

LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI

----- *** -----

Trong các đề thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng những năm gần đây, câu hình học không gian luôn là câu khó đối với đa số thí sinh, phần lớn các em đã quên các kiến thức hình học không gian ở chương trình hình học lớp 11. Do đó, việc học hình học không gian ở lớp 12, đặc biệt là vấn đề tính thể tích khối đa diện, học sinh tỏ ra rất lúng túng. Trước tình hình đó cùng với quá trình giảng dạy và nghiên cứu, tôi đã thử giải các bài toán tính thể tích khối đa diện bằng phương pháp tỉ số thể tích thấy rất có hiệu quả và cho được lời giải ngắn gọn rất nhiều; hơn nữa học sinh chỉ cần những kiến thức cơ bản về hình học không gian ở lớp 11 là có thể làm được

Trước kì thi Đại học – Cao đẳng đến gần, với mong muốn có thể cung cấp cho các em học sinh thêm một phương pháp để tính thể tích của các khối đa diện, tôi nghiên cứu và viết đề tài: “ **Ứng dụng của tỉ số thể tích** ”.

Xin chân thành cảm ơn!

Quảng Ngãi tháng 10 năm 2010

Người thực hiện đề tài

Huỳnh Đoàn Thuận

NỘI DUNG ĐỀ TÀI

----- *** -----

I/ Cơ sở lý thuyết:

Để tính thể tích của một khối đa diện bất kì, chúng ta chia khối đa diện đó thành các khối đa diện đơn giản đã biết công thức tính (Khối lăng trụ $V = B.h$, Khối chóp $V = \frac{1}{3}B.h$, Khối hộp chữ nhật $V = abc$, ...) rồi cộng các kết quả lại.

Tuy nhiên trong nhiều trường hợp, việc tính thể tích của các khối lăng trụ và khối chóp theo công thức trên lại gặp khó khăn do không xác định được đường cao hay diện tích đáy, nhưng có thể chuyển việc tính thể tích các khối này về việc tính thể tích của các khối đã biết thông qua tỉ số thể tích của hai khối.

Sau đây ta sẽ xét một số bài toán cơ bản và ví dụ minh họa

Bài toán 1: (Bài 4 sgk HH12CB trang 25)

Cho khối chóp S.ABC, trên các đoạn thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm

A', B', C' khác điểm S. CMR: $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$ (1)

Giải:

Gọi H và H' lần lượt là hình chiếu vuông góc

của A và A' lên (SBC)

Ta có AH//A'H'. Ba điểm S, H, H' cùng thuộc hai mp (AA'H'H) và (SBC) nên chúng thẳng hàng.

$$\text{Xét } \triangle SAH \text{ ta có } \frac{SA'}{SA} = \frac{A'H'}{AH} \quad (*)$$

Do đó

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{\frac{1}{3}A'H'.S_{\triangle SB'C'}}{\frac{1}{3}AH.S_{\triangle SBC}} = \frac{A'H'}{AH} \cdot \frac{SB'.SC' \cdot \sin \angle B'SC'}{SB.SC \cdot \sin \angle BSC} \quad (**)$$

Từ (*) và (**) ta được đpcm □

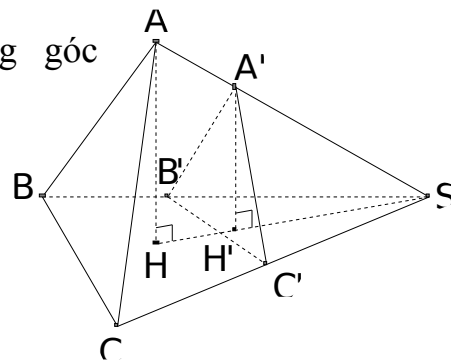
Trong công thức (1), đặc biệt hoá, cho B' ≡ B và C' ≡ C ta được

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \quad (1')$$

Ta lại có

$$V_{S.ABC} = V_{S.A'BC} + V_{A'.ABC}$$

$$(1') \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{SA'}{SA} \cdot V_{S.ABC} + V_{A'.ABC}$$



$$\Rightarrow \frac{V_{A'.ABC}}{V_{S.ABC}} = 1 - \frac{SA'}{SA} = \frac{A'A}{SA}$$

$$\text{Vậy: } \frac{V_{A'.ABC}}{V_{S.ABC}} = \frac{A'A}{SA} \quad (2)$$

Tổng quát hoá công thức (2) ta có bài toán sau đây:

