Nguyễn Hữu Điển

OLYMPIC TOÁN NĂM 2000
33 ĐỀ THI VÀ LỜI GIẢI
(Tập 3)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Lời nói đầu

Để thử gói lệnh lamdethi.sty tôi biên soạn một số đề toán thi Olympic, mà các học trò của tôi đã làm bài tập khi học tập LaTeX. Để phục vụ các bạn ham học toán tôi thu thập và gom lại thành các sách điện tử, các bạn có thể tham khảo. Mỗi tập tôi sẽ gom khoảng 30 bài với lời giải. Tập này có sự đóng góp của Nguyễn Văn Hậu, Lê Thị Thu Hiền, Nguyễn Trung Hiếu, Nguyễn Thị Mai Hoa, Nguyễn Văn Huy, Nguyễn Thương Huyền

Rất nhiều bài toán dịch không được chuẩn, nhiều điểm không hoàn toàn chính xác vậy mong bạn đọc tự ngẫm nghĩ và tìm hiểu lấy. Nhưng đây là nguồn tài liệu tiếng Việt về chủ đề này, tôi đã có xem qua và người dịch là chuyên về ngành Toán phổ thông. Bạn có thể tham khảo lại trong [1].

Rất nhiều đoạn vì mới học TeX nên cấu trúc và bố trí còn xấu, tôi không có thời gian sửa lại, mong các bạn thông cảm.

Hà Nội, ngày 2 tháng 1 năm 2010

Nguyễn Hữu Điển

$\frac{51}{\text{GD-05}}$89/176-05 Mã số: 8I092M5

Mục lục

Chương 1

Đề thi olympic Hoa Kỳ

▷**1.1**. *Một bộ bài có R quân đỏ, W quân trắng và B quân xanh. Một người chơi thực hiện việc rút các quân bài ra khỏi bộ bài. Với mỗi lượt, anh ta chỉ được phép rút đúng 1 lá bài, và phải chịu một số tiền phạt cho lượt rút bài đó: - Nếu lá bài được rút có màu xanh, tiền phạt bằng số quân trắng còn lại trong bộ bài - Nếu là bài được rút có màu trắng, tiền phạt bằng hai lần số quân đỏ còn lại trong bộ bài - Nếu lá bài được rút có màu đỏ, tiền phạt bằng ba lần số quân xanh còn lại trong bộ bài Hãy xác định tổng số tiền phạt tối thiểu mà người chơi phải trả (phụ thuộc vào R, W, B) và tìm tất cả các cách chơi để có thể đạt được số tiền phạt đó*

Lời giải: Ta sẽ chứng minh số tiền phạt tối thiểu phải trả là min(BW,2 WR,3RB) Dĩ nhiên số tiền phạt này là đạt được, tương ứng với 1 trong 3 cách rút bài sau:(bb..bbrr..rr ww.. ww);(rr..rr ww.. wbb…)(ww.. wwbb..rr)Với mỗi một cách rút bài, ta định nghĩa chuỗi xanh là một đoạn liên tiếp các quân bài màu xanh được rút ra khỏi bộ bài (tức trong một số lượt lien tiếp, ta chỉ rút quân xanh ra). Tương tự, ta có định nghĩa chuỗi đỏ, chuỗi trắng.
Bây giờ ta sẽ chứng minh 3 bổ đề:
Bổ đề 1: Với mỗi cách rút bài cho trước, ta có thể thực hiện 1 cách rút bài khác, trong đó 2 chuỗi cùng màu được "gộp" vào nhau mà không làm tăng số tiền phạt

Ta sẽ chứng minh trong trường hợp gộp 2 chuỗi đỏ, các trường hợp khác hoàn toàn tương tự. Giả sử giữa 2 chuỗi đỏ có w quân trắng và b quân xanh. Bây giờ, nếu ta chuyển một quân đỏ từ chuỗi thứ nhất sang chuỗi thứ 2, số tiền phạt sẽ tăng them 2w – 3b (do ở mỗi lượt rút quân trắng phải tăng them tiền phạt là 2 bởi sự xuất hiện của 1 quân đỏ mới, và quân đỏ được chuyển đi nằm sau b quân xanh nên không phải chịu 3b tiền phạt).

Nếu , ta chỉ việc chuyển tất cả các quân đỏ từ chuỗi 1 sang chuỗi 2. Ngược lại, ta sẽ chuyển tất cả các quân đỏ từ chuỗi 2 sang chuỗi 1. Trong cả 2 trường hợp, 2 chuỗi đỏ đã được gộp vào nhau và số tiền phạt không bị tăng thêm.

Bổ đề 2: Cách chơi tối ưu không tồn tại chuỗi (tức không xảy ra trường hợp rút 1 quân đỏ ngay sau 1 quân trắng)

Điều này là hiển nhiên, vì nếu xuất hiện lượt rút bài như vậy ta thay đổi chuỗi bằng chuỗi , ta thu được 1 cách chơi mới có số tiền phạt nhỏ hơn

Bổ đề 3: Cách chơi tối ưu (ít tiền phạt nhất) sẽ có ít hơn 5 chuỗi

Giả sử tồn tại 1 cách chơi tối ưu có 5 chuỗi trở lên. Giả thiết rằng quân bài đầu tiên được rút có màu đỏ (các trường hợp khác chứng minh tương tự). Bây giờ, ta giả sử rằng các chuỗi được rút có giá trị (theo thứ tự, chứng minh tương tự trong các trường hợp khác).

Theo bổ đề 1, ta có thể gộp 2 chuỗi đỏ, hoặc 2 chuỗi trắng lại với nhau mà không làm tăng số tiền phạt. Nhưng cách chơi hiện tại là tối ưu, do vậy ta phải có: (1)

Gộp 2 chuỗi trắng lại và ta được 1 cách rút bài cũng có số tiền phạt tối thiểu: . Theo bổ đề 1, ta có thể gộp 2 chuỗi đỏ với nhau mà số tiền phạt không tăng them. Nhưng do cách chơi này là tối ưu, nên ta phải có , mâu thuẫn với (1). Vậy điều giả sử là sai, bổ đề 2 được chứng minh.

Tức là bất kì cách chơi tối ưu nào cũng chỉ có tối đa 4 chuỗi. Kết hợp với bổ đề 2, cách chơi tối ưu nếu phải rút quân đỏ đầu tiên là

Cách chơi này là tối ưu khi và chỉ khi và , Tương tự, ta cũng có cách chơi giống như trên nếu quân đầu tiên được rút là quân trắng hoặc quân xanh./.

cả các số thực m để phương trình

$$\left(x^2-2mx-4(m^2+1)\right)\left(x^2-4x-2m(m^2+1)\right)=0$$

có đúng ba nghiệm phân biệt.

Lời giải: Đáp án: $m=3$.

Cho hai thừa số ở vế trái của phương trình bằng 0 ta nhận được hai phương trình đa thức. Ít nhất một trong các phương trình này phải nghiệm đúng với giá trị x nào đó để x là nghiệm của phương trình ban đầu. Những phương trình này có thể viết dưới dạng $(x-m)^2=5m^2+4$ (1)và $(x-2)^2=2(m^3+m+2)$ (2). Ta có ba trường hợp mà phương trình ban đầu có thể có 3 nghiệm phân biệt: Phương trình (1) có nghiệm kép hoặc phương trình (2) có nghiệm kép hoặc hai phương trình có một nghiệm chung. Tuy nhiên, trường hợp thứ nhất không xảy ra vì hiển nhiên $5m^2+4=0$ không thể thỏa mãn với mọi giá trị thực m.

Trong trường hợp thứ hai, ta phải có $2(m^3+m+2)=0$; m^3+m+2 phân tích thành $(m+1)(m^2-m+2)$ và thừa số thứ hai luôn dương với mọi giá trị thực m. Vì vậy ta phải có m=-1 để trường hợp này xảy ra. Khi đó nghiệm duy nhất của phương trình này là x=2 và phương trình (1) trở thành $(x+1)^2=9$, tức là x=2, -4. Nhưng điều này có nghĩa là phương trình ban đầu của ta chỉ có nghiệm là 2 và -4, trái với yêu cầu của bài toán.

Xét trường hợp thứ ba, gọi r là nghiệm của phương trình thì $x-r$ là một thừa số của cả hai biểu thức $x^2-2mx-4(m^2+1)$ và $x^2-4x-2m(m^2+1)$. Trừ hai biểu thức này cho nhau ta nhận được $x-r$ là một thừa số của $(2m-4)x-(2m^3-4m^2+2m-4)$, hay $(2m-4)r=(2m-4)(m^2+1)$. Vì vậy $m=2$ hoặc $r=m^2+1$. Tuy nhiên, trong trường hợp thứ nhất thì cả hai phương trình bậc hai của ta trở thành $(x-2)^2=24$, và vì vậy, ta chỉ thu được hai nghiệm phân biệt. Vậy ta phải có $r=m^2+1$. Khi đó, thay vào đẳng thức $(r-2)^2=2(m^3+m+2)$, ta được $(m^2-1)^2=2(m^3+m+2)$ hay $(m+1)(m-3)(m^2+1)=0$. Do đó $m=-1$ hoặc 3. Trường hợp m=-1 đã được chỉ ra không thỏa mãn. Vì vậy, ta chỉ có m=3. Khi đó các phương trình của ta trở thành $(x-3)^2=49$ và $(x-2)^2=64$, chúng có các nghiệm là x=-6, -4, 10, thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

▷**1.2**. *Cho ABC là tam giác đều có diện tích bằng 7. Gọi M, N tương ứng là các điểm trên cạnh AB, AC sao cho AN=BM. Gọi O là giao điểm của BN và CM. Biết tam giác BOC có diện tích bằng 2.*
(a) Chứng minh rằng $\frac{MB}{AB}$ hoặc bằng $\frac{1}{3}$ hoặc bằng $\frac{2}{3}$.
(b) Tính góc $\widehat{AOB}$.

Lời giải: (a) Lấy điểm L trên BC sao cho CL=AN và gọi P, Q lần lượt là giao điểm của CM và AL, AL và BN. Phép quay với góc quay 120^o quanh tâm của tam giác ABC biến A thành B, B thành C, C thành A; phép quay này cũng biến M thành L, L thành N, N thành M và biến O thành P, P thành Q, Q thành O. Do đó OPQ và MLN là các tam giác đều đồng tâm với tam giác ABC. Suy ra $\widehat{BOC}$=π-$\widehat{MOC}$=$\frac{2\pi}{3}$. Vì vậy, O nằm trên đường tròn đối xứng với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC qua BC. Có nhiều nhất hai điểm O trên đường tròn này và nằm trong tam giác ABC để tỉ lệ khoảng cách từ O tới BC và từ A tới BC bằng $\frac{2}{7}$, tỉ lệ này cũng là tỉ lệ diện tích của các tam giác OBC và ABC. Vì vậy ta đã chỉ ra rằng $\frac{MB}{AB}$=$\frac{1}{3}$ hoặc $\frac{2}{3}$ tương ứng với các vị trí của điểm O, và không có tỉ lệ nào khác (tức là không có hai điểm M cho cùng một điểm O. Nếu $\frac{MB}{AB} = \frac{1}{3}$ thì $\frac{AN}{AC} = \frac{1}{3}$, áp dụng định lí Menelaus cho tam giác ABN và đường thẳng CM, ta được $\frac{BO}{ON}$=$\frac{3}{4}$, do đó $\frac{[BOC]}{[BNC]}$=$\frac{BO}{BN}$=$\frac{3}{7}$. Suy ra $\frac{[BOC]}{[ABC]}$=$\frac{3}{7}\frac{CN}{CA}$=$\frac{2}{7}$ và ta có điều phải chứng minh. Tương tự, nếu $\frac{MB}{AB}$=$\frac{2}{3}$, theo định lí Menelaus ta có $\frac{BO}{BN}$=$\frac{6}{7}$, do đó $\frac{[BOC]}{[BNC]}$=$\frac{BO}{BN}$=$\frac{6}{7}$. Suy ra $\frac{[BOC]}{[ABC]}$=$\frac{6}{7}\frac{CN}{CA}$=$\frac{2}{7}$. (b) $\frac{MB}{AB}$=$\frac{1}{3}$ thì MONA là một tứ giác nội tiếp do $\hat{A}$=$\frac{pi}{3}$ và $\hat{O} = \pi - \widehat{POQ} = \frac{2\pi}{3}$. Do đó $\widehat{AOB}$=$\widehat{AOM}$+$\widehat{MOB}$=$\widehat{ANM}$+$\widehat{POQ}$ $= \widehat{ANM} + \frac{\pi}{3}$. Nhưng $\frac{MB}{AB}$=$\frac{1}{3}$ và $\frac{AN}{AC}$=$\frac{1}{3}$ nên dễ dàng thấy được N là hình chiếu của M trên AC. Vì vậy $\widehat{ANM} = \frac{\pi}{2}$ và $\widehat{AOB} = \frac{5\pi}{6}$. Lập luận tương tự đối với trường hợp còn lại, ta được $\widehat{ANM} = \frac{\pi}{6}$ và $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{2}$.

