

PHẦN E. TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1.

Trong 5 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình

$s(t) = -t^3 + 6t^2 + t + 5$ trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu trong 5 giây đầu tiên đó?

Trả lời:.....

Lời giải

Ta có: $v(t) = s'(t) = -3t^2 + 12t + 1$.

Nhận xét: $v(t)$ có đồ thị là một parabol nên trong $5s$ đầu tiên vận tốc tức thời của chất điểm đạt giá trị lớn nhất bằng 13 tại $t = 2s$.

Câu 2.

Một tên lửa bay vào không trung với quãng đường đi được là $s(t)(km)$ là hàm phụ thuộc theo biến t (giây) tuân theo biểu thức sau: $s(t) = e^{t^2+3} + 2te^{3t+1}(km)$. Hỏi vận tốc của tên lửa sau 1 giây là bao nhiêu (biết hàm biểu thị vận tốc là đạo hàm cấp một của hàm biểu thị quãng đường theo thời gian)?

Trả lời:.....

Lời giải

$$v(t) = s'(t) = 2te^{t^2+3} + 2e^{3t+1} + 6te^{3t+1} \Rightarrow v(1) = 2e^4 + 2e^4 + 6e^4 = 10e^4 (km/s)$$

Câu 3.

Một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ độ cao $2m$ với vận tốc ban đầu là $24,5m/s$. Trong Vật lý, ta biết rằng khi bỏ qua sức cản của không khí thì độ cao h (mét) của vật sau t (giây) được cho bởi công thức $h(t) = 2 + 24,5t - 4,9t^2$. Hỏi sau bao nhiêu giây thì vật đạt độ cao lớn nhất?

Trả lời:.....

Lời giải

Xét hàm số: $h(t) = 2 + 24,5t - 4,9t^2$.

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Ta có: $h'(t) = -9,8t + 24,5; h'(t) = 0 \Leftrightarrow -9,8t + 24,5 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2}$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$h'(t)$	+	0	-
$h(t)$	$-\infty$	$\frac{261}{8}$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta có:

Hàm số đạt cực đại tại $t = \frac{5}{2}$

Vậy thời điểm vật đạt độ cao lớn nhất là $t = \frac{5}{2}$ giây

Câu 4. Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số

$f(t) = \frac{5000}{1 + 5e^{-t}}, t \geq 0$, trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới.

Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất?

Trả lời:.....

Lời giải

$$f'(t) = \frac{-5000(1 + 5e^{-t})'}{(1 + 5e^{-t})^2} = \frac{25000e^{-t}}{(1 + 5e^{-t})^2}$$

Ta có:

Tốc độ bán hàng là lớn nhất khi $f'(t)$ lớn nhất.

$$h(t) = \frac{25000e^{-t}}{(1 + 5e^{-t})^2}$$

Đặt

$$h'(t) = \frac{-25000e^{-t}(1 + 5e^{-t})^2 - 2(-5e^{-t})(1 + 5e^{-t}) \cdot 25000e^{-t}}{(1 + 5e^{-t})^4}$$

$$= \frac{-25000e^{-t}(1 + 5e^{-t})(1 + 5e^{-t} - 10e^{-t})}{(1 + 5e^{-t})^4} = \frac{-25000e^{-t}(1 - 5e^{-t})}{(1 + 5e^{-t})^3}$$

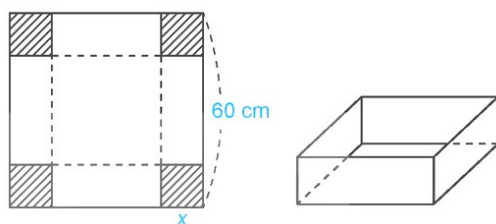
$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{-25000e^{-t}(1 - 5e^{-t})}{(1 + 5e^{-t})^3} = 0 \Leftrightarrow 1 - 5e^{-t} = 0 \Leftrightarrow e^{-t} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow t = \ln 5 (tm)$$

Ta có bảng biến thiên với $t \in [0; +\infty)$:

t	0	$\ln 5$	$+\infty$
$h'(t)$	+	0	-
$h(t)$	$\frac{6250}{9}$	1250	0

Vậy sau khi phát hành khoảng $\ln 5 \approx 1,6$ năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất.

