

CHỦ ĐỀ 2**TÍCH PHÂN CÓ ĐIỀU KIỆN****PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.****Câu 1.** Nếu $F'(x) = \frac{1}{2x}$ và $F(1) = 1$ thì giá trị của $F(4)$ bằng

- A. $\ln 2$. B. $1 + \ln 2$ C. $1 + \frac{1}{2} \ln 2$ D. $\frac{1}{2} \ln 2$

Lời giải**Chọn B.**Ta có: $\int_1^4 F'(x) dx = \int_1^4 \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2} \ln |x| \Big|_1^4 = \ln 2$ Lại có: $\int_1^4 F'(x) dx = F(x) \Big|_1^4 = F(4) - F(1)$ Suy ra $F(4) - F(1) = \ln 2$ Do đó $F(4) = F(1) + \ln 2 = 1 + \ln 2$ **Câu 2.** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{2}{x}$. Biết $F(-1) = 0$. Tính $F(2)$ kết quả là.
A. $2 \ln 2 + 1$. B. $\ln 2$. C. $2 \ln 3 + 2$. D. $2 \ln 2$.**Lời giải****Chọn D.**Ta có: $\int_{-1}^2 f(x) dx = F(x) \Big|_{-1}^2 = F(2) - F(-1)$ $\int_{-1}^2 f(x) dx = \int_{-1}^2 \frac{2}{x} dx = 2 \ln |x| \Big|_{-1}^2 = 2 \ln 2 - 2 \ln 1 = 2 \ln 2$ $\Rightarrow F(2) - F(-1) = 2 \ln 2$ $\Leftrightarrow F(2) = 2 \ln 2$ (do $F(-1) = 0$).**Câu 3.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $[-1; 2]$, $f(-1) = 8$; $f(2) = -1$. Tích phân $\int_{-1}^2 f'(x) dx$ bằng
A. 1. B. 7. C. -9. D. 9.**Lời giải****Chọn C.**

Ta có $\int_{-1}^2 f'(x)dx = f(x) \Big|_{-1}^2 = f(2) - f(-1) = -1 - 8 = -9$.

Câu 4. Biết $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^3 [1 + f(x)] dx$ bằng

A. 10. B. 8. C. $\frac{26}{3}$. D. $\frac{32}{3}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\int_1^3 [1 + f(x)] dx = (x + F(x)) \Big|_1^3 = (x + x^2) \Big|_1^3 = 12 - 2 = 10$.

Câu 5. Biết $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^3 (1 + f(x)) dx$ bằng

A. 20. B. 22. C. 26. D. 28.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\int_1^3 [1 + f(x)] dx = [x + F(x)] \Big|_1^3 = [x + x^3] \Big|_1^3 = 30 - 2 = 28$.

Câu 6. Biết $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^2 [2 + f(x)] dx$ bằng

A. 5. B. 3. C. $\frac{13}{3}$. D. $\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $\int_1^2 [2 + f(x)] dx = (2x + x^2) \Big|_1^2 = 8 - 3 = 5$

Câu 7. Biết $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^2 (2 + f(x)) dx$ bằng

A. $\frac{23}{4}$. B. 7. C. 9. D. $\frac{15}{4}$.

Lời giải

Chọn C.

$$\int_1^2 (2 + f(x)) dx = \int_1^2 2 dx + \int_1^2 f(x) dx = 2x \Big|_1^2 + F(x) \Big|_1^2 = 2x \Big|_1^2 + x^3 \Big|_1^2 = 9$$

Ta có

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\sin^2 \frac{x}{2}+1, \forall x \in \mathbb{R}$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$ bằng

A. $\frac{\pi^2+16\pi+8\sqrt{2}-16}{16}$

B. $\frac{\pi^2+16\pi+2\sqrt{2}-4}{16}$

C. $\frac{\pi^2+16\pi+8\sqrt{2}}{16}$

D. $\frac{\pi^2+16\pi-16}{16}$

Lời giải

Chọn A.

Ta có $f(x) = \int \left(2\sin^2 \frac{x}{2} + 1 \right) dx = \int (2 - \cos x) dx = 2x - \sin x + C.$

Vì $f(0)=4 \Rightarrow C=4$

Hay $f(x)=2x - \sin x + 4.$

Suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x - \sin x + 4)dx$

$$= \left(x^2 + \cos x + 4x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi - 1 = \frac{\pi^2 + 16\pi + 8\sqrt{2} - 16}{16}.$$

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\cos^2 \frac{x}{2}+3, \forall x \in \mathbb{R}$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$ bằng?

