 \left(x^{\frac{1}{2}} - 2 \right) dx = \left[\frac{2}{3} x \sqrt{x} - 2x \right]_1^4 = -\frac{4}{3}$$

$$6) \int_{-e}^{-1} \frac{2}{x} dx = 2 \ln |x| \Big|_{-e}^{-1} = 2 \ln |-1| - 2 \ln |-e| = -2$$

$$7) \int_1^e \frac{1}{t} dt = \ln t \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$$

$$8) \int_1^2 \frac{3x^3 + 5x^2 - 6x + 4}{2x} dx = \int_1^2 \left(\frac{3x^3}{2x} + \frac{5x^2}{2x} - \frac{6x}{2x} + \frac{4}{2x} \right) dx$$

$$= \frac{3}{2} \int_1^2 x^2 dx + \frac{5}{2} \int_1^2 x dx - 3 \int_1^2 dx + 2 \int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{x^3}{2} \Big|_1^2 + \frac{5x^2}{4} \Big|_1^2 - 3x \Big|_1^2 + 2 \ln |x| \Big|_1^2 = \frac{17}{4} + 2 \ln 2$$

$$9) \int_1^e \frac{x^2 - 3\sqrt{x} + x \cdot 2^x}{x} dx = \int_1^e x dx - 3 \int_1^e x^{-\frac{1}{2}} dx + \int_1^e 2^x dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \Big|_1^e - 6\sqrt{x} \Big|_1^e + \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - 6\sqrt{e} + \frac{11}{2} + \frac{2^e - 2}{\ln 2}$$

$$10) \int_1^2 \frac{(1+\sqrt{x})^2}{x} dx = \int_1^2 \frac{1+2\sqrt{x}+x}{x} dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} + 1 \right) dx$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{x} dx + 4 \int_1^2 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx + \int_1^2 dx = \ln x \Big|_1^2 + 4\sqrt{x} \Big|_1^2 + x \Big|_1^2$$

$$= \ln 2 + 4(\sqrt{2} - 1) + 1 = \ln 2 + 4\sqrt{2} - 3$$

$$11) \int_0^1 \frac{4^x - 1}{2^x - 1} dx = \int_0^1 \frac{(2^x - 1)(2^x + 1)}{2^x - 1} dx = \int_0^1 (2^x + 1) dx = \int_0^1 2^x dx + \int_0^1 dx$$

$$= \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_0^1 + x \Big|_0^1 = \frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} + 1 = 1 + \frac{1}{\ln 2}$$

$$12) \int_1^2 \frac{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{x^2} dx = \int_1^2 \left(x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \ln |x| - \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = \ln 2 + \frac{16}{3}$$

$$13) \int_1^2 \frac{xe^x + 1}{x} dx = \int_1^2 \left(e^x + \frac{1}{x} \right) dx = (e^x + \ln |x|) \Big|_1^2 = \ln 2 - e + e^2 ;$$

Câu 19. Tính

1) $\int_{-1}^1 x dx$	2) $\int_0^3 x^2 - 2x dx$	3) $\int_0^{2\pi} \sin x dx$	4) $\int_{-2}^3 x - 2 dx$
5) $\int_{-1}^2 x^2 + x - 2 dx$	6) $\int_{-1}^1 e^x - 1 dx$	7) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x - \sin x dx$	

Lời giải

1) Ta có: $\int_{-1}^1 |x| dx = \int_{-1}^0 |x| dx + \int_0^1 |x| dx = \int_{-1}^0 (-x) dx + \int_0^1 x dx = -\frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \left[0 - \left(-\frac{1}{2} \right) \right] + \left(\frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

2) Ta có: $|x^2 - 2x| = \begin{cases} -(x^2 - 2x), & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 2x, & 2 < x \leq 3. \end{cases}$

Do đó, $\int_0^3 |x^2 - 2x| dx = \int_0^2 |x^2 - 2x| dx + \int_2^3 |x^2 - 2x| dx$

$$= \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx + \int_2^3 (x^2 - 2x) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + x^2 \right) \Big|_0^2 + \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_2^3 = \frac{8}{3}.$$

3) $\int_0^{2\pi} |\sin x| dx = \int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} + \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} = 4$

4) $\int_{-2}^3 |x - 2| dx = \int_{-2}^2 |x - 2| dx + \int_2^3 |x - 2| dx = -\int_{-2}^2 (x - 2) dx + \int_2^3 (x - 2) dx = -\left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_{-2}^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_2^3 = \frac{17}{2}$

5) $x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -2 \notin [-1; 2]$

Ta có $x^2 + x - 2 \leq 0$ với mọi $x \in [-1; 1]$ và $x^2 + x - 2 \geq 0$ với mọi $x \in [1; 2]$.

Từ đó, $\int_{-1}^2 |x^2 + x - 2| dx = \int_{-1}^1 [-(x^2 + x - 2)] dx + \int_1^2 (x^2 + x - 2) dx$

$$= - \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_{-1}^1 + \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_1^2 = \frac{31}{6}.$$

6) Ta có $e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Ta có $e^x - 1 \leq 0$ với mọi $x \in [-1; 0]$ và $e^x - 1 \geq 0$ với mọi $x \in [0; 1]$.

$$\text{Từ đó, } \int_{-1}^1 |e^x - 1| dx = \int_{-1}^0 (1 - e^x) dx + \int_0^1 (e^x - 1) dx$$

$$= (x - e^x) \Big|_{-1}^0 + (e^x - x) \Big|_0^1 = e + \frac{1}{e} - 2.$$

7) Ta có $\cos x - \sin x = 0$ có nghiệm $x = \frac{\pi}{4}$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$. Do đó:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} |\cos x - \sin x| dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x - \sin x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x - \sin x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\sin x - \cos x) dx \\ &= (\sin x + \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + (-\cos x - \sin x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Câu 20. Tìm đạo hàm của hàm số $F(x) = \sqrt{1+x^2}$.

$$\text{Từ đó, tính tích phân } \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

Lời giải

$$\text{Ta có } F'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} (x \in \mathbb{R}).$$

$$\text{Từ đó, ta có } \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 F'(x) dx = F(x) \Big|_0^1 = F(1) - F(0) = \sqrt{2} - 1.$$

Câu 21. Tìm đạo hàm của hàm số $F(x) = \sqrt{4x+1}$. Từ đó, tính tích phân $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4x+1}} dx$.

Lời giải

$$\text{Ta có } F'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x+1}}, x > -\frac{1}{4}.$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4x+1}} dx &= \int_0^1 \frac{F'(x)}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 F'(x) dx = \frac{1}{2} F(x) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2} [F(1) - F(0)] = \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1).\end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ \frac{1}{x}, & x > 1. \end{cases}$$

Câu 22. Cho hàm số

a) Chứng tỏ rằng hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) Tính $\int_{-1}^2 f(x) dx$.

Lời giải

a) Hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1; \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1; f(1) = 1$.

Suy ra hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) $\int_{-1}^2 f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_{-1}^1 x^2 dx + \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-1}^1 + \ln x \Big|_1^2 = \frac{2}{3} + \ln 2$.

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x) = \begin{cases} 4 - 3x^2, & x < 1 \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$ Tính $f(2) - f(0)$.

Lời giải

$$\begin{aligned}f(2) - f(0) &= \int_0^2 f'(x) dx = \int_0^1 f'(x) dx + \int_1^2 f'(x) dx \\ &= \int_0^1 (4 - 3x^2) dx + \int_1^2 dx = (4x - x^3) \Big|_0^1 + x \Big|_1^2 = 4.\end{aligned}$$

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ và thỏa mãn

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [3 \cos x + 2f'(x)] dx = -5; f(0) = 1.$$

Tính giá trị $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải

Ta có
$$-5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [3 \cos x + 2f'(x)] dx = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x) dx = 3 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x) dx \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x) dx = -4$$

Do đó,
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(0) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x) dx = 1 - 4 = -3$$

Câu 25. Cho a là số thực dương, tính tích phân $I = \int_{-1}^a |x| dx$ theo a .

