

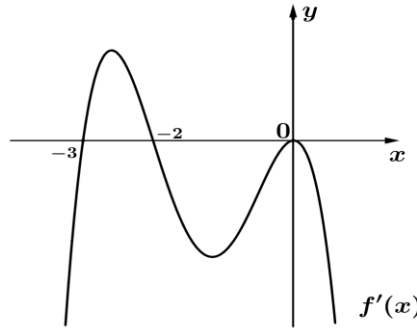
ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi có 06 trang, gồm 3 phần)

Họ, tên thí sinh: Số báo danh:

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới :



Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-3; -2)$.

B. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.

C. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -3)$.

D. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.

Câu 2. Khảo sát về số giờ mượn sách thư viện của học sinh khối 11 trường Y ta được một mẫu số liệu ghép nhóm như sau:

Số giờ mượn	$[0; 4)$	$[4; 8)$	$[8; 12)$	$[12; 16)$	$[16; 20)$
Số học sinh	54	78	120	45	12

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên gần nhất với giá trị nào sau đây

A. 120:

B. 12:

C. 8.

D. 9.

Câu 3. Điều kiện xác định của hàm số $y = \frac{1}{\sin x - \cos x}$ là

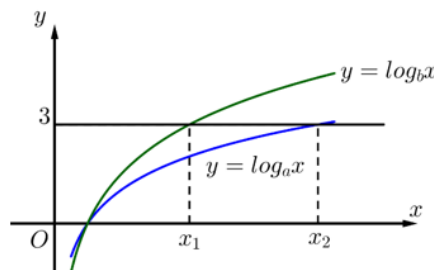
A. $x \neq k\pi$.

B. $x \neq k2\pi$.

C. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

D. $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Câu 4. Hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Đường thẳng $y = 3$ cắt hai đồ thị tại các điểm có hoành độ x_1, x_2 . Biết rằng $x_2 = 2x_1$, giá trị của $\frac{a}{b}$ bằng

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\sqrt{3}$.

C. 2.

D. $\sqrt[3]{2}$.

Câu 5. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n^2 + 4n + 7}{n + 1}$. Hỏi dãy số trên có bao nhiêu số hạng nhận giá trị nguyên.

A. 4.

B. 6.

C. 3.

D. 2.

Câu 6. Giá trị của $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k}$ ($k \in \mathbb{N}^*$) bằng:

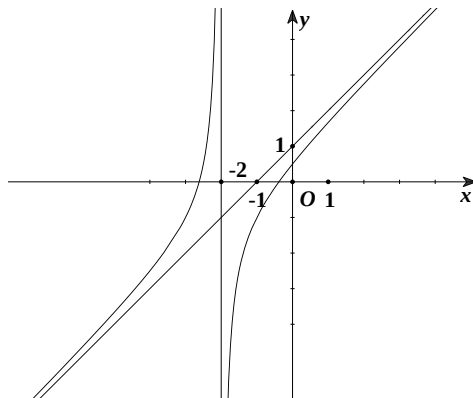
A. 0.

B. 2.

C. 4.

D. 5.

Câu 7. Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + 1}{cx + 2}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tính giá trị biểu thức:
 $T = 2a + 3b - c$.



A. 9.

B. 10.

C. 8.

D. 11.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có G là trọng tâm tam giác ABC và M là trung điểm của đoạn SG . Biết $\overrightarrow{SM} = x\overrightarrow{SA} + y\overrightarrow{SB} + z\overrightarrow{SC}$. Tính $T = x + 2y + 6z$.

A. $T = \frac{1}{3}$.

B. $T = \frac{3}{2}$.

C. $T = \frac{2}{3}$.

D. $T = \frac{5}{2}$.

Câu 9. Thống kê điểm trung bình cuối học kì 1 môn Toán của một số học sinh lớp 12A được cho ở bảng sau:

Khoảng điểm	$[6, 5; 7)$	$[7; 7, 5)$	$[7, 5; 8)$	$[8; 8, 5)$	$[8, 5; 9)$	$[9; 9, 5)$	$[9, 5; 10)$
Tần số	8	10	16	24	13	7	4

Số trung vị (làm tròn đến hàng phần trăm) của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

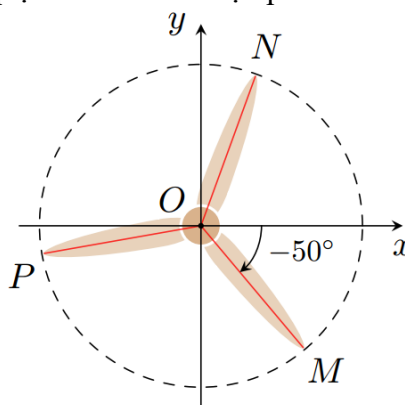
A. 7,15.

B. 9,15.

C. 7,75.

D. 8,15.

Câu 10. Trong hình vẽ dưới đây, chiếc quạt có ba cánh được phân bố đều nhau.



Số đo của góc lượng giác (ON, Ox) bằng

A. $50^\circ + k360^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$).

B. $120^\circ + k360^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$).

C. $70^\circ + k360^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$).

D. $-70^\circ + k360^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Câu 11. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $1; 20$ để bất phương trình $\log_m x > \log_x m$ nghiệm đúng với mọi x thuộc khoảng $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$?

A. 16.

B. 17.

C. 18.

D. 19.

Câu 12. Cho biết $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax^2 + 1} - bx - 2}{x^3 - 3x + 2}$ $a, b \in \mathbb{R}$ có kết quả là một số thực. Giá trị của biểu thức $a^2 + b^2$ bằng:

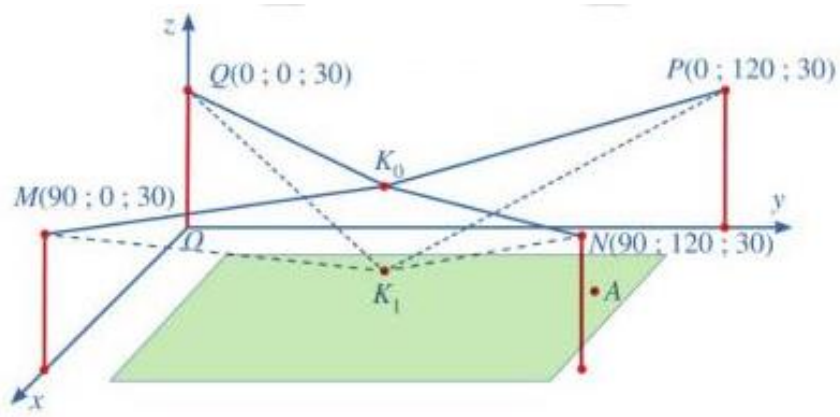
A. $6 + 5\sqrt{3}$.

B. $\frac{45}{16}$

C. $\frac{9}{4}$.

D. $87 - 48\sqrt{3}$

- Câu 13.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2a$, $AD = a$. SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi φ là góc giữa SC và mặt đáy ($ABCD$), tính $\cos \varphi$.
- A. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{5}}{4}$. B. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{7}}{4}$. C. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{6}}{4}$. D. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{10}}{4}$.
- Câu 14.** Một hộp đựng 4 viên bi xanh, 3 viên bi đỏ và 8 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên hai viên bi. Xác suất để chọn được hai viên bi cùng màu là
- A. $\frac{28}{105}$. B. $\frac{37}{105}$. C. $\frac{31}{105}$. D. $\frac{21}{105}$.
- Câu 15.** Cho hàm số $y = \frac{1}{4}(m^3 - 1)x^4 - x^3 + \frac{2m-5}{2}x^2 - 3x + m^2$ (m là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-500; 50)$ để hàm số nghịch biến trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 4\right]$?
- A. 500. B. 502. C. 501. D. 499.
- Câu 16.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Giả sử điểm M thuộc AC , điểm N thuộc DC' và $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DN} = y\overrightarrow{DC'}$. Với x và y là các số thực sao cho $MN \parallel BD'$. Khi đó tỉ số $\frac{MN}{BD'} = \frac{m}{n}$ ($\frac{m}{n}$ là phân số tối giản). Tính $m + n$.
- A. 4. B. 3. C. 5. D. 7.
- Câu 17.** Cho tam giác ABC vuông tại A có ba cạnh CA, AB, BC lần lượt tạo thành một cấp số nhân có công bội là q . Tìm q ?
- A. $q = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. B. $q = \frac{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{2}$. C. $q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. D. $q = \frac{\sqrt{2\sqrt{5}-2}}{2}$.
- Câu 18.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Gọi E là trung điểm của BC , F là điểm thuộc cạnh CD sao cho $EAF = 45^\circ$ và G thuộc cạnh SA . Biết FG song song với mặt phẳng (SBC) . Khi đó tỉ số $\frac{GA}{GS}$ bằng
- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{3}{4}$.
- Câu 19.** Biển số xe máy tỉnh K gồm hai dòng:
 - Dòng thứ nhất là $68XY$, trong đó X là một trong 24 chữ cái, Y là một trong 10 chữ số;
 - Dòng thứ hai là $abc.de$, trong đó a, b, c, d, e là các chữ số.
 Biển số xe được cho là "đẹp" khi dòng thứ hai có tổng các chữ số là một số có chữ số tận cùng bằng 8 và có đúng 4 chữ số giống nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 2 biển số trong các biển số "đẹp" để đem bán đấu giá?
- A. 12000. B. 143988000. C. 4663440. D. 71994000.
- Câu 20.** Người ta cần lắp một camera phía trên sân bóng để phát sóng truyền hình một trận bóng đá, camera có thể di động để luôn thu được hình ảnh rõ nét về diễn biến trên sân. Các kĩ sư dự định trồng bốn chiếc cột cao $30m$ và sử dụng hệ thống cáp gắn vào bốn đầu cột để giữ camera ở vị trí mong muốn. Mô hình thiết kế được xây dựng như sau: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị độ dài trên mỗi trục là $1m$), các đỉnh của bốn chiếc cột lần lượt là các điểm $M(90;0;30)$, $N(90;120;30)$, $P(0;120;30)$, $Q(0;0;30)$ (Hình vẽ). Giả sử K_0 là vị trí ban đầu của camera có cao độ bằng 25 và $K_0M = K_0N = K_0P = K_0Q$. Để theo dõi quả bóng đến vị trí A , camera được hạ thấp theo phương thẳng đứng xuống điểm K_1 có cao độ bằng 19.