A. $\frac{\pi^2+8\pi-8-\sqrt{2}}{8}$

B. $\frac{\pi^2+8\pi-8-4\sqrt{2}}{8}$

C. $\frac{\pi^2+6\pi+8}{8}$

D. $\frac{\pi^2+8\pi-4\sqrt{2}}{8}$

Lời giải

Chọn B.

Ta có $f(x) = \int f'(x)dx = \int \left(2\cos^2 \frac{x}{2} + 3 \right) dx = \int \left(2 \cdot \frac{1+\cos x}{2} + 3 \right) dx = \int (\cos x + 4) dx = \sin x + 4x + C$

$\Rightarrow f(x) = \sin x + 4x + C$

do $f(0)=4 \Rightarrow C=4$

Vậy $f(x) = \sin x + 4x + 4$ nên $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x + 4x + 4)dx$

$$= \left(-\cos x + 2x^2 + 4x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2 + 8\pi - 8 - 4\sqrt{2}}{8}.$$

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{khi } x \geq 0 \\ x^2 + x + 2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Biết tích phân $\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{a}{b} + \frac{e^2}{c}$ ($\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Giá trị $a+b+c$ bằng

- A. 7. B. 8. C. 9. D. 10.

Lời giải

Chọn C

Ta có:
$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 (x^2 + x + 2) dx + \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{4}{3} + \frac{e^2}{2}$$

Vậy $a+b+c=9$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khi } x \geq 2 \\ x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Tích phân $I = \frac{1}{2} \int_1^3 f(x) dx$ bằng:

- A. $\frac{23}{3}$. B. $\frac{23}{6}$. C. $\frac{17}{6}$. D. $\frac{17}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$I = \frac{1}{2} \int_1^3 f(x) dx = \frac{1}{2} \left[\int_1^2 (x^2 - 2x + 3) dx + \int_2^3 (x^2 - 1) dx \right] = \frac{23}{6}$$

Câu 12. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x(1+x^2) & \text{khi } x \geq 3 \\ \frac{1}{x-4} & \text{khi } x < 3 \end{cases}$. Tích phân $I = \int_2^4 f(t) dt$ bằng:

- A. $\frac{40}{3} - \ln 2$. B. $\frac{95}{6} + \ln 2$. C. $\frac{189}{4} + \ln 2$. D. $\frac{189}{4} - \ln 2$.

Lời giải

Chọn D

$$I = \int_2^4 f(t) dt = \int_2^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx = \int_2^3 \frac{1}{x-4} dx + \int_3^4 x(1+x^2) dx = \frac{189}{4} - \ln 2$$

Câu 13. Cho số thực a và hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x \leq 0 \\ a(x - x^2) & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_{-1}^1 f(x) dx$ bằng:

- A. $\frac{a}{6} - 1$. B. $\frac{2a}{3} + 1$. C. $\frac{a}{6} + 1$. D. $\frac{2a}{3} - 1$.

Lời giải

Chọn A

Ta thấy,
$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 2x dx + \int_0^1 a(x - x^2) dx$$

$$= (x^2)^0 \Big|_{-1} + a \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = -1 + a \left(\frac{1}{6} \right) = \frac{a}{6} - 1$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3 & \text{khi } x \geq 1 \\ 2 - x^3 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. $\int_1^{2024} f(x)dx = \int_1^{2024} (2x^2 + 3)dx$

B. $\int_{-2024}^1 f(x)dx = \int_{-2024}^1 (2 - x^3)dx$

C. $\int_{-2024}^{2024} f(x)dx = \int_{-2024}^{2024} (2x^2 + 3)dx + \int_{-2024}^{2024} (2 - x^3)dx$

D. $\int_{-2024}^{2024} f(x)dx = \int_1^{2024} (2x^2 + 3)dx + \int_{-2024}^1 (2 - x^3)dx$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	ĐÚNG

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3 & \text{khi } x \geq 1 \\ 2 - x^3 & \text{khi } x < 1 \end{cases} \text{ nên}$$

Do

$$\int_1^{2024} f(x)dx = \int_1^{2024} (2x^2 + 3)dx$$

$$\int_{-2024}^1 f(x)dx = \int_{-2024}^1 (2 - x^3)dx$$

$$\int_{-2024}^{2024} f(x)dx = \int_1^{2024} (2x^2 + 3)dx + \int_{-2024}^1 (2 - x^3)dx$$

