

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI GIẢI TOÁN TRÊN MÁY TÍNH CASIO NĂM HỌC 2009 – 2010 -Lớp 12 THPT

Học sinh điền kết quả của mỗi câu hỏi vào ô trống, nếu không có yêu cầu gì thêm thì điền kết quả với độ chính xác tới 5 chữ số thập phân

Bài 1: (5 điểm) : Bạn vay 5000 USD từ ngân hàng để mua xe. Phải trả lãi 1,2%/ tháng. Hỏi:

- a) Bạn muốn trả trong vòng 3 năm thì mỗi tháng bạn phải trả bao nhiêu tiền?
- b) Mỗi tháng bạn trả 100USD thì sau bao lâu trả hết tiền?

Cách giải	Kết quả
a)	a)
b)	b)

Bài 2: (5 điểm) Tìm số dư trong các phép chia sau:

- a) 1234567890987654321 chia cho 207207 (2,5 điểm)
- b) 9^{15} chia cho 2007 (2,5 điểm)

Cách giải	Kết quả
a)	Số dư:
b)	Số dư:

Bài 3: (5 điểm) Tìm số dư trong phép chia đa thức: $P(x) = 205x^6 + 8x^5 - 302x^4 + 2x^2 - 9x + 234$ cho nhị thức $x + 5$. Tìm giá trị của đa thức $P(x)$ tại $x = 6$

Cách giải	Kết quả
	Số dư $r =$
	$P(6) =$
	$P(-8) =$

Bài 4: (5 điểm) Tính gần đúng các nghiệm (độ, phút, giây) của phương trình:

$$3\sqrt{2} \cos 4x - \sin 4x = 4$$

Cách giải	Kết quả
	$x \approx$
	$x \approx$

Bài 5: Cho dãy số: $a_1 = 2$; $a_2 = 3$; $a_{n+2} = \frac{1}{4}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n$, với $n > 0$. Tính a_{10} và tổng S_{10} của 10 số hạng đầu tiên.

Cách giải	Kết quả
	a) $a_{10} \approx$
	b) $S_{10} \approx$

Bài 6: (5 điểm) Tính gần đúng giá trị của a và b nếu đường thẳng $y = ax + b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}}$ tại tiếp điểm có hoành độ $x = 1 + \sqrt{2}$

Cách giải	Kết quả
	$a \approx$
	$b \approx$

Bài 7: (5 điểm) Tìm 11 số tự nhiên liên tiếp có tổng các bình phương của chúng là một số chính phương nhỏ hơn 10000.

Cách giải	Kết quả
	$u_1 =$, $u_2 =$, $u_3 =$, $u_4 =$, $u_5 =$, $u_6 =$, $u_7 =$, $u_8 =$, $u_9 =$, $u_{10} =$, $u_{11} =$

Bài 8: (5 điểm) Đa thức $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ có giá trị bằng 5, 4, 3, 1, -2 lần lượt tại các giá trị x bằng 1, 2, 3, 4, 5. Tính giá trị của a, b, c, d, e và tính gần đúng các nghiệm của đa thức đó.

Cách giải	Kết quả
	$a =$, $b =$, $c =$, $d =$, $e =$. $x_1 \approx$; $x_2 \approx$

Bài 9: (5 điểm) Tìm hai chữ số tận cùng của số

- a) $A = 2^{999}$
b) $B = 3^{999}$.

Cách giải	Kết quả
a)	a)
b)	b)

Bài 10: (5 điểm) Tính gần đúng độ dài dây cung chung của hai đường tròn có phương trình:

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0 \text{ và } x^2 + y^2 - 2x + 3y - 2 = 0$$

Tính gần đúng độ dài dây cung chung của hai đường tròn đó.

Cách giải	Kết quả

ĐÁP ÁN

Bài 1:(5 điểm) : Bạn vay 5000 USD từ ngân hàng để mua xe. Phải trả lãi 1,2%/ tháng. Hỏi:

a) Bạn muốn trả trong vòng 3 năm thì mỗi tháng bạn phải trả bao nhiêu tiền?

b) Mỗi tháng bạn trả 100USD thì sau bao lâu trả hết tiền?