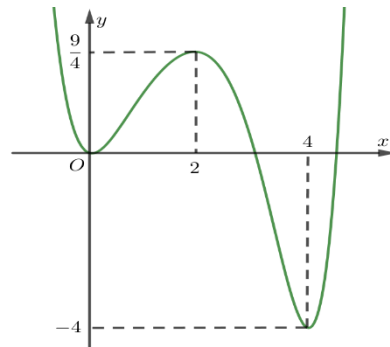


Biết rằng véc tơ $\overrightarrow{K_0K_1}$ có tọa độ là $(a; b; c)$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$. Khi đó $a + b + c$ bằng

- A. 7 B. -6 C. -7 D. 5

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f(4 - 3x)$ như hình vẽ.



Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Hàm số $y = f(4 - 3x)$ đồng biến trên tập $(0; 2) \cup (4; +\infty)$.

b) $f'(-8) + f'(-2) + f'(4) = 0$

c) Hàm số $g(x) = f(x^3 - 2)$ đồng biến trên khoảng $(\alpha; +\infty)$, giá trị nhỏ nhất của α bằng $\sqrt[3]{6}$

d) Có 26 giá trị thực của tham số m thuộc khoảng $(-9; 9)$ thỏa mãn $2m \in \mathbb{Z}$ để hàm số

$y = \left| 2f(x^3 - 2) + m - \frac{1}{2} \right|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-2; 0; -3), B(-4; -4; 1), C(-4; 1; -1)$.

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Điểm $A'(2; 0; -3)$ đối xứng với A qua mặt phẳng (Oyz) .

b) Tam giác ABC là tam giác tù.

c) Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm) là $r = 1,12$.

d) Cho hai điểm M, N thay đổi trên mặt phẳng (Oyz) sao cho $MN = 3$. Giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$ (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm) là 6,17.

Câu 3. Cho $1 < a < b \leq 2$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $\log_a 2^{2024} < \log_b 2^{2024}$.

b) $\log_a^2(ab) - 4\log_a^2 b - 1 = 2\log_a b$.

c) $\log_{ab} \frac{\sqrt{b}}{a} = \frac{\log_a b - 2}{1 + \log_a b}$.

d) Giá trị nhỏ nhất của $P = 2 \cdot \log_a(b^2 + 4b - 4) + \log_{\frac{2}{a}} a$ có dạng $x + 3\sqrt[3]{y}$ với x, y là các số nguyên dương, khi đó $x + 2y = 22$.

Câu 4. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2024 \\ u_{n+2} + u_n = 2(u_{n+1} + 1012), n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ và dãy số (w_n) xác định như

$$\text{sau } w_n = \frac{\sum_{i=1}^n i u_i}{3n^4 + 4n^3 - 2n + 3}. \text{ Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:}$$

a) $u_4 = 12142$

b) $w_4 = \frac{141660}{2038}$

c) Biết $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2u_n}{2n^2 + n - 2} = \frac{a}{b}$ với a, b là số tự nhiên và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản, khi đó $a^2 - b^2 = 1012$.

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \frac{759}{9}$.

Câu 5. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a . Gọi O là trọng tâm của tam giác ABC , $SO = 2a$. Trên đường cao AH của tam giác ABC lấy điểm M không trùng với A và H , mặt phẳng (P) đi qua M và vuông góc với AH . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) SO song song với mặt phẳng (P)

b) Cạnh bên của hình chóp đã cho bằng $\frac{a\sqrt{39}}{3}$.

c) Gọi α là góc giữa mặt bên và mặt đáy, giá trị $\tan \alpha = 4\sqrt{3}$

d) Giá trị lớn nhất của diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABC$ cắt bởi mặt phẳng (P) bằng $\frac{3a^2}{4}$.

Câu 6. Một hộp đựng 50 chiếc thẻ được đánh số từ 1 đến 50. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Số cách chọn được hai thẻ chẵn là 1225.

b) Xác suất chọn được hai thẻ mà tích các số ghi trên hai thẻ là số chẵn bằng $\frac{37}{49}$.

c) Số cách chọn được ba thẻ mà các số ghi trên ba thẻ lập thành cấp số cộng là 780.

d) Xác suất để chọn được hai thẻ mà hiệu bình phương số ghi trên hai thẻ là số chia hết cho 3 bằng 0,65 (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 3$ với a, b là các tham số thực thỏa mãn

$$\begin{cases} a + b - 2 > 0 \\ 24 + 3(3a + b) < 0 \end{cases}. \text{ Hỏi phương trình } 2.f(x).f''(x) = [f'(x)]^2 \text{ có bao nhiêu nghiệm?}$$

Câu 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1; 2; -3), B(4; 0; 5), C(2; 0; 1)$ và $D(6; -2; 11)$. Gọi $M(x; y; z)$ là điểm sao cho hai biểu thức $P = 2MA^2 - 3MB^2 - MC^2 + MD^4$ và $Q = x + 2y + 2z - 24$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $x + 3y + z$

Câu 3. Có bao nhiêu số nguyên y ($y \geq 3$) sao cho tồn tại đúng hai số thực x lớn hơn $\frac{1}{2021}$ thỏa mãn:

$$\left(e^{y^x - xy + x}\right)^{\ln y} = xy$$

Câu 4. Cho hình lăng trụ $ABCD.MNPQ$ có tất cả các cạnh bằng $\sqrt{3}$, đáy $ABCD$ là hình thoi và $BAD = 60^\circ$. Các mặt phẳng $(ADQM), (ABNM)$ cùng tạo với đáy của lăng trụ góc α thỏa mãn $\tan \alpha = 2\sqrt{11}$ và hình chiếu vuông góc của điểm A lên mặt phẳng $(MNPQ)$ nằm bên trong hình thoi $MNPQ$. Gọi O là điểm cách đều bốn đỉnh tứ diện $AMNQ$. Biết thể tích khối chóp $O.ABM$ có giá trị bằng V và $V^2 = \frac{a}{b}$ với a, b là số tự nhiên; phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Tìm $a + b$.

Câu 5. Chọn ngẫu nhiên 3 số a, b, c trong tập hợp $S = \{1; 2; \dots; 26\}$. Biết xác suất để 3 số chọn ra thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2$ chia hết cho 5 bằng $\frac{m}{n}$ với $m, n \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản.

Tính giá trị biểu thức $T = 2m + n$.

Câu 6. Một mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB = 25\text{m}$, chiều rộng $AD = 20\text{m}$ được chia thành hai phần bằng nhau bởi vạch chắn MN (M, N lần lượt là trung điểm BC và AD). Một đội xây dựng làm một con đường đi từ A đến C qua vạch chắn MN , biết khi làm đường trên miền $ABMN$ mỗi giờ làm được 15m và khi làm trong miền $CDNM$ mỗi giờ làm được 30m . Do tính cấp thiết cần có của con đường nên đội xây dựng đã hoàn thành con đường trong một thời gian ngắn nhất. Hỏi sau bao nhiêu phút đội xây dựng làm được con đường đi từ A đến C (làm tròn đến hàng đơn vị).

.....**HẾT**.....

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.
(Mỗi câu trả lời đúng thí sinh được điểm)

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đ.A	B	D	D	D	D	A	B	B	D	D	B	B	D	B	C	A	B	B	D	B

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.
Điểm tối đa của 01 câu hỏi là 1 điểm

- Thí sinh chỉ lựa chọn chính xác 01 ý trong 1 câu hỏi được 0,12 điểm.
- Thí sinh chỉ lựa chọn chính xác 02 ý trong 1 câu hỏi được 0,3 điểm.
- Thí sinh chỉ lựa chọn chính xác 03 ý trong 1 câu hỏi được 0,6 điểm.
- Thí sinh lựa chọn chính xác cả 04 ý trong 1 câu hỏi được 1,2 điểm.

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5	Câu 6
a) S	a) Đ	a) S	a) Đ	a) S	a) S
b) Đ	b) S	b) Đ	b) Đ	b) Đ	b) Đ
c) Đ	c) Đ	c) S	c) S	c) Đ	c) S
d) Đ	d) S	d) S	d) Đ	d) Đ	d) S

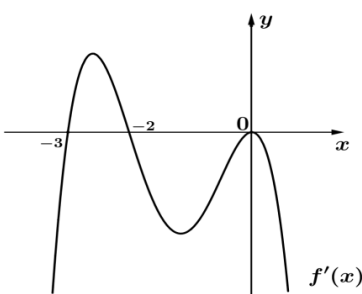
PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. (Mỗi câu trả lời đúng thí sinh được điểm)

Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp án	2	8	2026	731	93	89

LỜI GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

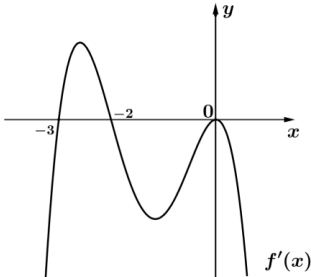
Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới :



- Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-3; -2)$.
 - B. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.
 - C. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -3)$.
 - D. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.

Lời giải

Chọn B



Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ ta có: $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ x > -2 (x \neq 0) \end{cases}$ và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-3; -2; 0\}$

Vậy hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.

Câu 2. Khảo sát về số giờ mượn sách thư viện của học sinh khối 11 trường Y ta được một mẫu số liệu ghép nhóm như sau:

Số giờ mượn	$[0; 4)$	$[4; 8)$	$[8; 12)$	$[12; 16)$	$[16; 20)$
Số học sinh	54	78	120	45	12

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên gần nhất với giá trị nào sau đây

A. 120: **B.** 12: **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn D

Nhóm chứa Mốt là $[8; 12)$. Do đó: $u_m = 8$; $n_{m-1} = 78$; $n_m = 120$; $n_{m+1} = 45$; $u_{m+1} - u_m = 12 - 8 = 4$

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm là: $M_o = 8 + \frac{120 - 78}{(120 - 78) + (120 - 45)} \cdot 4 = \frac{368}{39} \approx 9,4$.

Câu 3. Điều kiện xác định của hàm số $y = \frac{1}{\sin x - \cos x}$ là

A. $x \neq k\pi$. **B.** $x \neq k2\pi$. **C.** $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. **D.** $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$.