Bài toán 2: Cho khối chóp đỉnh S, đáy là 1 đa giác lồi $A_1A_2...A_n$ ($n \geq 3$), trên đoạn thẳng SA_1 lấy điểm A_1' không trùng với A_1 . Khi đó ta có

$$\frac{V_{A_1'.A_1A_2...A_n}}{V_{S.A_1A_2...A_n}} = \frac{A_1'A_1}{SA_1} \quad (2')$$

Chứng minh (2') bằng phương pháp quy nạp theo n; ta chia khối chóp $S.A_1A_2...A_n$ thành các khối chóp tam giác rồi áp dụng công thức (2)

II/ Các dạng toán:

Dựa vào hai bài toán cơ bản ở trên, ta sẽ xét một số bài toán tính tỉ số thể tích của các khối đa diện và một số ứng dụng của nó

DẠNG1: TÍNH TỈ SỐ THỂ TÍCH CỦA CÁC KHỐI ĐA DIỆN

Ví dụ1:

Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, gọi M là trung điểm của CD và I là giao điểm của AC và BM. Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp $S.ICM$ và $S.ABCD$

Giải:

Gọi O là giao điểm của AC và BD. Ta có I là trọng tâm của tam giác BCD, do đó

$$V_{ISCM} = \frac{1}{3} V_{B.SCM} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot V_{D.SBC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} V_{S.ABCD}$$

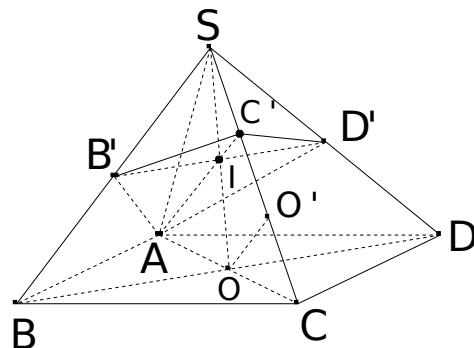
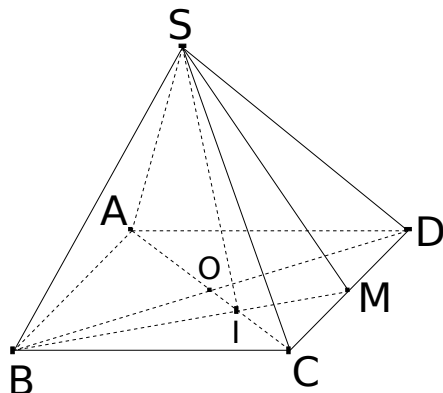
$$\text{Vậy } \frac{V_{ISCM}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{12}$$

Ví dụ2:

Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi B' , D' lần lượt là trung điểm của SB và SD. Mặt phẳng $(AB'D')$ cắt SC tại C' . Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp được chia bởi mp $(AB'D')$

Giải:

Gọi O là giao điểm của AC và BD và I là giao điểm của SO và $B'D'$. Khi đó AI cắt SC tại C'
Ta có



$$\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{SC'}{SC} \quad \frac{V_{S.AC'D'}}{V_{S.ACD}} = \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SD'}{SD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{SC'}{SC}$$

Suy ra $V_{S.AB'C'} + V_{S.AC'D'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{SC'}{SC} (V_{S.ABC} + V_{S.ACD}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot V_{S.ABCD}$

Kẻ $OO' \parallel AC'$ ($O' \in SC$). Do tính chất các đường thẳng song song cách đều nên ta có $SC' = C'O' = O'C$

Do đó $V_{S.A'B'C'D'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot V_{S.ABCD}$ Hay $\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{6}$

* Bài tập tham khảo:

Bài1: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$, đáy ABC là tam giác đều có trục tâm H và cạnh bằng a . Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CA và M, N, P lần lượt là trung điểm các đoạn SI, SJ, SK . Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp $H.MNP$ và $S.ABC$. Từ đó tính thể tích khối chóp $H.MNP$

ĐS: $\frac{V_{H.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{1}{32}$

Bài2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Một mặt phẳng (α) qua AB cắt SC, SD lần lượt tại M và N . Tính $\frac{SM}{SC}$ để mặt phẳng (α) chia hình chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau.