Lời giải

Vì $a > 0$ nên
$$I = - \int_{-1}^0 x dx + \int_0^a x dx = \frac{1}{2} + \frac{a^2}{2} = \frac{1+a^2}{2}$$

Câu 26. (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019) Cho số thực $m > 1$ thỏa mãn $\int_1^m |2mx - 1| dx = 1$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

Lời giải

Do $m > 1 \Rightarrow 2m > 2 \Rightarrow \frac{1}{2m} < 1$. Do đó với $m > 1, x \in [1; m] \Rightarrow 2mx - 1 > 0$.

Vậy
$$\int_1^m |2mx - 1| dx = \int_1^m (2mx - 1) dx = (mx^2 - x) \Big|_1^m = m^3 - m - m + 1 = m^3 - 2m + 1$$

Từ đó theo bài ra ta có
$$m^3 - 2m + 1 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$
. Do $m > 1$ vậy $m = \sqrt{2}$.

Câu 27. (Chuyên Hạ Long 2019) Có bao nhiêu số tự nhiên m để $\int_0^2 |x^2 - 2m^2| dx = \left| \int_0^2 (x^2 - 2m^2) dx \right|$.

Lời giải

$$\int_0^2 |x^2 - 2m^2| dx = \left| \int_0^2 (x^2 - 2m^2) dx \right| \quad (*)$$

Ta có:
$$x^2 - 2m^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -m\sqrt{2} \\ x = m\sqrt{2} \end{cases}$$

TH1. Nếu $m = 0$ thì $(*)$ luôn đúng.

TH2. Nếu $m \neq 0$ thì $(*)$ đúng $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2m^2 > 0 \quad (1) \\ x^2 - 2m^2 < 0 \quad (2) \end{cases}$ với mọi $x \in [0; 2]$.

$+$) $m > 0$.

$$(1) \text{ đúng} \Leftrightarrow \begin{cases} -m\sqrt{2} < m\sqrt{2} \leq 0 \\ 2 \leq -m\sqrt{2} < m\sqrt{2} \end{cases} \text{ (vô nghiệm).}$$

$$(2) \text{ đúng} \Leftrightarrow \begin{cases} -m\sqrt{2} \leq 0 \\ m\sqrt{2} \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m \geq \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \sqrt{2}$$

$$+) \quad m < 0.$$

$$(1) \text{ đúng} \Leftrightarrow \begin{cases} m\sqrt{2} < -m\sqrt{2} \leq 0 \\ 2 \leq m\sqrt{2} < -m\sqrt{2} \end{cases} \text{ (vô nghiệm).}$$

$$(2) \text{ đúng} \Leftrightarrow \begin{cases} m\sqrt{2} \leq 0 \\ -m\sqrt{2} \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \leq -\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -\sqrt{2}$$

Suy ra $m \in (-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty) \cup \{0\}$ là giá trị cần tìm.

Câu 28. Cho $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Tính $\int_0^3 f(x) dx$.

Lời giải

Hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

$$\text{Ta có } f(1) = 1, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 1) = 1$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

Do đó hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \int_0^3 f(x) dx &= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^3 (2x - 1) dx \\ &= \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 + \left. (x^2 - x) \right|_1^3 = \frac{1}{3} + 6 = \frac{19}{3}. \end{aligned}$$

Câu 29. (THPT Lê Thánh Tông - HCM-2022) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & \text{khi } x < 2 \\ 4x^3 - 1, & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$. Giả sử $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $F(0) = 3$. Giá trị $F(3) - 5F(-5)$ bằng

Lời giải

$$\text{Ta có: } F(3) - F(0) + 5F(0) - 5F(-5) = \int_0^3 f(x) dx + 5 \int_{-5}^0 f(x) dx$$

$$= \int_0^2 (2x + 3) dx + \int_2^3 (4x^3 - 1) dx + 5 \int_{-5}^0 (2x + 3) dx = 24$$

Suy ra $F(3) - 5F(-5) + 4F(0) = 24 \Rightarrow F(3) - 5F(-5) = 12$.

Câu 30. (Mã 104 - 2021 Lần 1) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng

Lời giải

Ta có: $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (3x^2 + 1) dx = 2 = F(1) - F(0) \Rightarrow F(1) = 2 + F(0) = 4$

Trên khoảng $(-\infty; 1)$, ta có: $\int f(x) dx = \int (3x^2 + 1) dx = x^3 + x + C$

Mà $F(0) = 2 \Rightarrow C = 2 \Rightarrow F(x) = x^3 + x + 2$.

Trên nửa khoảng $[1; +\infty)$, ta có: $\int f(x) dx = \int (2x + 2) dx = x^2 + 2x + C$

Mà $F(1) = 4 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow F(x) = x^2 + 2x + 1$.

Do đó: $F(-1) + 2F(2) = 0 + 2 \cdot 9 = 18$.

Câu 31. Xác định số thực dương m để tích phân $\int_0^m (x - x^2) dx$ có giá trị lớn nhất.

Lời giải

$$P = \int_0^m (x - x^2) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^m = \frac{m^2}{2} - \frac{m^3}{3}$$

Đặt $f(m) = \frac{m^2}{2} - \frac{m^3}{3} \Rightarrow f'(m) = m - m^2 \Rightarrow f'(m) = 0 \Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = 1$

Lập bảng biến thiên

m	0	1	$+\infty$
$f'(m)$		0	-
$f(m)$		$\frac{1}{6}$	
	$-\infty$		$-\infty$

Vậy $f(m)$ đạt GTLN tại $m = 1$.

DẠNG 2. ỨNG DỤNG

Bài toán 1. BÀI TOÁN VỀ QUÃNG ĐƯỜNG

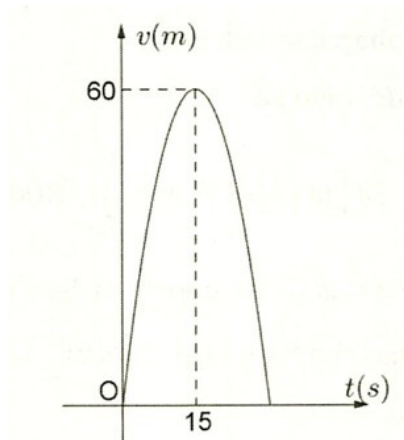
Phương pháp giải

- Quãng đường mà vật đi được trong khoảng thời gian từ thời điểm a đến thời điểm b là:

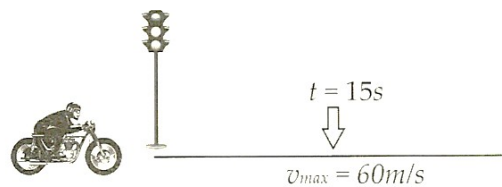
$$s(t) = \int_a^b v(t) dt$$

- Rút ra kết luận bài toán.

Ví dụ 1. Một xe mô tô phân khối lớn sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu phóng nhanh với vận tốc tăng liên tục được biểu thị bằng đồ thị là đường cong parabol như hình vẽ



Biết rằng, sau 15 s thì xe đạt đến vận tốc cao nhất 60 m/s và bắt đầu giảm tốc. Hỏi từ lúc bắt đầu đến lúc đạt vận tốc cao nhất thì xe đã đi được quãng đường bằng bao nhiêu mét?



Bài giải

Hàm vận tốc $v(t) = at^2 + bt + C$ có dạng là đường parabol có đỉnh $I(15; 60)$, đồng thời đi qua gốc tọa độ $O(0; 0)$, suy ra

$$\begin{cases} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0 \\ -\frac{b}{2a} = 15 \\ a \cdot 15^2 + b \cdot 15 + c = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 30a + b = 0 \\ a \cdot 15^2 + b \cdot 15 + 0 = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = -\frac{4}{15} \\ b = 8. \end{cases}$$

Theo đồ thị thì xe bắt đầu tăng tốc lúc $t = 0$ và đạt vận tốc cao nhất lúc $t = 15$ s nên quãng đường đi được của xe từ lúc bắt đầu tăng tốc đến lúc đạt vận tốc cao nhất là:

$$\int_0^{15} v(t) dt = \int_0^{15} \left(-\frac{4}{15}t^2 + 8t \right) dt = \left(-\frac{4}{45}t^3 + 4t^2 \right) \Big|_0^{15} = 600(m).$$

Vậy từ lúc bắt đầu tăng tốc đến lúc đạt vận tốc cao nhất thì xe đã đi được một quãng đường dài 600 m .