- Câu 5.** Từ một tấm bìa carton hình vuông có độ dài cạnh bằng 60 cm , người ta cắt bốn hình vuông bằng nhau ở bốn góc rồi gấp thành một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp. Tính cạnh của các hình vuông bị cắt sao cho thể tích của chiếc hộp là lớn nhất.



Trả lời:.....

Lời giải

Gọi $x(\text{cm})$ là độ dài cạnh của các hình vuông nhỏ được cắt ở bốn góc của tấm bìa. Điều kiện: $0 < x < 30$. Khi cắt bỏ bốn hình vuông nhỏ có cạnh $x(\text{cm})$ ở bốn góc và gấp lên thì ta được một chiếc hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông với độ dài cạnh bằng $(60 - 2x)(\text{cm})$ và chiều cao bằng $x(\text{cm})$. Thể tích của chiếc hộp này là

$$V(x) = (60 - 2x)^2 \cdot x = 4x^3 - 240x^2 + 3600x (\text{cm}^3)$$

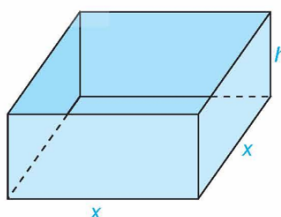
Ta có: $V'(x) = 12x^2 - 480x + 3600$; $V'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 40x + 300 = 0 \Leftrightarrow x = 10$ (thỏa mãn điều kiện) hoặc $x = 30$ (loại).

Lập bảng biến thiên:

x	0	10	30
$V'(x)$		+	-
$V(x)$	0	16 000	0

Vậy để thể tích của chiếc hộp là lớn nhất thì độ dài cạnh của các hình vuông nhỏ phải cắt là 10 cm .

- Câu 6.** Một nhà sản xuất muốn thiết kế một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông và diện tích bề mặt bằng 108 cm^2 như Hình.



Biết khi $x = x_0; h = h_0$ thì thể tích của hộp là lớn nhất. Khi đó $x_0 + h_0$ bằng?

Trả lời:.....

Lời giải

Hình hộp trên có độ dài cạnh đáy là $x(\text{cm}, x > 0)$ và chiều cao là $h(\text{cm}, h > 0)$

Diện tích bề mặt của hình hộp là 108 cm^2 nên $x^2 + 4xh = 108 \Rightarrow h = \frac{108 - x^2}{4x} (\text{cm})$

Thể tích của hình hộp là: $V = x^2 \cdot h = x^2 \cdot \frac{108 - x^2}{4x} = \frac{108x - x^3}{4} (\text{cm}^3)$

Ta có: $V' = \frac{-3x^2 + 108}{4}, V' = 0 \Leftrightarrow x = 6$ (do $x > 0$)

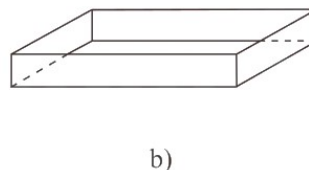
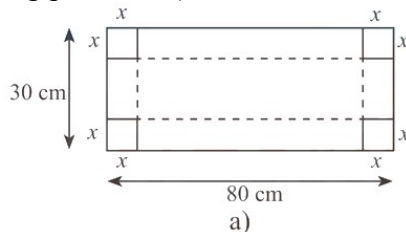
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-6	0	6	$+\infty$	
V'		$-$	0	$+$	0	$-$
V	$+\infty$		-108		108	$-\infty$

Do đó, thể tích của hình hộp là lớn nhất khi độ dài cạnh đáy $x = 6\text{ cm}$

Khi đó, chiều cao của hình hộp là: $\frac{108 - 6^2}{4 \cdot 6} = 3(\text{cm})$.

Câu 7. Từ một tấm bìa hình chữ nhật có chiều rộng 30 cm và chiều dài 80 cm (Hình a), người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông có cạnh $x(\text{cm})$ với $5 \leq x \leq 10$ và gấp lại để tạo thành chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không nắp như Hình b, tìm x để thể tích chiếc hộp là lớn nhất (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Trả lời:.....

Lời giải

Thể tích chiếc hộp là: $V(x) = x(30 - 2x)(80 - 2x) = 2400x - 220x^2 + 4x^3$ với $5 \leq x \leq 10$.

Ta có: $V'(x) = 12x^2 - 440x + 2400$;

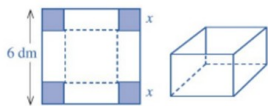
$V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{20}{3}$ hoặc $x = 30$ (loại vì không thuộc $[5; 10]$);

$V(5) = 7000; V\left(\frac{20}{3}\right) = \frac{200000}{27}; V(10) = 6000$.
17

Do đó $\max_{[5; 10]} V(x) = \frac{200000}{27}$ khi $x = \frac{20}{3}$.