ĐS: $\frac{SM}{SC} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$

DẠNG2: ỨNG DỤNG TỈ SỐ THỂ TÍCH ĐỂ TÍNH THỂ TÍCH

Ví dụ1: (ĐH khối B – 2008)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, $\angle BAD = \angle ABC = 90^\circ$, $AB = BC = a, AD = 2a, SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SD . Tính thể tích khối chóp $S.BCNM$ theo a

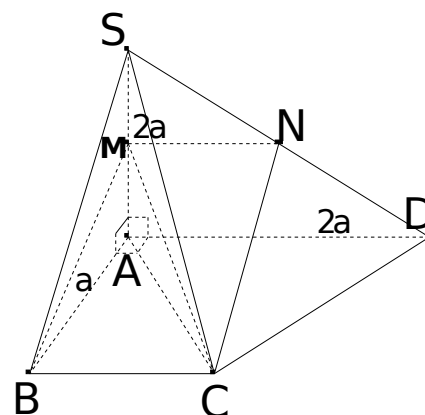
Giải:

Áp dụng công thức (1) ta có

$$\frac{V_{S.BCM}}{V_{S.BCA}} = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{V_{S.CMN}}{V_{S.CAD}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SD} = \frac{1}{4}$$

Suy ra



$$\begin{aligned} V_{S.BCNM} &= V_{S.BCM} + V_{S.CNM} = \frac{1}{2}V_{S.BCA} + \frac{1}{4}V_{S.CAD} \\ &= \frac{a^3}{2.3} + \frac{2a^3}{4.3} = \frac{a^3}{3} \end{aligned}$$

Ghi chú:

1/ Việc tính thể tích khối $S.BCNM$ trực tiếp theo công thức $V = \frac{1}{3}B.h$ gặp nhiều khó khăn, nhưng nếu dùng tỉ số thể tích, ta chuyển việc tính thể tích khối $S.BCNM$ về tính V_{SBCA} và V_{SCAD} dễ dàng hơn rất nhiều

2/ Khi dạy học có thể yêu cầu học sinh tính thể tích khối đa diện $ABCDMN$

Ví dụ2: (ĐH khối A – 2007)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, BC, CD . Tính thể tích khối tứ diện $CMNP$ theo a

Giải:

Ta có

$$\frac{V_{CMNP}}{V_{CMBD}} = \frac{CN}{CB} \cdot \frac{CP}{CD} = \frac{1}{4} \quad (a)$$

$$\frac{V_{CMBD}}{V_{CSBD}} = \frac{V_{M.BCD}}{V_{S.BCD}} = \frac{MB}{SB} = \frac{1}{2} \quad (b)$$

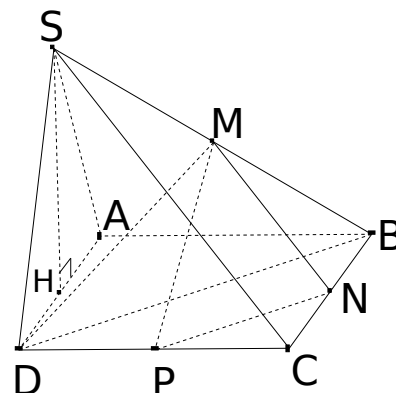
Lấy (a) x (b) về theo về ta được

$$\frac{V_{CMNP}}{V_{S.BCD}} = \frac{1}{8} \Rightarrow V_{CMNP} = \frac{1}{8}V_{S.BCD}$$

Gọi H là trung điểm của AD ta có $SH \perp AD$ mà $(SAD) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$.

$$\text{Do đó } V_{S.BCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\triangle BCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$$

$$\text{Vậy: } V_{CMNP} = \frac{a^3\sqrt{3}}{96} \text{ (đvtt)}$$

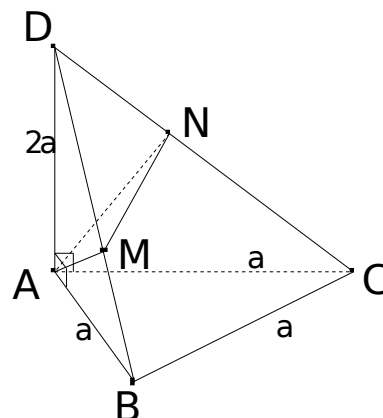


Ví dụ3: (ĐH khối D – 2006)

Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA = 2a$ và SA vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các đường thẳng SB và SC . Tính thể tích khối chóp $A.BCNM$ theo a

Giải:

$$\text{Ta có } \frac{V_{SAMN}}{V_{SABC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC}$$



