|  |  |
| --- | --- |
| TRƯỜNG THPT CHU VĂN AN  HÀ NỘI  **(ĐỀ THI ĐỀ XUẤT)**  *Đề thi gồm có 01 trang* | **ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI**  **KHU VỰC DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ**  **LẦN THỨ XIII - NĂM 2023**  **MÔN THI: TOÁN – LỚP 10**  *Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề* |

**Câu 1 (*4,0 điểm*).** Tìm tất cả các hàm  có tập xác định và tập giá trị đều là đoạn  thỏa mãn tất cả các điều kiện sau:

***i.***  với mọi 

***ii.*** với mọi 

**Câu 2 (*4,0 điểm*).**  Xét các số thực  thoả mãn điều kiện 

Chứng minh rằng 

**Câu 3 (*4,0 điểm*).** Cho tam giác *ABC* không là tam giác cân. Gọi  lần lượt là trực tâm và trung điểm của các cạnh  của tam giác *ABC.* Các đường thẳng lần lượt qua  và vuông góc với  cắt các đường thẳng  lần lượt tại  Chứng minh rằng ba điểm  thẳng hàng.

**Câu 4 (*4,0 điểm*).** Tìm các số nguyên tố  thỏa mãn phương trình



**Câu 5** **(*4,0 điểm*).** Trên mặt phẳng cho 2023 điểm phân biệt, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Gọi *S* là tập các đoạn thẳng được nối từ hai điểm nào đó trong 2023 nói trên. Một đoạn thẳng trong tập *S* được gọi là “*độc lập*” khi đoạn thẳng đó không có điểm chung với bất kì đoạn thẳng nào trong *S* (trừ điểm chung là đầu mút). Tìm số đoạn thẳng “*độc lập*” lớn nhất có thể có.

**------Hết ------**

*Lưu ý: - Thí sinh không sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay*

*- Giám thị không giải thích gì thêm.*

*Họ và tên học sinh: ……………………………………… Số báo danh: …………………..*

*Họ và tên, chữ ký của giám thị: ……………………………………… ……………………*

|  |  |
| --- | --- |
| **TRƯỜNG THPT CHU VĂN AN**  **HÀ NỘI**  ĐÁP ÁN ĐỀ ĐỀ XUẤT | **ĐÁP ÁN ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI**  **KHU VỰC DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ**  **LẦN THỨ XIII - NĂM 2023**  **MÔN THI: TOÁN – LỚP 10** |

**Câu 1 (*4,0 điểm*).** Tìm tất cả các hàm  có tập xác định và tập giá trị đều là đoạn  thỏa mãn tất cả các điều kiện sau:

***i.***  với mọi 

***ii.*** với mọi 

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu** | **ĐÁP ÁN** | **ĐIỂM** |
| **1.** |  | **4,0** |
| **1** | ***Bổ đề:*** Với mọi  và với mọi số tự nhiên *n* khác 0, ta luôn có:  ***i1.***  với mọi  ***i2.***  - Thật vậy, bổ đề đúng với  - Giả sử bổ đề đúng với *n* = *k*. Nghĩa là  ***i.***  với mọi  ***ii.*** | **1,0** |
| Đặt  ta có    và  Do đó, bổ đề đúng với *n* = *k* + 1. Vậy bổ đề được chứng minh. | **1,0** |
| Giả sử tồn tại  để  thì  với *n* đủ lớn. | **1,0** |
| Do đó, với mọi | **1,0** |

**Câu 2 (*4,0 điểm*).**  Xét các số thực  thoả mãn điều kiện 

Chứng minh rằng 

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu** | **ĐÁP ÁN** | **ĐIỂM** |
| **2** |  | **4,0 đ** |
|  | Xét tam giác đều *ABC* có cạnh bằng 2.    Trên các cạnh *AB*, *BC*, *CA* lần lượt lấy các điểm *M*, *N*, *P* không trùng với *A*, *B*, *C* sao cho  Như vậy | **1,0** |
| Khi đó, | **1,0** |
| Nghĩa là, | **1,0** |
|  | **1,0** |

**Câu 3 (*4,0 điểm*).** Cho tam giác *ABC* không là tam giác cân. Gọi  lần lượt là trực tâm và trung điểm của các cạnh  của tam giác *ABC.* Các đường thẳng lần lượt qua  và vuông góc với  cắt các đường thẳng  lần lượt tại  Chứng minh rằng ba điểm  thẳng hàng.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu** | **ĐÁP ÁN** | **ĐIỂM** |
| **3** |  | **4,0** |
|  | Gọi *M*, *N*, *P* lần lượt là chân các đường cao hạ từ các đỉnh  của tam giác *ABC*. Do tam giác *ABC* không là tam giác cân nên  Qua *H* kẻ tia *Hx* song song với *BC* (*như hình vẽ*); ta có chùm  là chùm điều hòa. | **1,0** |
| Xét phép quay  biến chùm  thành một chùm với các tia tương ứng song song với các tia của chùm  và chùm đó cũng là chùm điều hòa, và ta có | **1,0** |
| Tương tự, ta cũng có | **1,0** |
| Hơn nữa, do *AM*, *BN*, *CP* đồng quy tại *H* nên    Áp dụng định lý Menelaus, suy ra ba điểm  thẳng hàng. | **1,0** |

**Câu 4 (*4,0 điểm*).** Tìm các số nguyên tố  thỏa mãn phương trình



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu** | **ĐÁP ÁN** | **ĐIỂM** |
| **4** |  | **4,0** |
|  | Nhận xét  Số các số *m* thỏa mãn điều kiện trên là | **1,0** |
| Vậy, phương trình đã cho tương đương với  trong đó | **1,0** |
| Do  có cùng tính chẵn, lẻ với *k* nên nếu *x* là số nguyên tố lẻ thì  là một số chẵn lớn hơn 2 nên y không là số nguyên tố. | **1,0** |
| Do đó chỉ có thể là  suy ra | **1,0** |

**Câu 5** **(*4,0 điểm*).** Trên mặt phẳng cho 2023 điểm phân biệt, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Gọi *S* là tập các đoạn thẳng được nối từ hai điểm nào đó trong 2023 nói trên. Một đoạn thẳng trong tập *S* được gọi là “*độc lập*” khi đoạn thẳng đó không có điểm chung với bất kì đoạn thẳng nào trong *S* (trừ điểm chung là đầu mút). Tìm số đoạn thẳng “*độc lập*” lớn nhất có thể có.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu** | **ĐÁP ÁN** | **ĐIỂM** |
|  |  | **4,0 đ** |
|  | Xét một đa giác lồi *H* có *k* đỉnh (với ) được lấy từ 2023 điểm đã cho và chứa tất cả các điểm còn lại.  Ta thấy rằng, khi số đoạn thẳng “*độc lập*” nhiều nhất thì đa giác *H* sẽ được chia thành các tam giác nhỏ không có điểm trong chung. | **1,0** |
| Số tam giác nhỏ nói trên bằng | **1,0** |
| Vậy số đoạn thẳng “*độc lập*” vẽ được bằng | **1,0** |
| Do  nên  Vậy số đoạn thẳng “*độc lập*” nhiều nhất là 6063 đạt được khi đa giác lồi là một tam giác. | **1,0** |