Vậy để thể tích chiếc hộp là lớn nhất thì $x = \frac{20}{3}\text{ cm}$.

Câu 8. Cho một tấm nhôm có dạng hình vuông cạnh 6 dm . Bác Ánh cắt ở bốn góc bốn hình vuông cùng có độ dài bằng $x(\text{dm})$, rồi gấp tấm nhôm lại như Hình để được một cái hộp có dạng khối hộp chữ nhật không có nắp. Gọi V là thể tích của khối hộp đó tính theo x .



Tìm $x(dm)$ để khối hộp tạo thành có thể tích lớn nhất.

Trả lời:.....

Lời giải

Ta thấy độ dài $x(dm)$ của cạnh hình vuông bị cắt phải thỏa mãn điều kiện $0 < x < 3$.

Thể tích của khối hộp là $V(x) = x(6 - 2x)^2$ với $0 < x < 3$.

Ta phải tìm $x_0 \in (0; 3)$ sao cho $V(x_0)$ có giá trị lớn nhất.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } V'(x) &= (6 - 2x)^2 - 4x(6 - 2x) \\ &= (6 - 2x)(6 - 6x) = 12(3 - x)(1 - x). \end{aligned}$$

Trên khoảng $(0; 3)$, $V'(x) = 0$ khi $x = 1$.

Bảng biến thiên của hàm số $V(x)$ như sau:

x	0	1	3
$V'(x)$		+	0
$V(x)$	0	16	0

Căn cứ bảng biến thiên, ta thấy: Trên khoảng $(0; 3)$, hàm số $V(x)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 16 tại $x = 1$.

Vậy để khối hộp tạo thành có thể tích lớn nhất thì $x = 1$ (dm).

Câu 9. Trong một thí nghiệm y học, người ta cấy 1000 vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định được số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức:

$N(t) = 1000 + \frac{100t}{100 + t^2}$ (con), trong đó t là thời gian tính bằng giây. Tính số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng.

Trả lời:.....

Lời giải

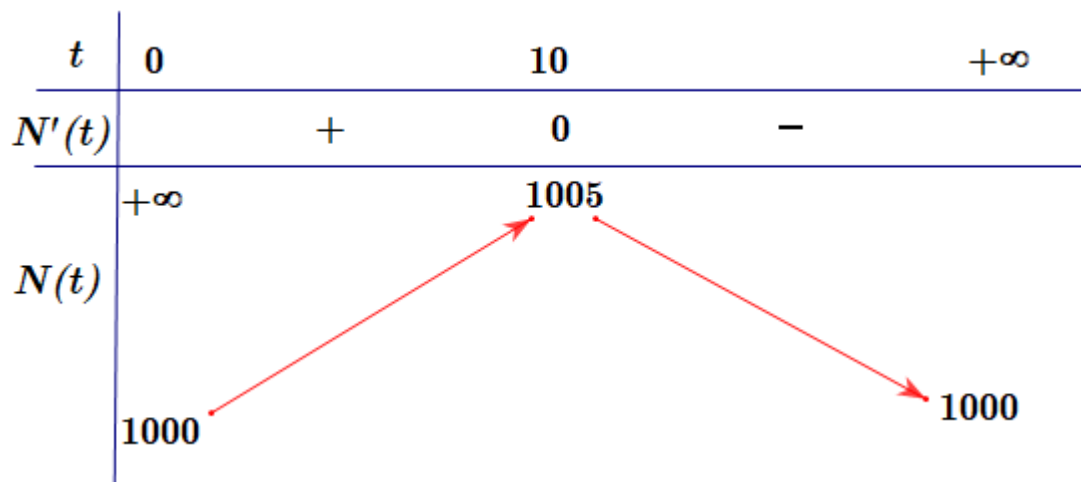
Xét hàm số $N(t) = 1000 + \frac{100t}{100 + t^2}$ ($t > 0$).

$$N'(t) = \frac{100 \cdot (100 + t^2) - 100t \cdot 2t}{(100 + t^2)^2} = \frac{100 \cdot (100 - t^2)}{(100 + t^2)^2}$$

Ta có:

Khi đó, với $t > 0$, $N'(t) = 0 \Leftrightarrow 100 - t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 100 \Leftrightarrow t = 10$.