▷**1.3**. *Cho $f(x) = x^2 - 2ax - a^2 - \frac{3}{4}$. Tìm tất cả các giá trị của a để $|f(x)| \leq 1$ với mọi $x \in [0;1]$.*

Lời giải: Đáp án: $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$.
Đồ thị của f(x) là một parabol có điểm cực tiểu (có nghĩa là hệ số a âm) và đỉnh là (a;f(a)). Từ $f(0) = -a^2 - \frac{3}{4}$ ta có $|a| \leq \frac{1}{2}$ để $f(0) \geq -1$. Giả sử $a \leq 0$ thì parabol của ta tăng nghiêm ngặt trong khoảng từ 0

đến 1, do đó $f(1) \le 1$. Nhưng ta có $\frac{1}{2} \le a+1 \le 1$, $\frac{1}{4} \le (a+1)^2 \le 1$, $\frac{1}{4} \le \frac{5}{4} - (a+1)^2 \le 1$. Từ $\frac{5}{4} - (a+1)^2 = f(1)$, ta có f thỏa mãn điều kiện của bài ra khi $-\frac{1}{2} \le a \le 0$. Với a $>$ 0, f giảm với $0 \le x \le a$ và tăng với $a \le x \le 1$. Vì vậy ta cần chỉ ra giá trị nhỏ nhất của f(a) nằm trong phạm vi theo yêu cầu của bài toán, tức là f(1) nằm trong giới hạn này. Từ $a \le \frac{1}{2}$ ta có $1 < (a+1)^2 \le \frac{9}{4}$ và vì vậy $f(x) = -1 \le \frac{5}{4} - (a+1)^2 < \frac{1}{4}$. Mặt khác, $f(a) = -2a^2 - \frac{3}{4}$ nên ta phải có $a \le \frac{\sqrt{2}}{4}$ để $f(a) \ge -1$. Ngược lại, đánh giá f(0), f(a), f(1) ta chỉ ra được f thỏa mãn điều kiện của bài ra khi $0 < a \le \frac{\sqrt{2}}{4}$.

▷**1.4**. *Kí hiệu $u(k)$ là ước lẻ lớn nhất của số tự nhiên k. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{2^n} \cdot \sum_{k=1}^{2^n} \frac{u(k)}{k} \le \frac{2}{3}.$$

Lời giải: Đặt $v(k)$ là ước lớn nhất của k có dạng lũy thừa của 2, nên $u(k)v(k) = k$. Trong $\{1, 2, ..., 2^n\}$ có 2^{n-i-1} giá trị của k sao cho $v(k) = 2^i$ với $i \le n-1$, và một giá trị sao cho $v(k) = 2^n$. Do đó, vế trái bằng

$$\frac{1}{2^n} \cdot \sum_{k=1}^{2^n} \frac{u(k)}{k} = \frac{1}{4^n} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2^{n-i-1}}{2^{n+i}}.$$

Từ tổng của chuỗi hình học ta có

$$\frac{1}{2^n} \cdot \sum_{k=1}^{2^n} \frac{u(k)}{k} = 4^{-n} + \frac{2}{3}(1 - 4^{-n}) > \frac{2}{3}.$$

▷**1.5**. *Tìm tất cả các số thực thỏa mãn hệ*

$$\begin{aligned} x^3 &= 2y - 1 \\ y^3 &= 2z - 1 \\ z^3 &= 2x - 1. \end{aligned}$$

Lời giải: Trước hết ta chỉ ra rằng $x = y = z$. Giả sử trái lại rằng $x \ne y$. Nếu $x > y$, thì $y = \frac{(x^3+1)}{2} > \frac{(y^3+1)}{2} = z$, nên $y > z$, và tương tự $z > x$, mâu thuẫn. Tương tự, nếu $x < y$ thì $y < z$ và $z < x$, mẫu thuẫn. Nên các nghiệm của hệ phương trình có dạng $x = y = z = t$ với t là nghiệm của phương trình $t^3 = 2t - 1$. Vậy, nghiệm của hệ phương trình là

$$x = y = z = t,\, t \in \left\{1, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

▷**1.6**. *Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất để phương trình sau có một nghiệm thực:*

$$cos^2\pi(a-x) - 2\cos\pi(a-x) + cos\frac{3\pi x}{2a}cos\left(\frac{\pi x}{2a} + \frac{\pi}{3}\right) + 2 = 0$$

Lời giải: Lời giải: Giá trị nhỏ nhất của a là 6. Phương trình thỏa mãn khi a=6, x=8. Để chứng minh a là giá trị nhỏ nhất, ta viết phương trình dưới dạng

$$(cos\pi(\text{a-x})\text{-}1)^2 + \left(cos\left(\frac{3\pi \text{x}}{2a}\right)cos\left(\frac{\pi\text{x}}{2a} + \frac{\pi}{3}\right) + 1\right) = 0$$

Do cả hai số hạng ở vế trái đều không âm nên để đẳng thức xảy ra thì chúng phải cùng bằng 0. Từ $cos\pi$(a-x)-1 = 0 ta có x phải là một số nguyên đồng dư với a trong phép chia cho 2. Từ số hạng thứ hai bằng 0, ta thấy các giá trị cosin phải nhận giá trị bằng 1 và -1. Nếu $cos\left(\frac{\pi \text{x}}{2a} + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ thì $\frac{\pi\text{x}}{2a} + \frac{\pi}{3} = 2k\pi$ với giá trị k nguyên và nhân hai vế với $\frac{6a}{\pi}$ ta được $3x \equiv 4a\,(mod 12a)$. Khi đó thì nếu $cos\left(\frac{\pi\text{x}}{2a} + \frac{\pi}{3}\right) = -1$ thì $\frac{\pi\text{x}}{2a} + \frac{\pi}{3} = (2k+1)\pi$ và nhân hai vế với $\frac{6a}{\pi}$ ta được $3x \equiv 4a\,(mod 12a)$. Trong cả hai trường hợp ta đều có 3x chia hết cho 2, vì vậy x phải chia hết cho 2 và a cũng phải thỏa mãn điều đó. Hơn nữa, ở cả hai trường hợp ta cũng đều có -2a và 4a cùng phải chia hết cho 3, vì thế a phải chia hết cho 3. Tóm lại ta có 6 phải là ước của a và a=6 là giá trị nhỏ nhất cần tìm.

Chương 2

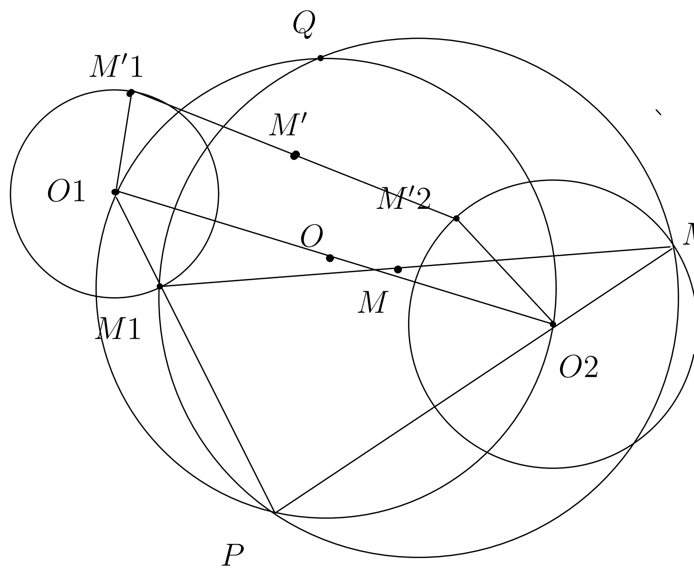
Đề thi olympic Việt Nam

▷**2.7**. *Trên mặt phẳng cho hai đường tròn ω_1, ω_1 theo thứ tự có tâm là O_1 và O_2. Cho M_1' và M_2'là hai điểm lần lượt nằm trên ω_1, ω_1 sao cho O_1M_1' và O_2M_2' cắt nhau. Cho M_1và M_2 lần lượt là hai điểm trên ω_1, ω_1 sao cho khi quay theo chiều kim đồng hồ số đo của góc $\widehat{M_1'OM_1}$ và $\widehat{M_2'OM_2}$ là bằng nhau.*

(a) Xác định quĩ tích trung điểm của đoạn thẳng M_1M_2

(b) Gọi P là giao điểm của các đường thẳng O_1M_1' và O_2M_2'. Đường tròn ngoại tiếp ΔM_1PM_2cắt đường tròn ngoại tiếp ΔO_1PO_2 tại P và một điểm khác là Q.Chứng minh rằng Q là điểm cố định không phụ thuộc vào vị trí của M_1 và M_2.

Lời giải:



(a)Chúng ta dùng các số phức, mỗi điểm có kí hiệu là chữ in hoa ta đặt tương ứng với một số phức có kí hiệu là chữ in thường. Gọi M', M và O lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng: $M_1'M_2'$, M_1M_2 và O_1O_2. Ta cũng đặt $z = \frac{m_1-o_1}{m_1'-o_1} = \frac{m_2-o_2}{m_2'-o_2}$ sao cho phép nhân bởi z là phép quay quanh 1 điểm qua một số góc. Khi đó:

$$m = \frac{m_1+m_2}{2} = \frac{1}{2}(o_1+z(m_1'-o_1)) + \frac{1}{2}(o_2+z(m_2'-o_2)) = o+z(m'-o)$$

từ đó suy ra quỹ tích điểm M là đường tròn tâm O bán kính OM'.

(b)Chúng ta sử dụng trực tiếp các góc có modun π. Chú ý rằng:

$$\angle QM_1M_2 = \angle QPM_2 = \angle QPO_2 = \angle QO_1O_2$$

Tương tự: $\angle QM_2M_1 = \angle QO_2O_1$, suy ra tam giác QM_1M_2 đồng dạng với tam giác QO_1O_2. Do đó:

$$\frac{q-o_1}{q-o_2} = \frac{q-m_1}{q-m_2}$$

Hay tương đương:

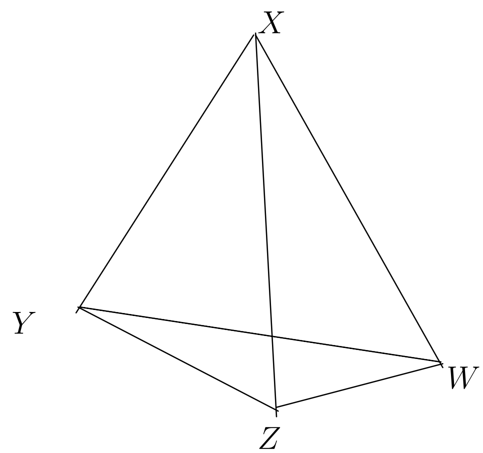
$$\frac{q-o_1}{q-o_2} = \frac{(q-m_1)-(q-o_1)}{(q-m_2)-(q-o_2)} = \frac{o_1-m_1}{o_2-m_2} = \frac{o_1-m_1'}{o_2-m_2'}$$

Vì hai đường thẳng O_1M_1' vàO_2M_2' cắt nhau, $o_1 - m_1' \neq o_2 - m_2'$ và ta có thể giải phương trình này để tìm được giá trị duy nhất của q, suy ra Q là điểm cố định không phụ thuộc vào vị trí của M_1 và M_2.