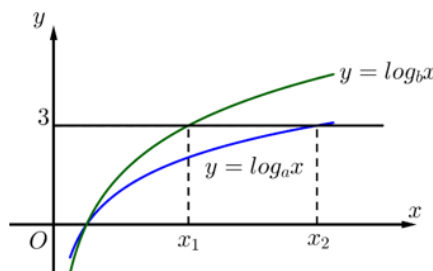
Lời giải

Chọn D

Đkxd của hàm số đã cho là: $\sin x - \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0$

$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Câu 4. Hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Đường thẳng $y = 3$ cắt hai đồ thị tại các điểm có hoành độ x_1, x_2 . Biết rằng $x_2 = 2x_1$, giá trị của $\frac{a}{b}$ bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** 2. **D.** $\sqrt[3]{2}$.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị có x_1 là nghiệm của phương trình $\log_b x = 3$ nên $\log_b x_1 = 3 \Leftrightarrow x_1 = b^3$.

Từ đồ thị có x_2 là nghiệm của phương trình $\log_a x = 3$ nên $\log_a x_2 = 3 \Leftrightarrow x_2 = a^3$.

Do $x_2 = 2x_1 \Rightarrow a^3 = 2b^3 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^3 = 2 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \sqrt[3]{2}$. Vậy $\frac{a}{b} = \sqrt[3]{2}$.

Câu 5. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n^2 + 4n + 7}{n + 1}$. Hỏi dãy số trên có bao nhiêu số hạng nhận giá trị nguyên.

A. 4. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có $u_n = \frac{n^2 + 4n + 7}{n + 1} = n + 3 + \frac{4}{n + 1} \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$

Để u_n nhận giá trị nguyên thì $\frac{4}{n+1} (n \in \mathbb{N}^*)$ là số nguyên thì $\begin{cases} n+1=2 \\ n+1=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=1 \\ n=3 \end{cases}$

Vậy dãy số (u_n) có hai số hạng nhận giá trị nguyên.

Câu 6. Giá trị của $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} (k \in \mathbb{N}^*)$ bằng:

A. 0.

B. 2.

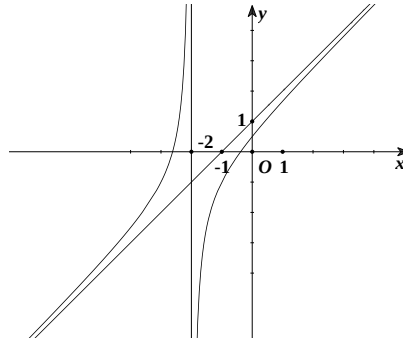
C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

Câu 7. Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + 1}{cx + 2}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tính giá trị biểu thức:
 $T = 2a + 3b - c$.



A. 9.

B. 10.

C. 8.

D. 11.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị có tiệm cận đứng $x = -2$. Suy ra $-\frac{2}{c} = -2 \Leftrightarrow c = 1$.

Đồ thị có tiệm cận xiên đi qua hai điểm: $(0;1)$ và $(-1;0)$ nên có phương trình:

$\frac{x}{-1} + \frac{y}{1} = 1 \Leftrightarrow y = x + 1$. Khi đó ta có:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2 + bx + 1}{x(x+2)} = 1 \Leftrightarrow a = 1; \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + bx + 1}{x+2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(b-2)x + 1}{x+2} = b - 2 = 1 \Leftrightarrow b = 3.$$

Vậy: $T = 2a + 3b - c = 2 + 9 - 1 = 10$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có G là trọng tâm tam giác ABC và M là trung điểm của đoạn SG . Biết $\overrightarrow{SM} = x\overrightarrow{SA} + y\overrightarrow{SB} + z\overrightarrow{SC}$. Tính $T = x + 2y + 6z$.

A. $T = \frac{1}{3}$.

B. $T = \frac{3}{2}$.

C. $T = \frac{2}{3}$.

D. $T = \frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Vì M là trung điểm của đoạn SG và G là trọng tâm tam giác ABC nên ta có:

$$\overrightarrow{SM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SG} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}) = \frac{1}{6}\overrightarrow{SA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{SC}.$$

$$\text{Vậy, } T = x + 2y + 6z = \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{2}.$$

Câu 9. Thống kê điểm trung bình cuối học kỳ 1 môn Toán của một số học sinh lớp 12A được cho ở bảng sau:

Khoảng điểm	$[6,5;7)$	$[7;7,5)$	$[7,5;8)$	$[8;8,5)$	$[8,5;9)$	$[9;9,5)$	$[9,5;10)$
Tần số	8	10	16	24	13	7	4

Số trung vị (làm tròn đến hàng phần trăm) của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

A. 7,15.

B. 9,15.

C. 7,75.

D. 8,15.

Lời giải

Chọn D

Cỡ mẫu là $n = 82$.

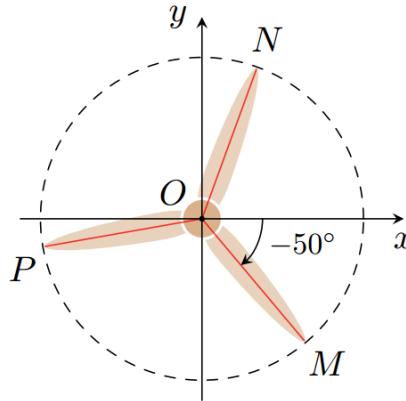
Gọi $x_1, x_2, \dots, x_{82}$ là các giá trị điểm trung bình môn Toán của học sinh lớp 12A theo thứ tự tăng dần.

Vì cỡ mẫu chẵn nên ta có trung vị là $\frac{x_{41} + x_{42}}{2}$.

Mà hai giá trị x_{41}, x_{42} thuộc nhóm $[8; 8,5)$ nên nhóm này chứa trung vị.

Vậy ta có giá trị trung vị là $M_e = 8 + \frac{\frac{82}{2} - (8 + 10 + 16)}{24} \cdot (8,5 - 8) = 8,14583 \approx 8,15$.

Câu 10. Trong hình vẽ dưới đây, chiếc quạt có ba cánh được phân bố đều nhau.



Số đo của góc lượng giác (ON, Ox) bằng

A. $50^\circ + k360^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$).

B. $120^\circ + k360^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$).

C. $70^\circ + k360^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$).

D. $-70^\circ + k360^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Lời giải

Chọn D

Vì ba cánh quạt phân bố đều nhau nên ta suy ra $MON = NOP = POM = 120^\circ$.

Suy ra một góc lượng giác (OM, ON) có số đo là 120° .

Theo hình vẽ, ta có một góc lượng giác (Ox, OM) có số đo là -50° suy ra một góc lượng giác (OM, Ox) có số đo là 50° . Theo hệ thức Chasles, ta có:

$$\begin{aligned} sđ(ON, Ox) &= sđ(OM, Ox) - sđ(OM, ON) + k360^\circ \\ &= 50^\circ - 120^\circ + k360^\circ = -70^\circ + k360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Câu 11. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc $1; 20$ để bất phương trình $\log_m x > \log_x m$ nghiệm đúng với mọi x thuộc $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$?

A. 16.

B. 17.

C. 18.

D. 19.

Lời giải.

Chọn B

Với $m \in 1; 20$, ta có : YCBT $\Leftrightarrow \log_m x > \log_x m, \forall x \in \left(\frac{1}{3}; 1\right) \Leftrightarrow \frac{\ln x}{\ln m} > \frac{\ln m}{\ln x}, \forall x \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$

$\Leftrightarrow \ln^2 x < \ln^2 m, \forall x \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$ (do $\ln x < 0$ với $x \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$, $\ln m > 0$ với $m \in 1; 20$)

$\Leftrightarrow \ln^2 \frac{1}{3} \leq \ln^2 m$ (do hàm $y = \ln^2 x$ nghịch biến trên $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$)

$\Leftrightarrow \ln^2 3 \leq \ln^2 m \Leftrightarrow \ln 3 \leq \ln m \Leftrightarrow 3 \leq m \xrightarrow[m \in \mathbb{Z}]{m \in 1; 20} m \in 3; 4; \dots; 19$.

Câu 12. Cho biết $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax^2 + 1} - bx - 2}{x^3 - 3x + 2} a, b \in \mathbb{R}$ có kết quả là một số thực. Giá trị của biểu thức $a^2 + b^2$ bằng?

A. $6 + 5\sqrt{3}$.

B. $\frac{45}{16}$

C. $\frac{9}{4}$.

D. $87 - 48\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax^2+1-bx-2}}{x^3-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax^2+1-bx-2}}{(x-1)^2(x+2)} = L$, với $L \in \mathbb{R}$ (*)

Khi đó $\sqrt{a+1}-b-2=0 \Leftrightarrow \sqrt{a+1}=b+2 \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq -2 \\ a+1=b^2+4b+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq -2 \\ a=b^2+4b+3 \end{cases}$

Thay $a=b^2+4b+3$ vào (*):

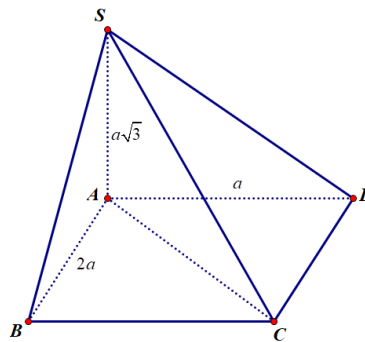
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax^2+1-bx-2}}{x^3-3x+2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{b^2+4b+3} \sqrt{x^2+1-bx-2}}{(x-1)^2(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{b^2+4b+3}{(x-1)^2(x+2)} \cdot \frac{x^2+1-bx-2}{\sqrt{b^2+4b+3} \sqrt{x^2+1-bx-2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4b+3}{(x-1)^2(x+2)} \cdot \frac{x^2-4bx-3}{\sqrt{b^2+4b+3} \sqrt{x^2+1-bx-2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4b+3}{(x-1)(x+2)} \cdot \frac{x+3}{\sqrt{b^2+4b+3} \sqrt{x^2+1-bx-2}} = L, L \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Khi đó: $4b+3+3=0 \Leftrightarrow b=-\frac{3}{2} \Rightarrow a=-\frac{3}{4}$. Vậy $a^2+b^2=\frac{45}{16}$

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=2a$, $AD=a$. SA vuông góc với mặt phẳng đáy. $SA=a\sqrt{3}$. Gọi φ là góc giữa SC và mặt đáy ($ABCD$), tính $\cos \varphi$.

A. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{5}}{4}$. **B.** $\cos \varphi = \frac{\sqrt{7}}{4}$. **C.** $\cos \varphi = \frac{\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\cos \varphi = \frac{\sqrt{10}}{4}$.