Bài toán 2. BÀI TOÁN VỀ CÔNG CỦA LỰC TÁC DỤNG VÀO VẬT

Phương pháp giải

- Nếu một lực không đổi F tác dụng lên vật M dọc theo một khoảng cách (độ dời) d , thì công W sinh ra trong quá trình dịch chuyển bằng tích của lực F và độ dài khoảng cách d mà nó đã tác dụng, ta có công thức $W = F \cdot d$.

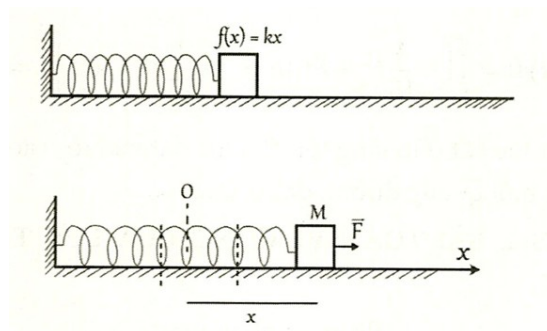
- Định nghĩa trên luôn đúng khi lực F không đổi. Tuy nhiên, nhiều trường hợp lực F biến thiên trong suốt quá trình thực hiện công. Trong các tình huống như vậy, người ta thường chia quá trình này thành nhiều phần nhỏ và tính công toàn phần nhờ lấy tổng các công tương ứng với các phần được chia (được tính nhờ phép tính tích phân).

- Giả sử $f(x)$ là lực tác dụng lên vật tại vị trí x , đường đi của lực tác dụng (quỹ đạo của vật được tác dụng lực) tương ứng với trục tọa độ Ox . Khi đó, công toàn phần sinh ra trong cả quá trình chuyển động

$$W = \int_a^b f(x)dx$$

của vật từ vị trí $x=a$ đến vị trí $x=b$ là:

Ví dụ 2. Một lực $40N$ cần thiết để kéo căng một chiếc lò xo có độ dài tự nhiên từ $10cm$ đến $15cm$. Hãy tính công sinh ra khi kéo lò xo từ độ dài $15cm$ đến $18cm$.



Bài giải

Ban đầu, lò xo có độ dài tự nhiên $10cm$. Dùng một lực $40N$ kéo giãn lò xo có độ dài $15cm$ thì lò xo bị kéo dãn một đoạn có độ dài $5cm = 0,05m$.

Vậy ta có $f(0,05) = 40 \Leftrightarrow 0,05k = 40 \Leftrightarrow k = 800$.

Suy ra $f(x) = 800x$.

Vậy công sinh ra khi kéo căng lò xo từ $15cm$ đến $18cm$ là

$$W = \int_{0,05}^{0,08} 800x dx = 800 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{0,05}^{0,08} = 1,56(J).$$

Bài toán 3. BÀI TOÁN VỀ TĂNG TRƯỞNG, PHÁT TRIỂN

Phương pháp giải

- Cho hàm số $f(x)$ biểu diễn cho sự tăng (hay giảm) số lượng của một đối tượng nào đó (số người, vi khuẩn, vi trùng, lượng nước chảy, ...)

- Giá trị $f(x)$ là số lượng của đối tượng đó tại thời điểm x .

- Đạo hàm $f'(x)$ chính là tốc độ tăng (hay giảm) của đối tượng đó tại thời điểm x .

- Số lượng tăng thêm (hoặc giảm đi) của đối tượng trong khoảng $x \in [a; b]$ là $\int_a^b f(x)dx$

Ví dụ 3. Tốc độ thay đổi của số lượng người V (tính bằng ngàn người) tham gia công tác tình nguyện ở nước Mỹ từ năm 2000 đến năm 2006 có thể được mô hình bởi hàm số $V(t) = 119,85t^2 - 30e^t + 37,26e^{-t}$ với t là năm ($t=0$ ứng với năm 2000). Hỏi số lượng người tham gia tình nguyện trong giai đoạn tăng lên hay giảm đi với số lượng bao nhiêu?

Lời giải

Sự chênh lệch của số người tham gia tình nguyện trong giai đoạn từ năm 2000 đến năm 2006 là:

$$\begin{aligned}\int_0^6 V(t)dt &= \int_0^6 (119,85t^2 - 30e^t + 37,26e^{-t}) \\ &= \left(\frac{119,85}{3}t^3 - 30e^t - 37,26e^{-t} \right) \Big|_0^6 \\ &= -3473,756166 - (-67,261) \approx 3406.\end{aligned}$$

Vậy trong khoảng thời gian từ năm 2000 đến năm 2006, số lượng người tham gia công tác tình nguyện đã giảm đi khoảng 3406 người.

Bài toán 4. BÀI TOÁN VỀ KINH TẾ

Phương pháp giải

- Nếu biết $f(x)$ là hàm giá trị biên, thì hàm mục tiêu sẽ là $\int f(x)dx = F(x) + C$.
- Rút ra kết luận bài toán.

Ví dụ 4. Lợi nhuận biên của một sản phẩm được xác định bởi $\pi'(x) = -0,0005x + 12,2$.

- Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi sản lượng bán tăng từ 100 lên 101 đơn vị?
- Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi sản lượng bán tăng từ 100 lên 110 đơn vị?

Bài giải

- Sự thay đổi của lợi nhuận khi tăng sản lượng bán từ 100 lên 101 đơn vị là

$$\int_{100}^{101} \frac{d\pi}{dx} = \int_{100}^{101} (-0,0005x + 12,2)dx = \left(-0,00025x^2 + 12,2x \right) \Big|_{100}^{101} = 12,15$$

(đơn vị tiền)

- Sự thay đổi của lợi nhuận khi tăng sản lượng bán từ 100 lên 110 đơn vị là

$$\int_{100}^{110} \frac{d\pi}{dx} = \int_{100}^{110} (-0,0005x + 12,2)dx = \left(-0,00025x^2 + 12,2x \right) \Big|_{100}^{110} = 121,48$$

(đơn vị tiền)

Ví dụ 5. Trong kì kinh doanh 2 năm, chi phí sản xuất một đơn vị sản phẩm được cho bởi phương trình $C = 0,005t^2 + 0,01t + 13,15; 0 \leq t \leq 24, t$ tính bằng tháng.

Tìm chi phí trung bình để sản xuất một đơn vị sản phẩm trong kì kinh doanh này.

Bài giải

Chi phí trung bình được xác định bởi

$$\frac{1}{24} \int_0^{24} (0,005t^2 + 0,01t + 13,15) dt = \frac{1}{24} \left(\frac{0,005t^3}{3} + \frac{0,01t^2}{2} + 13,15t \right) \Big|_0^{24}.$$

Hay $\frac{1}{24} \int_0^{24} (0,005t^2 + 0,01t + 13,15) dt = \frac{1}{24} (341,52) = 14,23$ (đơn vị tiền)

Câu 32. Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 5 - 2 \cos t (m/s)$. Tính quãng đường vật chuyển động trong khoảng thời gian từ lúc $t = 0(s)$ đến $t = \frac{\pi}{2}(s)$.