Cách giải	Kết quả
a) Gọi m là số tiền hàng tháng bạn phải trả và x_n là số tiền còn nợ sau n tháng. Như vậy, $x_0 = 5000$ USD, $r = 1,2\%$ Sau một tháng số tiền còn lại là: $x_1 = x_0 + x_0 \cdot r - m = x_0(1 + r) - m = x_0 q - m$, với $q = 1 + r$ Sau n tháng số tiền còn lại là:	a) $m \approx 171,86$ USD.

$x_n = x_0 q^n - m \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad (1)$ Áp dụng công thức (1) với $n = 36$ và $x_n = 0$, ta được $0 = 5000 \times 1,012^{36} - m \times \frac{1,012^{36} - 1}{0,012}$ Suy ra $m \approx 171,86$ USD.	
b) Sử dụng công thức (1) với: $x_n = 0$, $m = 100$, $r = 0,012$ $0 = 5000 \times 1,012^n - 100 \times \frac{1,012^n - 1}{0,012}$ Sử dụng phím Shift Solve ta được: $n \approx 77$ tháng (gần 6 năm rưỡi)	b) $n \approx 77$ tháng .

Bài 2: (5 điểm) Tìm số dư trong các phép chia sau:

- a) 1234567890987654321 chia cho 207207 (2,5 điểm)
b) 9^{15} chia cho 2007 (2,5 điểm)

Cách giải	Kết quả
a) Ta cắt ra thành nhóm đầu 9 chữ số rồi tìm số dư của phép chia 123456789 cho 207207 được: $123456789 - 207207 \times 595 = 168624$ Viết liên tiếp sau số dư đó các số tiếp theo ở số bị chia (kể từ trái) tới đủ 9 chữ số: $168624098 - 207207 \times 813 = 164807$ $164807765 - 207207 \times 795 = 78200$ $782004321 - 207207 \times 3774 = 5103$	Số dư: 5103
b) $9^5 \equiv 846 \pmod{2007}$ $9^{5 \times 3} \equiv 846^3 \pmod{2007} \equiv 1899$	Số dư: 1899

Bài 3: (5 điểm) Tìm số dư trong phép chia đa thức: $P(x) = 205x^6 + 8x^5 - 302x^4 + 2x^2 - 9x + 234$ cho nhị thức $x + 5$. Tìm giá trị của đa thức $P(x)$ tại $x = 6$

Cách giải	Kết quả
Nhập vào màn hình: $205x^6 + 8x^5 - 302x^4 + 2x^2 - 9x + 234$, sử dụng phím CALC với $x = -5$, ta được: số dư cần tìm là: 2989704 Tương tự ta gọi phím CALC với $x = 6$, ta được $P(6) = 9235548$. CALC với $x = -8$, ta được $P(-8) = 52240818$	Số dư $r = 2989704$
	$P(6) = 9235548$
	$P(-8) = 52240818$

Bài 4: (5 điểm) Tính gần đúng các nghiệm (độ, phút, giây) của phương trình:

$$3\sqrt{2} \cos 4x - \sin 4x = 4$$

Cách giải	Kết quả
$4x = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{3\sqrt{2}}\right) \pm \cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (-1)^2}}\right) + k.360^\circ$ $x = \left[\tan^{-1}\left(\frac{-1}{3\sqrt{2}}\right) \pm \cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (-1)^2}}\right) + k.360^\circ \right] \div 4$	$x \approx 2^\circ 32' 16'' + k.90^\circ$ $x \approx -9^\circ 10' 8'' + k.90^\circ$

Bài 5: Cho dãy số: $a_1 = 2$; $a_2 = 3$; $a_{n+2} = \frac{1}{4}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n$, với $n > 0$. Tính a_{10} và tổng S_{10} của 10 số hạng đầu tiên.

Cách giải	Kết quả
a) Gán $D = 2$; $A = 2$; $B = 3$; $C = 5$. Nhập biểu thức: $D = D + 1$; $A = \frac{1}{4}B + \frac{1}{2}A$; $C = C + A$; $D = D + 1$; $B = \frac{1}{4}A + \frac{1}{2}B$; $C = C + B$. Bấm đến khi $D = 10$, bấm [=] được u_{10} .	a) $a_{10} \approx 0,63548$
b) Bấm [=] thêm một lần nữa được S_{10} .	b) $S_{10} \approx 14,63371$

Bài 6: (5 điểm) Tính gần đúng giá trị của a và b nếu đường thẳng $y = ax + b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}}$ tại tiếp điểm có hoành độ $x = 1 + \sqrt{2}$

Cách giải	Kết quả
$a = f'(1 + \sqrt{2})$. Ghi vào màn hình: $\frac{d}{dx} \left(\frac{x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}}, 1 + \sqrt{2} \right) =$ $b = y - ax = \frac{x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}} - ax$	$a \approx 0,04604$ $b \approx 0,74360$

Bài 7: (5 điểm) Tìm 11 số tự nhiên liên tiếp có tổng các bình phương của chúng là một số chính phương nhỏ hơn 10000.