Lời giải

**Chọn D**

Hình chiếu của SC lên $ABCD$ là AC . Do đó $[SC, ABCD] = SCA$

$$AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5} \Rightarrow SC = 2a\sqrt{2}$$

Trong tam giác vuông SAC : $\cos SCA = \frac{AC}{SC} = \frac{a\sqrt{5}}{2a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$.

Câu 14. Một hộp đựng 4 viên bi xanh, 3 viên bi đỏ và 8 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên hai viên bi. Xác suất để chọn được hai viên bi cùng màu là

A. $\frac{28}{105}$. **B.** $\frac{37}{105}$. **C.** $\frac{31}{105}$. **D.** $\frac{21}{105}$.

Lời giải

Chọn B

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{15}^2 = 105$

Gọi A: “chọn được hai viên bi cùng màu” $\Rightarrow n(A) = C_4^2 + C_3^2 + C_8^2 = 37$

Xác suất của biến cố A: $n(A) = \frac{37}{105}$.

Câu 15. Cho hàm số $y = \frac{1}{4}(m^3 - 1)x^4 - x^3 + \frac{2m-5}{2}x^2 - 3x + m^2$ (m là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-500; 50)$ để hàm số nghịch biến trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 4\right]$?

A. 500.

B. 502.

C. 501.

D. 499.

Lời giải.

Chọn C

Ta có $y' = (m^3 - 1)x^3 - 3x^2 + (2m - 5)x - 3$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \left[\frac{1}{2}; 4\right] \Leftrightarrow (m^3 - 1)x^3 - 3x^2 + (2m - 5)x - 3 \leq 0 \forall x \in \left[\frac{1}{2}; 4\right]$.

Ta có bất phương trình $(m^3 - 1)x^3 - 3x^2 + (2m - 5)x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow m^3 x^3 - x^3 - 3x^2 + 2mx - 5x - 3 \leq 0$
 $\Leftrightarrow (mx)^3 + 2mx \leq (x+1)^3 + 2(x+1) \quad (1).$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 2 > 0 \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow mx \leq x+1 \Leftrightarrow m \leq \frac{x+1}{x}, \forall x \in \left[\frac{1}{2}; 4\right]$.

Xét $h(x) = \frac{x+1}{x}$ trên $\left[\frac{1}{2}; 4\right]$ có $h'(x) = \frac{-1}{x^2} < 0, \forall x \in \left(\frac{1}{2}; 4\right) \Rightarrow m \leq \min_{x \in \left[\frac{1}{2}; 4\right]} h(x) \Leftrightarrow m \leq \frac{5}{4}$.

Vì $\begin{cases} m \in (-500; 50) \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m \in \{-499; -498; \dots; -2; -1; 0; 1\}$.

Vậy có 501 giá trị m thỏa yêu cầu.

Câu 16. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Giả sử điểm M thuộc AC , điểm N thuộc DC' và $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DN} = y\overrightarrow{DC'}$. Với x và y sao cho $MN \parallel BD'$. Khi đó tỉ số $\frac{MN}{BD'} = \frac{m}{n}$. ($\frac{m}{n}$ là phân số tối giản). Tính $m+n$.

A. 4.

B. 3.

C. 5.

D. 7.

Lời giải

Chọn A

Đặt: $\overrightarrow{BA} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}, \overrightarrow{BB'} = \vec{c}$.

Khi đó, theo quy tắc hình hộp ta có: $\overrightarrow{BD'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM}$.

Từ $\overrightarrow{DN} = y\overrightarrow{DC'}$, ta có $\overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BD} = y(\overrightarrow{BC'} - \overrightarrow{BD})$, suy

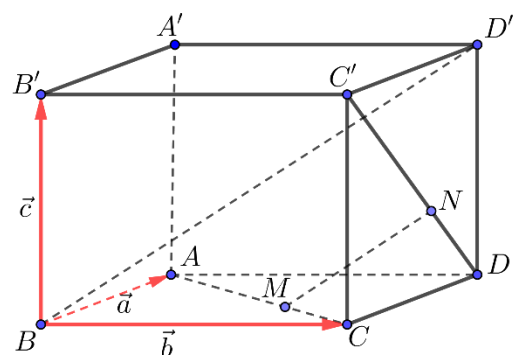
ra: $\overrightarrow{BN} - (\vec{a} + \vec{b}) = y(\vec{b} + \vec{c} - \vec{a} - \vec{b})$.

$\overrightarrow{BN} = (1-y)\vec{a} + \vec{b} + y\vec{c}$.

Từ $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AC}$, suy ra $\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA} = x(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA})$.

Vậy $\overrightarrow{BM} - \vec{a} = x(\vec{b} - \vec{a}) \Rightarrow \overrightarrow{BM} = (1-x)\vec{a} + x\vec{b}$.

Do đó: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM} = (1-y)\vec{a} + \vec{b} + y\vec{c} - ((1-x)\vec{a} + x\vec{b}) = (x-y)\vec{a} + (1-x)\vec{b} + y\vec{c}$.



Điều kiện để $MN \parallel BD'$ là $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{BD'}$ hay $(x-y)\vec{a} + (1-x)\vec{b} + y\vec{c} = k(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

$$(x-y)\vec{a} + (1-x)\vec{b} + y\vec{c} = k\vec{a} + k\vec{b} + k\vec{c} \quad (*)$$

Do $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không cùng phương nên từ (*) suy ra:

$$\begin{cases} k = x - y \\ k = 1 - x \\ k = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + y = 1 \\ k = y \end{cases} \Leftrightarrow (x; y; k) = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right).$$

Vậy M và N được xác định bởi $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC'}$ và

$$\overrightarrow{MN} = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)\vec{a} + \left(1 - \frac{2}{3}\right)\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD'}.$$

Khi đó $\frac{MN}{BD'} = |k| = \frac{1}{3}$. Suy ra $m = 1; n = 3 \Rightarrow m + n = 4$

Câu 17. Cho tam giác ABC vuông tại A có ba cạnh CA, AB, BC lần lượt tạo thành một cấp số nhân có công bội là q . Tìm q ?

A. $q = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

B. $q = \frac{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{2}$.

C. $q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

D. $q = \frac{\sqrt{2\sqrt{5}-2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Vì tam giác ABC vuông tại A nên $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Theo giả thiết ta có ba cạnh CA, AB, BC lần lượt tạo thành một cấp số nhân có công bội là q nên $BC = q^2.AC$ và $AB = q.AC$.

$$\text{Do đó } BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow q^4.AC^2 = q^2.AC^2 + AC^2 \Leftrightarrow q^4 - q^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} q^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ q^2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Vì } q > 0 \text{ nên } q^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow q = \frac{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{2}.$$

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Gọi E là trung điểm của BC , F là điểm thuộc cạnh CD sao cho $EAF = 45^\circ$ và G thuộc cạnh SA . Biết FG song song với mặt phẳng (SBC) . Khi đó tỉ số $\frac{GA}{GS}$ bằng

A. $\frac{1}{3}$.

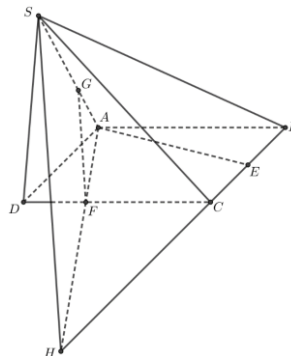
B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $BAE + EAF + DAF = 90^\circ \Rightarrow BAE + DAF = 45^\circ$

$$\Rightarrow \tan(BAE + DAF) = 1 \Rightarrow \frac{\tan BAE + \tan DAF}{1 - \tan BAE \cdot \tan DAF} = 1$$

$$\text{Mà } \tan BAE = \frac{BE}{BA} = \frac{1}{2} \text{ Nên } \tan DAF = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{DF}{DA} = \frac{1}{3} \Rightarrow DF = \frac{1}{3}DA = \frac{1}{3}DC$$

Gọi H là giao điểm của AF và BC trong mặt phẳng $(ABCD)$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} GF \subset (SAH) \\ GF \parallel (SBC) \\ (SAH) \cap (SBC) = SH \end{cases} \Rightarrow GF \parallel SH$$

$$\Rightarrow \frac{AG}{AS} = \frac{AF}{AH} \text{ .Mà } \frac{AF}{AH} = \frac{DF}{DC} = \frac{1}{3} \text{ Nên } \frac{AG}{AS} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{GA}{GS} = \frac{1}{2}$$

Câu 19. Biển số xe máy tỉnh K gồm hai dòng

- Dòng thứ nhất là $68XY$, trong đó X là một trong 24 chữ cái, Y là một trong 10 chữ số;

- Dòng thứ hai là $abc.de$, trong đó a, b, c, d, e là các chữ số.

Biển số xe được cho là "đẹp" khi dòng thứ hai có tổng các số là số có chữ số tận cùng bằng 8 và có đúng 4 chữ số giống nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 2 biển số trong các biển số "đẹp" để đem bán đầu giá?

A. 12000.

B. 143988000.

C. 4663440.

D. 71994000.

Lời giải

Chọn D

Chọn X từ 24 chữ cái và chọn Y từ 10 chữ số, ta có $24 \cdot 10 = 240$ (cách chọn).

Chọn 4 chữ số giống nhau từ các chữ số ta có 10 cách chọn;

Mỗi bộ gồm 4 chữ số giống nhau, ta có một cách chọn duy nhất 1 chữ số còn lại để tổng các số là số có chữ số tận cùng bằng 8, chẳng hạn: 4 chữ số 0, chữ số còn lại sẽ là 8; 4 chữ số 1, chữ số còn lại sẽ là 4;...; 4 chữ số 9, chữ số còn lại sẽ là 2).

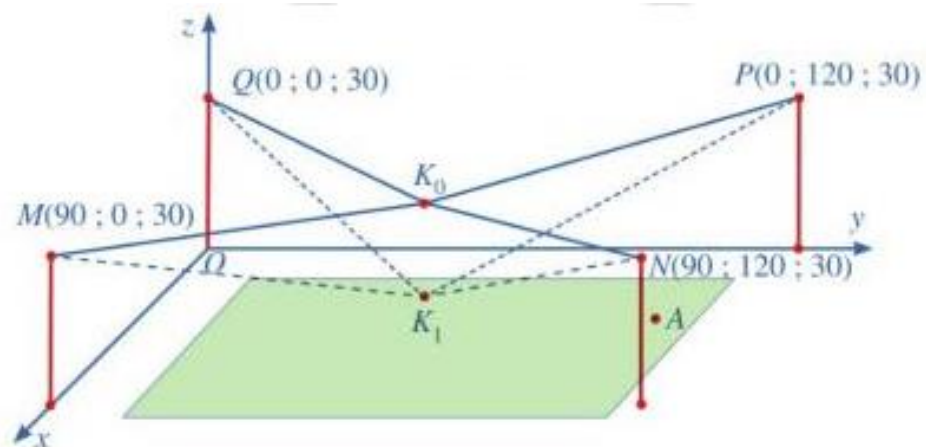
Sắp xếp 5 chữ số vừa chọn có 5 cách xếp.

