|  |  |
| --- | --- |
| **PHÒNG GD&ĐT****VĨNH TƯỜNG****ĐỀ CHÍNH THỨC** | **ĐỀ THI CHỌN HGS LỚP 9** **Môn: Toán** *Thời gian làm bài: 150 phút* |

**Câu 1:**

a/ Giải phương trình: x2 + 4x + 5 = 2

b/ Giả sử a, b, c là các số hữu tỉ thỏa mãn điều kiện ab + bc + ca = 2012.

Chứng minh rằng A =  có giá trị là số hữu tỉ.

**Câu 2:**

a/ Cho a, b là các số tự nhiên. Chứng minh rằng 5a2 + 15ab – b2 chia hết cho 49 khi và chỉ khi 3a + b chia hết cho 7.

b/ Tìm nghiệm nguyên của phương trình: 

**Câu 3:**

a/ Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng: ab + bc + ca  a2 + b2 + c2 < 2(ab + bc + ca)

b/ Cho sáu số dương a, b, c, x, y , z thỏa mãn ax + by + cz = xyz.

Chứng minh rằng x + y + z > 

**Câu 4:** Cho hai đường tròn đồng tâm O có bán kính là R và r (R > r). Gọi M, A là hai điểm trên đường tròn (O; r) với M cố định và A di động. Qua M vẽ dây BC của đường tròn (O; R) vuông góc với AM. Gọi H là hình chiếu của O trên BC. Chứng minh rằng :

a/ AM = 2OH

b/ Tổng MA2 + MB2 + MC2 không phụ thuộc vào vị trí của điểm A.

c/ Trọng tâm G của tam giác ABC cố định.

**Câu 5:**

 a/ Cho tứ giác ABCD có độ dài đường chéo AC = 8cm, BD = 6cm. Chứng minh rằng luôn tồn tại một cạnh của tứ giác có độ dài không nhỏ hơn 5cm.

 b/ Cho ba số tự nhiên a, b, c thỏa mãn đồng thời hai điều kiện: a – b là số nguyên tố và 3c2 = c(a + b) + ab. Chứng minh rằng 8c + 1 là số chính phương.

