|  |  |
| --- | --- |
| **PHÒNG GD&ĐT**  **VĨNH TƯỜNG**  **ĐỀ CHÍNH THỨC** | **ĐỀ THI CHỌN HGS LỚP 9**  **Môn: Toán**  *Thời gian làm bài: 150 phút* |

**Câu 1:**

a/ Giải phương trình: x2 + 4x + 5 = 2

b/ Giả sử a, b, c là các số hữu tỉ thỏa mãn điều kiện ab + bc + ca = 2012.

Chứng minh rằng A =  có giá trị là số hữu tỉ.

**Câu 2:**

a/ Cho a, b là các số tự nhiên. Chứng minh rằng 5a2 + 15ab – b2 chia hết cho 49 khi và chỉ khi 3a + b chia hết cho 7.

b/ Tìm nghiệm nguyên của phương trình: 

**Câu 3:**

a/ Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng: ab + bc + ca  a2 + b2 + c2 < 2(ab + bc + ca)

b/ Cho sáu số dương a, b, c, x, y , z thỏa mãn ax + by + cz = xyz.

Chứng minh rằng x + y + z > 

**Câu 4:** Cho hai đường tròn đồng tâm O có bán kính là R và r (R > r). Gọi M, A là hai điểm trên đường tròn (O; r) với M cố định và A di động. Qua M vẽ dây BC của đường tròn (O; R) vuông góc với AM. Gọi H là hình chiếu của O trên BC. Chứng minh rằng :

a/ AM = 2OH

b/ Tổng MA2 + MB2 + MC2 không phụ thuộc vào vị trí của điểm A.

c/ Trọng tâm G của tam giác ABC cố định.

**Câu 5:**

a/ Cho tứ giác ABCD có độ dài đường chéo AC = 8cm, BD = 6cm. Chứng minh rằng luôn tồn tại một cạnh của tứ giác có độ dài không nhỏ hơn 5cm.