Do đó, có tất cả $10 \cdot 5 = 50$ (cách chọn số ở dòng thứ hai).

Suy ra có tất cả $240 \cdot 50 = 12000$ (biển số đẹp).

Chọn 2 biển số trong các biển số "đẹp" ta có $C_{12000}^2 = 71994000$ (cách).

Câu 20: Người ta cần lắp một camera phía trên sân bóng để phát sóng truyền hình một trận bóng đá, camera có thể di động để luôn thu được hình ảnh rõ nét về diễn biến trên sân. Các kỹ sư dự định trồng bốn chiếc cột cao $30m$ và sử dụng hệ thống cáp gắn vào bốn đầu cột để giữ camera ở vị trí mong muốn. Mô hình thiết kế được xây dựng như sau: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị độ dài trên mỗi trục là $1m$), các đỉnh của bốn chiếc cột lần lượt là các điểm $M(90;0;30)$, $N(90;120;30)$, $P(0;120;30)$, $Q(0;0;30)$ (Hình vẽ). Giả sử K_0 là vị trí ban đầu của camera có cao độ bằng 25 và $K_0M = K_0N = K_0P = K_0Q$. Để theo dõi quả bóng đến vị trí A , camera được hạ thấp theo phương thẳng đứng xuống điểm K_1 có cao độ bằng 19.



Biết rằng véc tơ $\overrightarrow{K_0K_1}$ có tọa độ là $(a;b;c)$; $a, b, c \in \mathbb{R}$. Khi đó $a+b+c$ bằng

A. 7

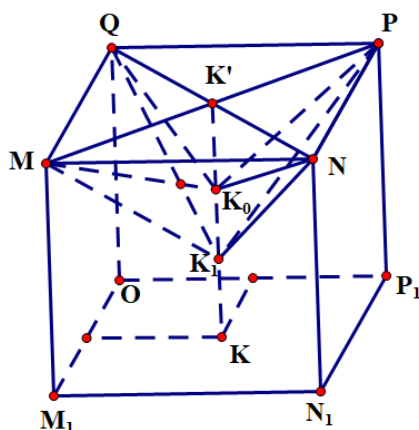
B. -6

C. -7

D. 5

Lời giải

Chọn B



Gọi M_1, N_1, P_1, K lần lượt là hình chiếu của M, N, P, K_0 lên mặt phẳng (Oxy) .

Ta thấy $MNPQ.M_1N_1P_1O$ là hình hộp chữ nhật. Gọi K' là giao hai đường chéo MP và NQ .

Khi đó $K'Q = K'P = K'N = K'M$. Vì $K_0M = K_0N = K_0P = K_0Q$ và camera được hạ thấp theo phương thẳng đứng từ điểm K_0 xuống điểm K_1 nên các điểm K', K_0, K_1, K thẳng hàng. Khi đó, các điểm K', K_0, K_1, K có hoành độ và tung độ bằng nhau.

Theo bài ra, cao độ của K_0 và K_1 lần lượt là 25 và 19. Giả sử $K_0(x; y; 25)$ và $K_1(x; y; 19)$.

Ta có $MNPQ.M_1N_1P_1O$ là hình hộp chữ nhật nên $K'K = OQ$, suy ra cao độ của K' bằng 30.

Do đó, $K'(x; y; 30)$. Ta có $\overrightarrow{K'Q} = (-x; -y; 0)$, $\overrightarrow{NK'} = (x - 90; y - 120; 0)$.

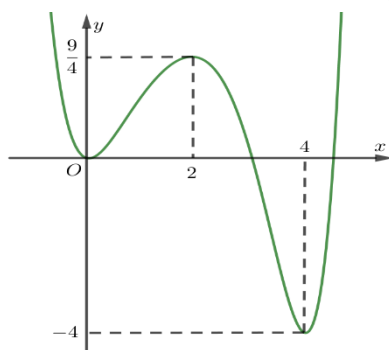
Vì K' là giao hai đường chéo của hình chữ nhật $MNPQ$ nên K' là trung điểm của NQ .

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{K'Q} = \overrightarrow{NK'} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = x - 90 \\ -y = y - 120 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 45 \\ y = 60 \end{cases}. \text{ Vậy } K_0(45; 60; 25), K_1(45; 60; 19)$$

Ta có $\overrightarrow{K_0K_1} = (0; 0; -6)$. Do đó, $a + b + c = -6$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên. Đồ thị của hàm số $y = f(4 - 3x)$ như hình vẽ.



Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Hàm số $y = f(4 - 3x)$ đồng biến trên tập $(0; 2) \cup (4; +\infty)$.

b) $f'(-8) + f'(-2) + f'(4) = 0$

c) Hàm số $g(x) = f(x^3 - 2)$ đồng biến trên khoảng $(\alpha; +\infty)$, giá trị nhỏ nhất của α bằng $\sqrt[3]{6}$

d) Có 26 giá thực của tham số m thuộc khoảng $(-9; 9)$ thỏa mãn $2m \in \mathbb{Z}$ để hàm số $y = \left| 2f(x^3 - 2) + m - \frac{1}{2} \right|$ có 5 điểm cực trị.

Lời giải

a) Sai vì: xét hàm số $\forall x_1 \in (0; 2), \forall x_2 \in (4; +\infty): x_1 < x_2$ ta có $\lim_{x_1 \rightarrow (2)^-} y = \frac{9}{4} > \lim_{x_1 \rightarrow (4)^+} y = -4$

b) Đúng vì:

Từ đồ thị hàm số $y = f(4 - 3x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$-3f'(4-3x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$y = f(4-3x)$	$+\infty$		0		$\frac{9}{4}$		-4		$+\infty$

Suy ra: $y'(0) = -3 \cdot f'(4 - 3 \cdot 0) = 0 \Leftrightarrow f'(4) = 0$. Tương tự $f'(-8) = 0, f'(-2) = 0$

c) Đúng vì:

Xét hàm số $g(x) = f(x^3 - 2)$.

$$g'(x) = 3x^2 \cdot f'(x^3 - 2), g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x^3 - 2 = 4 - 3 \cdot 0 \\ x^3 - 2 = 4 - 3 \cdot 2 \\ x^3 - 2 = 4 - 3 \cdot 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{6} \\ x = 0 \\ x = -\sqrt[3]{6} \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên hàm $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		$-\sqrt[3]{6}$		0		$\sqrt[3]{6}$		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$y = g(x)$	$+\infty$		-4		$\frac{9}{4}$		0		$+\infty$

Hàm số $g(x) = f(x^3 - 2)$ đồng biến trên $(\sqrt[3]{6}; +\infty)$ do đó giá trị nhỏ nhất của α bằng $\sqrt[3]{6}$

d) Đúng vì:

♦ Ta có $g(x)$ có 3 cực trị nên $y = 2g(x) + m - \frac{1}{2}$ cũng có 3 cực trị. Do đó để hàm

$y = \left| 2f(x^3 - 2) + m - \frac{1}{2} \right|$ có 5 cực trị thì phương trình $2g(x) + m - \frac{1}{2} = 0$ có đúng 2 nghiệm đơn

phân biệt. Ta có: $2g(x) + m - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow g(x) = \frac{-2m+1}{4} (*)$

♦ Phương trình (*) có đúng 2 nghiệm đơn khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{-2m+1}{4} \geq \frac{9}{4} \\ -4 < \frac{-2m+1}{4} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m \leq -8 \\ 1 \leq 2m < 17 \end{cases}.$

Mà $2m \in (-18; 18)$ và $2m \in \mathbb{Z}$ nên suy ra $\begin{cases} -18 < 2m \leq -8 \\ 1 \leq 2m < 17 \end{cases}.$

Do $2m \in \mathbb{Z}$ nên $2m \in \{-17; -16; -15; \dots; -8; 1; 2; 3; \dots; 16\}$. Vậy có $10 + 16 = 26$ giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-2; 0; -3), B(-4; -4; 1), C(-4; 1; -1)$.

a) Điểm $A'(2; 0; -3)$ đối xứng với A qua mặt phẳng (Oyz) .

b) Tam giác ABC là tam giác tù.

c) Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm) là $r = 1,12$.

d) Cho hai điểm M, N thay đổi trên mặt phẳng (Oyz) sao cho $MN = 3$. Giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$ (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm) là 6,17.

Lời giải

a) Đúng.

b) Ta có $AB = \sqrt{4+16+16} = 6$; $AC = \sqrt{4+1+4} = 3$; $BC = \sqrt{0+25+4} = \sqrt{29}$.

Cạnh AB lớn nhất nên góc C lớn nhất

Do $\cos C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} > 0$ nên C là góc nhọn, do đó tam giác ABC nhọn **b) sai**.

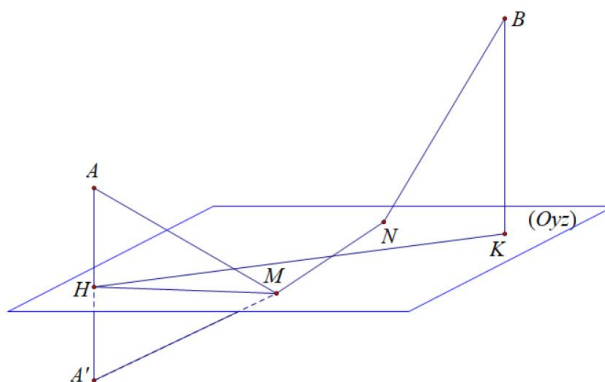
c) Ta có diện tích tam giác ABC

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{4} \sqrt{(9+\sqrt{29})(9-\sqrt{29})(3+\sqrt{29})(\sqrt{29}-3)} = \sqrt{65}.$$

$$\text{Mặt khác } S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{2\sqrt{65}}{9+\sqrt{29}} \approx 1,12. \text{ c) đúng.}$$

d) Ta có $H(0; 0; -3), K(0; -4; 1)$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $A(-2; 0; -3)$ và $B(-4; -4; 1)$ xuống mặt phẳng (Oyz) .