▷**2.8**. *Giả sử rằng tất cả đường tròn ngoại tiếp của bốn mặt của một tứ diện có bán kính bằng nhau. Hãy chỉ ra rằng hai cạnh đối bất kì của một tứ diện là bằng nhau.*

Lời giải: Trước hết ta chứng minh rằng với bốn điểm không đồng phẳng bất kì X, Y, Z, W ta có:

$$\angle XYZ + \angle YZW + \angle ZWX + \angle WXY < 2\pi$$



Thật vậy: Áp dụng bất đẳng thức tam giác cho các góc ta thấy rằng:

$$\begin{aligned}
&\angle XYZ + \angle YZW + \angle ZWX + \angle WXY \\
&\quad < (\angle ZYW + \angle WYX) + \angle YZW + (\angle XWY + \angle YWZ) + \angle WXY \\
&\quad = (\angle ZYW + \angle YWZ + \angle YZW) + (\angle XWY + \angle WYX + \angle WXY) \\
&\quad = \pi + \pi = 2\pi.
\end{aligned}$$

Gọi R là bán kính chung của các đường tròn ngoại tiếp bốn mặt tứ diện. Ta định nghĩa rằng hai góc của tứ diện $ABCD$ gọi là đối diện với cùng một cạnh là hai góc ví dụ như $\angle ABC$và $\angle ADC$, ta có:

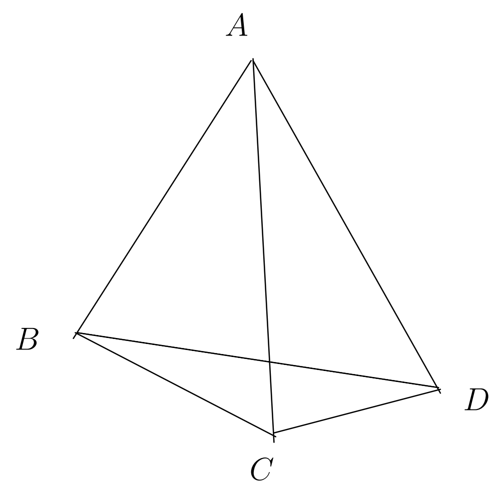
$$sin\angle ABC = \frac{AC}{2R} = sin\angle ADC$$

(do định lí hàm sin).

Do đó hai góc bất kì đối diện với cùng một cạnh hoặc bằng nhau hoặc bù nhau.

Hơn nữa, để ý rằng nếu XZ và YW là hai cạnh đối của tứ diện XYZW thì suy ra $(\angle XYZ + \angle ZWX + (\angle YZW \angle WXY < 2\pi))$ nên không thể có trường hợp hai góc đối diện với cùng một cạnh XZ và với cạnh

YW đều là bù nhau. Nói cách khác, nếu các góc đối diện của cạnh XZ là bù nhau thì hai góc đối diện với cùng một cạnh YW là bằng nhau.



Bây giờ ta giả sử ngược lại rằng có hai góc đối diện với cùng một cạnh ví dụ như $\angle ABC$và $\angle CDA$ là bù nhau còn tất cả các cặp góc đồi diện với cùng một cạnh khác là bằng nhau, ta có:

$$\begin{aligned}
\angle BCD + \angle DAB &= (\pi - \angle CDB - \angle DBC) + (\pi - \angle ADB - \angle DBA) \\
&= (\ pi - \angle CAB - \angle DAC) + (\pi - \angle ACB - \angle DCA) \\
&= (\pi - \angle CAB - \angle ACB) + (\pi - \angle DAC - \angle DCA) \\
&= \angle ABC + \angle CDA \\
&= \pi
\end{aligned}$$

Điều này trái với giả sử. Do đó bên cạnh các góc đối diện với cạnh AC thì còn một số cặp góc đối diện với cùng một cạnh khác là bù nhau.Theo phần lí luận trên thì cặp góc đối diện với cạnh BD không thể bù nhau nên chúng phải bằng nhau. Do đó cặp góc đối diện với cùng một cạnh trong số các cạnh AB, AD, CB và CD là bù nhau. Không giảm tính tổng quát, giả sử cặp góc đối diện với cạnh AB là bù nhau suy ra cặp góc đối diện với cạnh CD là bằng nhau. Hơn nữa:

$$\begin{aligned}
\angle CDB &= \pi - \angle DCB - \angle DBC \\
&= \pi - \angle DAB - \angle DAC \\
&= \pi - (\pi - \angle ABD - \angle ADB) - (\pi - \angle ACD - \angle ADC) \\
&= \angle ABD + \angle ACD + \angle ADB + \angle ADC - \pi \\
&= \angle ABD + \angle ACD + (\pi - \angle ACB) + (\pi - \angle ABC) - \pi \\
&= \angle ABD + \angle ACD + (\pi - \angle ACB - \angle ABC) \\
&= \angle ABD + \angle ACD + \angle CAB
\end{aligned}$$

Suy ra $\angle CDB < \angle CAB$. Vì các $\angle CDB$ và $\angle CAB$ là không bằng nhau nên chúng phải bù nhau. Bây giờ ta lại có các góc $\angle ADB$, $\angle BDC$ và $\angle CDA$ là các góc ở đỉnh của một tứ diện nên $(\angle ADB + \angle BDC) + \angle CDA < \angle ADC + \angle CDA < 2\pi$. Nhưng:

$$\begin{aligned}
\angle ADB + \angle BDC + \angle CDA &= (\pi - \angle ACB) + (\pi - \angle BCA) + (\pi - \angle CBA) \\
&= 3\pi - \pi \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

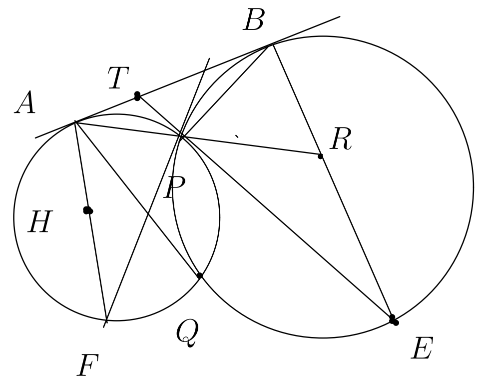
Điều này vô lí. Do đó các góc đối diện với cùng một cạnh của tứ diện là bằng nhau. Như chúng ta lí luận ở trên thì trong trường hợp này ta có:

$$\angle BCD + \angle DAB = \angle ABC + \angle CDA$$

Suy ra $2\angle DAB = 2\angle ABC$ hay $\angle DAB = \angle ABC$.
Cho nên, $DB = 2Rsin\angle DAB = 2Rsin\angle ABC = AC$. Tương tự ta cũng có: $DA = BC, DC = BA$.
Đó là điều phải chứng minh.

▷**2.9**. *Cho hai đường tròn* (C_1), (C_2) *cắt nhau tại* P *và* Q. *Tiếp tuyến chung của hai đường tròn(gần* P *hơn* Q*) tiếp xúc với* (C_1), (C_2) *lần lượt tại* A *và* B. *Tiếp tuyến của*(C_1) *tại* P *cắt* (C_2) *tại* E *(khác* P*), tiếp tuyến của* (C_2) *tại* P *cắt* (C_1) *tại* F*(khác* P*). Gọi* H, K *lần lượt là* *hai điểm nằm trên hai tia AF và BE sao cho $AH = AP$, $BK = BP$. Chứng minh rằng năm điểm A, H, Q, K, B nằm trên cùng một đường tròn.*

Lời giải:



Vì điều kiện có tính chất đối xứng nên ta chỉ cần chứng minh $ABKQ$ là nội tiếp đường tròn.

Chúng ta sử dụng góc có hướng modulo π. Gọi R là giao điểm của đường thẳng AP và tia BE. Đường thẳng AB và BE cắt nhau tại T. Sử dụng tính chất của tiếp tuyến và tứ giác nội tiếp ta có:

$$\angle QAR = \angle QAP = \angle QPC = \angle QBC = \angle QBR$$

Nên tứ giác $ABRQ$ là nội tiếp đường tròn. Chúng ta sẽ chứng minh rằng $K = R$. Thật vậy:

Sử dụng góc ngoài tam giác ABP và CPR; tiếp tuyến AB và PT; tứ giác nội tiếp đường tròn ta có:

$$\begin{aligned}\angle BPR &= \angle BAP + \angle PBA = \angle AQP + \angle PQB\\ &= \angle APT + \angle PEB = \angle RPE + \angle PER\\ &= \angle PRB\end{aligned}$$

Do đó tam giác BPR là tam giác cân với $BP = PR$ suy ra $R = K$.Đó là điều chúng ta cần chứng minh.

▷**2.10.***Cho a, b, c là các số nguyên dương đôi một ngyên tố cùng nhau. Một số nguyên n được gọi là "stubborn" nếu nó không được biểu diễn dưới* *dạng:*

$$n = bcx + cay + abz$$

với x, y, z là các số ngyuên dương bất kì. Hãy xác định qua hàm số của a, b và c số lượng các số nguyên "stubborn" .

Lời giải: Chúng ta có thể khẳng định được rằng bất kì số ngyuên n nào đều có thể biểu diễn dưới dạng $n = bcx + cay + abz$ trong đó x, y, z là các số nguyên và $0 < y \leq b$; $0 < z \leq c$ còn x có thể âm. Thật vậy,vì a và bc nguyên tố cùng nhau nên ta có thể viết: $n = an' + bcx_0$ với n', x_0 là các số nguyên. vì b và c là nguyên tố cùng nhau nên $n' = cy_0 + bz_0$ với y_0, z_0 là các số nguyên. Do đó $n = bcx_0 = cay_0 + abz_0$. Chọn số nguyên β, γ sao cho $0 < y_0 + \beta b \leq b$ và $0 < z_0 + \gamma c \leq c$, khi đó ta có :

$$n = bc(x_0 - \beta a - \gamma a) + ca(y_0 + \beta b) + ab(z_0 + \gamma c)$$

đây chính là dạng biểu diễn của n mà ta muốn.
Chú ý rằng bất kì số nguyên dương nào nhỏ hơn $bc + ca + ab$ đều là "*stubborn*". Mặt khác ta cũng khẳng định rằng mọi số nguyên $n > 2abc$ không là "*stubborn*". Chẳng han, biểu diễn $n = bcx + cay + abz$ với các số nguyên và $0 < y \leq b$, $0 < z \leq c$. Khi đó:

$$2abc < bcx + cay + abz \leq bcx + cab + abc = bcx + 2abc$$

Suy ra $x > 0$ như vậy n không là "*stubborn*" khi $n > 2abc$.

Tiếp theo chúng ta chứng minh rằng đúng một nửa các số nguyên dương trong $S = [bc + ca + ab; 2abc]$. Để làm được điều này ta đi chứng minh $n \in S$ là "*stubborn*" khi và chỉ khi $f(n) = (2abc + bc + ca + ab) - n$ không là "*stubborn*".

Điều kiện cần: Giả sử rằng n là "*stubborn*" và biểu diễn $f(n) = bcx + cay + abz$ với $0 < y \leq b$, $0 < z \leq c$. Nếu x không dương thì chúng ta có thể viết $n = bc(1 - x) + ca(b + 1 - y) + ab(c + 1 - z)$, với $1 - x_0$, $b + 1 - y_0$ và $c + 1 - z_0$ là các số nguyên dương, nhưng điều này là không thể vì n là "*stubborn*". Do đó, $x > 0$ và $f(n)$ không là "*stubborn*".

Điều kiện đủ: Giả sử ngược lại $f(n)$ không là "*stubborn*" và n cũng không là "*stubborn*". Biểu diễn $f(n) = bcx_0 + cay_0 + abz_0$ và $n =$

$bcx_1 + cay_1 + abz_1$ với x_i, y_i, z_i là các số nguyên dương. Khi đó:

$$2abc = bc(x_0 + x_1 - 1) + ca(y_0 + y_1 - 1) + ab(z_0 + z_1 - 1)$$

Đặt $x = x_0 + x_1 - 1$ và cũng đặty,z tương tự. Từ đẳng thức trên chứng tỏ $0 \equiv bcx(\bmod a)$. Vì bc nguyên tố cùng nhau với a nên x phải chia hết cho a suy ra $x \geq a$.
Tương tự $y \geq b$, $z \geq c$, khi đó $2abc = bcx + cay + abz \geq 3abc$ (vô lý).