Cách giải	Kết quả
Gọi 11 số tự nhiên liên tiếp là: $n-5, n-4, n-3, n-2, n-1, n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$. ($n \geq 5$). Ta có: $S = (n-5)^2 + (n-4)^2 + (n-3)^2 + (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 + (n+4)^2 + (n+5)^2 = 11n^2 + 110 = 11(n^2 + 10)$. S là số chính phương khi và chỉ khi $n^2 + 10 = q \cdot 11$, với q là số chính phương. Ghi vào màn hình: $D = D + 1$; $A = (D^2 + 10) \div 11$, CALC $D=5$ Ta chọn được $D = 23$. Vậy $n = 23$. $S^2 = 77^2$. Dãy số là:	$u_1 = 18, u_2 = 19, u_3 = 20,$ $u_4 = 21, u_5 = 22, u_6 = 23,$ $u_7 = 24, u_8 = 25, u_9 = 26,$ $u_{10} = 27, u_{11} = 28.$

Bài 8: (5 điểm) Đa thức $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ có giá trị bằng 5, 4, 3, 1, -2 lần lượt tại các giá trị x bằng 1, 2, 3, 4, 5. Tính giá trị của a, b, c, d, e và tính gần đúng các nghiệm của đa thức đó.

Cách giải	Kết quả
Thay các giá trị của x lần lượt bằng 1, 2, 3, 4, 5 vào đa thức $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, giải hệ phương trình ta được: $a = \frac{1}{24}, b = \frac{-7}{22}, c = \frac{59}{24}, d = \frac{59}{12}, e = 8$ Các nghiệm của đa thức là: $x_1 \approx 4,36150$; $x_2 \approx 8,22722$	$a = \frac{1}{24}, b = \frac{-7}{22}, c = \frac{59}{24}, d = \frac{59}{12}, e = 8$ $x_1 \approx 4,36150$; $x_2 \approx 8,22722$

Bài 9: (5 điểm) Tìm hai chữ số tận cùng của số

a) $A = 2^{999}$

b) $B = 3^{999}$

Cách giải	Kết quả
a) $2^{999} = 2^{20 \cdot 49 + 19} = (2^{20})^{49} \cdot 2^{19}$. Ta có 2^{20} tận cùng bằng 76 nên $(2^{20})^{49}$ tận cùng bằng 76; 2^{19} tận cùng bằng 88. Ta có 76.88 tận cùng là 88.	a) 88
b) $3^{999} = 3^{20 \cdot 49 + 19} = (3^{20})^{49} \cdot 3^{19}$. Ta có 3^{20} tận cùng bằng 01 nên $(3^{20})^{49}$ tận cùng bằng 01; 3^{19} tận cùng bằng 67. Do đó 3^{999} tận cùng bằng 67.	b) 67

Bài 10: (5 điểm) Tính gần đúng độ dài dây cung chung của hai đường tròn có phương trình:

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0 \text{ và } x^2 + y^2 - 2x + 3y - 2 = 0$$

Tính gần đúng độ dài dây cung chung của hai đường tròn đó.

Cách giải	Kết quả
Trước hết ta tính gần đúng tọa độ các giao điểm của hai đường tròn đó $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 - 2x + 3y - 2 = 0 & (2) \end{cases}$ Trừ (1) và (2) $\Rightarrow -9y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{4}{9}$ (3) Thay (3) vào (1) $\Rightarrow x^2 - 2x + (-\frac{4}{9})^2 - 6(-\frac{4}{9}) - 6 = 0$.	$\begin{aligned} &A \begin{cases} x \approx 3,03367 \\ y \approx -0,44444 \end{cases} \quad (\text{hay } -\frac{4}{9}) \\ &B \begin{cases} x \approx -1,03367 \\ y \approx -0,44444 \end{cases} \end{aligned}$
$AB = \sqrt{(-1,03367 - 3,03367)^2} = 4,06734$	AB = 4, 06734