Nhận xét: A, B nằm về cùng một phía với mặt phẳng (Oyz) .



Gọi A' đối xứng với A qua (Oyz) , suy ra H là trung điểm đoạn AA' nên $AM = A'M$.

Mà $A'H = AH = 2$; $BK = 6$; $HK = 4\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Do đó } AM + BN &= A'M + BN = \sqrt{HA'^2 + HM^2} + \sqrt{BK^2 + KN^2} \\ &\geq \sqrt{(HA' + BK)^2 + (HM + KN)^2} = \sqrt{36 + (HM + KN)^2} \end{aligned}$$

Lại có $HM + MN + NK \geq HK \Rightarrow HM + NK \geq HK - MN = 4\sqrt{2} - 3$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi H, M, N, K thẳng hàng và theo thứ tự đó.

$$\text{Suy ra } AM + BN \geq \sqrt{36 + (HM + KN)^2} \geq \sqrt{36 + (4\sqrt{2} - 3)^2} = \sqrt{77 - 24\sqrt{2}}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$ bằng $\sqrt{77 - 24\sqrt{2}} \approx 6,56$. **d) sai**.

Câu 3. Cho $1 < a < b \leq 2$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\log_a 2^{2024} < \log_b 2^{2024}$.

b) $\log_a^2(ab) - 4\log_{a^2} b - 1 = 2\log_a b$.

$$c) \log_{ab} \frac{\sqrt{b}}{a} = \frac{\log_a b - 2}{1 + \log_a b}.$$

d) Giá trị nhỏ nhất của $P = 2 \cdot \log_a (b^2 + 4b - 4) + \log_{\frac{b}{a}}^2 a$ có dạng $x + 3\sqrt[3]{y}$ với x, y là các số nguyên dương, khi đó $x + 2y = 22$.

Lời giải:

a) Ta có $\log_a 2^{2024} > \log_b 2^{2024}$ nên a) **sai**

b) $\log_a^2(ab) - 4\log_{a^2} b - 1 = (1 + \log_a b)^2 - \log_a^2 b - 1 = 2\log_a b$ nên b) **đúng**

$$c) \log_{ab} \frac{\sqrt{b}}{a} = \frac{\log_a \frac{\sqrt{b}}{a}}{\log_a(ab)} = \frac{\frac{1}{2}\log_a b - 1}{1 + \log_a b} = \frac{\log_a b - 2}{2(1 + \log_a b)} \text{ nên c) sai}$$

d) Ta có

$$1 < b \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} b - 1 > 0 \\ b^2 - 4 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow (b - 1)(b^2 - 4) \leq 0$$

$$b^3 - b^2 - 4b + 4 \leq 0 \Rightarrow b^2 + 4b - 4 \geq b^3$$

Mà $a > 1$ nên $\log_a (b^2 + 4b - 4) \geq \log_a b^3$

$$\text{Do đó } P \geq 2\log_a b^3 + \log_{\frac{b}{a}}^2 a = 6\log_a b + \frac{1}{(\log_a b - 1)^2}$$

$$\text{Đặt } t = \log_a b, \text{ từ điều kiện ta có } \begin{cases} 1 < a < b \leq 2 \\ \frac{b}{a} \neq 1 \end{cases} \Rightarrow t > 1$$

$$\text{Khi đó } p \geq 6t + \frac{1}{(t-1)^2} = 3(t-1) + 3(t-1) + \frac{1}{(t-1)^2} + 6 \geq 3\sqrt[3]{9} + 6$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } 3(t-1) = \frac{1}{(t-1)^2} \Rightarrow t = 1 + \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$$

Vậy $x = 6; y = 9 \Rightarrow x + 2y = 24$. nên d) **sai**

Câu 4.

Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2024 \\ u_{n+2} + u_n = 2(u_{n+1} + 1012), n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \cdot w_n = \frac{\sum_{i=1}^n i u_i}{3n^4 + 4n^3 - 2n + 3}$

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

a) $u_4 = 12142$

b) $w_4 = \frac{141660}{2038}$

c) biết $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2u_n}{2n^2 + n - 2} = \frac{a}{b}$. a, b là số tự nhiên, $\frac{a}{b}$ tối giản, khi đó $a^2 - b^2 = 1012$.

d) Đặt $w_n = \frac{\sum_{i=1}^n i u_i}{3n^4 + 4n^3 - 2n + 3}$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \frac{759}{9}$.

Lời giải

a) $\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2024 & (1) \\ u_{n+2} + u_n = 2(u_{n+1} + 1012) & (2) \end{cases} \quad (n \geq 1)$

$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2024 \\ u_{n+2} + u_n = 2(u_{n+1} + 1012), n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

$$u_3 + u_1 = 2(u_2 + 1012) \rightarrow u_3 = 2(u_2 + 1012) - u_1 = 6071$$

$$u_4 = 2(u_3 + 1012) - u_2 = 12142$$

$$\text{b)} w_n = \frac{\sum_{i=1}^n i u_i}{3n^4 + 4n^3 - 2n + 3} \text{ nên } w_4 = \frac{u_1 + 2u_2 + 3u_3 + 4u_4}{3 \cdot 4^4 + 4 \cdot 4^3 - 2 \cdot 4 + 3} = \frac{70830}{1019}$$

$$\text{c)} \text{ Đặt } v_n = u_{n+1} - u_n.$$

$$\text{Ta có } (2) \Leftrightarrow u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n + 2024 \Leftrightarrow v_{n+1} = v_n + 2024.$$

Suy ra (v_n) lập thành một cấp số cộng có số hạng đầu $v_1 = u_2 - u_1 = 2024 - 1 = 2023$ và công sai $d = 2024$

$$\text{Nên } v_n = 2023 + (n-1) \cdot 2024 = 2024n - 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } u_n &= (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \dots + (u_2 - u_1) + u_1 \\ &= v_{n-1} + v_{n-2} + \dots + v_1 + u_1 = 2024((n-1) + (n-2) + \dots + 1) - (n-1) + 1 \\ &= 2024 \frac{n(n-1)}{2} - n + 2 = 1012n(n-1) - n + 2 = 1012n^2 - 1013n + 2. \end{aligned}$$

$$u_n = 1012n^2 - 1013n + 2$$

$$\text{Do đó: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2u_n}{2n^2 + n - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2024n^2 - 2026n + 4}{2n^2 + n - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2024 - \frac{2026}{n} + \frac{4}{n^2}}{2 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}} = 1012.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2u_n}{2n^2 + n - 2} = \frac{a}{b}. \text{ Vậy } a=1012, b=1. a^2 - b^2 = 1024143.$$

$$\begin{aligned} \text{d)} v_n &= \frac{\sum_{i=1}^n i u_i}{3n^4 + 4n^3 - 2n + 3} \\ \sum_{i=1}^n i u_i &= \sum_{i=1}^n i (1012i^2 - 1013i + 2) = 1012 \sum_{i=1}^n i^3 - 1013 \sum_{i=1}^n i^2 + 2 \sum_{i=1}^n i \\ &= 1012 \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 - 1013 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \frac{n(n+1)}{2} \\ v_n &= \frac{\sum_{i=1}^n i u_i}{3n^4 + 4n^3 - 2n + 3} = \frac{1012 \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 - 1013 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \frac{n(n+1)}{2}}{3n^4 + 4n^3 - 2n + 3}. \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \frac{253}{3} = \frac{759}{9}.$$

Câu 5. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a . Gọi O là trọng tâm của tam giác ABC , $SO = 2a$. Trên đường cao AH của tam giác ABC lấy điểm M không trùng với A và H , mặt phẳng (P) đi qua M và vuông góc với AH . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) SO song song với mặt phẳng (P)

b) Cạnh bên của hình chóp đã cho bằng $\frac{a\sqrt{39}}{3}$.

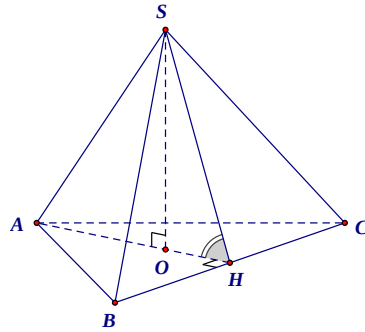
c) Gọi α là góc giữa mặt bên và mặt đáy có giá trị $\tan \alpha$ bằng $4\sqrt{3}$.

d) Giá trị lớn nhất của diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABC$ cắt bởi mặt phẳng (P) bằng $\frac{3a^2}{4}$.

Lời giải

a) Vì $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SO \perp AH$. Mà $(P) \perp AH$ nên SO song song với mặt phẳng (P) hoặc $SO \subset (P)$

Vậy a)-sai



b) Ta có $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AO = \frac{2}{3}AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Xét tam giác vuông OSA ta có $SA = \sqrt{SO^2 + AO^2} = \sqrt{4a^2 + \frac{3a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{39}}{3}$

Vậy b)-đúng

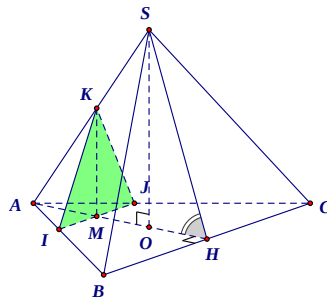
c) Dễ thấy góc giữa mặt bên và mặt đáy của hình chóp đã cho bằng góc OHS

Ta có $\tan \alpha = \tan OHS = \frac{SO}{OH} = \frac{3SO}{AH} = \frac{3.2a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = 4\sqrt{3}$

Vậy c)-đúng

d) Đặt $AM = x$ với $0 < x < \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Ta xét hai trường hợp sau:

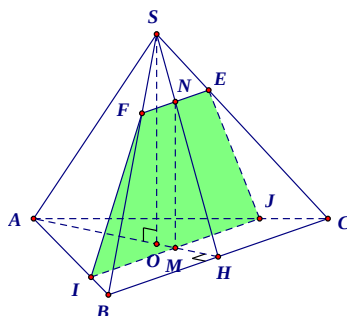
TH1: $0 < x \leq \frac{a\sqrt{3}}{3}$, khi đó thiết diện là tam giác cân KIJ tại K như hình vẽ



Ta có $\frac{IJ}{BC} = \frac{AM}{AH} \Rightarrow IJ = \frac{AM \cdot BC}{AH} = \frac{2x\sqrt{3}}{3}$ và $\frac{KM}{SO} = \frac{AM}{AO} \Rightarrow KM = \frac{AM \cdot SO}{AO} = 2x\sqrt{3}$