Lời giải

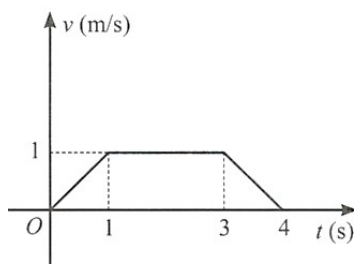
$$s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} v(t) dt$$

Ta có công thức tính quãng đường vật đi được là

Vậy quãng đường vật chuyển động được là:

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (5 - 2 \cos t) dt = (5t - 2 \sin t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5\pi}{2} - 2(m).$$

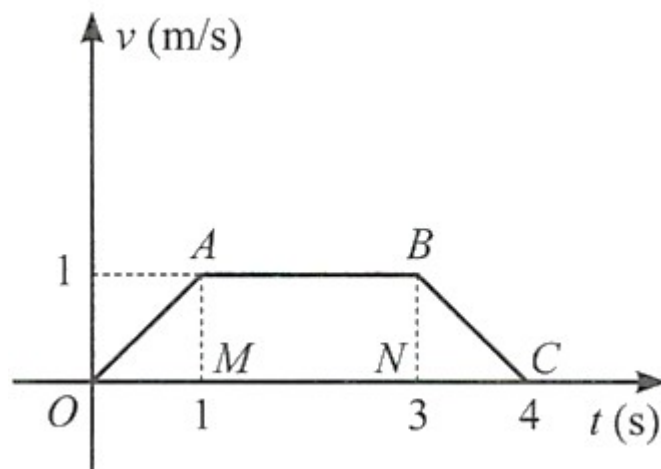
Câu 33. Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)$ được cho bởi đồ thị như Hình.



a) Tính quãng đường vật đi được từ lúc $t = 1(s)$ đến lúc $t = 3(s)$.

b) Tính quãng đường vật đi được trong 4 giây đầu tiên.

Lời giải



a) Dựa vào đồ thị, hàm số biểu diễn vận tốc của vật từ lúc $t = 1$ đến lúc $t = 3$ là $v(t) = 1$. Suy ra quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó là:

$$s = \int_1^3 v(t) dt = \int_1^3 1 dt = t \Big|_1^3 = 2(m).$$

b) Quãng đường vật đi được trong 4 giây đầu tiên là:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^4 v(t) dt = \int_0^1 v(t) dt + \int_1^3 v(t) dt + \int_3^4 v(t) dt \\ &= \int_0^1 t dt + \int_1^3 1 dt + \int_3^4 (-t + 4) dt \\ &= \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 + t \Big|_1^3 + \left(-\frac{t^2}{2} + 4t \right) \Big|_3^4 = \frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{2} = 3(m). \end{aligned}$$

Câu 34. Một chiếc xe đang chuyển động với tốc độ $v_0 = 5 \text{ m/s}$ thì tăng tốc với gia tốc không đổi $a = 3 \text{ m/s}^2$.

a) Sau 5 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc, tốc độ của xe là bao nhiêu?

b) Tính quãng đường xe đi được trong 5 giây đầu kể từ khi tăng tốc.

Lời giải

a) Ta có $v(t) = \int a dt = \int 3 dt = 3t + C$.

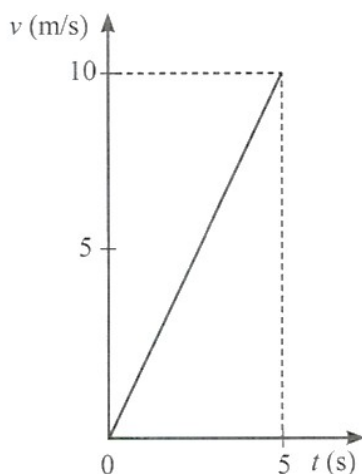
Mà $v(0) = v_0 = 5$ nên $3 \cdot 0 + C = 5$ hay $C = 5$.

Suy ra $v(t) = 3t + 5(\text{m/s})$, do đó $v(5) = 20(\text{m/s})$.

b) Quãng đường xe đi được là

$$s = \int_0^5 v(t) dt = \int_0^5 (3t + 5) dt = \left(\frac{3t^2}{2} + 5t \right) \Big|_0^5 = 62,5(m).$$

Câu 35. Một vật chuyển động với vận tốc được cho bởi đồ thị ở Hình



a) Tính quãng đường mà vật di chuyển được trong 5 giây đầu tiên.

b) Tính quãng đường mà vật di chuyển được từ thời điểm 1 giây đến 5 giây.

Lời giải

Đồ thị hàm số biểu diễn vận tốc theo thời gian là một đường thẳng qua gốc toạ độ, nên ta có:
 $v(t) = at (a \in \mathbb{R})$.

Vì khi $t = 5$ thì $v = 10$ nên ta có: $10 = a \cdot 5$ hay $a = 2$. Vậy $v(t) = 2t$.

a) Quãng đường mà vật di chuyển được trong 5 giây đầu tiên là:

$$\int_0^5 v(t) dt = \int_0^5 2t dt = t^2 \Big|_0^5 = 25(m).$$

b) Quãng đường mà vật di chuyển được từ thời điểm 1 giây đến 5 giây là:

$$\int_1^5 v(t) dt = \int_1^5 2t dt = t^2 \Big|_1^5 = 25 - 1 = 24(m)$$

Câu 36. Dọc theo đường thẳng (gắn trục toạ độ Ox có độ dài đơn vị bằng 1m), một vật chuyển động với vận tốc (m/s) $v(t) = 12 - 4t, 0 \leq t \leq 10$.

a) Tính hiệu số toạ độ (độ dịch chuyển) của vật giữa hai thời điểm $t = 2$ và $t = 5$.

b) Tính quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian từ $t = 2$ đến $t = 5$.

Lời giải

a) Hiệu số toạ độ của vật giữa hai thời điểm $t = 2$ và $t = 5$ là

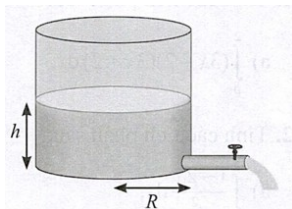
$$d = \int_2^5 v(t) dt = \int_2^5 (12 - 4t) dt = (12t - 2t^2) \Big|_2^5 = -6(m).$$

b) Quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian từ $t = 2$ đến $t = 5$ là

$$\begin{aligned} s &= \int_2^5 |v(t)| dt = \int_2^5 |12 - 4t| dt = \int_2^3 (12 - 4t) dt + \int_3^5 (4t - 12) dt \\ &= (12t - 2t^2) \Big|_2^3 + (2t^2 - 12t) \Big|_3^5 = 2 + 8 = 10(m). \end{aligned}$$

Câu 37. Một bồn chứa nước có dạng hình trụ với chiều cao 4 m và bán kính đáy $0,5m$. Lúc đầu bồn chứa đầy nước. Kể từ khi bắt đầu xả nước, tốc độ thay đổi chiều cao của mực nước trong bồn theo thời

gian t là $h'(t) = \frac{t}{50} - \frac{2}{5}$ (m/phút)



a) Tìm chiều cao $h(t)$ của mực nước trong bồn sau t phút kể từ khi bắt đầu xả nước.

b) Cần thời gian bao lâu để xả hết nước trong bồn?

c) Sau khi xả 5 phút, trong bồn còn bao nhiêu lít nước?

Lời giải

$$\text{a)} \quad h(t) = \int h'(t) dt = \int \left(\frac{t}{50} - \frac{2}{5} \right) dt = \frac{t^2}{100} - \frac{2t}{5} + C$$

Ta có $h(0) = 4$, suy ra $C = 4$.

$$\text{Vậy} \quad h(t) = \frac{t^2}{100} - \frac{2t}{5} + 4(m)$$

$$\text{b)} \text{ Ta có } h(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{t^2}{100} - \frac{2t}{5} + 4 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 40t + 400 = 0 \\ \Leftrightarrow (t - 20)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 20.$$

Suy ra cần 20 phút để xả hết nước trong bồn.

c) Sau khi xả 5 phút, chiều cao của mực nước trong bồn là

$$h(5) = \frac{5^2}{100} - \frac{2 \cdot 5}{5} + 4 = 2,25(m).$$

Thể tích nước trong bồn lúc đó là

$$V = \pi \cdot (0,5)^2 \cdot 2,25 = \frac{9\pi}{16} \approx 1,767(m^3).$$

Ta có $1,767m^3 = 1767l$. Vậy sau khi xả 5 phút, trong bồn còn khoảng 1767l nước.

Câu 38. Sau khi được bắn lên từ mặt đất theo phương thẳng đứng, một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 20 - 10t(m/s)$ với $0 \leq t \leq 4$.

a) Xác định độ cao của vật (tính theo mét) tại thời điểm $t = 3$.

b) Tính quãng đường vật đi được trong 3 giây đầu.

Lời giải

a) Kí hiệu $h(t)$ là độ cao của vật (tính theo mét) tại thời điểm $t(0 \leq t \leq 4)$.