AM và AN lần lượt là các đường cao trong các tam giác vuông SAB và SAC bằng nhau nên ta có

$$\frac{SM}{MB} \cdot \frac{SM}{MB} = \frac{SA^2}{AB^2} = \frac{4a^2}{a^2} = 4 \Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{4}{5}$$

Tương tự $\frac{SN}{SC} = \frac{4}{5}$

Do đó $V_{S.AMN} = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot V_{S.ABC} = \frac{16}{25} \cdot V_{S.ABC}$. Suy ra $V_{A.BCMN} = \frac{9}{25} \cdot V_{S.ABC}$

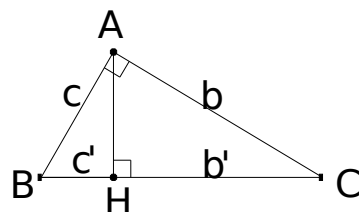
Mà $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. Vậy $V_{A.BCMN} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{50}$ (đvtt)

Ghi chú:

Ta có hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC

sau đây $\frac{b'}{c'} = \frac{b^2}{c^2}$

(Chứng minh dựa vào tam giác đồng dạng)



Ví dụ4: (ĐH khối B – 2006 , Đề GVDG cấp trường 2009 – 2010)

Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình chữ nhật, AB = SA = a, AD = a√2. SA vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và SC, gọi I là giao điểm của BM và AC. Tính thể tích khối tứ diện ANIM theo a

Giải:

Gọi O là giao điểm của AC và BD. Ta có I là trọng tâm của tam giác ABC, do đó

$$\frac{AI}{AO} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AI}{AC} = \frac{1}{3}$$

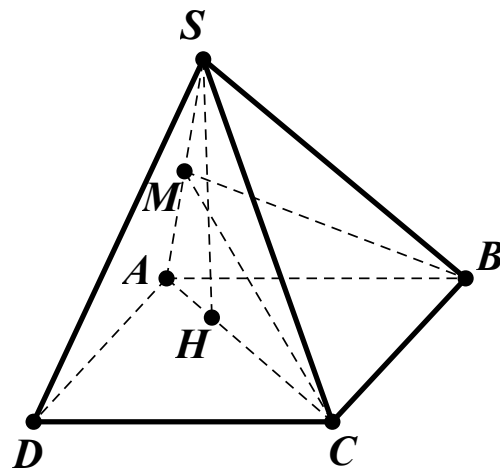
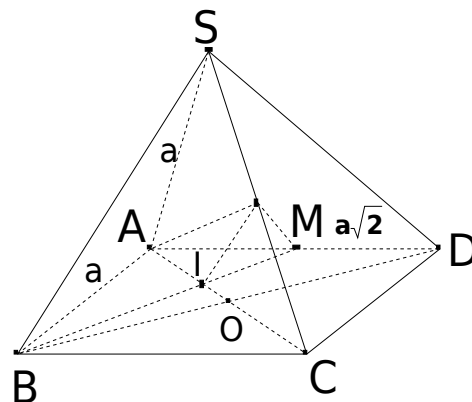
nên $\frac{V_{AIMN}}{V_{ACDN}} = \frac{AI}{AC} \cdot \frac{AM}{AD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ (1)

Mặt khác $\frac{V_{ACDN}}{V_{ACDS}} = \frac{NC}{SC} = \frac{1}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{V_{AIMN}}{V_{ACDS}} = \frac{1}{12}$

Mà $V_{SACD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\Delta ACD} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{2}a}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. Vậy

$$V_{AIMN} = \frac{1}{12} \cdot V_{SACD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{72} \text{ (đvtt)}$$



Ví dụ5: (ĐH khối D – 2010)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA = a, hình chiếu vuông

góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABCD) là điểm H thuộc đoạn thẳng AC sao cho $AH = \frac{AC}{4}$. Gọi CM là đường cao của tam giác SAC. Chứng minh rằng M là trung điểm của SA và tính thể tích khối tứ diện SMBC theo a.

Giải:

Từ giả thiết ta tính được $AH = \frac{a\sqrt{2}}{4}, SH = \frac{a\sqrt{14}}{4}, CH = \frac{3a\sqrt{2}}{4}, SC = a\sqrt{2} \Rightarrow SC = AC$.