Tóm lại: có $bc+ca+ab-1$ các số nguyên dương nhỏ hơn $bc+ca+ab$ là "*stubborn*", mọi số nguyên lớn hơn $2abc$ không là "*stubborn*", và một nửa của $2abc-(bc+ca+ab)+1$ các số nguyên dương còn lại là "*stubborn*". Kết quả của bài là tổng của:

$$bc + ca + ab - 1 + \frac{2abc - (bc + ca + ab) + 1}{2} = \frac{2abc + bc + ca + ab - 1}{2}$$

các số nguyên dương "*stubborn*".

▷**2.11**. *Gọi R^+ là tập các số thực dương và $a, r > 1$ là các số thực. Giả sử rằng $f : R^+ \to R$ là một hàm số sao cho: $(f(x))^2 \leq \mathrm{ax}^r f(\frac{x}{a})$ với mọi $x > 0$.*

(a) Nếu $f(x) < 2^{2000}$ với mọi $x < \frac{1}{2^{2000}}$, chứng minh rằng $f(x) \leq x^r a^{1-r}$ với mọi $x > 0$.

(b) Xây dựng một hàm $f : R^+ \to R$ (không cần thoả mãn điều kiện trong câu (a)) sao cho$f(x) > x^r a^{1-r}$với mọi $x > 0$.

Lời giải: Chú ý rằng ta có thể viết lại bất đẳng thức dưới dạng:

$$\left(\frac{f(x)}{x^r a^{1-r}}\right)^2 \leq \frac{f(x/a)}{(x/a)^r a^{1-r}} \qquad (*)$$

Giả sử ngược lại tức là tồn tại x_0 sao cho $f(x_0) > {x_o}^r a^{1-r}$. Đặt $x_n = \frac{x_0}{a^n}$ và $\lambda_n = \frac{f(x_n)}{x_n^r a^{1-r}}$ với $n \leq 0$, suy ra $\lambda_0 > 1$. Từ (*) ta có:$\lambda_{n+1} \geq \lambda_n^2$ với $n \geq 0$, và bằng quy nạp ta chứng minh được rằng: $\lambda_n \geq \lambda_0^{2^n}$ với $n \geq 0$. Chúng ta sẽ sử dụng điều này ngay sau đây, để ý rằng mỗi $\lambda_n \geq \lambda_0^{2^n}$ là một số dương và do đó $f(x_n)$ cũng là số dương. Chúng ta gán $x = x_n$ vào bất đẳng thức và sắp xếp các bất đẳng thức lại ta được:

$$\frac{f(x_{n+1})}{f(x_n)} \geq \frac{f(x_n)}{\mathrm{ax}_n^r} = \frac{\lambda_n x_r^n a^{1-r}}{\mathrm{ax}_n^r} = \frac{\lambda_n}{a^r}$$

Với mọi $n \geq 0$.

Ta thấy luôn tồn tại N sao cho $2a^r < \lambda_0^{2^n} \leq \lambda_n$ với mọi $n > N$. Với tất cả các giá trị n như vậy thì ta có: $\frac{f(x_{n+1})}{f(x_n)} \geq 2$ hay tương đương (do $f(x_n)$ là dương) $f(x_{n+1}) \geq 2f(x_n)$. Cho nên $f(x) \geq 2^{2000}$ (với n đủ lớn), nhưng cũng với n đủ lớn thì ta lại có $x_n = \frac{x_0}{a^n} < \frac{1}{2^{2000}}$. Điều này trái với giả thiết tức điều giả sử là sai. Do đó $f(x) \leq x^r a^{1-r}$ với mọi $x > 0$.

(b) Với mỗi số thực $x$luôn tồn tại duy nhất một giá trị $x_0 \in (1; a]$ sao cho $\frac{x_0}{x} = a^n$ với n là số nguyên. Gọi $\lambda(x) = x_0^{2^n}$ và đặt $f(x) = \lambda(x) x^r a^{1-r}$. Bằng phép co lại, chúng ta cũng có $\lambda(x)^2 = \lambda(x/a)$ với mọi x, nói cách khác (*) cũng đúng với mọi x. Ta cũng có $\lambda(x) > 1$ với mọi x hay nói cách khác $f(x) > x^r a^{1-r}$ với mọi $x > 0$.

Đó là điều cần chứng minh.

Chương 3

Đề thi olympic Châu Á Thái Bình Dương

▷**3.12**.*Tính tổng* $S = \sum\limits_{i=0}^{100} \frac{x_i^3}{1-3x_i+3x_i^2}$ *với* $x_i = \frac{i}{100}$ $\quad \left(i = \overline{1,101}\right)$

Lời giải: Vì $1 - 3x + 3x^2 = x^3 - (x-1)^3 \neq 0 \ \forall x$
Ta có thể đặt $f(x) = \frac{x^3}{1-3x+3x^2} = \frac{x^3}{x^3+(1-x)^3} \ \ \forall x$
Cho $x = x_i$, $x = 1 - x_i = x_{101-i}$ và thêm 2 phương trình hệ quả ta tìm ra:$f(x_i) = f(x_{101-i}) = 1$. Vì thế

$$S = \sum_{i=0}^{101} f(x_i) = \sum_{i=0}^{50} \left(f(x_i) + f(x_{101-i})\right) = 51$$

▷**3.13**.*Cho một sự bố trí vòng tròn quanh ba cạnh một tam giác, một vòng ở mỗi góc, hai vòng ở mỗi cạnh, mỗi số từ* 1 *đến* 9 *được viết vào một trong những vòng tròn này sao cho*
i. Tổng của 4 *số ở mỗi cạnh tam giác là bằng nhau.*
ii. Tổng của bình phương của 4 *số trên mỗi cạnh của tam giác là bằng nhau.*
Tìm tất cả các cách thoả mãn yêu cầu này.

Lời giải: Lấy bất kì một sự bố trí các con số, gọi x, y, z là số ở trong góc và S_1, S_2 lần lượt là tổng của bốn số, tổng của bình phương bốn số trên một cạnh bất kì. Do điều kiện đã cho ta có:

$$3S_1 = x + y + z + \sum_{k=1}^{9} k = x + y + z + 45$$

$$3S_2 = x^2 + y^2 + z^2 + \sum_{k=1}^{9} k^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 285$$

Từ đẳng thức thứ hai ta suy ra x, y, z hoặc tất cả chia hết cho 3 hoặc không có số nào chia hết cho 3. Bởi nguyên lý Pigeouhole có hai số là đồng dư $mod3$. Lấy phương trình thứ nhất theo $mod3$ ta cũng suy ra $3|\,(x + y + z)$. Do đó $x \equiv y \equiv z (\mathrm{mod}3)$

Nếu $(x, y, z) = (3, 6, 9)$ hay $(1, 4, 7)$ thì $S_2 = 137$ hoặc 17. Nếu $S_2 = 137$ thì $S_2 \equiv 1(\mathrm{mod}3)$ suy ra chỉ có một số trên ba cạnh là lẻ. Điều này không thể vì $5 > 3$ số lẻ được viết trong mỗi khe

Vì thế, $(x, y, z) = (2, 5, 8)$ và $S_2 = 126$. Vì $9^2 + 8^2 > 126$ nên 9 không thể nằm cùng cạnh với 8, tức là nó nằm trên cạnh chứa 2 hoặc 5. Vì

$$Min\left\{7^2 + 9^2, 7^2 + 5^2 + 8^2\right\} > 126$$

nên số 7 phải nằm trên cạnh chứa số 2 hoặc 8. Như vậy 4 lần các số trên 3 cạnh phải là $(2, 4, 9, 5); (5, 1, 6, 8); (8, 7, 3, 2)$ để cho tổng bình phương các số trên mỗi cạnh là 126. Cuối cùng, ta thấy các bộ số trên đều thoả mãn.

▷**3.14**.*Cho tam giác ΔABC, trung tuyến $\overline{AM}$ và phân giác $\overline{AN}$. Vẽ đường vuông góc qua N cắt MA, BA tại P, Q. Gọi O là điểm mà đường vuông góc qua P với BA cắt AN. Chứng minh $\overline{QO} \perp \overline{BC}$*

Lời giải: Cách 1. Nếu $AB = AC$ thì QO là trung trực của BC và yêu cầu phải chứng minh được thoả mãn. Giả sử $AB \neq AC$, sử dụng toạ độ Castesian:$A(0; 0), N(1; 0)$. Đặt độ dốc của AB là m thì của AC là -1. Viết $B = (b; mb), C = (c; -mc)$, ở đó $b \neq c$ và cả b, c là dương. Độ dốc của BC là $\frac{m(b+c)}{b-c}$.

Vì $\overline{PN} \perp \overline{AN}$ và x-toạ độ của P là 1, vì P thuộc đường thẳng AB(đường thẳng $y = mx$) nên ta có $P = (1, m)$. Do đó phương trình của OP là $y = -(x - 1)/m + m$, suy ra $x - interceptO$ là $(m^2 + 1, 0)$, M là

$((b+c)/2; m(b-c)/2)$ và nó là trung điểm của $\overline{BC}$. Do đó phương trình của đường thẳng AM là $y = \frac{m(b-c)}{b+c}x$. Bởi vì Q là giao điểm của AM và PN, ta có $Q\left(1; \frac{m(b-c)}{b+c}\right)$. Vì thế độ dốc của PQ là $\frac{\frac{m(b-c)}{b+c}}{m^2+1-1} = \frac{b-c}{m(b+c)}$. Mà -1 là độ dốc của BC nên $\overline{QO} \perp \overline{BC}$.

Cách 2. Gọi α, β, γ là số đo các góc $\angle CAB, \angle ABC, \angle BCA$ và $y = \angle BAM$, $z = \angle MAC$, $x = \angle MAN = \frac{|y-z|}{2}$

Nếu $\beta = \gamma$ thì QO là trung trực của $\overline{BC}$. Ngược lại, giả sử $\beta \neq \gamma$ thì $y \neq z$, với cách làm này, ta biến đổi phương trình bằng cách nhân và chia với biểu thức lượng giác khác 0 vì $\beta \neq \gamma, y \neq z; \beta, \gamma, y, z \in (0; \pi)$

Sử dụng quan hệ lượng giác vào các $\Delta ABC, BNO, ONQ$ ta có

$$\tan\angle OQN.\tan\angle QAN = \left({}^{ON}/_{QN}\right)\left({}^{QN}/_{AN}\right) = \left({}^{ON}/_{BN}\right)\left({}^{BN}/_{AN}\right) = \tan\angle OBN$$

Suy ra rằng $\angle BAN = {}^{\alpha}/_{2}, \angle OBN = {}^{\alpha}/_{2}, \angle QAN = x$

Do đó: $\tan\angle OQN$.tanx $= \tan({}^{\alpha}/_{2})\tan({}^{\alpha}/_{2})$ $(*)$

Áp dụng luật hàm sin cho $\Delta ABC, ACM$, ta được:

$$\frac{\sin y}{\sin z} = \frac{\sin\beta.{}^{BM}/_{AM}}{\sin\gamma.{}^{CM}/_{AM}} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

Suy ra: $\frac{\sin y + \sin z}{\sin y - \sin z} = \frac{\sin\beta - \sin\gamma}{\sin\beta + \sin\gamma}$. Cho u, v trong khoảng $(0; {}^{\pi}/_{2})$, chú ý rằng

$$\frac{\tan(u+v)}{\tan(u-v)} = \frac{\sin(u+v)cos(u-v)}{\sin(u-v)cos(u+v)} = \frac{\sin(2u)+\sin(2v)}{\sin(2u)-\sin(2v)}$$

Cho $(u,v) = ({}^{y}/_{2}, {}^{z}/_{2})$; $(u,v) = \left({}^{\beta}/_{2}, {}^{\gamma}/_{2}\right)$ trong đẳng thức này ta tìm ra:

$$\frac{\tan({}^{\alpha}/_{2})}{\tan({}^{y}/_{2} - {}^{z}/_{2})} = \frac{\tan({}^{y}/_{2} + {}^{z}/_{2})}{\tan({}^{y}/_{2} - {}^{z}/_{2})} = \frac{\tan\left({}^{\beta}/_{2} + {}^{\gamma}/_{2}\right)}{\tan\left({}^{\beta}/_{2} - {}^{\gamma}/_{2}\right)} = \frac{\cot({}^{\alpha}/_{2})}{\tan\left({}^{\beta}/_{2} - {}^{\gamma}/_{2}\right)}$$

Nếu $\beta > \gamma$ thì $x = y/2 - z/2$ so sánh biểu thức cuối cùng với (*), ta có: $\tan\angle OQN = \tan\left({}^{\pi}/_{2} - \left({}^{\beta}/_{2} - {}^{\gamma}/_{2}\right)\right)$. ta có: $\angle OQN$, ${}^{\pi}/_{2} - \left({}^{\beta}/_{2} - {}^{\gamma}/_{2}\right) \in (0; {}^{\pi}/_{2})$ và $t \mapsto \tan t$ là đơn ánh, vì thế $\angle OQN = {}^{\pi}/_{2} - \left({}^{\beta}/_{2} - {}^{\gamma}/_{2}\right) \Rightarrow \overline{OQ} \perp \overline{AB}$.