Ta có $h'(t) = v(t)$ và $h(0) = 0$. Từ đó

$$h(3) = h(3) - h(0) = \int_0^3 v(t) dt = \int_0^3 (20 - 10t) dt = (20t - 5t^2) \Big|_0^3 = 15(m).$$

b) Quãng đường vật đi được trong 3 giây đầu là

$$s = \int_0^3 |v(t)| dt = \int_0^2 |20 - 10t| dt + \int_2^3 |10t - 20| dt \\ = (20t - 5t^2) \Big|_0^2 + (5t^2 - 20t) \Big|_2^3 = 20 + 5 = 25(m).$$

Câu 39. Một ô tô đang di chuyển với tốc độ $20m/s$ thì hãm phanh nên tốc độ (m/s) của xe thay đổi theo thời gian t (giây) được tính theo công thức $v(t) = 20 - 5t(0 \leq t \leq 4)$.



Kể từ khi hãm phanh đến khi dừng, ô tô đi được quãng đường bao nhiêu?

- a) Tính quãng đường xe di chuyển từ khi hãm phanh đến khi dừng
- b) Tính tốc độ trung bình của xe trong khoảng thời gian đó.

Lời giải

- a) Xe dừng khi $v(t) = 20 - 5t = 0$ hay $t = 4 (v(t) = 20 - 5t \geq 0 \text{ với mọi } t \in [0; 4])$.

Từ đó, quãng đường xe di chuyển từ khi bắt đầu hãm phanh đến khi dừng là

$$s = \int_0^4 v(t) dt = \int_0^4 (20 - 5t) dt = \left(20t - \frac{5t^2}{2} \right) \Big|_0^4 = 40(m)$$

- b) Tốc độ trung bình của xe trong khoảng thời gian đó là: $v_{\text{tb}} = \frac{s}{t} = \frac{40}{4} = 10(m/s)$

Câu 40. Sau khi xuất phát, ô tô di chuyển với tốc độ $v(t) = 2t - 0,03t^2 (0 \leq t \leq 10)$ trong đó $v(t)$ tính theo m/s , thời gian t tính theo giây với $t = 0$ là thời điểm xe xuất phát.

- a) Tính quãng đường xe đi được sau 5 giây, sau 10 giây.
- b) Tính tốc độ trung bình của xe trong khoảng thời gian từ $t = 0$ đến $t = 10$.

Lời giải

Gọi $s(t)(m)$ là quãng đường ô tô đi được sau t giây.

Ta có $s(t)$ là nguyên hàm của $v(t)$.

- a) Quãng đường xe đi được sau 5 giây là

$$\begin{aligned} s(5) - s(0) &= \int_0^5 v(t) dt = \int_0^5 (2t - 0,03t^2) dt = (t^2 - 0,01t^3) \Big|_0^5 \\ &= (5^2 - 0,01 \cdot 5^3) - (0^2 - 0,01 \cdot 0^3) = 23,75 \end{aligned}$$

Quãng đường xe đi được sau 10 giây là

$$\begin{aligned} s(10) - s(0) &= \int_0^{10} v(t) dt = \int_0^{10} (2t - 0,03t^2) dt = (t^2 - 0,01t^3) \Big|_0^{10} \\ &= (10^2 - 0,01 \cdot 10^3) - (0^2 - 0,01 \cdot 0^3) = 90 \end{aligned}$$

- b) Tốc độ trung bình của xe trong khoảng thời gian từ $t = 0$ đến $t = 10$ là:

$$v_{th} = \frac{s}{t} = \frac{90}{10} = 9(m/s)$$

Câu 41. Một vật chuyển động dọc theo một đường thẳng sao cho vận tốc của nó tại thời điểm t (giây) là $v(t) = t^2 - t - 6(m/s)$.

a) Tìm độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1 \leq t \leq 4$, tức là tính $\int_1^4 v(t) dt$.

b) Tìm tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian này, tức là tính $\int_1^4 |v(t)| dt$.

Lời giải

Giả sử vật chuyển động trên một trục số nằm ngang, chiều dương hướng từ trái sang phải.

a) Ta có $\int_1^4 v(t) dt = \int_1^4 (t^2 - t - 6) dt = \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 - 6t \right) \Big|_1^4 = -\frac{9}{2}$.

Vậy trong khoảng thời gian $1 \leq t \leq 4$, vật dịch chuyển sang bên trái được $4,5m$ so với vị trí tại thời điểm $t=1$ (giây).

(Trong quá trình chuyển động, lúc thì vật đi sang trái, lúc thì đi sang phải, nhưng tại thời điểm $t=4$ (giây) thì vật có vị trí nằm ở phía bên trái và cách vị trí của vật tại thời điểm $t=1$ (giây) một khoảng là 4,5 mét).

b) Ta có

$$\begin{aligned} \int_1^4 |v(t)| dt &= \int_1^4 |t^2 - t - 6| dt = \int_1^3 |t^2 - t - 6| dt + \int_3^4 |t^2 - t - 6| dt \\ &= \int_1^3 (-t^2 + t + 6) dt + \int_3^4 (t^2 - t - 6) dt \\ &= \left(-\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + 6t \right) \Big|_1^3 + \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 - 6t \right) \Big|_3^4 = \frac{22}{3} + \frac{17}{6} = \frac{61}{6}. \end{aligned}$$

Vậy tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian $1 \leq t \leq 4$ (giây) (tính cả quãng đường lúc đi sang trái, quãng đường lúc đi sang phải) là $\frac{61}{6}$ (m).

Câu 42. Giả sử lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của một sản phẩm được mô hình hoá bằng công thức $P'(x) = -0,0005x + 12,2$

Ở đây $P(x)$ là lợi nhuận (tính bằng triệu đồng) khi bán được x đơn vị sản phẩm.

a) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 101 đơn vị sản phẩm.

b) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 110 đơn vị sản phẩm.

Lời giải

a) Sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 101 đơn vị sản phẩm là

$$\int_{100}^{101} (-0,0005x + 12,2) dx = \left(-\frac{1}{4000}x^2 + 12,2x \right) \Big|_{100}^{101} = 12,14975 \quad (\text{triệu đồng}).$$

b) Sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 110 đơn vị sản phẩm là

$$\int_{100}^{110} (-0,0005x + 12,2) dx = \left(-\frac{1}{4000}x^2 + 12,2x \right) \Big|_{100}^{110} = 121,475 \quad (\text{triệu đồng}).$$

Câu 43. Giả sử vận tốc v của dòng máu ở khoảng cách r từ tâm của động mạch bán kính R không đổi, có thể được mô hình hoá bởi công thức

$v = k(R^2 - r^2)$ trong đó k là một hằng số. Tìm vận tốc trung bình (đối với r) của động mạch trong khoảng $0 \leq r \leq R$. So sánh vận tốc trung bình với vận tốc lớn nhất.

Lời giải

Vận tốc trung bình (đối với r) của động mạch trong khoảng $0 \leq r \leq R$ là

$$\frac{1}{R-0} \int_0^R k(R^2 - r^2) dr = \frac{1}{R} \left(kR^2r - k\frac{r^3}{3} \right) \Big|_0^R = \frac{1}{R} \left(kR^3 - k\frac{R^3}{3} \right) = kR^2 - k\frac{1}{3}R^2 = \frac{2}{3}kR^2.$$

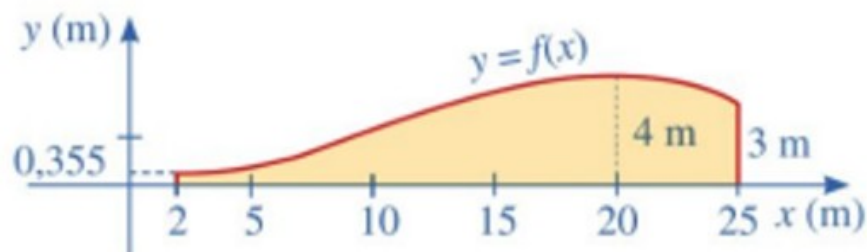
Xét hàm số $v(r) = k(R^2 - r^2), 0 \leq r \leq R$. Ta có $v'(r) = -2kr; v'(r) = 0 \Leftrightarrow r = 0$.