Do đó tam giác SAC cân tại C nên M là trung điểm của SA.

$$\text{Ta có } \frac{V_{S.MBC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{S.MBC} = \frac{1}{2} V_{S.ABC}$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a\sqrt{14}}{4} = \frac{a^3\sqrt{14}}{48} \text{ (đvtt)}$$

* Bài tập tham khảo:

Bài1: Cho khối tứ diện ABCD có $\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ, \angle CAD = 120^\circ, AB = a, AC = 2a, AD = 3a$. Tính thể tích tứ diện ABCD.

$$\text{ĐS: } V_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$$

Bài2: Cho khối chóp S.ABCD đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$. Gọi B', D' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SD. mp(AB'D') cắt SC tại C'. Tính thể tích khối chóp S.A'B'C'D' theo a

$$\text{ĐS: } V_{S.A'B'C'D'} = \frac{16a^3}{45}$$

Bài3: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có tất cả các cạnh đều bằng. Gọi M, P lần lượt là trung điểm của SA và SC, mp(DMP) cắt SB tại N. Tính theo a thể tích khối chóp S.DMNP

$$\text{ĐS: } V_{S.DMNP} = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}$$

Bài4: (ĐH khối B – 2010)

Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có $AB = a$, góc giữa hai mặt phẳng (A'BC) và (ABC) bằng 60° . Gọi G là trọng tâm tam giác A'BC. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện GABC theo a.

$$\text{ĐS: } V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8} \text{ và } R = \frac{7a}{12}$$

DẠNG3: ỨNG DỤNG TỈ SỐ THỂ TÍCH TÍNH KHOẢNG CÁCH

Việc tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng khó khăn nhất là xác định chân đường cao. Khó khăn này có thể được khắc phục nếu ta tính khoảng cách

thông qua thể tích của khối đa diện, mà khoảng cách đó chính là độ dài đường cao của khối đa diện. Sau đây ta sẽ xét một số ví dụ minh họa

Ví dụ 1: (ĐH khối D – 2002)

Cho tứ diện ABCD có AD vuông góc mặt phẳng (ABC), $AD = AC = 4\text{cm}$, $AB = 3\text{cm}$, $BC = 5\text{cm}$. Tính khoảng cách từ A đến mp(BCD).

Giải:

Ta có $AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow AB \perp AC$

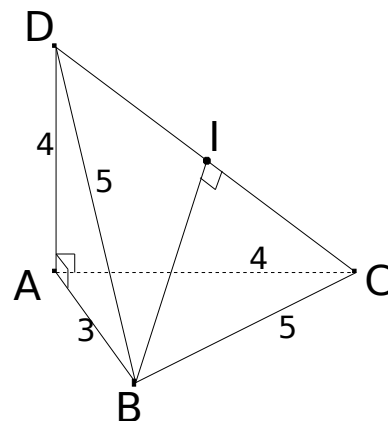
Do đó $V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot AC \cdot AD = 8\text{cm}^3$

Mặt khác $CD = 4\sqrt{2}$, $BD = BC = 5$

Nên $\triangle BCD$ cân tại B, gọi I là trung điểm của CD

$\Rightarrow S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} DC \cdot BI = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{5^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{34}$

Vậy $d(A, (BCD)) = \frac{3V_{ABCD}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{3 \cdot 8}{2\sqrt{34}} = \frac{6\sqrt{34}}{17}$



Ví dụ 2: (ĐH khối D – 2007)

Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình thang, $\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$, $AD = 2a$, $BA = BC = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SB. CMR tam giác SCD vuông và tính theo a khoảng cách từ H đến mp(SCD)

Giải:

Ta có $\frac{V_{S.HCD}}{V_{S.BCD}} = \frac{SH}{SB}$

$\triangle SAB$ vuông tại A và AH là đường cao nên

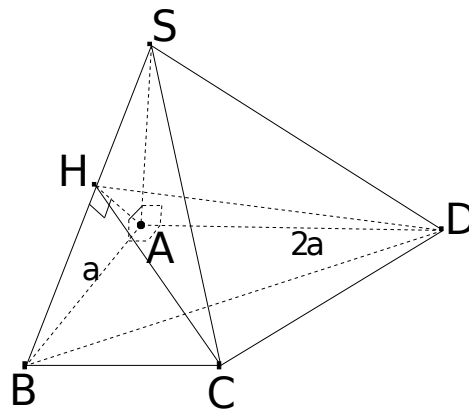
Ta có $\frac{SH}{HB} = \frac{SA^2}{AB^2} = \frac{2a^2}{a^2} = 2 \Rightarrow \frac{SH}{SB} = \frac{2}{3}$

Vậy $V_{S.HCD} = \frac{2}{3} V_{S.BCD} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} a\sqrt{2} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{9}$

Mà $V_{S.HCD} = \frac{1}{3} d(H, (SCD)) \cdot S_{\triangle SCD}$.