Chứng minh tương tự nếu $\beta > \gamma$

▷**3.15**.*Cho n, k là các số nguyên dương, $n > k$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{n+1}.\frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}} < \frac{n!}{k!(n-k)!} < \frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}}$$

Lời giải: Sử dụng khai triển nhị thức,ta viết: $n^n = (k + (n-k))^n$ ở dạng $\sum\limits_{m=0}^{n} a_m$, với $a_m = \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} k^m (n-k)^{n-m} > 0$ với mỗi m

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\frac{n^n}{n+1} < a_k < n^n$$

Bất đẳng thức bên phải thoả mãn do $n^n = \sum\limits_{m=0}^{n} a_m > a_k$. Để chứng minh bất đẳng thức còn lại ta chỉ cần chỉ ra $a_k > a_0, ...a_{m-1}, a_{m+1}, ...a_m$. Bởi vì

$$n^n = \sum_{m=0}^{n} a_m < \sum_{k=0}^{n} a_k = (n+1)\, a_k$$

Thật vậy, ta chứng minh rằng a_m tăng với $m \leq k$, giảm với $m \geq k$, chú ý rằng $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \frac{m+1}{n-m} \begin{pmatrix} n \\ m+1 \end{pmatrix}$. Vì thế:

$$\frac{a_m}{a_{m+1}} = \frac{\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} k^m (n-k)^{n-m}}{\begin{pmatrix} n \\ m+1 \end{pmatrix} k^{m+1} (n-k)^{n-m-1}} = \frac{n-k}{n-m}.\frac{m+1}{k}$$

Biểu thức này nhỏ hơn 1 khi $m < k$ và lớn hơn hay bằng 1 khi $m \geq k$. Do đó ta có điều phải chứng minh.

▷**3.16**.*Cho một hoán vị $(a_0, a_1, ...a_n)$ của dãy $0, 1, ..., n$. Một chuyển vị của a_i, a_j gọi là hợp pháp nếu $a_i = 0, i > 0$ và $a_{i-1} + 1 = a_j$. Hoán vị $(a_0, a_1, ...a_n)$ gọi là chính quy nếu sau hữu hạn các bước chuyển vị hợp pháp nó trở thành $(1, 2, ..., n, 0)$. Với n nào thì $(1, n, n-1, ...3, 2, 0)$ là chính quy ?.*

Lời giải: Với n cố định, π_0 và π_1 là cái hoán vị $(1, n, n-1, ...3, 2, 0)$ và $(1, 2, ...n, 0)$. Ta nói π_0 là chấm dứt trong hoán vị $\pi_1^{'}$ nếu sau một số chuyển vị hợp pháp của π_0 ta thu được $\pi_1^{'}$ và nếu không một chuyển vị hợp pháp nào có thể áp dụng cho chuyển vị $\pi_1^{'}$. Vì không có chuyển vị hợp pháp nào có thể được áp dụng cho π_1, nếu π_0 chính quy thì nó chấm dứt trong π_1.Như khi áp dụng chuyển vị hợp pháp cho π_0 ở nhiều nhất một chuyển vị hợp pháp có thể áp dụng cho mỗi hoán vị thu được. Vì thế π_0 chấm dứt trong nhiều nhất một hoán vị.

Nếu $n = 1, 2$, dễ dàng kiểm tra $(1, n, n-1, ...3, 2, 0)$ là chính quy. Nếu $n > 2$, chẵn, ta đòi hỏi rằng π_0 không chấm dứt trong π_1 và vì thế không chính quy. Cho $k \in \left[0; \frac{n-2}{2}\right]$ áp dụng k chuyển vị hợp pháp cho π_0 suy ra hoán vị mà bắt đầu với $1, n, n-1, ...2k+2, 0$. Do đó π_0 chấm dứt trong mọi hoán vị bất đầu bởi $1, n, 0$ thu được sau $\frac{n-2}{2}$ chuyển vị hợp pháp.

Bây giờ ta giả sử rằng $n > 2$, để xét trường hợp này ta sẽ đưa ra vài kí hiệu. Với mọi số nguyên $s > 0, t \geq 0$ sao cho $s + t$ chia hết cho $n + 1$, ta xây dựng phép hoán vị gọi là(s, t) _bậc thang tại một thời điểm như sau: Áp dụng (1) một lần và lặp lại (2) và (3) một cách xen kẽ:

(1) Cho s số đầu tiên $1, 2, ...s-1, 0$

(2) Cho t số tiếp theo là t số lớn nhất trong $1, 2, ..., n$ chưa phân định vào mục nào, sắp xếp theo trật tự tăng.

(3) Cho s số tiếp theo là s số lớn nhất trong $1, 2, ..., n$ chưa phân định vào mục nào, sắp xếp theo trật tự tăng.

Nếu $s + 1|n + 1$ và $t > 0$ thì áp dụng $n/(s + t)$ chuyển vị hợp pháp cho (s, t)_bậc thang, quá trình ta ám chỉ như sự lựa chọn bậc thang

Tiếp theo ta giả sử rằng $s|(n + 1)$. Nếu $2s$ không chia hết cho $n + 1$ thì áp dụng $n/(s - 2)$ chuyển vị hợp pháp cho $(s, 0)$_bậc thang suy ra một phép chuyển vị khác π_1 mà không có thêm chuyển vị hợp pháp nào có thể được áp dụng. Nếu thay vì $2s|(n + 1)$ thì $(s, 0)$_bậc thang thực sự là (s, s)_bậc thang cái mà có thể chọn từ $(2s, 0)$_bậc thang

Giờ ta chứng minh rằng nếu $n > 2$ và n lẻ thì π_0 chính quy nếu và chỉ nếu $n + 1$ là luỹ thừa của 2. Vì $n + 1$ chẵn nên ta viết $n + 1 = 2^q r$, ở đó q là số tự nhiên và r là số tự nhiên lẻ. Áp dụng $(n - 1)/2$ chuyển vị hợp

pháp cho π_0 dẫn đến $(2, 0)$_bậc thang
Nếu $2^q > 2$ thì $2s|(n+1)$ với $s = 2^1, ...2^{q-1}$ ta có thể lặp lại để dẫn đến $(2^q, 0)$_bậc thang
Nếu $r = 1$ suy ra ta thu được π_1 và π_0 chính quy. Ngược lại, áp dụng $r - 2$ chuyển vị hợp pháp dẫn đến một hoán vị ở đó 0 là lân cận trái của n vì thế không có một chuyển vị hợp pháp nào là có thể. Tuy nhiên hoán vị cuối bắt đầu bởi $1, 2, ...2^q$ hơn $1, n$. Suy ra π_0 không chấm dứt trong π_1 vì thế π_0 không chính quy
Vậy π_0 là chính quy khi và chỉ khi $n = 2$ hoặc $n + 1$ là luỹ thừa của 2.

Chương 4

Đề thi olympic Áo - Balan

▷**4.17**.*Tìm tất cả các số nguyên dương N sao cho số đó chỉ chia hết cho 2 và 5 và $N + 25$ là số chính phương.*

Lời giải: Ta có thể biểu diễn N dưới dạng là $2^a.5^b$,với a và b là các số mũ nguyên. Với số nguyên $x > 5$,ta có $x^2 = N + 25$,điều này tương đương với $(x + 5)(x - 5) = N$. Vì vậy N được biểu diễn bằng tích của hai số tự nhiên hơn kém nhau 10. Ta xét hai trường hợp:
Trường hợp 1: $b = 0$. Khi đó với $2^a = (x+5)(x-5)$ ta có $x+5$ và $x-5$ là ước của 2. Nhưng không có hai số là ước của 2 mà hai số đó lại hơn kém nhau 10, do đó không có số thoả mãn trường hợp này.
Trường hợp 2: $b \geq 1$ .Trong trường hợp này, x^2 chia hết cho 5, vì vậy x^2 cũng chia hết cho 25. Điều đó chứng tỏ $b \geq 2$. Lấy $x = 5y$, cho $y > 1$ và $(y-1)(y+1) = 2^a.5^{b-2}$. Ta có $y-1$ và $y+1$ là các số chẵn, và $p = \frac{1}{2}.(y-1)$ và $q = \frac{1}{2}.(y+1)$ là các số nguyên dương mà $p.q = 2^{a-2}.5^{b-2}$. Vì vậy p và q bằng 2^m và 5^n với m, n là các số nguyên. Ta xét hai trường hợp nhỏ như sau:
1) $5^n - 2^m = 1$; vì $5^n, 2^m \neq 0(mod3)$,ta có : $2^m \equiv 1(mod3)$ và $5^n \equiv 2(mod3)$. Vì vậy n là số tự nhiên và $5^n \equiv 5(mod8)$. Ta có $2^m \equiv (5^m-1) \equiv 4(mod8)$,từ đó suy ra $m = 2$. Từ đó ta có $N = 2000$.
2) $2^m - 5^n = 1$. Ta có $2^m = 5^n + 1 \equiv 2(mod4)$ từ đó suy ra $m = 1$ và $n = 0$. Từ đó ta có $N = 200$. Vì vậy, tất cả các số thoả mãn bài toán là

$N = 200$; 2000.

▷**4.18**.*Tìm các số nguyên $n \geq 5$,sao cho ta có thể sử dụng màu tô đỉnh đa giác n-đỉnh bởi 6 màu mà 5 đỉnh liên tiếp nhau có màu khác nhau ?*

Lời giải: Ta gọi các màu là a, b, c, d, e, f. Biểu thị S_1 bởi dãy a, b, c, d, e và S_2 bởi dãy a, b, c, d, e, f. Nếu $n > 0$, ta có thể biểu diễn dưới dạng $5x + 6y$ với $x; y \geq 0$, khi đó n thoả mãn các điều kiện sau: x liền với dãy S_1 kéo theo y liền với dãy S_2 trên hình đa giác. Ta có: y có thể bằng 0,1,2,3 hoặc 4. Khi đó n có thể bằng 1 trong các số có dạng $5x$; $5x+6; 5x+12; 5x+18$ hoặc $5x+24$. Tất cả các số lớn hơn 4 không thoả mãn các dạng trên là 7,8,9,13,14,19.

Xét tất cả các số n, trừ các trường hợp bằng 7,8,9,13,14,19. Ta có tồn tại số k sao cho $6k < n < 6(k+1)$. Theo định lý Pigeonhole, có ít nhất $k+1$ đỉnh của n cạnh có màu giống nhau. Giữa 2 hoặc 3 đỉnh có ít nhất 4 đỉnh khác nữa, bởi vì 5 đỉnh liên tiếp có màu khác nhau. Vì vậy, có ít nhất $5k+5$ đỉnh, và $n \geq 5k+5$. Do vậy, ngoại trừ $n = 7, 8, 9, 13, 14, 19$, các trường hợp còn lại đều thoả mãn bài toán.