b/ Cho ba số tự nhiên a, b, c thỏa mãn đồng thời hai điều kiện: a – b là số nguyên tố và 3c2 = c(a + b) + ab. Chứng minh rằng 8c + 1 là số chính phương.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **PHÒNG GD&ĐT**  **VĨNH TƯỜNG** | | | **ĐÁP ÁN CHẤM ĐỀ THI HGS LỚP 9**  **Môn: Toán** | |
| **Câu** | **Phần** | **Nội dung trình bày** | | **Điểm** |
| 1  2đ | a | Điều kiện: x ≥ -  Phương trình đã cho tương đương với phương trình:  (x2 + 2x + 1) + (2x + 3 - 2+ 1) = 0  ⇔ (x + 1)2 + (- 1)2 = 0 (1)  Vì (x + 1)2 ≥ 0 và (- 1)2 ≥ 0 nên từ (1) suy ra    ⇒ x = -1 (thỏa mãn điều kiện)  Vậy phương trình có nghiệm duy nhất x = -1 | | 0,25  0,25  0,25  0,25 |
| b | Vì ab + bc + ca = 2012 nên  A =  =  =  Do a, b, c là các số hữu tỉ nên  có giá trị là  số hữu tỉ.  Vậy A có giá trị là số hữu tỉ. | | 0,25  0,25  0,25  0,25 |
| 2  2đ | a | Nếu 5a2 + 15ab – b2 49 thì 5a2 + 15ab – b2 7  ⇒ 30a2 + 90ab – 6b2  7  ⇒ 9a2 + 6ab + b2 7 ⇒ (3a + b)2 7 ⇒ 3a + b 7 (1)  Nếu 3a + b 7 ⇒ 3a + b = 7c (c ∈ Z) ⇒ b = 7c - 3a  ⇒ 5a2 + 15ab – b2 = 5a2 + 15a(7c - 3a) – (7c - 3a)2  = 5a2 + 105ac – 45a2 - 49c2 + 42ac - 9a2  = -49(a2 - 3ac + c2) 49 (2)  Từ (1) và (2) suy ra: 5a2 + 15ab – b2 49 ⇔ 3a + b 7 | | 0,25  0,25  0,25  0,25 |
| b | Điều kiện: -201 ≤ x ≤ 199  Ta có:    ⇒ y2 ≤ 4 ⇒ |y| ≤ 2 ⇒ -2 ≤ y ≤ 2  Với y = ±1 ⇒  ⇒ ⇒ x = 13; x = -15  Với y = ±2 ⇒  ⇒ ⇒ x = 1; x = -3  Với y = 0 ⇒ . Vô lí!  Vậy nghiệm nguyên của phương trình là:  (13; 1), (13; -1), (-15; 1), (-15; -1), (1; 2), (1; -2), (-3; 2), (-3; -2) | | 0,25  0,25  0,25  0,25 |
| **3**  2đ | a | Ta có: a2 + b2  2ab  b2 + c2  2bc  c2 + a2  2ca  Suy ra: 2(a2 + b2 + c2)  2(ab + bc + ca)  hay a2 + b2 + c2  ab + bc + ca (1)  Mặt khác, do a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên:  a < b + c ⇒ a2 < ab + ac  Tương tự:  Do đó: a2 + b2 + c2 < 2(ab + bc + ca) (2)  Từ (1) và (2) suy ra:  ab + bc + ca  a2 + b2 + c2 < 2(ab + bc + ca) | | 0,25  0,25  0,25  0,25 |
| b | Vì xyz = ax +by + cz => xyz > by + cz  => x >  (1)  Chứng minh tương tự ta có y >  (2) z >  (3)  Cộng vế theo vế của (1) (2) và (3) ta có:  x + y + z >  +  +  => 2(x + y + z) >  => 2(x + y + z) >  Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương ta có:  => 2(x + y + z) >  => x + y + z >  Vậy ta có x + y + z > | | 0,25  0,25  0,25  0,25 |
| 4  2,5đ | a | Gọi N là giao điểm của BC với (O, r)  Vì H là hình chiếu của O trên BC => OH MN  => H là trung điểm của MN (quan hệ đường kính và dây) (1)  Lại có  => AN là đường kính của (O, r)  Suy ra O là trung điểm của AN (2)  Từ (1) và (2) suy ra OH là đường trung bình của NAM  => AM = 2OH | | 0,5  0,5 |
| b | Vì OH BC => HM = HN và HB = HC  Lại có MA = 2 OH (phần a) => MA2 = 4 OH2 (3)  Mặt khác MB2 + MC2 = (HB - HM)2 + (HC+HM)2  = (HB-HM)2 + (HB+HM)2  = 2(HB2+HM2)  vuông tại H nên: HM2 = OM2 - OH2  = r2 - OH2  vuông tại H nên: HB2 = OB2 - OH2 = R2 - OH2  Suy ra MB2 + MC2 = 2(HB2+HM2) = 2( r2 -OH2 + R2 - OH2)  = 2( r2 + R2) - 4OH2 (4)  Từ (3), (4) suy ra  MA2 + MB2 + MC2 = 2(r2 + R2) không đổi.  Vậy tổng MA2 + MB2 + MC2 không phụ thuộc vào vị trí của điểm A | | 0,25  0,25  0,25 |
| c | Vì G là trọng tâm  và AH là trung tuyến  => G  AH và AG =  AH (\*)  có AH là đường trung tuyến (HM = HN) nên G cũng là trọng tâm của .  Mà MO là trung tuyến của (AO = ON) nên G thuộc MO.  Do O và M là hai điểm cố định nên G là điểm cố định.  Vậy trọng tâm G của tam giác ABC là điểm cố định khi A thay đổi. | | 0,25  0,25  0,25 |
| 5  1,5đ |  | Gọi M là trung điểm của BD  => BM = 3 => BM2 = 9 (1)  Lại có MA + MC  AC  Mà AC = 8cm => MA + MC  8  =>  Giả sử MA  4 => MA2  16 (2)  Ta lại có  (hai goác kề bù) =>  Giả sử  => AB2  BM2 + AM2 (3)  Từ (1), (2) và (3) suy ra AB2  9 + 16 => AB2  25 hay AB  5  Vậy bài toán được chứng minh. | | 0,25  0,25  0,25 |
| b | Ta có  3c2 = c(a + b) + ab => 4c2 = c2 + ca + cb + ab = (a + c)(b + c) (1)  Vì a – b là số nguyên tố => a > b và a + c > b + c  => (b + c)2 < (a + c)(b + c) (2)  Từ (1) và (2) => b + c < 2c => b < c (3)  Ta lại có (a + c) – (b + c) = a – b là số nguyên tố  => Hoặc a – b  ƯC(a + c, b + c) hoặc (a + c, b + c) = 1.  \* Nếu a – b = p  ƯC(a + c, b + c) => a + c = p.k và b + c = p.h (k, h  N)  => pk – ph = a – b = p => k – h = 1 (vì p 0) => k = h + 1  Khi đó (1) trở thành (2c)2 = p2kh = p2k(k + 1) => k(k + 1) là số chính phương.  Mà k và k + 1 là hai số tự nhiên liên tiếp  => k = 0 => b + c = pk = 0 (mâu thuẫn với (3))  \* Nếu (a + c, b + c) = 1  Từ (1) => (2c)2 = (a + c)(b + c).  Đặt a + c = m2 và b + c = n2 (m, n  N)  => m2 – n2 = (m – n)(m + n) = a – b là số nguyên tố.  Mà m – n < m + n => m – n = 1 và m + n = a – b  Suy ra (2c)2 = (b + c)(c + a) = (mn)2 = (m – 1)2m2  => 2c = m(m – 1)  Khi đó 8c + 1 = 4m(m – 1) + 1 = (2m – 1)2 là số chính phương.  Vậy 8c + 1 là số chính phương. | | 0,25  0,25  0,25 |