Suy ra vận tốc lớn nhất của dòng máu là $v_{CD} = kR^2$.

Vậy vận tốc lớn nhất của dòng máu lớn hơn vận tốc trung bình là 1,5 lần.

Câu 44. Năng lượng gió trên đất liền là một trong những công nghệ năng lượng tái tạo đang được phát triển ở quy mô toàn cầu. Năng lượng gió không trực tiếp phát thải khí nhà kính, không thải ra môi trường các chất ô nhiễm khác, cũng như không tiêu thụ nước để làm mát cho các nhà máy. Các turbine gió thường có ba cánh quay trên một trục ngang, lấy động năng từ quá trình di chuyển dòng không khí (gió) để chuyển đổi thành điện năng thông qua một máy phát điện được kết nối với lưới điện. Hình thang cong (tô màu vàng) trong Hình mô tả một phần mặt cắt đứng của cánh turbine, được giới hạn bởi các đường

thẳng $x=2, x=25$, trục Ox và đồ thị hàm số $y = f(x) = -\frac{1}{800}(x^3 - 33x^2 + 120x - 400)$.



Hãy tính diện tích hình thang cong đó.

Lời giải

Diện tích của hình thang cong được tô màu vàng là:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_2^{25} \frac{1}{800} (x^3 - 33x^2 + 120x - 400) dx \\
 &= -\frac{1}{800} \left(\int_2^{25} x^3 dx - 33 \int_2^{25} x^2 dx + 120 \int_2^{25} x dx - 400 \int_2^{25} dx \right) \\
 &= -\frac{1}{800} \left(\frac{x^4}{4} \Big|_2^{25} - 11x^3 \Big|_2^{25} + 60x^2 \Big|_2^{25} - 400x \Big|_2^{25} \right) = \frac{184299}{3200} (m^2).
 \end{aligned}$$

Câu 45. a) Cho một vật chuyển động với vận tốc $y = v(t) (m/s)$. Cho $0 < a < b$ và $v(t) > 0$ với mọi $t \in [a; b]$. Hãy giải thích vì sao $\int_a^b v(t) dt$ biểu thị quãng đường mà vật đi được trong khoảng thời gian từ a đến b (a, b tính theo giây).

b) Áp dụng công thức ở câu a) để giải bài toán sau: Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 2 - \sin t (m/s)$. Tính quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = 0(s)$ đến thời điểm $t = \frac{3\pi}{4} (s)$.

Lời giải

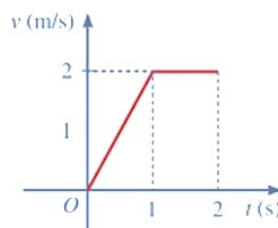
a) Vì vận tốc là đạo hàm của quãng đường nên $\int_a^b v(t) dt = s(t) \Big|_a^b$

Do đó $\int_a^b v(t) dt$ biểu thị quãng đường mà vật đi được trong khoảng thời gian từ a đến b

b) Quãng đường vật di chuyển trong khoảng

$$s(t) = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} v(t) dt = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (2 - \sin t) dt = (2t + \cos t) \Big|_0^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{3\pi}{2} - \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \approx 3 (m/s)$$

Câu 46. Một vật chuyển động với vận tốc được cho bởi đồ thị ở Hình.



a) Tính quãng đường mà vật di chuyển được trong 1 giây đầu tiên.

b) Tính quãng đường mà vật di chuyển được trong 2 giây đầu tiên.

Lời giải

a) Trong 1 giây đầu tiên, vận tốc được biểu diễn bởi hàm số: $v(t) = 2t$

$$s(1) = \int_0^1 v(t) dt = \int_0^1 2t dt = 1 (m)$$

Quãng đường mà vật di chuyển được trong 1 giây đầu tiên:

b) Trong 1 giây tiếp theo, $v = 2 (m/s)$

Quãng đường mà vật di chuyển được trong 2 giây đầu tiên:

$$s(2) = \int_0^1 v(t)dt + \int_1^2 v(t)dt = \int_0^1 2t dt + \int_0^1 2 dt = 3 \quad (\text{m})$$

Câu 47. Ở nhiệt độ 37°C , một phản ứng hoá học từ chất đầu A , chuyển hoá thành chất sản phẩm B theo phương trình: $A \rightarrow B$. Giả sử $y(x)$ là nồng độ chất A (đơn vị molL^{-1}) tại thời gian x (giây), $y(x) > 0$ với $x \geq 0$, thoả mãn hệ thức: $y'(x) = -7 \cdot 10^{-4} y(x)$ với $x \geq 0$. Biết rằng tại $x=0$, nồng độ (đầu) của A là $0,05 \text{ mol L}^{-1}$.

a) Xét hàm số $f(x) = \ln y(x)$ với $x \geq 0$. Hãy tính $f'(x)$, từ đó hãy tìm hàm số $f(x)$.

b) Giả sử ta tính nồng độ trung bình chất A (đơn vị molL^{-1}) từ thời điểm a (giây) đến thời điểm

b (giây) với $0 < a < b$ theo công thức $\frac{1}{b-a} \int_a^b y(x) dx$. Xác định nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây.

Lời giải

a) $f(x) = \ln y(x) \rightarrow f'(x) = \frac{y'(x)}{y(x)} = -7 \cdot 10^{-4} \rightarrow f(x) = -7 \cdot 10^{-4} x$

b) $f(x) = -7 \cdot 10^{-4} x \rightarrow \ln y(x) = -7 \cdot 10^{-4} x \Leftrightarrow y(x) = e^{-7 \cdot 10^{-4} x}$

Nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây:

$$\frac{1}{30-15} \int_{15}^{30} y(x) dx = \frac{1}{15} \int_{15}^{30} e^{-7 \cdot 10^{-4} x} dx = \frac{1}{15} \cdot \frac{e^{-7 \cdot 10^{-4} x}}{-7 \cdot 10^{-4}} \Big|_{15}^{30} = 0,98 (L^{-1})$$

Câu 48. Tốc độ $v(m/s)$ của một thang máy di chuyển từ tầng 1 lên tầng cao nhất theo thời gian t (giây) được cho bởi công thức:

$$v(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 2, \\ 2, & 2 < t \leq 20, \\ 12 - 0,5t, & 20 < t \leq 24. \end{cases}$$

Tính quãng đường chuyển động và tốc độ trung bình của thang máy.

Lời giải

Gọi $s(t)$ là quãng đường thang máy di chuyển được đến thời gian t (giây).

Quãng đường thang máy di chuyển từ tầng 1 lên tầng cao nhất là

$$\begin{aligned} s &= s(24) - s(0) = \int_0^{20} v(t) dt = \int_0^2 v(t) dt + \int_2^{20} v(t) dt + \int_{20}^{24} v(t) dt \\ &= \int_0^2 t dt + \int_2^{20} 2 dt + \int_{20}^{24} (12 - 0,5t) dt = \left(\frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^2 + 2(t) \Big|_2^{20} + \left(12t - \frac{0,5t^2}{2} \right) \Big|_{20}^{24} \\ &= (2 - 0) + 2(20 - 2) + (144 - 140) = 42 (m) \end{aligned}$$

Vận tốc trung bình của thang máy là $v_{tb} = \frac{s}{t} = \frac{42}{24} = 1,75(m/s)$

Câu 49. Tốc độ tăng dân số của một thành phố trong một số năm được ước lượng bởi công thức $P'(t) = 20 \cdot (1,106)^t, 0 \leq t \leq 7$, trong đó t là thời gian tính theo năm và $t=0$ ứng với đầu năm 2015, $P(t)$ là dân số của thành phố tính theo nghìn người. Cho biết dân số của thành phố đầu năm 2015 là 1008 nghìn người.

a) Tính dân số của thành phố ở thời điểm đầu năm 2020 (làm tròn đến nghìn người).

b) Tính tốc độ tăng dân số trung bình hằng năm của thành phố trong giai đoạn từ đầu năm 2015 đến đầu năm 2020.