$\triangle SCD$ vuông tại C (do $AC^2 + CD^2 = AD^2$),

do đó $S_{\triangle SCD} = \frac{1}{2} CD \cdot SC = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot 2a = a^2\sqrt{2}$. Vậy $d(H, (SCD)) = \frac{3a^3\sqrt{2}}{9a^2\sqrt{2}} = \frac{a}{3}$



Ví dụ 3: (ĐH khối D – 2008)

Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = BC = a$, $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và B'C

Giải:

Gọi E là trung điểm của BB' , ta có $EM \parallel CB'$

Suy ra $B'C \parallel (AME)$ nên

$$d(B'C; AM) = d(B'C; (AME)) = d(C; (AME))$$

$$\text{Ta có } \frac{V_{C.AEM}}{V_{C.AEB}} = \frac{MC}{CB} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow V_{C.AEM} = \frac{1}{2} V_{EACB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$$

$$\text{Ta có } d(C, (AME)) = \frac{3V_{C.AEM}}{S_{\Delta AEM}}$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên AE, ta có $BH \perp AE$

Hơn nữa $BM \perp (ABE) \Rightarrow BM \perp AE$, nên ta được $AE \perp HM$

$$\text{Mà } AE = \frac{a\sqrt{6}}{2}, \Delta ABE \text{ vuông tại B nên}$$

$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{EB^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Delta BHM \text{ vuông tại B nên } MH = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$$

$$\text{Do đó } S_{\Delta AEM} = \frac{1}{2} AE \cdot HM = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{21}}{6} = \frac{a^2\sqrt{14}}{8}$$

$$\text{Vậy: } d(C, (AME)) = \frac{3a^3\sqrt{2}}{24 \cdot \frac{a^2\sqrt{14}}{8}} = \frac{a\sqrt{7}}{7}$$

Ghi chú: Có thể áp dụng công thức Hê – rông để tính $S_{\Delta AEM}$

Ví dụ 4:

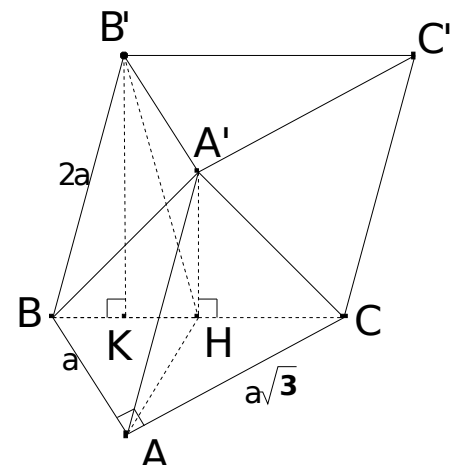
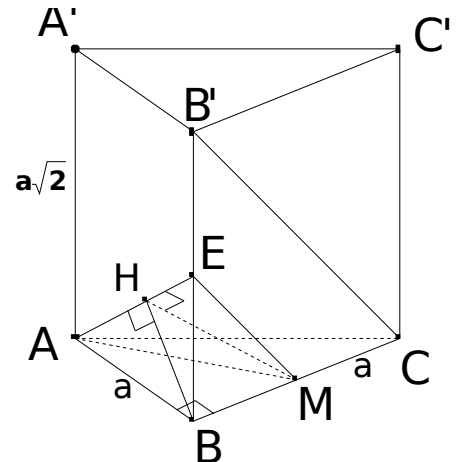
Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên $2a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của BC. Tính khoảng cách từ A đến mp($BCC'B'$)

Giải:

Theo giả thiết ta có $A'H \perp (ABC)$.