Suy ra $dt(KIJ) = \frac{1}{2} IJ \cdot KM = 2x^2 \leq \frac{2a^2}{3}$

TH2: $\frac{a\sqrt{3}}{3} < x < \frac{a\sqrt{3}}{2}$, khi đó thiết diện là hình thang cân $IJEF$ như hình vẽ



$$\text{Ta có } IJ = \frac{2x\sqrt{3}}{3}; \frac{EF}{BC} = \frac{OM}{OH} = \frac{AM - AO}{OH} \Rightarrow EF = \frac{(AM - AO).BC}{OH} = 2(x\sqrt{3} - a)$$

$$\text{và } \frac{MN}{SO} = \frac{HM}{HO} = \frac{AH - AM}{HO} \Rightarrow MN = \frac{(AH - AM).SO}{HO} = 2(3a - 2x\sqrt{3})$$

$$\text{Suy ra } dt(IJEF) = \frac{(IJ + EF).MN}{2} = \frac{3a^2}{4} - \left(4x - \frac{3a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \leq \frac{3a^2}{4}$$

So sánh hai trường hợp trên ta thấy, diện tích lớn nhất của thiết diện là $\frac{3a^2}{4}$ khi và chỉ khi

$$x = \frac{3a\sqrt{3}}{8}. \text{ **Vậy d)-đúng**}$$

Câu 6. Một hộp đựng 50 chiếc thẻ được đánh số từ 1 đến 50.

a) Số cách chọn được hai thẻ chẵn là 1225.

b) Xác suất chọn được hai thẻ mà tích các số ghi trên hai thẻ là số chẵn bằng $\frac{37}{49}$.

c) Số cách chọn được ba thẻ mà các số ghi trên ba thẻ lập thành cấp số cộng là 780.

d) Xác suất để chọn được hai thẻ mà hiệu bình phương số ghi trên hai thẻ là số chia hết cho 3 bằng 0,65 (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

a) Số cách chọn hai thẻ là $C_{25}^2 = 300$.

b) Số cách chọn được hai thẻ mà tích các số ghi trên hai thẻ là số lẻ là $C_{25}^2 = 300$

Xác suất chọn được hai thẻ mà tích các số ghi trên hai thẻ là số chẵn bằng $1 - \frac{C_{25}^2}{C_{50}^2} = \frac{37}{49}$.

c) Xét ba thẻ có số ghi lần lượt là a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số cộng, khi đó $a + c = 2b$, suy ra a, c cùng tính chẵn lẻ.

Do đó số cách chọn được ba thẻ mà các số ghi trên ba thẻ lập thành cấp số cộng là $C_{25}^2 + C_{25}^2 = 600$

d) +) $n(\Omega) = C_{50}^2 = 1225$

+) Gọi A là biến cố hiệu bình phương số ghi trên hai thẻ là số chia hết cho 3

Giả sử 2 số được chọn là a, b . Theo giả thiết $(a^2 - b^2):3 \Leftrightarrow (a-b)(a+b):3 \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b):3 \\ (a+b):3 \end{cases}$

Từ số 1 đến số 50 có 16 số chia hết cho 3; 17 số chia 3 dư 1; 17 số chia 3 dư 2.

Nếu $(a-b):3$ thì a, b phải đồng dư khi chia 3 $\Rightarrow$ số cách chọn là: $C_{16}^2 + C_{17}^2 + C_{17}^2$

Nếu $(a+b):3$ thì hoặc a và b cùng chia hết cho 3 hoặc một số chia 3 dư 1, một số chia 3 dư 2

$\Rightarrow$ số cách chọn là: $C_{16}^2 + C_{17}^1.C_{17}^1$

Lại có: $\begin{cases} (a-b):3 \\ (a+b):3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a:3 \\ b:3 \end{cases} \Rightarrow$ số cách chọn là: C_{16}^2

Do đó: $n(A) = (C_{16}^2 + C_{17}^2 + C_{17}^2) + (C_{16}^2 + C_{17}^1.C_{17}^1) - C_{16}^2 = C_{16}^2 + C_{17}^2 + C_{17}^2 + C_{17}^1.C_{17}^1$

Vậy $P(A) = \frac{C_{16}^2 + C_{17}^2 + C_{17}^2 + C_{17}^1.C_{17}^1}{C_{50}^2} = \frac{681}{1225} \approx 0,56$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 3, a, b$ là các tham số thực thỏa mãn $\begin{cases} a + b - 2 > 0 \\ 24 + 3(3a + b) < 0 \end{cases}$.

Hỏi phương trình $2.f(x).f''(x) = [f'(x)]^2$ có bao nhiêu nghiệm?

Lời giải

Đáp án: 2

Ta có:
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \\ f(1) = a + b - 2 > 0 \\ f(3) = 9a + 3b + 24 = 24 + 3(3a + b) < 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$$

Suy ra $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $x_1 < 1 < x_2 < 3 < x_3$.

Mặt khác: $2.f(x).f''(x) = [f'(x)]^2 \Leftrightarrow 2.f(x).f''(x) - [f'(x)]^2 = 0$

Xét $g(x) = 2.f(x).f''(x) - [f'(x)]^2$

$\Rightarrow g'(x) = 2.f'(x).f''(x) + 2f(x).f'''(x) - 2f'(x).f''(x) = 2f(x).f'''(x) = 12f(x)$.

Khi đó $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 12f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \in (-\infty; 1) \\ x = x_2 \in (1; 3) \\ x = x_3 \in (3; +\infty) \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	$+\infty$			
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$							$+\infty$

The graph illustrates the function $g(x)$ and its critical points. A horizontal blue line represents $y = 0$. The function $g(x)$ is shown as a curve that starts at $+\infty$ as $x \rightarrow -\infty$, decreases to a local minimum at x_1 , increases to a local maximum at x_2 , decreases to a local minimum at x_3 , and then increases back to $+\infty$ as $x \rightarrow +\infty$. Arrows indicate the direction of the curve between the critical points.

Do $g(x_2) = 2.f(x_2).f''(x_2) - [f'(x_2)]^2 = -[f'(x_2)]^2 < 0$ nên $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Câu 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1; 2; -3), B(4; 0; 5), C(2; 0; 1)$ và $D(6; -2; 11)$. Gọi $M(x; y; z)$ là điểm sao cho hai biểu thức $P = 2MA^2 - 3MB^2 - MC^2 + MD^4$ và $Q = x + 2y + 2z - 24$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $x + 3y + z$

Lời giải

Đáp án: 8

Gọi $H(a; b; c)$ là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{HA} - 3\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HC} = \vec{0}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(1-a) - 3(4-a) - (2-a) = 0 \\ 2(2-b) - 3(-b) - (-b) = 0 \\ 2(-3-c) - 3(5-c) - (1-c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = -2 \\ c = 11 \end{cases} \Rightarrow H(6; -2; 11) \Rightarrow H \equiv D$$

Khi đó

$$\begin{aligned} P &= 2MA^2 - 3MB^2 - MC^2 + MD^4 = 2(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA})^2 - 3(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HB})^2 - (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HC})^2 + MD^4 \\ &= -2MH^2 + 2HA^2 - 3HB^2 - HC^2 + 2\overrightarrow{MH}(2\overrightarrow{HA} - 3\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HC}) + MH^4 \\ &= -2MH^2 + MH^4 + 2HA^2 - 3HB^2 - HC^2. \end{aligned}$$

Biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất khi $-2MH^2 + MH^4$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có $-2MH^2 + MH^4 = (MH^2 - 1)^2 - 1 \geq -1$. Suy ra $-2MH^2 + MH^4$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng -1 khi $MH = 1$. Hay $(x-6)^2 + (y+2)^2 + (z-11)^2 = 1$ (1)

Mặt khác, ta có $Q = x + 2y + 2z - 24 = (x-6) + 2(y+2) + 2(z-11)$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có:

$$\begin{aligned} Q^2 &= [1(x-6) + 2(y+2) + 2(z-11)]^2 \leq 9[(x-6)^2 + (y+2)^2 + (z-11)^2] = 9 \\ \Rightarrow -3 \leq Q \leq 3. \text{ Nên } Q_{\min} &= -3. \end{aligned}$$

$$\text{Khi : } \begin{cases} \frac{x-6}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-11}{2} \\ x+2y+2z-24=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{17}{3} \\ y = -\frac{8}{3} \\ z = \frac{31}{3} \end{cases} \text{ Suy ra } x+3y+z=8$$

Câu 3. Có bao nhiêu số nguyên y ($y \geq 3$) sao cho tồn tại đúng hai số thực x lớn hơn $\frac{1}{2021}$ thỏa mãn:

$$\left(e^{y^x - xy + x}\right)^{\ln y} = xy$$

Đáp án: 2026

Lời giải

$$\text{Đặt } u = y^x - xy + x \Leftrightarrow xy = y^x + x - u$$

$$\text{Phương trình } \left(e^{y^x - xy + x}\right)^{\ln y} = xy \text{ trở thành } y^u = y^x + x - u \Leftrightarrow y^u + u = y^x + x$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = y^t + t, t > 0. \text{ Ta có } f'(t) > 0, \forall t > 0$$

$$\text{Do đó } u = x \text{ hay } y^x - xy + x = x \Leftrightarrow x = y^{x-1} \Leftrightarrow \ln x = (x-1)\ln y \quad (2)$$

TH1: $x = 1$

Khi đó (2) $\Leftrightarrow 0 = 0$ (luôn đúng với mọi $y \geq 3$).