Lời giải

a) Theo đề bài, ta có $P(0) = 1008$

Đến đầu năm 2020, ta có $t = 2020 - 2015 = 5$. Do đó, dân số của thành phố ở thời điểm đầu năm 2020 là

$$\begin{aligned} P(5) &= [P(5) - P(0)] + P(0) = \int_0^5 P'(t) dt + P(0) = \int_0^5 20 \cdot (1,106)^t dt + 1008 \\ &= 20 \left[\frac{1,106^t}{\ln 1,106} \right]_0^5 + 1008 = 20 \cdot \frac{1,106^5 - 1}{\ln 1,106} + 1008 \approx 1138 \end{aligned}$$

Vậy dân số của thành phố đó vào đầu năm 2020 là khoảng 1138 nghìn người.

b) Tốc độ tăng dân số trung bình của thành phố trong giai đoạn từ đầu năm 2015 đến đầu năm

$$v = \frac{P(5) - P(0)}{5} = \frac{1138 - 1008}{5} = 26 \quad (\text{nghìn người}).$$

Câu 50. Sau khi được thả rơi tự do từ độ cao $100m$, một vật rơi xuống với tốc độ $v(t) = 10t(m/s)$, trong đó t là thời gian tính theo giây kể từ khi thả vật.

a) Tính quãng đường $s(t)$ vật di chuyển được sau thời gian t giây (trong khoảng thời gian vật đang rơi).

b) Sau bao nhiêu giây thì vật chạm đất? Tính tốc độ rơi trung bình của vật.

Lời giải

$$s(t) = \int_0^t v(t) dt = \int_0^t 10t dt = (5t^2) \Big|_0^t = 5t^2$$

a) Quãng đường vật di chuyển sau thời gian t giây là

b) Đến khi vật chạm đất, thì vật đã di chuyển được 100 m.

$$\text{Do đó } s(t) = 100 \Rightarrow 5t^2 = 100 \Rightarrow t^2 = 20 \Rightarrow t = 2\sqrt{5} \approx 4,47 \quad (\text{giây})$$

Vậy sau khoảng 4,47 giây thì vật chạm đất.

$$v_{tb} = \frac{100}{2\sqrt{5}} = 10\sqrt{5} \approx 22,36(m/s)$$

Tốc độ rơi trung bình của vật là

Câu 51. Giả sử tổng chi phí mua và bảo trì một thiết bị trong x năm có thể được mô hình hoá bởi công

thức
$$C = 5000 \left(25 + 3 \int_0^x t^{\frac{1}{4}} dt \right)$$

Tìm tổng chi phí sau:

- a) 1 năm;
- b) 5 năm;
- c) 10 năm.

Lời giải

a) Tổng chi phí sau 1 năm là

$$C = 5000 \left(25 + 3 \int_0^1 t^{\frac{1}{4}} dt \right) = 5000 \left(25 + 3 \cdot \frac{t^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} \bigg|_0^1 \right) = 137000$$

b) Tổng chi phí sau 5 năm là

$$C = 5000 \left(25 + 3 \int_0^5 t^{\frac{1}{4}} dt \right) = 5000 \left(25 + 3 \cdot \frac{t^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} \bigg|_0^5 \right) \approx 214720,93.$$

c) Tổng chi phí sau 10 năm là

$$C = 5000 \left(25 + 3 \int_0^{10} t^{\frac{1}{4}} dt \right) = 5000 \left(25 + 3 \cdot \frac{t^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} \bigg|_0^{10} \right) \approx 338393,53.$$

Câu 52. Vận tốc v của một vật rơi tự do từ trạng thái đứng yên được cho bởi công thức $v(t) = 9,8t$, trong đó vận tốc v tính bằng m/s và thời gian t tính bằng giây.

- a) Biểu thị quãng đường vật đi được trong T giây đầu tiên dưới dạng tích phân.
- b) Tìm quãng đường vật đi được trong 5 giây đầu tiên.

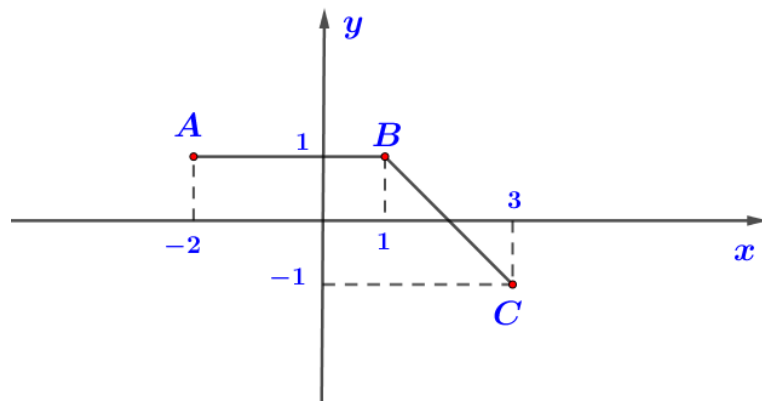
Lời giải

a) Quãng đường vật đi được trong T giây đầu tiên là
$$S = \int_0^T v(t) dt = \int_0^T 9,8t dt (m)$$

b) Quãng đường vật đi được trong 5 giây đầu tiên là
$$S = \int_0^5 v(t) dt = \int_0^5 9,8t dt = 4,9t^2 \bigg|_0^5 = 122,5(m).$$

Câu 53. (Mã 101-2023) Đường gấp khúc ABC trong hình bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn

$[-2; 3]$. Tích phân $\int_{-2}^3 f(x) dx$ bằng



Lời giải

$$\int_{-2}^3 f(x) dx = \int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx$$

Ta có:

Đường thẳng AB có phương trình là: $y = 1$.

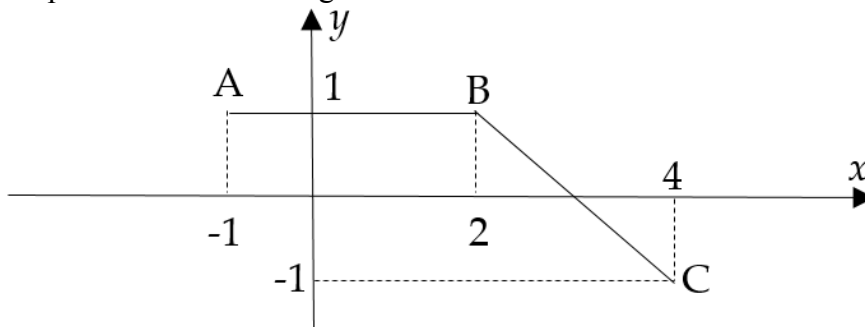
Đường thẳng BC đi qua $B(1;1); C(3;-1)$ nên có phương trình là: $y = -x + 2$.

$$\int_{-2}^3 f(x) dx = \int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx = \int_{-2}^1 1 dx + \int_1^2 (-x + 2) dx + \int_2^3 (-x + 2) dx = 3$$

Câu 54. (Mã 102-2023) Đường gấp khúc ABC trong hình bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn

$[-1; 4]$. Tích phân $\int_{-1}^4 f(x) dx$

bằng



Lời giải

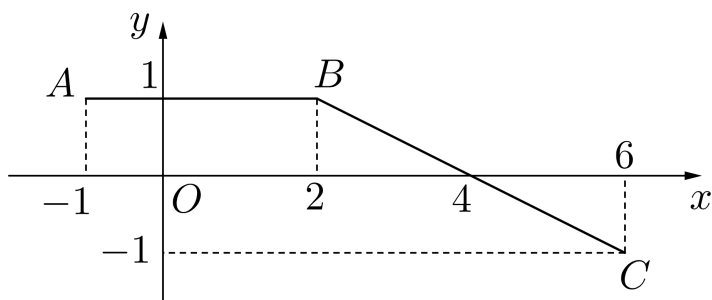
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1; 2) \\ -x + 3, & x \in [2; 4] \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị ta có hàm số

$$\int_{-1}^4 f(x) dx = \int_{-1}^2 1 dx + \int_2^4 (-x + 3) dx = 3 + 0 = 3$$

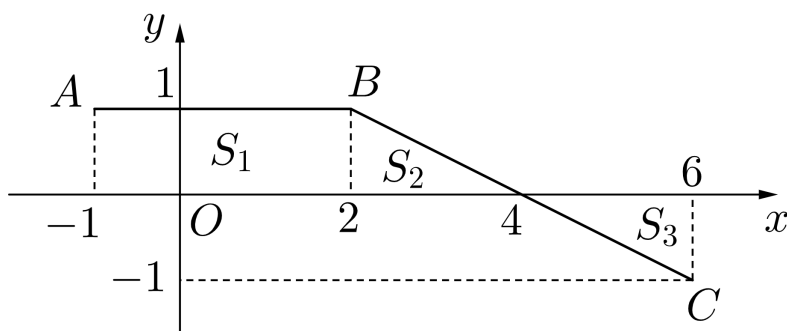
Vậy

Câu 55. (Mã 102-2021-Lần 2) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 6]$ và có đồ thị là đường gấp khúc ABC như hình bên dưới.