Tam giác ABC vuông tại A và AH là trung tuyến nên $AH = \frac{1}{2} BC = a$. $\Delta A'AH$ vuông tại H nên ta có

$$A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = a\sqrt{3}$$



$$\text{Do đó } V_{A'.ABC} = \frac{1}{3} a \sqrt{3} \frac{a \cdot a \sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{2}.$$

$$\text{Mặt khác } \frac{V_{A'.ABC}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Suy ra } V_{A'.BCC'B'} = \frac{2}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot \frac{a^3}{2} = a^3$$

$$\text{Ta có } d(A', (BCC'B')) = \frac{3V_{A'.BCC'B'}}{S_{BCC'B'}}$$

Vì $AB \perp A'H \Rightarrow A'B' \perp A'H \Rightarrow \Delta A'B'H$ vuông tại A'

Suy ra $B'H = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a = BB'$. $\Rightarrow \Delta BB'H$ cân tại B'. Gọi K là trung điểm của BH, ta có $B'K \perp BH$. Do đó $B'K = \sqrt{BB'^2 - BK^2} = \frac{a\sqrt{14}}{2}$

$$\text{Suy ra } S_{BCC'B'} = B'C' \cdot BK = 2a \cdot \frac{a\sqrt{14}}{2} = a^2 \sqrt{14}$$

$$\text{Vậy } d(A', (BCC'B')) = \frac{3a^3}{a^2 \sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{14}a}{14}$$

* Bài tập tương tự:

Bài 1: (ĐH khối D – 2009)

Cho lăng trụ đứng ABCA'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $AA' = 2a$, $A'C = 3a$. Gọi M là trung điểm của A'C', I là giao điểm của AM và A'C. Tính theo a thể tích khối tứ diện IABC và khoảng cách từ A đến mp(IBC)

$$\text{ĐS: } d(A, (IBC)) = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$$

Bài 2:

Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có $AA' = AB = a$, $BC = 2a$, điểm M thuộc AD sao cho $AM = 3MD$. Tính khoảng cách từ M đến mp(AB'C)

$$\text{ĐS: } d(A, (AB'C)) = \frac{a}{2}$$

Bài 3:

Cho tứ diện ABCD có DA vuông góc với mp(ABC), $\angle ABC = 90^\circ$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) nếu $AD = a$, $AB = BC = b$

$$\text{ĐS: } d(A, (BCD)) = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Bài 4:

Cho tứ diện đều ABCD, biết $AB = a$, M là 1 điểm ở miền trong của tứ diện. Tính tổng khoảng cách từ M đến các mặt của tứ diện

$$\text{ĐS: } h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = \frac{3V_{ABCD}}{S_{\Delta ACB}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Bài5:

Cho tứ diện ABCD và điểm M ở miền trong của tứ diện. Gọi r_1, r_2, r_3, r_4 lần lượt là khoảng cách từ M đến các mặt (BCD), (CDA), (DAB), (ABC) của tứ diện. Gọi h_1, h_2, h_3, h_4 lần lượt là khoảng cách từ các đỉnh A, B, C, D đến các mặt đối diện của tứ diện. CMR: $\frac{r_1}{h_1} + \frac{r_2}{h_2} + \frac{r_3}{h_3} + \frac{r_4}{h_4} = 1$

DẠNG4: ỨNG DỤNG TỈ SỐ THỂ TÍCH TÍNH DIỆN TÍCH ĐA GIÁC

Việc tính diện tích đa giác phẳng được quy về việc tính diện tích tam giác theo công thức $S_{\Delta} = \frac{1}{2}ah$, trong đó h – chiều cao và a là độ dài cạnh đáy.

Tuy nhiên trong nhiều trường hợp, đặc biệt là việc tính diện tích của các đa giác phẳng trong không gian, tính trực tiếp theo công thức gặp nhiều khó khăn. Khi đó có thể tính diện tích đa giác thông qua thể tích của các khối đa diện. Sau đây là một số ví dụ minh họa

Ví dụ1: (ĐH khối A – 2002)

Cho hình chóp tam giác đều S.ABC đỉnh S, có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SC. Tính diện tích tam giác AMN theo a, biết rằng $(AMN) \perp (SBC)$

Giải:

Gọi K là trung điểm của BC và I là trung

điểm của MN. Ta có $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{1}{4}$ (1)

Từ $(AMN) \perp (SBC)$

và $AI \perp MN$ (do ΔAMN cân tại A)

nên $AI \perp (SBC) \Rightarrow AI \perp SI$

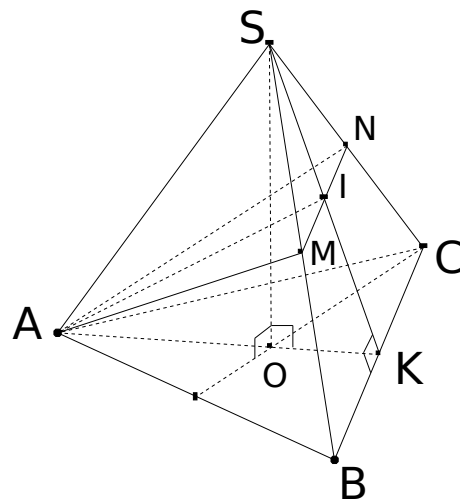
Mặt khác, $MN \perp SI$ do đó $SI \perp (AMN)$