Vậy tất cả các số $n \geq 5$ trừ 7,8,9,13,14,19 thoả mãn bài toán.

▷**4.19**.*Trong không gian 3 chiều, cho hình lập phương đơn vị cùng với 6 hình lập phương đơn vị khác, tạo thành 7 hình lập phương đơn vị với các trọng tâm là* $(0,0,0), (\pm1,0,0), (0,\pm1,0), (0,0,\pm1)$. *Chứng minh hoặc phản chứng(trong không gian 3 chiều) không gian có thể chia thành 3 chiều sao cho không có 2 trong chúng có thể chia các điểm nằm bên trong.*

Lời giải: Ta có thể chia không gian thành các không gian 3 chiều, mà trọng tâm của các hình lập phương đơn vị trùng với các lưới điểm. Xét các điểm có toạ độ (x, y, z). Xét $x + 2y + 3z$. Ta gọi 2 lưới điểm gần kề nhau nếu và chỉ nếu chúng khác nhau duy nhất 1 toạ độ. Ta xem xét không gian 3 chiều chứa 7 hình lập phương đơn vị mà trọng tâm của chúng đúng với các số từ 0 đến 6. Do vậy, không gian có thể chia thành các không gian 3 chiều thoả mãn bài toán.

▷**4.20**.*Trong mặt phẳng, cho tam giác $A_oB_oC_o$. Xét tất cả các tam giác ABC thoả mãn các điều kiện sau:(i)$C_o; A_ovB_o$ lần lượt nằm trên $\overline{AB}, \overline{BC}$ và*

$\overline{CA}$.(ii)$\widehat{ABC} = \widehat{A_oB_oC_o}$, $\widehat{BCA} = \widehat{B_oC_oA_o}$ và $\widehat{CAB} = \widehat{C_oA_oB_o}$. Tìm quỹ tích tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải: Ta có ít nhất một tam giác ABC tồn tại, ví dụ ta xét tam giác $A_oB_oC_o$ ở giữa tam giác ABC.
Gọi tam giác $A_oB_oC_o$ có đường tròn ngoại tiếp w, tâm O. Giả sử tam giác ABC thoả mãn các điều kiện của bài toán. Vì A và A_o nằm ở 2 phía của cạnh BC, và $\widehat{C_oA_oB_o} = \widehat{CAB}$. Vì vậy, đường tròn ngoại tiếp tâm O_1 của tam giác B_oC_oA phải đối xứng với O qua B_oC_o. Tương tự ta xét với đường tròn ngoại tiếp tâm O_2 và O_3 của tam giác A_oC_oB và A_oB_oC. Ta có tứ giác $OB_oO_1C_o$ là hình thoi sao cho $O_1 = b_o + c_o$.Tương tự,ta có:$O_2 = a_o + c_o$
Lấy M là trung điểm của O_1O_2. Xét $A(a, 0), C_o(c_o, 0), B(b, 0)$. Ta có hoành độ của điểm O_1 và O_2 là $\frac{1}{2}(a + c_o)$ và $\frac{1}{2}(b + c_o)$. Vì vậy điểm M có hoành độ $\frac{1}{2}(a + b) + c_o$. Vì vậy, lấy điểm H' có hoành độ $\frac{1}{2}(a + b)$ thì có H' nằm trên $\overline{AB}$. Chú ý rằng $h' = m + (m - c_o) = a_o + b_o + c_o$. Ta có H' nằm trên OG với G là trọng tâm $\Delta A_oB_oC_o$, mà $OH' = 3OG$.
Do vậy H' là trực tâm H của tam giác $A_oB_oC_o$. Quỹ tích cần tìm là duy nhất một điểm là trực tâm của tam giác $A_oB_oC_o$.

▷**4.21**.*Cho 27 điểm phân biệt trên mặt phẳng không có 3 điểm nào thẳng hàng. 4 điểm trong chúng lập thành các đỉnh của hình vuông đơn vị; 23 đỉnh còn lại nằm trong hình vuông trên. Chứng minh rằng tồn tại 3 điểm riêng biệt $X; Y; Z$ sao cho $[XYZ] \le \frac{1}{48}$.*

Lời giải: Ta chứng minh bằng quy nạp. Lấy $n \ge 1$ điểm nằm trong hình vuông (không kể 3 đường thẳng), hình vuông có thể chia thành $2n + 2$ tam giác mà các đỉnh của các tam giác cũng là 1 trong n điểm hoặc các tam giác nằm bên trong hình vuông.
Với $n = 1$, vì hình vuông là hình lồi nên ta có thể chia hình vuông thành 4 tam giác bởi các đường nằm trong hình vuông, do đó các tam giác đều nằm trong hình vuông.
Giả sử bài toán đúng với $n = k \ge 1$. Ta sẽ chứng minh bài toán đúng với $n = k + 1$.
Thật vậy, với $n = k$, ta có thể chia hình vuông thành $2k + 2$ tam

giác mà các đỉnh của các tam giác cũng là một trong k điểm hoặc các tam giác nằm bên trong hình vuông. Với $n = k + 1$, ta xét thêm điểm P_1. Vì không có 3 điểm nào thẳng hàng nên P nằm trong số 2n+2 tam giác, ví dụ ΔABC. Như vậy ΔABC chia thành các tam giác nhỏ là $APB; BPCvCPA$. Như vậy hình vuông được chia thành $2(n+1)+2 = 2n+4$ tam giác.Vậy bài toán được chứng minh bằng quy nạp.

Trường hợp đặc biệt $n = 23$, hình vuông có thê chia thành 48 tam giác với tổng diện tích bằng 1. Vậy 1 trong các tam giác trên có diện tích tối đa là $\frac{1}{48}$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Chương 5

Đề thi olympic Địa Trung Hải

▷**5.22.***Cho n số dương* $a_1, a_2, ..., a_n$ *và tập hợp* $\{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n\}$*, với mỗi* $\sigma_i \in \{-1, 1\}$*. Chứng minh rằng tồn tại một phép hoán vị* $(b_1, b_2, ..., b_n)$ *của* $a_1, a_2, ..., a_n$ *và tập hợp* $\{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n\}$ *với mỗi* $\beta_i \in \{-1, 1\}$ *sao cho dấu hiệu của* $\sum_{j=1}^{i} \beta_j b_j$ *bằng với dấu hiệu của* $\sigma_i, \forall 1 \leq i \leq n$*.*

Lời giải: Ta xây dựng một dãy các số khác không $x_1, x_2, ..., x_n$ với những thuộc tính sau đây:
i) Với $1 \leq i \leq n$, $x_1, x_2, ..., x_n$ có giá trị tuyệt đối khác nhau
ii) Khi được sắp xếp theo thứ tự giá trị tuyệt đối tăng dần, dấu hiệu của chúng xen kẽ nhau
iii) Với $1 \leq i \leq n$, dấu hiệu của các số trong $x_1, x_2, ..., x_n$ có giá trị tuyệt đối lớn nhất bằng σ_i.
Để làm được như vậy, ta chỉ đơn giản xây dựng $x_1, x_2, ..., x_n$ trong trật tự, tại mỗi bước chọn x_{i_0} theo quy tắc dấu hiệu đúng với thuộc tính (ii), với $i = i_0$ và đặt hoặc $|x_{i_0}| > \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_{i_0-1}|\}$ hoặc $|x_{i_0}| < \min\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_{i_0-1}|\}$. Vì vậy thuộc tính (iii) đúng với $i = i_0$.
Chọn b_i và β_i sao cho $b_{j_1} < b_{j_2} \Leftrightarrow |x_{j_1}| < |x_{j_2}|$ và $\beta_j x_j > 0, \forall j, j_1, j_2$. Giả thiết rằng $1 \leq i \leq n$. Sắp xếp $b_1, b_2, ..., b_i$ theo bậc tăng dần để thu được $b_{k_1}, b_{k_2}, ..., b_{k_i}$. Bằng cách xây dựng, dãy các dấu hiệu $\beta_{k_1}, \beta_{k_2}, ..., \beta_{k_i}$ xen kẽ nhau, và $\beta_{k_i} = \sigma_i$. Vì vậy :

$$\sum_{j=1}^{i} \beta_j b_j = \sigma_i \left(b_{k_i} - b_{k_{i-1}} + b_{k_{i-2}} - b_{k_{i-3}} + ... \pm b_{k_1} \right).$$

Biểu thức trong ngoặc là tổng của $\lfloor k/2 \rfloor$ biểu thức dương của các hình thức $b_{k_{j+1}} - b_{k_j}$ và có thể cộng thêm vào một số hạng b_{k_1}. Vì vậy, $\sum_{j=1}^{i} \beta_j b_j$ có cùng dấu hiệu với σ_i với mỗi i, đpcm.

▷**5.23**.*Cho tứ giác lồi $ABCD$. Dựng ra phía ngoài các cạnh của tứ giác các tam giác đều WAB, XBC, YCD, ZDA với S_1, S_2, S_3, S_4 lần lượt là trọng tâm. Chứng minh rằng $\overline{S_1S_3} \perp \overline{S_2S_4} \Leftrightarrow AC = BD$.*

Lời giải: Chọn O là một điểm bất kì. Gọi a, b, c, d theo thứ tự biểu thị cho các vectơ từ O đến A, B, C, và D. M_1, M_2, M_3, M_4 theo thứ tự là trung điểm của $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$, và $s_i^{'}$ biểu thị cho các vectơ từ M_i tới S_i với $i = 1, 2, 3, 4$.

Có 2 vectơ x và y, cho $\angle(x, y)$ là góc giữa chúng thuận theo chiều kim đồng hồ. (Tất cả các góc đều mod 2π). Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $ABCD$ là định hướng theo chiều kim đồng hồ, và cho φ là phép biến đổi mà quay bất kỳ vectơ nào $\pi/2$ ngược chiều kim đồng hồ và nhân độ lớn của nó lên bởi $\frac{1}{2\sqrt{3}}$. Khi đó :

$$\begin{aligned}
\varphi(x) \cdot \varphi(y) &= |\varphi(x)| \, |\varphi(y)| \angle(\varphi(x), \varphi(y)) \\
&= \left(\frac{|x|}{2\sqrt{3}} \right) \left(\frac{|y|}{2\sqrt{3}} \right) \angle(x, y) \\
&= \frac{1}{12} x \cdot y
\end{aligned}$$

Tích vô hướng của vectơ $\overrightarrow{S_3S_1}$ với vectơ $\overrightarrow{S_4S_2}$ bằng :

$$\left(\frac{(b-d) + (a-c)}{2} + s_1^{'} - s_3^{'} \right) \cdot \left(\frac{(b-d) - (a-c)}{2} + s_2^{'} - s_4^{'} \right),$$

và bằng tổng của 4 biểu thức sau đây :

$$\left(\frac{|b-d|^2 - |a-c|^2}{4} \right), \left(s_1^{'} - s_3^{'} \right) \cdot \left(s_2^{'} - s_4^{'} \right),$$

$$\frac{1}{2}\left[s_1^{'}\cdot(b-a)-s_3^{'}\cdot(c-d)+(b-c)\cdot s_2^{'}-(a-d)\cdot s_4^{'}\right],$$

$$\frac{1}{2}\left[s_1^{'}\cdot(c-d)-s_3^{'}\cdot(b-a)+(a-d)\cdot s_2^{'}-(b-c)\cdot s_4^{'}\right].$$

Biểu thức đầu tiên bằng $\frac{1}{4}\left(BD^2-AC^2\right)$. Bốn số hạng trong biểu thức thứ 3 đều bằng 0: $\overline{MS_1}\perp\overline{AB}$ ngụ ý rằng $s_1^{'}\left(b-a\right)=0$, v. v...
Trong biểu thức thứ 2, ta thấy :

$$s_1^{'}-s_3^{'}=\varphi\left((b-a)-(d-c)\right)=\varphi\left((c-a)+(b-d)\right)$$

và

$$s_2^{'}-s_4^{'}=\varphi\left((c-b)-(a-d)\right)=\varphi\left((c-a)-(b-d)\right)$$

Do đó, tích vô hướng của chúng bằng 1/12 của :
$((c-a)+(b-d))\cdot((c-a)-(b-d))=|c-a|^2+|b-d|^2$,
hay $\frac{1}{12}\left(CA^2-BD^2\right)$.
Đối với biểu thức thứ tư,

$$s_1^{'}\cdot(c-d)=\left(AB\Big/2\sqrt{3}\right)(CD)\cos\left(\pi/2+\angle\left(a-b,c-d\right)\right)$$

trong khi

$$-s_3^{'}\cdot(b-a)=s_3^{'}\cdot(a-b)=\left(CD\Big/2\sqrt{3}\right)(AB)\cos\left(\pi/2+\angle\left(c-d,a-b\right)\right).$$

Tổng của các argument của 2 côsin là :

$$\pi+\left(\angle\left(a-b,c-d\right)+\angle\left(c-d,a-b\right)\right)=3\pi,$$

Với ngụ ý rằng giá trị của mỗi côsin là phủ định của cái khác. Do đó, $s_1^{'}$ và $s_3^{'}$ trong biểu thức 4 triệt tiêu lẫn nhau ở bên ngoài. Tương tự, cũng làm như vậy với $s_2^{'}$ và $s_4^{'}$.
Vì thế, toàn bộ tích vô hướng bằng $\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\right)\left(BD^2-AC^2\right)$. Vì $\overline{S_1S_3}\perp\overline{S_2S_4}$ khi và chỉ khi tích vô hướng này bằng 0, $\overline{S_1S_3}\perp\overline{S_2S_4}\Leftrightarrow BD=AC$, đpcm.