Biết F là nguyên hàm của f thỏa mãn $F(-1) = -2$. Giá trị của $F(4) + F(6)$ bằng

Lời giải



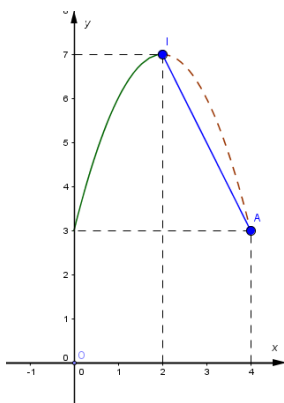
Dựa vào hình vẽ ta có

$$F(6) - F(1) = \int_1^6 f(x) dx = S_1 + S_2 - S_3 = 3 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 3 \Rightarrow F(6) = 3 + F(1) = 1$$

$$F(4) - F(1) = \int_1^4 f(x) dx = S_1 + S_2 = 3 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 4 \Rightarrow F(4) = 4 + F(1) = 2$$

$$F(4) + F(6) = 2 + 1 = 3$$

Câu 56. (THPT Hương Sơn - Hà Tĩnh - 2022) Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 2 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đó là một đường parabol có đỉnh $I(2; 7)$ và trục đối xứng của parabol song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại, đồ thị là đoạn thẳng IA . Tính quãng đường s mà vật đi chuyển được trong 4 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải

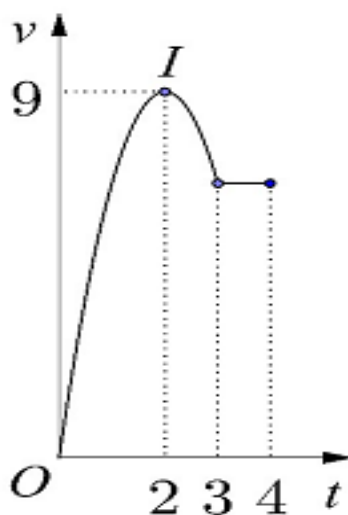
Trong 2 giờ đầu, đồ thị hàm vận tốc là một parabol có đỉnh $I(2; 7)$ như hình vẽ nên hàm vận tốc $v(t) = -t^2 + 4t + 3$

Trong 2 giờ sau đồ thị hàm vận tốc là đoạn thẳng IA như hình vẽ nên hàm vận tốc $v(t) = 11 - 2t$

Vậy quãng đường s vật chuyển động sau 4 giờ là

$$s = \int_0^4 v(t) dt = \int_0^2 (-t^2 + 4t + 3) dt + \int_2^4 (11 - 2t) dt = \frac{64}{3}$$

Câu 57. (Mã 105 2017) Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2; 9)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường S mà vật di chuyển được trong 4 giờ đó.



Lời giải

Gọi $(P): y = ax^2 + bx + c$

Vì (P) qua $O(0;0)$ và có đỉnh $I(2;9)$ nên dễ tìm được phương trình là $y = -\frac{9}{4}x^2 + 9x$

Ngoài ra tại $x=3$ ta có $y=\frac{27}{4}$

Vậy quãng đường cần tìm là: $S = \int_0^3 \left(-\frac{9}{4}x^2 + 9x \right) dx + \int_3^4 \frac{27}{4} dx = 27 \text{ (km)}$

DẠNG 3. NÂNG CAO

Câu 58. (Chuyên Vinh 2024) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $2x^2 + f(x) = 2xf'(x)$ với mọi $x > 0$. Biết $f(1) = 1$, giá trị của $f(9)$ bằng

Lời giải

$$2x^2 + f(x) = 2xf'(x) \Rightarrow 2xf'(x) - f(x) = 2x^2$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{x}} - \frac{f(x)}{2x\sqrt{x}} = \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)\sqrt{x} - f(x) \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{f(x)}{\sqrt{x}} \right)' = \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{f(x)}{\sqrt{x}} \right)' dx = \int \sqrt{x} dx$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{\sqrt{x}} = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C$$

$$\text{Mà } f(1) = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{f(x)}{\sqrt{x}} = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + \frac{1}{3} \Rightarrow f(9) = 55$$

Câu 59. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn

$x^2 f^2(x) + (2x-1)f(x) = xf'(x) - 1$, với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ đồng thời thỏa $f(1) = -2$. Tính $\int_1^2 f(x) dx$

Lời giải

Ta có $x^2 f^2(x) + 2xf(x) + 1 = xf'(x) + f(x) \Leftrightarrow (xf(x) + 1)^2 = (xf'(x) + 1)$

$$\text{Do đó } \frac{(xf(x) + 1)'}{(xf(x) + 1)^2} = 1 \Rightarrow \int \frac{(xf(x) + 1)'}{(xf(x) + 1)^2} dx = \int 1 dx \Rightarrow -\frac{1}{xf(x) + 1} = x + c \Rightarrow xf(x) + 1 = -\frac{1}{x + c}$$

$$\text{Mặt khác } f(1) = -2 \text{ nên } -2 + 1 = -\frac{1}{1 + c} \Rightarrow c = 0 \Rightarrow xf(x) + 1 = -\frac{1}{x} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$$

$$\text{Vậy } \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right) dx = \left(\ln x - \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

Câu 60. (Sở Lạng Sơn 2022) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1-x) + x^2 f''(x) = 5x^3 + 3x^2 - 3x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

Lời giải

Do vế phải của $f(1-x) + x^2 f''(x) = 5x^3 + 3x^2 - 3x$ (1) là hàm bậc ba nên giả sử $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f''(x) = 6ax + 2b$

Do đó

$$f(1-x) + x^2 f''(x) = 5x^3 + 3x^2 - 3x, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow a(1-x)^3 + b(1-x)^2 + c(1-x) + d + x^2(6ax + 2b) = 5x^3 + 3x^2 - 3x, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow a - 3ax + 3ax^2 - ax^3 + b - 2bx + bx^2 + c - cx + 6ax^3 + 2bx^2 = 5x^3 + 3x^2 - 3x, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 5ax^3 + (3a + 3b)x^2 - (3a + 2b + c)x + a + b + c + d = 5x^3 + 3x^2 - 3x, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5a = 5 \\ 3a + 3b = 3 \\ 3a + 2b + c = 3 \\ a + b + c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = -1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^3 - 1$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = -\frac{3}{4}$$

Câu 61. (Sở Bình Phước 2023) Cho hàm số $f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên $[1; 3]$, thỏa mãn $x^2 + 4x^2 f(x) = [f'(x)]^2, \forall x \in [1; 3], f(2) = 2$. Tính $I = \int_1^3 f(x) dx$

Lời giải

Xét hàm $f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên $[1; 3]$, ta có

$$x^2 + 4x^2 f(x) = [f'(x)]^2 \Leftrightarrow x^2(1 + 4f(x)) = [f'(x)]^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2f'(x)}{\sqrt{1 + 4f(x)}} = 2x \Leftrightarrow (\sqrt{1 + 4f(x)})' = 2x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1 + 4f(x)} = x^2 + C$$

$$\text{Vì } f(2) = 2 \text{ nên } C = -1. \text{ Do đó } f(x) = \frac{(x^2 - 1)^2 - 1}{4}$$

$$\text{Vậy } I = \int_1^3 \frac{(x^2 - 1)^2 - 1}{4} dx = \frac{233}{30}$$