Câu 15. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x \geq 2 \\ x + 1 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. $\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (x+1)dx$

B. $\int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 (x^2 - 2x + 3)dx$

C. $\int_1^3 \frac{1}{2} f(x)dx = \frac{41}{12}$

D. $\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (x^2 - 2x + 3)dx$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG	SAI

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x \geq 2 \\ x + 1 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$$

Do

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (x+1)dx$$

$$\int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 (x^2 - 2x + 3)dx$$

$$\Rightarrow \int_1^3 \frac{1}{2} f(x)dx = \frac{1}{2} \left(\int_1^2 (x+1)dx + \int_2^3 (x^2 - 2x + 3)dx \right) = \frac{41}{12}$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 16. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{khi } x \geq 1 \\ x + 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Tích phân $I = \int_{-2}^0 3t^2 f(t)dt$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $I = \frac{25}{12}$

$$I = -3 \int_{-2}^0 t^2 f(t)dt = 3 \int_0^2 x^2 f(x)dx = 3 \left[\int_0^1 x^2 (x+1)dx + \int_1^2 xdx \right] = \frac{25}{12}$$

Câu 17. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{khi } x < 0 \\ x - 1 & \text{khi } 0 \leq x \leq 2 \\ 5 - 2x & \text{khi } x > 2 \end{cases}$. Tính tích phân $I = \int_{-5}^9 \frac{1}{7} f(t)dt$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $I = \frac{109}{21}$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{7} \int_{-5}^9 f(t) dt = \frac{1}{7} \int_{-5}^9 f(x) dx = \frac{1}{7} \int_{-5}^0 f(x) dx + \frac{1}{7} \int_0^2 f(x) dx + \frac{1}{7} \int_2^9 f(x) dx$$

$$= \frac{1}{7} \int_{-5}^0 (2x^2 - 1) dx + \frac{1}{7} \int_0^2 (x - 1) dx + \frac{1}{7} \int_2^9 (5 - 2x) dx = \frac{109}{21}.$$

Câu 18. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{khi } x \geq 0 \\ x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Khi đó $I = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_{-1}^3 f(x) dx$ bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $I = \frac{10}{3}$

$$I_1 = \int_{-1}^1 f(x) dx$$

Do $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{khi } x \geq 0 \\ x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow I_1 = \int_{-1}^0 x dx + \int_0^1 (x^2 - x) dx = -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow I_2 = \int_{-1}^3 f(x) dx$$

Do $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{khi } x \geq 0 \\ x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow I_2 = \int_{-1}^0 x dx + \int_0^3 (x^2 - x) dx = 4$$

Vậy $I = I_1 + I_2 = \frac{10}{3}$

Câu 19. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 4x & \text{khi } x > 2 \\ -2x + 12 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$.

$$I = \int_1^2 f(t) dt + \frac{1}{2} \int_5^{10} f(t) dt$$

Tính tích phân

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $I = 84$

$$I_1 = \int_1^2 f(t) dt = \int_1^2 f(x) dx$$

Do
$$f(x) = \begin{cases} 4x & \text{khi } x > 2 \\ -2x + 12 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_1 = \int_1^2 (-2x + 12) dx = 9$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_5^{10} f(t) dt = \frac{1}{2} \int_5^{10} f(x) dx$$

Do
$$f(x) = \begin{cases} 4x & \text{khi } x > 2 \\ -2x + 12 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{1}{2} \int_5^{10} 4x dx = 75$$

Vậy $I = I_1 + I_2 = 84$

Câu 20. Biết rằng hàm số $f(x) = mx + n$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = 3$, $\int_0^2 f(x) dx = 8$. Tính $m + n$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $m + n = 4$

Ta có: $\int f(x) dx = \int (mx + n) dx = \frac{m}{2} x^2 + nx + C$

Lại có: $\int_0^1 f(x) dx = 3 \Rightarrow \left(\frac{m}{2} x^2 + nx \right) \Big|_0^1 = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} m + n = 3 \quad (1)$

$$\int_0^2 f(x) dx = 8 \Rightarrow \left(\frac{m}{2} x^2 + nx \right) \Big|_0^2 = 8 \Leftrightarrow 2m + 2n = 8 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{1}{2} m + n = 3 \\ 2m + 2n = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow m + n = 4$$

Câu 21. Biết rằng hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = -\frac{7}{2}$, $\int_0^2 f(x) dx = -2$ và

$$\int_0^3 f(x) dx = \frac{13}{2}. \text{ Tính } P = a + b + c$$

Trả lời:

Lời giải

$$P = a + b + c = -\frac{4}{3}$$

Đáp án:

Ta có: $\int f(x)dx = \int (ax^2 + bx + c)dx = \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx + C$

Lại có: $\int_0^1 f(x)dx = -\frac{7}{2} \Rightarrow \left(\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx \right) \Big|_0^1 = -\frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + c = -\frac{7}{2} \quad (1)$

$$\int_0^2 f(x)dx = -2 \Rightarrow \left(\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx \right) \Big|_0^2 = -2 \Leftrightarrow \frac{8}{3}a + 2b + 2c = -2 \quad (2)$$

$$\int_0^3 f(x)dx = \frac{13}{2} \Rightarrow \left(\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx \right) \Big|_0^3 = \frac{13}{2} \Leftrightarrow 9a + \frac{9}{2}b + 3c = \frac{13}{2} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + c = -\frac{7}{2} \\ \frac{8}{3}a + 2b + 2c = -2 \\ 9a + \frac{9}{2}b + 3c = \frac{13}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = -\frac{16}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P = a + b + c = 1 + 3 + \left(-\frac{16}{3} \right) = -\frac{4}{3}$$

Câu 22. Có hai giá trị của số thực a là a_1, a_2 ($0 < a_1 < a_2$) thỏa mãn $\int_1^a (2x - 3)dx = 0$. Hãy tính

$$T = 3^{a_1} + 3^{a_2} + \log_2 \left(\frac{a_2}{a_1} \right)$$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $T = 13$

Ta có: $\int_1^a (2x - 3)dx = (x^2 - 3x) \Big|_1^a = a^2 - 3a + 2$

Vì $\int_1^a (2x - 3)dx = 0$ nên $a^2 - 3a + 2 = 0$, suy ra $\begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \end{cases}$

Lại có $0 < a_1 < a_2$ nên $a_1 = 1; a_2 = 2$

Như vậy $T = 3^{a_1} + 3^{a_2} + \log_2 \left(\frac{a_2}{a_1} \right) = 3^1 + 3^2 + \log_2 \left(\frac{2}{1} \right) = 13$

Câu 23. Cho $\int_0^m (3x^2 - 2x + 1)dx = 6$. Tính giá trị của tham số m .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $m = 2$

Ta có: $\int_0^m (3x^2 - 2x + 1) dx = (x^3 - x^2 + x) \Big|_0^m = m^3 - m^2 + m$

$$\int_0^m (3x^2 - 2x + 1) dx = 6 \Leftrightarrow m^3 - m^2 + m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 2$$

Câu 24. Cho $I = \int_0^1 (4x - 2m^2) dx$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $I + 6 > 0$?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: có 3 giá trị nguyên của m với $m \in \{-1; 0; 1\}$

$$I = \int_0^1 (4x - 2m^2) dx = (2x^2 - 2m^2x) \Big|_0^1 = -2m^2 + 2$$

Theo định nghĩa tích phân ta có

$$\text{Khi đó } I + 6 > 0 \Leftrightarrow -2m^2 + 2 + 6 > 0 \Leftrightarrow -m^2 + 4 > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$$

Mà m là số nguyên nên $m \in \{-1; 0; 1\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu.

Câu 25. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của a để $\int_0^a (2x - 3) dx \leq 4$?

A. 5.

B. 6.

C. 4.

D. 3.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: có 4 giá trị của a với : $a \in \{1; 2; 3; 4\}$

$$\text{Ta có: } \int_0^a (2x - 3) dx = (x^2 - 3x) \Big|_0^a = a^2 - 3a$$

$$\text{Khi đó: } \int_0^a (2x - 3) dx \leq 4 \Leftrightarrow a^2 - 3a \leq 4 \Leftrightarrow -1 \leq a \leq 4$$

Mà $a \in \mathbb{N}^*$ nên $a \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Vậy có 4 giá trị của a thỏa đề bài.

Câu 26. Có bao nhiêu số thực b thuộc khoảng $(\pi; 3\pi)$ sao cho $\int_{\pi}^b 4 \cos 2x dx = 1$?

A. 8.

B. 2.

C. 4.

D. 6.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Ta có: $\int_{\pi}^b 4 \cos 2x dx = 1 \Leftrightarrow 2 \sin 2x \Big|_{\pi}^b = 1 \Leftrightarrow \sin 2b = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ b = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases}$.

Do đó, có 4 số thực b thỏa mãn yêu cầu bài toán.