Từ (1) $\Rightarrow \frac{SI \cdot S_{\Delta AMN}}{SO \cdot S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{\Delta AMN} = \frac{1}{4} \frac{SO}{SI} \cdot S_{\Delta ABC}$ (O

là trọng tâm của tam giác ABC)

Ta có ΔASK cân tại A (vì AI vừa là đường cao vừa là trung tuyến) nên

$$AK = AS = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \frac{a\sqrt{15}}{6}$$



$$\text{Và } SI = \frac{1}{2}SK = \frac{a\sqrt{2}}{4} \quad \text{Vậy } S_{\Delta AMN} = \frac{1}{4} \cdot \frac{a\sqrt{15}}{6a\sqrt{2}} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{10}}{16} \quad (\text{đvdt})$$

* Bài tập tham khảo:

Bài1: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$. Biết ABC là tam giác vuông tại B có $AB = a$, $BC = b$, $AA' = c$ ($c^2 \geq a^2 + b^2$). Một mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với CA' cắt lăng trụ theo một thiết diện.

a) Xác định thiết diện đó

b) Tính diện tích thiết diện xác định ở câu a)

$$\text{ĐS: Thiết diện } AMN \text{ có diện tích } S_{AMN} = \frac{ab\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2c}$$

Bài2: Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh $AB = x$, $AC = y$, $AD = z$, các góc $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAB = 90^\circ$. Gọi H là hình chiếu của A lên mặt phẳng (BCD)

a) Chứng minh rằng: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$

b) Tính diện tích tam giác BCD

$$\text{ĐS: } S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2}$$

KẾT LUẬN

Việc sử dụng tỉ số thể tích để giải các bài toán hình học không gian, đặc biệt là các bài toán tính thể tích khối đa diện, tính khoảng cách hay tính diện tích đa giác tỏ ra có nhiều ưu điểm, giúp cho lời giải ngắn gọn và không cần sử dụng nhiều kiến thức của hình học không gian lớp 11. Trong quá trình giảng dạy cho học sinh khối lớp 12 ở Ba vì trong học kì I năm học 2009 - 2010, tôi đã đem đề tài này áp dụng và thấy học sinh có thể tiếp cận rất nhanh và biết vận dụng để giải các bài tập mà tôi đã cho kiểm tra trên lớp. Trong học kì II tôi đã tiếp tục triển khai đề tài này để giảng dạy cho các em học sinh khối 12 ôn thi Đại học và Cao đẳng, các em tiếp thu rất tốt.

Qua một năm triển khai thực hiện đề tài này, tôi thấy tính hiệu quả của đề tài rất cao, có thể áp dụng rộng cho nhiều đối tượng học sinh của khối lớp 12, ôn thi tốt nghiệp và luyện thi Đại học. Vì vậy, trong năm học này tôi tiếp tục triển khai áp dụng đề tài này để giảng dạy cho các em học sinh khối 12.

Tôi rất mong được hội đồng chuyên môn Nhà trường góp ý, bổ sung để đề tài này hoàn thiện hơn, và có thể triển khai áp dụng rộng rãi để giảng dạy cho học sinh toàn khối 12 trong Nhà trường.

Hy vọng rằng, với đề tài này, có thể giúp cho các em học sinh có thêm một phương pháp nữa để giải các bài toán hình học không gian trong các kì thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng đạt được kết quả cao.

Trong quá trình biên soạn đề tài tôi đã có nhiều cố gắng, tuy nhiên cũng không tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong nhận được sự góp ý chân thành của các thầy cô giáo đồng nghiệp và Hội đồng chuyên môn nhà trường để đề tài của tôi được hoàn thiện hơn.

Quảng Ngãi tháng 10 năm 2010.

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines, typical of primary-ruled notebook paper. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features ten sets of horizontal dotted lines, each set consisting of three dots. These lines are evenly spaced across the entire page, providing a guide for letter height and placement. The background is white, and there are no margins or other markings present.