▷**5.24**.P, Q, R, S *theo thứ tự là trung điểm của các cạnh* BC, CD, DA, AB *của tứ giác lồi* $ABCD$*. Chứng minh rằng :*

$$4\left(AP^2 + BQ^2 + CR^2 + DS^2\right) \leq 5\left(AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2\right)$$

Lời giải: Ta đã biết công thức : $\overline{XM}$ là trung tuyến của tam giác XYZ, thì $XM^2 = \frac{1}{2}XY^2 + \frac{1}{2}XZ^2 - \frac{1}{4}YZ^2$. Ta thay (X, Y, Z, M) bằng (A, B, C, P), (B, C, D, Q), (C, D, A, R) và (D, A, B, S) vào trong công thức này và cộng 4 công thức lại với nhau để thu được 1 công thức thứ 5. Nhân cả 2 vế của công thức thứ 5 với 4, ta tìm thấy vế trái của bất đẳng thức sẽ bằng

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 + 4\left(AC^2 + BD^2\right)$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh $AC^2 + BD^2 \leq AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$. Đây là công thức "bất đẳng thức hình bình hành". Để chứng minh nó, gọi O là một điểm bất kỳ trong mặt phẳng và với mỗi điểm X, gọi x biểu thị vectơ từ O tới X. Ta có thể khai triển toàn bộ các số hạng trong $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 - AC^2 - BD^2$, ví dụ viết $AB^2 = |a - b|^2 = |a|^2 - 2a \cdot b + |b|^2$, để thấy rằng biểu thức này bằng

$$\begin{aligned}
&|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 + 2\left(a \cdot b + b \cdot c + c \cdot d + d \cdot a - a \cdot c - b \cdot d\right) \\
&= |a + c - b - d|^2 \geq 0
\end{aligned}$$

với dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a + c = b + d$(hay khi và chỉ khi $ABCD$ là hình bình hành). Điều phải chứng minh.

Chương 6

Đề thi olympic Petecbua

▷**6.25**.*Cho AA_1, BB_1, CC_1 là đường cao của tam giác nhọn ABC. Hai điểm A_2 và C_2 nằm trên đường thẳng A_1C_1 sao cho đường thẳng CC_1 chia đôi đoạn thẳng A_2B_1 và đường thẳng AA_1 chia đôi đoạn thẳng C_2B_1. Đường thẳng A_2B_1 và AA_1 gặp nhau tại điểm K, và đường thẳng C_2B_1 và CC_1 gặp nhau tại điểm L. Chứng minh rằng đường thẳng KL và AC song song với nhau.*

Lời giải: Gọi điểm K_1 và L_1 là điểm giữa của C_2B_1 và A_2B_1 do đó K_1 nằm trên đường AA_1 và L_1 nằm trên đường thẳng CC_1. Dễ dàng chứng minh được đường cao AA_1 của tam giác ABC là đường phân giác của tam giác $A_1B_1C_1$ từ đó cho thấy rằng A_1K_1 vừa là đường phân giác vừa là đường trung bình của tam giác $A_1C_2B_1$, vì vậy $A_1C_2 = A_1B_1$ và A_1K_1 cũng là đường cao của tam giác $A_1C_2B_1$ do đó A_1K_1 vuông góc với B_1C_2 tương tự C_1L_1 vuông góc với A_2B_1.
Từ đó suy ra đường thẳng KK_1 và LL_1 là đường cao của tam giác KLB_1 đưa đến chúng đồng quy tại với đường cao l từ B_1 trong tam giác này. Từ đó đường thẳng KK_1 và LL_1 gặp nhau tại trực tâm H của tam giác ABC, l phải đi qua điểm B_1 và H. Do đó l vuông góc với AC. Bởi vì l là đường cao trong tam giác KLB_1 đi qua B_1, nó cũng vuông góc với KL. Chúng ta kết luận rằng KL//AC, như đề bài.

▷**6.26**.*Một trăm điểm được chọn trong mặt phẳng toạ độ. Hãy chỉ ra rằng tối* *đa* $2025 = 45^2$ *các hình chữ nhật với các đỉnh trong số các điểm này có cạnh song song với các trục.*

Lời giải: Lời giải thứ nhất: Gọi O là một trong 100 điểm, và gọi hình chữ nhật có giá trị nếu các đỉnh của nó là O và 03 điểm khác được lựa chọn. Chúng ta khẳng định rằng có ít nhất 81 hình chữ nhật có giá trị. Vẽ qua O đường thẳng I_1 và I_2 song song với trục toạ độ, tại đó m được chọn là các điểm nằm trên $I_2 - \{O\}$. Cho điểm cố định bất kỳ đã chọn P không nằm trên I_1 hoặc I_2, tối đa một hình chữ nhật có giá trị có P như là một đỉnh, hơn thế nữa, tất cả các hình chữ nhật có giá trị của dạng này cho điểm P nào đó. Do đó có $99 - m - n$ như điểm P, có tối đa nhiều tam giác có giá trị kiểu như vậy. Nếu $m + n > 17$, chúng ta đã làm được. Mặt khác, cho một cặp (P, Q) là các điểm đã chọn, ở đây P thuộc $I_1 - \{O\}$ và Q thuộc $I_2 - \{O\}$, ít nhất có một hình chữ nhật giá trị có P và Q như là các đỉnh; hơn nữa tất cả các hình chữ nhật có giá trị của dạng này đối với cặp (P, Q) như vậy. Vì có $mn < m(17 - m) < 8.9 = 72$ các cặp như vậy, có ít nhất $72 < 8$ hình chữ nhật có giá trị.
Chúng ta kết luận rằng trong bất kỳ trường hợp nào, có ít nhất 81 hình chữ nhật mà giá trị của nó là O và có 03 điểm khác được lựa chọn. Biến đổi O trên tất cả 100 điểm, đếm số hình chữ nhật cho mỗi O. Tổng cộng số điểm ít nhất là 8100, và chúng ta tam giác bất kỳ mà các đỉnh của nó được lựa chọn các điểm là 4 lần. Vì vậy, có ít nhất $8100/4 = 2025$ hình chữ nhật, như đề bài đã yêu cầu.
Lời giải thứ hai: Gọi một hình chữ nhật thích hợp nếu 4 đỉnh của nó được lựa chọn là các điểm. Vẽ tất cả các đường thẳng đứng $I_1 \ldots .., I_n$ đi qua ít nhất một trong những điểm đã lựa chọn. Giả thiết rằng I_i chứa x_i là các điểm đã lựa chọn, để $s := \sum_{i=1}^{n} x_i = 100$. Số tam giác thích hợp với các cạnh bên trên đường thẳng i^{th} và j^{th} là tối đa $min\{C^2_{x_i}, C^2_{x_j}\}$. Quan sát thấy rằng $min\{C^2_{x_i}, C^2_{x_j}\} \leqslant \frac{2xy - x - xy}{4}$ đối với các số nguyên dương là x và y, bởi vì nếu $x \leqslant y$ thì cạnh bên tay trái tối đa là $\frac{x(x-1)}{2} \leqslant \frac{1}{4}[x(y-1) + y(x-1)]$. Do vậy số tam giác thích hợp tối đa là $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{2x_ix_j)}{4} - \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{x_i + x_j}{4} = \frac{1}{4}(s^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2) - \frac{1}{4}(n-1)s = 2525 - \frac{1}{4}(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 100n)$
Áp dụng bất đẳng thức bình phương trung bình nghiệm và bất đẳng thức

trung bình hình số học, ta thấy rằng biểu thức đạt cuối cùng này tối đa là bằng $2525-\frac{1}{4}(\frac{s^2}{n}+100n) = 2525-25(\frac{100}{n}+n) \geqslant 2525-25.2\sqrt{(\frac{100}{n}n)} =$ 2025 Như đề bài đã yêu cầu

▷**6.27.** *a, Tìm tất cả các cặp của các số nguyên khác biệt a, b để $\frac{b^2+a}{a^2+b}$ và b^2+a là luỹ thừa của một số nguyên tố.*

b, Cho a và b là các số nguyên dương lớn hơn 1thoả mãn $\frac{b^2+a-1}{a^2+b-1}$. Chứng minh rằng b^2+a-1 có ít nhất hai thừa số nguyên tố khác nhau.

Lời giải:

a, Chúng ta chứng minh rằng chỉ có cặp như vậy là $(a, b) = (5, 2)$. Nếu $(b = 1)$, thì $\frac{a+1}{a^2+1}$ dẫn đến $\frac{a+1}{a(a+1)-(a^2+1)} = a-1$. Do vậy a=1 không đưa ra lời giải khi a, b được đưa ra yêu cầu khác biệt. Vì vậy tổng b>1, và viết $b^2+a = p^m$ khi đó p là nguyên tố và $m \geqslant 1$.

Quan sát thấy $b(b^3+1) \equiv (b^2)^2 + b \equiv a^2 + b \equiv 0(mod(b^2+a))$, để b^2+a chia cho $b(b^3+1)$ nhưng gcd(b, b^3+1)và b^2+a là luỹ thừa của một nguyên tố, vì vậy một trong số b hoặc b^3+1 có thể chia hết cho b^2+a. Trường hợp đầu rõ ràng là không thể được, trong trường hợp thứ 2, chúng ta có $\frac{b^2+a}{(b+1)(b^2-b+1)}$. Mỗi b+1 và b^2-b+1 ít hơn b^2+a, vì vậy cả hai đều không chia hết cho b^2+a. Vì $b^2+a = p^m$ là luỹ thừa của p, chúng ta kết luận rằng p chia hết cho cả b+1 và b^2-b+1, thì nó cũng phải chia hết cho $(b^2-b+1)-(b+1)(b-2)$ dẫn đến p=3.