Bảng biến thiên của hàm số $N(t)$ như sau:



Căn cứ bảng biến thiên, ta thấy: Trên khoảng $(0; +\infty)$, hàm số $N(t)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 1005 tại $t=10$.

Vậy số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng là 1005 con.

- Câu 10.** Ho ép khí quản co lại, ảnh hưởng đến tốc độ của không khí đi vào khí quản. Tốc độ của không khí đi vào khí quản khi ho được cho bởi công thức $V = k(R - r)r^2$; $0 \leq r < R$, trong đó k là hằng số, R là bán kính bình thường của khí quản, r là bán kính khí quản khi ho. Hỏi bán kính của khí quản khi ho bằng bao nhiêu so với bán kính khí quản lúc bình thường thì tốc độ của không khí đi vào khí quản là lớn nhất?

Trả lời:.....

Lời giải

Ta có: $V' = 2kRr - 3kr^2$.

Nhận xét $V' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r = 0 \\ r = \frac{2R}{3} \end{cases}$.

Ta có $f(0) = 0; f\left(\frac{2R}{3}\right) = \frac{4kR^3}{27}$

Vậy bán kính của khí quản khi ho bằng $\frac{2}{3}$ bán kính khí quản lúc bình thường thì tốc độ không khí đi vào là lớn nhất.

- Câu 11.** Người quản lý của một khu chung cư có 100 căn hộ cho thuê nhận thấy rằng tất cả các căn hộ sẽ có người thuê nếu giá thuê một căn hộ là 8 triệu đồng một tháng. Một cuộc khảo sát thị trường cho thấy rằng, trung bình cứ mỗi lần tăng giá thuê căn hộ thêm 100 nghìn đồng thì sẽ có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Người quản lý nên đặt giá thuê mỗi căn hộ là bao nhiêu để doanh thu là lớn nhất?

Trả lời:.....

Lời giải

Gọi x là số lần tăng giá 100 nghìn đồng ($x > 0$).

Khi đó, số căn được cho thuê là: $100 - x$ (căn)

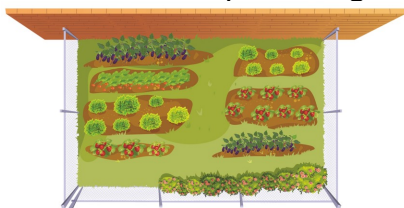
Tổng số tiền thu được trong một tháng là:

$$(100 - x)(8000000 + 100000x) = 100000(100 - x)(80 + x) = 100000(-x^2 + 20x + 8000) \\ = 100000[-(x - 10)^2 + 8100] \leq 810000000, \forall x > 0$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 10$ (thỏa mãn)

Vậy để thu được doanh thu là lớn nhất thì người quản lí nên đặt giá thuê mỗi căn hộ là: $8000000 + 100000 \cdot 10 = 9000000$ (đồng).

- Câu 12.** Anh Nam có một mảnh đất rộng và muốn dành ra một khu đất hình chữ nhật có diện tích $200m^2$ để trồng vài loại cây mới. Anh dự kiến rào quanh ba cạnh của khu đất hình chữ nhật này bằng lưới thép, cạnh còn lại (chiều dài) sẽ tận dụng bức tường có sẵn (Hình). Do điều kiện địa lí, chiều rộng khu đất không vượt quá 15 m, hỏi chiều rộng của khu đất này bằng bao nhiêu để tổng chiều dài lưới thép cần dùng là ngắn nhất (nghĩa là chi phí rào lưới thép thấp nhất)?



Trả lời:.....

Lời giải

Gọi $x(m)$ là chiều rộng của khu đất hình chữ nhật cần rào.

Theo đề bài, ta có $0 < x \leq 15$.

Diện tích khu đất này là $200(m^2)$ nên chiều dài của khu đất là $\frac{200}{x}(m)$.

Tổng chiều dài lưới thép rào quanh khu đất là $L(x) = 2x + \frac{200}{x}(m)$.

Xét hàm số: $L(x) = 2x + \frac{200}{x}$, với $x \in (0; 15]$.

Ta có: $L'(x) = 2 - \frac{200}{x^2} = \frac{2x^2 - 200}{x^2}$;

$L'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$ (do $x > 0$).

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0^+} L(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2x + \frac{200}{x} \right) = +\infty$;

$L(10) = 40$;

$L(15) = \frac{130}{3}$.