TH2: $x \neq 1$

$$\text{Khi đó } (2) \Leftrightarrow \ln y = \frac{\ln x}{x-1} = f(x)$$

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{1 - \frac{1}{x} - \ln x}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (loại)}$$

Bảng biến thiên:

x	$\frac{1}{2021}$	1	$+\infty$
$f(x)$	$f\left(\frac{1}{2021}\right)$	1	0
	$\searrow$	$\parallel$	$\searrow$
		1	

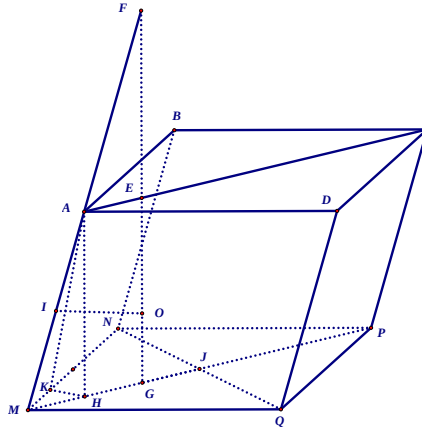
$$\text{Từ bảng biến thiên suy ra } \begin{cases} 0 < \ln y \leq f\left(\frac{1}{2021}\right) \\ \ln y \neq 1 \end{cases} \xrightarrow{y \in \mathbb{Z}, y \geq 3} y \in \{3; 4; \dots; 2028\}.$$

Vậy có 2026 giá trị nguyên y thỏa mãn điều kiện $y \geq 3$

Câu 4. Trong không gian, cho hình lăng trụ $ABCD.MNPQ$ có tất cả các cạnh bằng $\sqrt{3}$, đáy $ABCD$ là hình thoi và $BAD = 60^\circ$. Các mặt phẳng $(ADQM)$, $(ABNM)$ cùng tạo với đáy của lăng trụ góc α thỏa mãn $\tan \alpha = 2\sqrt{11}$ và hình chiếu vuông góc của điểm A lên mặt phẳng $(MNPQ)$ nằm bên trong hình thoi này. Gọi O là điểm cách đều bốn đỉnh tứ diện $AMNQ$. Biết thể tích khối chóp $O.ABM$ có giá trị bằng V . $V^2 = \frac{a}{b}$. a, b là số tự nhiên, phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Tìm $a + b$.

Đáp số: 731

Lời giải



+) Vì các mặt phẳng $(ADQM)$, $(ABNM)$ cùng tạo với đáy của lăng trụ góc α này nên nếu gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(MNPQ)$ thì $H \in MP$.

+) Kẻ $HK \perp MN$ suy ra góc $((ABNM); (MNPQ)) = \alpha$.

+) Trong tam giác vuông KHM ta có $MH = \frac{HK}{\sin KMH} = \frac{HK}{\sin 30^\circ} = 2HK$.

+) Trong tam giác vuông HAK ta có $AH = HK \cdot \tan \alpha = HK \cdot 2\sqrt{11}$.

+) Trong tam giác vuông HAM ta có $AM^2 = MH^2 + AH^2 \Leftrightarrow 3a^2 = 4HK^2 + 44HK^2$

$$\Rightarrow HK = \frac{a}{4}; AH = \frac{a\sqrt{11}}{2}.$$

+) Gọi G là tâm của tam giác đều MNQ , kẻ $EG \parallel AH$ ($E \in AC$) như hình vẽ, khi đó EG là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác MNQ .

Trong mặt phẳng chứa AM, EG , kẻ trung trực của AM cắt EG tại O thì O là điểm cách đều các đỉnh tứ diện $AMNQ$.

+) Tam giác đều MNQ có $MJ = \frac{MN\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{2}, MH = \frac{a}{2}, MG = a$.

+) Đặt $OG = x, x > 0, EG = AH = \frac{a\sqrt{11}}{2}$

Khi đó ta có $OM^2 = OA^2 \Leftrightarrow OG^2 + MG^2 = AE^2 + OE^2 \Leftrightarrow x^2 + MG^2 = HG^2 + (GE - x)^2$

$$\Leftrightarrow x^2 + a^2 = \frac{a^2}{4} + \left(\frac{a\sqrt{11}}{2} - x \right)^2 \Rightarrow x = \frac{2a}{\sqrt{11}}.$$

+) Gọi $F = AM \cap EG$, ta có: $\frac{FE}{FG} = \frac{AE}{MG} = \frac{1}{2}$.

$$\text{Mà } \frac{OG}{EG} = \frac{\frac{2a}{\sqrt{11}}}{\frac{a\sqrt{11}}{2}} = \frac{4}{11} \text{ nên: } \frac{FO}{FE} = \frac{OE + FE}{FE} = \frac{\frac{7}{11}FE + FE}{FE} = \frac{18}{11}.$$

$$\begin{aligned} V_{O.ABNM} &= \frac{18}{11} V_{E.ABNM} = \frac{18}{11} \cdot \frac{1}{6} V_{C.ABNM} = \frac{18}{11} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} V_{ABCD.MNPQ} \\ &= \frac{1}{11} \cdot AH \cdot S_{MNPQ} = \frac{1}{11} \cdot \frac{\sqrt{11}}{2} \cdot 2 \cdot \frac{(\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{33}}{44}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } V_{O.ABM} = \frac{1}{2} V_{O.ABNM} = \frac{3\sqrt{33}}{88} \rightarrow V^2 = \frac{27}{704} = \frac{a}{b} \rightarrow a + b = 731.$$

Câu 5. Chọn ngẫu nhiên 3 số a, b, c trong tập hợp $S = \{1; 2; \dots; 26\}$. Biết xác suất để 3 số chọn ra thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2$ chia hết cho 5 bằng $\frac{m}{n}$ với $m, n \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản.

Tính giá trị biểu thức $T = 2m + n$.

Lời giải

Đáp án: 93

Gọi A là tập hợp các phần tử thuộc S mà chia hết cho 5, A có 5 phần tử.

B là tập hợp các phần tử thuộc S mà chia cho 5 dư 1 hoặc dư 4, B có 11 phần tử.

C là tập hợp các phần tử thuộc S mà chia cho 5 dư 2 hoặc dư 3, C có 10 phần tử.

Ta có nhận xét

+ Với $k \in A$ thì k^2 chia hết cho 5.

+ Với $k \in B$ thì k^2 chia cho 5 dư 1.

+ Với $k \in C$ thì k^2 chia cho 5 dư 4.

Số phần tử của không gian mẫu là C_{26}^3 .

Để chọn được 3 số thỏa mãn bài toán, ta có hai trường hợp

+ Trường hợp: 3 số được chọn đều thuộc A , có C_5^3 cách chọn.

+ Trường hợp: 3 số được chọn có mỗi số thuộc mỗi tập A, B, C , có $C_5^1 \cdot C_{11}^1 \cdot C_{10}^1$ cách chọn.

Suy ra số phần tử của biến cố là $C_5^3 + C_5^1 \cdot C_{10}^1 \cdot C_{11}^1$.

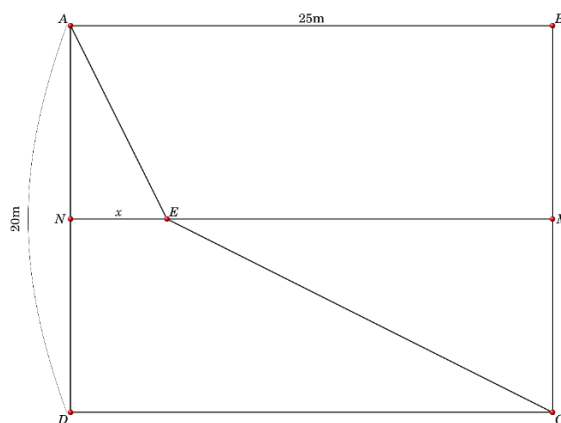
Xác suất của biến cố là $\frac{C_5^3 + C_5^1 \cdot C_{10}^1 \cdot C_{11}^1}{C_{26}^3} = \frac{14}{65} = \frac{m}{n}$. Suy ra $2m + n = 93$.

Câu 6.

Một mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB = 25\text{m}$, chiều rộng $AD = 20\text{m}$ được chia thành hai phần bằng nhau bởi vạch chắn MN (M, N lần lượt là trung điểm BC và AD). Một đội xây dựng làm một con đường đi từ A đến C qua vạch chắn MN , biết khi làm đường trên miền $ABMN$ mỗi giờ làm được 15m và khi làm trong miền $CDNM$ mỗi giờ làm được 30m. Do tính cấp thiết cần cần có của con đường nên đội xây dựng đã hoàn thành con đường trong một thời gian ngắn nhất. Hỏi sau bao nhiêu phút đội xây dựng làm được con đường đi từ A đến C . (làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

Đáp số: 89



Do cần thời gian xây là ngắn nhất nên con đường làm trên mỗi miền phải là những đường thẳng. Gọi AE và EC lần lượt là đoạn đường cần làm. Đặt $NE = x(\text{m})$.

$\Rightarrow EM = 25 - x(\text{m})$. Ta có điều kiện: $0 < x < 25$

$$\text{Ta được } \begin{cases} AE = \sqrt{AN^2 + EN^2} = \sqrt{100 + x^2} \\ EC = \sqrt{MC^2 + EM^2} = \sqrt{100 + (25 - x)^2} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Thời gian để làm đoạn đường từ A đến C là:

$$t(x) = \frac{AE}{15} + \frac{EC}{30} = \frac{\sqrt{100 + x^2}}{15} + \frac{\sqrt{(25 - x)^2 + 100}}{30} \text{ (h)}$$

$$\Rightarrow t'(x) = \frac{x}{15\sqrt{100 + x^2}} - \frac{25 - x}{30\sqrt{(25 - x)^2 + 100}}$$

$$\text{Xét } t'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{15\sqrt{100+x^2}} - \frac{25-x}{30\sqrt{(25-x)^2+100}} = 0$$

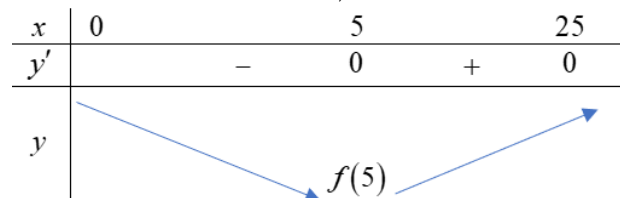
$$\Leftrightarrow 2x\sqrt{(25-x)^2+100} = (25-x)\sqrt{100+x^2} \Leftrightarrow 4x^2\left((25-x)^2+100\right) = (25-x)^2(100+x^2)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2(25-x)^2 + 400x^2 - 100(25-x)^2 - (25-x)^2x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(25-x)^2(x^2-25) + x^2(20^2 - (25-x)^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)\left(4(25-x)^2(x+5) + x^2(45-x)\right) = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

$$\text{Vì } 0 < x < 25 \text{ nên } \left(4(25-x)^2(x+5) + x^2(45-x)\right) > 0$$



$f(5) = \frac{2\sqrt{5}}{3}$. Vậy sau $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ (giờ) hay $\frac{2\sqrt{5}}{3} \cdot 60 \approx 89$ (phút) thì đội công nhân làm xong con đường.

.....**HẾT**.....