Không có lời giải cho m=1. Nếu m=2, thì chúng ta có $b^2+a = 9$, lời giả dễ dàng là (a,b)=(5,2). Mặt khác, giả sử rằng $m \geqslant 3$, một trong b+1 và b^2-b+1 chia hết cho 3 và chia hết cho 3^{m-1} nhưng $b^2 < b^2+a = 3^m$ dẫn đến rằng b+1 nhiều hơn $3^{m/2}+1 < 3^{m-1}$ và không thể chia hết cho 3^{m-1}. Chúng ta kết luận rằng 3^{m-1} chia hết cho b^2-b+1 và do vậy 9 chia hết cho $4.(b^2-b+1) = (2b-1).2+3$. Điều này không thể vì không có bình phương đồng dạng với 6 modun 9. Vì vậy không có lời giải ngoài (5,2)

b, Giả thiết, vì sự mâu thuẫn, rằng b^2-1+a là luỹ thừa của một nguyên tố. Vì $(b^2-1)^2-a^2$ chia hết cho b^2-1+a, khi a^2+b-1 là giả thiết tổng của chúng là $(b^2-1)^2+b+1 = b(b-1)(b^2+b-1)$. Quan sát thấy rằng b, b-1, và $b^2+b-1 = b(b+1)-1 = (b+2)(b-1)+1$ là nguyên tố cùng nhau từng cặp. Vì vậy, một trong b, b-1, và b^2+b-1

phải chia hết cho luỹ thừa nguyên tố $b^2 - 1 + a$. Vì b và b-1 nhỏ hơn $b^2 + a - 1$ chúng ta phải có rằng $b^2 + a - 1$ chia cho $b^2 + b - 1$ và vì vậy $a \leqslant b$ vì $a \neq b$ là giả thiết a<b. Mặt khác, vì $\frac{b^2+a-1}{a^2+b-1}$ chúng ta phải có $0 \leqslant (a^2 + b - 1) - (b^2 + a - 1) = (a - b)(a + b - 1)$. Vì vậy $a \geqslant b$ như là một mâu thuẫn .

▷**6.28**.*Trong một đất nước có 2000sân bay, ban đầu không có một chuyến bay nào của hãng hàng không. Hai hãng hàng không lần lượt giới thiệu những chuyến bay thẳng khứ hồi mới (giữa hai thành phố bất kỳ, chỉ có một chuyến bay thẳng được giới thiệu). Cơ quan vận tải muốn đạt được mục tiêu là nếu sân bay nào bị đóng cửa thì mọi người vẫn có thể du lịch giữa hai sân bay bất kỳ khác, có thể bằng chuyển tải. Hãng hàng không tạo ra mục đích để đạt được sẽ bị thua lỗ. Hãng hàng không nào sẽ chiến thắng cuộc chơi một cách hoàn hảo?*

Lời giải:

Công ty hàng không thứ hai đã chiến thắng. Xem xét tình huống khi mà mục tiêu không đạt được, nhưng việc bổ sung thêm chuyến bay đơn bất kỳ để đạt được mục đích nêu ra. Do mục tiêu không đạt được, có sân bay A bất kỳ khi đóng cửa đã chia các thành phố ra làm hai nhóm không liên lạc được là G1 và G2. Khi đó hai thành phố bất kỳ nằm trong G1 hoặc trong G2 thì phải gia nhập, bởi vì nếu không bổ sung chuyến bay giữa hai thành phố đó thì mục tiêu đưa ra không đạt được. Tương tự như vậy, tất cả các thành phố phải gia nhập vào A, nhưng không có thành phố trong G1 có thể gia nhập với bất kỳ thành phố nào của G2. Do đó nếu hệ số k thành phố trong G1, thì có $\frac{k-1}{2}$ chuyến bay giữa hai thành phố trong G1, $\frac{(1999-k)(1998-k)}{2}$chuyến bay giữa hai thành phố trong G2, và 1999 chuyến bay giữa A và thành phố khác. Như vậy tổng số chuyến bay là k(k-1999)+1999000 là đều nhau. Nói cụ thể, chưa bao giờ tới lượt của hãng hàng không thứ hai bổ sung thêm một chuyến bay mới. Do vậy, công ty hàng không thứ hai luôn tránh được sự thua lỗ.

▷**6.29**.**Chúng ta có** *phương trình bậc hai đa thức lồi, tất cả có cùng biệt số. Tổng của hai đa thức bất kỳ có nghiệm thực riêng biệt. Chỉ ra rằng tổng* *số của tất cả các đa thức cũng đều có nghiệm thực riêng biệt.*

Lời giải:
Biệt số chung phải là dương, bởi vì nếu không mỗi đa thức chỉ có giá trị dương, vì vậy tổng của hai đa thức bất kkỳ sẽ không có nghiệm thực. Cho biệt số chung là 4D, để mỗi đa thức là dạng $(x-c)^2 - D$ đối c bất kỳ. Để mỗi đa thức, được xem là khoảng cách trong đó đa thức có chứa giá trị âm, khoảng cách có độ dài là $2\sqrt{D}$. Nếu hai trong số khoảng cách này $(c1-\sqrt{D}, c1+\sqrt{D}$ và $(c2-\sqrt{D}, c2+\sqrt{D}$ không giao nhau, thì $|c2-c1| > \sqrt{D}$ và $\frac{1}{2}(c1+c2)$ không nằm trong một trong hai khoảng cách. Do vậy cả hai đa thức đều không âm tại $\frac{1}{2}(c1+c2)$ nhưng điểm này khi tổng số đa thức p đạt được giá trị nhở nhất của nó - mâu thuẫn với giả thiết là có p nghiệm thực phân biệt Do vậy, hai khoảng cách giao nhau bất kỳ. Chọn một khoảng cách $(c-\sqrt{D}, c+\sqrt{D}$ để c là cực tiểu. Vì tất cả các khoảng cách giao nhau bất kỳ khác điều này, chúng ta thấy rằng tất cả các khoảng cách đều chứa $(c+\sqrt{D}$ thuộc đối với thuộc bất kỳ. Tại điểm này, tổng số của tất cả các đa thức chứa giá trị âm a, do vậy tổng này phải có nghiệm thực riêng biệt.

▷**6.30**.*Trên một bàn cờ đam vô hạn đặt 111 góc không chồng nhau. Các hình có chữ L được đặt làm 3 đơn vị hình vuông. Tập hợp có tính chất sau: đối với góc bất kỳ, chứa 2.2 hình vuông bao phủ toàn bộ các góc. Chứng minh rằng một góc có thể dịch chuyển giữa một và 110 của các góc để tính chất được bảo vệ.*

Lời giải: Nếu 2.3 hình chữ nhật bất kỳ được bao phủ bởi hai góc, thì chúng ta có thể dị chuyển tất cả các góc ngoại trừ hai góc đó. Do vậy, chúng ta có thể tổng kết rằng không có hình chữ nhật như vậy tồn tại. Chúng ta xây dựng một đồ thị trực tiếp mà các đỉnh của nó là các góc, như sau: đối với mỗi góc, vẽ 2.2 hình vuông có chứa góc đó, và thêm một đường nối từ góc này tới góc kia bao phủ số dư của 2.2 hình vuông. Nếu một góc không có điểm nối về phía nó, chúng ta có thể dịch chuyển góc đó, vì vậy chúng ta có thể tổng kết rằng, không có góc như vậy tồn tại. Do đó, mỗi đường nối của đồ thị nằm trong chu trình nào đó. Nếu có hơn một chu trình, thì chúng ta có thể dịch chuyển tất cả các góc ngoại trừ các góc nằm trong chu trình của chiều dài dài cực tiểu, và yêu cầu đặc tính được tồn tại. Vì vậy, nó thoả mãn để chỉ ra rằng không thể tồn tại một chu trình đơn bao gồm tất cả 111 đỉnh.

Theo điểm giữa của một góc chúng ta hướng theo điểm tại điểm giữa của 2.3 hình vuông chứa góc đó. Nhớ lại rằng chúng ta đã tổng kết không có hai góc bao phủ 2.3 hình vuông, một điều dễ dàng kiểm tra là nếu có một điểm nối từ một góc tới một góc khác, thì điểm giữa của những góc này khác 1 trong cả hai toạ độ của chúng là x và y. Do đó, trong chu trình bất kỳ, toạ độ x của các đỉnh nằn trong sự biến đổi của chu trình, do đó số của các đỉnh nằm trong chu trình là chẵn. Do vậy, không có một chu trình chứa tất cả 111đỉnh, như đề bài đã đưa ra.

Chương 7

Đề thi olympic Anh

▷**7.31.***Cho hai đường tròn cắt nhau (C_1) và (C_2)có một tiếp tuyến chung tiếp xúc (C_1) tại P, tiếp xúc (C_2) tại Q. hai đường tròn này cắt nhau tại M và N. Chứng minh rằng tam giác MNP và tam giác MNQ có cùng diện tích.*

Lời giải: Gọi X là giao điểm của MN và PQ. Vì MN là trục đẳng phương của (C_1) và (C_2), X có cùng mối liên quan này với hai đường tròn vậy $XP^2 = XQ^2$ hay $XP = XQ$ Cũng vì $\widehat{PXM} + \widehat{MXQ} = \pi$ ta có $sin\widehat{PXM} = sin\widehat{MXQ}$ cho nên $[MNP] = \frac{1}{2}MN(XPsin\widehat{PXM}) = \frac{1}{2}MN(XQsin\widehat{MXQ}) = \widehat{MNQ}$. ta có điều phải chứng minh.

▷**7.32.***Cho x, y, z là những số thực dương thoả mãn xyz = 32. Tìm giá trị nhỏ nhất của $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2z^2$.*

Lời giải: Áp dụng bất đẳng thức trung bình hai lần ta có:
$x^2 + 4xy + 4y^2 + 2z^2 = (x^2 + 4y^2)^2 + 4xy + 2z^2 \geq 2\sqrt{x^2 4y^2} + 4xy + 2z^2 = 4xy + 4xy + 2z^2 \geq 3\sqrt[3]{4xy4xy2z^2} = 3\sqrt[3]{32(xyz)^2} = 96$.
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x^2 = 4y^2$ và $4xy = 2z^2$, tức là (x,y,z)=(4,2,4)

▷**7.33.***a, Tìm một tập A của 10 số thực nguyên mà không có 6 phần tử phân biệt nào của A có tổng chia hết cho 6*
b, Có thể tìm được một tập nếu 10 được thay bởi 7 hay không?

Lời giải: a, Một ví dụ của tập A là $A = \{6j + k|1 \leq j \leq 5, 1 \leq k \leq 2\}$ Trong bất kỳ 6 phần tử trong tập con của A nếu có t số đồng dư 1 modun 6 thì $t \in \{1, 2, ..., 5\}$. những phần tử khác trong tập con là đồng dư 0 môdun 6. Vì vậy tổng của những phần tử trong tập con là đồng dư $t \neq 0$ (mođun6)

b, Không thể cho bất kỳ tập nào có 7 số thực nguyên, chúng ta có 6 phần tử phân biệt của tập này có tổng chia hết cho 6. Bởi vì có hơn 2 số nguyên trong tập này, chúng ta có thể chọn hơn 2 mà là chẵn. Cùng cách này làm như thế ta có thể tìm thấy 5 tập con có 2 phần tử rời rạc cái mà có tổng là đồng dư của 0, 2, 4 mođun 6. Nếu tất cả tổng đó xuất hiện, 6 phần tử trong tập con tương ứng có tổng đồng dư $0 + 2 + 4 = 6$ (mođun 6). Cách khác, chỉ tổng xuất hiện . Bởi Pizeônhle principle, 3 tập con sẽ có tổng như nhau. Do đó những phần tử trong 3 cặp sẽ có tổng chia hết cho 6.

Tài liệu tham khảo

[1] Titu Andreescu, Zuming Feng, and George Lee, Jr. *Mathematical Olympiads 2000–2001, Problems and Solutions From Around the World*, The Mathematical Association of America, 2002.

[2] Nguyễn Hữu Điển, *Phương pháp Đirichle và ứng dụng*, NXBKHKT, 1999.

[3] Nguyễn Hữu Điển, *Phương pháp Quy nạp toán học*, NXBGD, 2000.

[4] Nguyễn Hữu Điển, *Những phương pháp điển hình trong giải toán phổ thông*, NXBGD, 2001.

[5] Nguyễn Hữu Điển, *Những phương pháp giải bài toán cực trị trong hình học*, NXBKHKT, 2001.

[6] Nguyễn Hữu Điển, *Sáng tạo trong giải toán phổ thông*, NXBGD, 2002.

[7] Nguyễn Hữu Điển, *Đa thức và ứng dụng*, NXBGD, 2003.

[8] Nguyễn Hữu Điển, *Giải phương trình vô định nghiệm nguyên*, NXBĐHQG, 2004.

[9] Nguyễn Hữu Điển, *Giải toán bằng phương pháp đại lượng bất biến*, NXBGD, 2004.