|  |  |
| --- | --- |
| **PHÒNG GD&ĐT****VĨNH TƯỜNG** | **ĐÁP ÁN CHẤM ĐỀ THI HGS LỚP 9** **Môn: Toán**  |
| **Câu** | **Phần** | **Nội dung trình bày** | **Điểm** |
| 12đ | a | Điều kiện: x ≥ -Phương trình đã cho tương đương với phương trình: (x2 + 2x + 1) + (2x + 3 - 2+ 1) = 0⇔ (x + 1)2 + (- 1)2 = 0 (1)Vì (x + 1)2 ≥ 0 và (- 1)2 ≥ 0 nên từ (1) suy ra⇒ x = -1 (thỏa mãn điều kiện)Vậy phương trình có nghiệm duy nhất x = -1 | 0,250,250,250,25 |
| b | Vì ab + bc + ca = 2012 nên A == = Do a, b, c là các số hữu tỉ nên  có giá trị làsố hữu tỉ.Vậy A có giá trị là số hữu tỉ. | 0,250,250,250,25 |
| 22đ | a | Nếu 5a2 + 15ab – b2 49 thì 5a2 + 15ab – b2 7 ⇒ 30a2 + 90ab – 6b2  7⇒ 9a2 + 6ab + b2 7 ⇒ (3a + b)2 7 ⇒ 3a + b 7 (1)Nếu 3a + b 7 ⇒ 3a + b = 7c (c ∈ Z) ⇒ b = 7c - 3a⇒ 5a2 + 15ab – b2 = 5a2 + 15a(7c - 3a) – (7c - 3a)2= 5a2 + 105ac – 45a2 - 49c2 + 42ac - 9a2= -49(a2 - 3ac + c2) 49 (2)Từ (1) và (2) suy ra: 5a2 + 15ab – b2 49 ⇔ 3a + b 7 | 0,250,250,250,25 |
| b | Điều kiện: -201 ≤ x ≤ 199 Ta có:  ⇒ y2 ≤ 4 ⇒ |y| ≤ 2 ⇒ -2 ≤ y ≤ 2Với y = ±1 ⇒  ⇒ ⇒ x = 13; x = -15Với y = ±2 ⇒  ⇒ ⇒ x = 1; x = -3Với y = 0 ⇒ . Vô lí!Vậy nghiệm nguyên của phương trình là: (13; 1), (13; -1), (-15; 1), (-15; -1), (1; 2), (1; -2), (-3; 2), (-3; -2) | 0,250,250,250,25 |
| **3**2đ | a | Ta có: a2 + b2  2ab b2 + c2  2bc c2 + a2  2caSuy ra: 2(a2 + b2 + c2)  2(ab + bc + ca) hay a2 + b2 + c2  ab + bc + ca (1)Mặt khác, do a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên: a < b + c ⇒ a2 < ab + acTương tự: Do đó: a2 + b2 + c2 < 2(ab + bc + ca) (2)Từ (1) và (2) suy ra: ab + bc + ca  a2 + b2 + c2 < 2(ab + bc + ca) | 0,250,250,250,25 |
| b | Vì xyz = ax +by + cz => xyz > by + cz=> x >  (1)Chứng minh tương tự ta có y >  (2) z >  (3)Cộng vế theo vế của (1) (2) và (3) ta có:x + y + z >  +  + => 2(x + y + z) > => 2(x + y + z) > Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương ta có:=> 2(x + y + z) > => x + y + z > Vậy ta có x + y + z >  | 0,250,250,250,25 |
| 42,5đ | a | Gọi N là giao điểm của BC với (O, r)Vì H là hình chiếu của O trên BC => OH MN => H là trung điểm của MN (quan hệ đường kính và dây) (1)Lại có  => AN là đường kính của (O, r)Suy ra O là trung điểm của AN (2)Từ (1) và (2) suy ra OH là đường trung bình của NAM => AM = 2OH | 0,50,5 |
| b | Vì OH BC => HM = HN và HB = HCLại có MA = 2 OH (phần a) => MA2 = 4 OH2 (3)Mặt khác MB2 + MC2 = (HB - HM)2 + (HC+HM)2 = (HB-HM)2 + (HB+HM)2= 2(HB2+HM2)  vuông tại H nên: HM2 = OM2 - OH2  = r2 - OH2  vuông tại H nên: HB2 = OB2 - OH2 = R2 - OH2 Suy ra MB2 + MC2 = 2(HB2+HM2) = 2( r2 -OH2 + R2 - OH2) = 2( r2 + R2) - 4OH2 (4)Từ (3), (4) suy ra MA2 + MB2 + MC2 = 2(r2 + R2) không đổi.Vậy tổng MA2 + MB2 + MC2 không phụ thuộc vào vị trí của điểm A | 0,250,250,25 |
| c | Vì G là trọng tâm  và AH là trung tuyến => G  AH và AG =  AH (\*) có AH là đường trung tuyến (HM = HN) nên G cũng là trọng tâm của .Mà MO là trung tuyến của (AO = ON) nên G thuộc MO. Do O và M là hai điểm cố định nên G là điểm cố định.Vậy trọng tâm G của tam giác ABC là điểm cố định khi A thay đổi. | 0,250,250,25 |
| 51,5đ |  | Gọi M là trung điểm của BD => BM = 3 => BM2 = 9 (1)Lại có MA + MC  AC Mà AC = 8cm => MA + MC  8 => Giả sử MA  4 => MA2  16 (2)Ta lại có  (hai goác kề bù) => Giả sử  => AB2  BM2 + AM2 (3)Từ (1), (2) và (3) suy ra AB2  9 + 16 => AB2  25 hay AB  5Vậy bài toán được chứng minh. | 0,250,250,25 |
| b | Ta có 3c2 = c(a + b) + ab => 4c2 = c2 + ca + cb + ab = (a + c)(b + c) (1)Vì a – b là số nguyên tố => a > b và a + c > b + c => (b + c)2 < (a + c)(b + c) (2)Từ (1) và (2) => b + c < 2c => b < c (3)Ta lại có (a + c) – (b + c) = a – b là số nguyên tố=> Hoặc a – b  ƯC(a + c, b + c) hoặc (a + c, b + c) = 1.\* Nếu a – b = p  ƯC(a + c, b + c) => a + c = p.k và b + c = p.h (k, h  N)=> pk – ph = a – b = p => k – h = 1 (vì p 0) => k = h + 1Khi đó (1) trở thành (2c)2 = p2kh = p2k(k + 1) => k(k + 1) là số chính phương.Mà k và k + 1 là hai số tự nhiên liên tiếp => k = 0 => b + c = pk = 0 (mâu thuẫn với (3))\* Nếu (a + c, b + c) = 1Từ (1) => (2c)2 = (a + c)(b + c). Đặt a + c = m2 và b + c = n2 (m, n  N) => m2 – n2 = (m – n)(m + n) = a – b là số nguyên tố. Mà m – n < m + n => m – n = 1 và m + n = a – b Suy ra (2c)2 = (b + c)(c + a) = (mn)2 = (m – 1)2m2 => 2c = m(m – 1) Khi đó 8c + 1 = 4m(m – 1) + 1 = (2m – 1)2 là số chính phương.Vậy 8c + 1 là số chính phương. | 0,250,250,25 |