Bảng biến thiên:

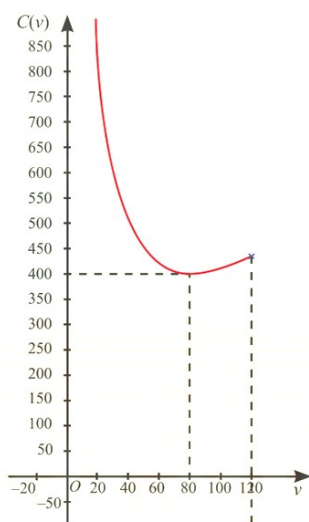
x	0	10	15
$L'(x)$	-	0	+
$L(x)$	$+\infty$	40	$\frac{130}{3}$

Dựa vào bảng biến thiên, chiều dài lưới thép ngắn nhất là $40m$ khi chiều rộng khu đất này là $x=10(m)$ (và chiều dài là $\frac{200}{10}=20(m)$).

Câu 13. Giả sử chi phí tiền xăng C (đồng) phụ thuộc tốc độ trung bình $v(km/h)$ theo công thức:

$$C(v) = \frac{16000}{v} + \frac{5}{2}v \quad (0 < v \leq 120)$$

Để biểu diễn trực quan sự thay đổi của $C(v)$ theo v , người ta đã vẽ đồ thị hàm số $C(v)$ như hình bên.



Tài xế xe tải lái xe với tốc độ trung bình là bao nhiêu để tiết kiệm tiền xăng nhất?

Trả lời:.....

Lời giải

Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $C(v)$:

- Tập xác định: $D=(0;120]$.

- Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

- Đạo hàm $C'(v) = -\frac{16000}{v^2} + \frac{5}{2} = \frac{5(v-80)(v+80)}{2v^2}$; $C'(v) = 0 \Leftrightarrow v = -80$ (loại) hoặc $v = 80$.

- Trên khoảng $(0;80)$, $C'(v) < 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng này.

- Trên khoảng $(80;120)$, $C'(v) > 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng này.

+ Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại $v=80, C_{CT} = C(80) = 400$.

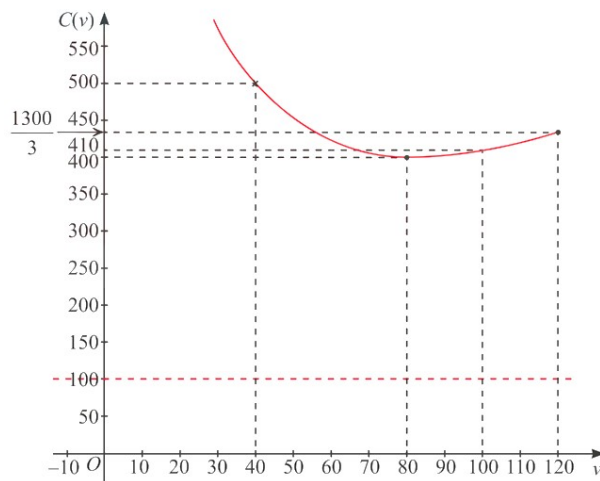
+ Giới hạn vô cực và tiệm cận: $\lim_{v \rightarrow 0^+} C(v) = \lim_{v \rightarrow 0^+} \left(\frac{16000}{v} + \frac{5}{2}v \right) = +\infty$ nên đường thẳng $v=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

+ Bảng biến thiên:

v	0	80	120	
$C'(v)$		-	0	+
$C(v)$	$+\infty$		400	$\frac{1300}{3}$

- Đồ thị:

Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu $(80; 400)$ và đi qua các điểm $(40; 500), (100; 410), \left(120; \frac{1300}{3}\right)$ như Hình.



Quan sát đồ thị hàm số, ta nhận thấy hàm số đạt GTNN khi $v=80$ và GTNN là 400.

Như vậy, để tiết kiệm tiền xăng nhất, tài xế nên chạy xe với tốc độ trung bình là 80 km/h.

Câu 14. Một người nông dân có 15000000 đồng để làm một hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông bao quanh hai khu đất trồng rau có dạng hai hình chữ nhật bằng nhau (Hình 35). Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60000 đồng/mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50000 đồng/mét, mặt giáp với bờ sông không phải rào. Tìm diện tích lớn nhất của hai khu đất thu được sau khi làm hàng rào.



Trả lời:.....

Lời giải

Gọi độ dài của hàng rào song song sông với bờ sông là $x(m)$ với $x > 0$

Gọi độ dài của mỗi hàng rào trong ba hàng rào song song nhau là $y(m)$ với $y > 0$

Diện tích đất mà bác nông dân rào được là: $xy(m^2)$

Tổng chi phí là 15.000.000 đồng nên ta có phương trình:

$$x60000 + 3y50000 = 15000000 \Rightarrow 6x + 15y = 1500$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương ta có:

$$6x + 15y \geq 2\sqrt{6x \cdot 5y} \Rightarrow 1500 \geq 2\sqrt{90xy} \Rightarrow xy \leq 6250$$

Vậy diện tích lớn nhất mà bác nông dân có thể tạo rào là $6250(m^2)$

- Câu 15.** Một công ty kinh doanh bất động sản có 20 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 triệu đồng/1 tháng thì tất cả các căn hộ đều có người thuê. Nhưng cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 200 nghìn đồng/1 tháng thì có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Hỏi công ty nên cho thuê mỗi căn hộ bao nhiêu tiền một tháng để tổng số tiền thu được là lớn nhất?

Trả lời:.....

Lời giải

Giả sử giá thuê mỗi căn hộ là (x) triệu đồng/1 tháng và số căn hộ cho thuê là (y) .

Khi đó, tổng số tiền thu được sẽ là (xy) . Theo đề bài, ta có: $y = 20 - 5(x - 2)$ (vì cứ mỗi lần tăng giá thuê mỗi căn hộ thêm 200 nghìn đồng/1 tháng thì có thêm một căn hộ bị bỏ trống).

Do đó, ta cần tìm giá trị của (x) sao cho hàm số $f(x) = x(20 - 5(x - 2))$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có: $f'(x) = 30 - 10x$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 30 - 10x = 0 \rightarrow x = 3$$

Cuối cùng, ta kiểm tra xem điểm cực này có phải là điểm cực đại hay không:

Xác định khoảng: $[-\infty, 3], [3, +\infty]$

Chọn $x_1 = 2 \rightarrow f(x) = 10$

Chọn $x_2 = 4 \rightarrow f(x) = -10$

Vì đạo hàm dương với mọi $x < 3$ là âm với mọi $x > 3 \rightarrow$ hàm số cực đại tại $x = 3$

Vì vậy, công ty nên cho thuê mỗi căn hộ với giá 3 triệu đồng/1 tháng để tổng số tiền thu được là lớn nhất.

- Câu 16.** Hàm cầu của một sản phẩm có dạng $P = \frac{80 - Q}{4}, 0 \leq Q \leq 80$, trong đó Q là số lượng sản phẩm và P là giá bán của mỗi sản phẩm. Doanh thu tối đa bằng bao nhiêu?

Trả lời:.....

Lời giải

Gọi R là tổng doanh thu. Ta có công thức Doanh thu = (giá bán) x (số lượng)

Từ đây ta có

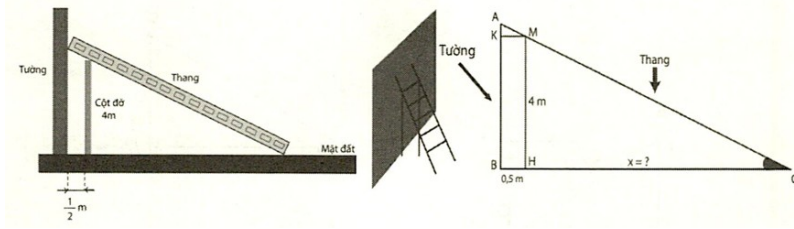
$$R = PQ = \frac{80 - Q}{4} \cdot Q = \frac{80Q - Q^2}{4} = R(Q), \text{ trong đó } 0 \leq Q \leq 80.$$

Đạo hàm $R'(Q) = 0 \Leftrightarrow \frac{80 - 2Q}{4} = 0 \Leftrightarrow Q = 40$.

Do đó, 40 là giá trị tới hạn duy nhất. Ta nhận thấy hàm R tăng trong $[0; 40)$ và R giảm trong $(40; 80]$. Hay $R(Q)$ đạt giá trị cực đại tại $Q = 40$. Khi đó doanh thu tối đa bằng

$$R(40) = \frac{80 \cdot 40 - 40^2}{4} = 400.$$

Câu 17. Tìm chiều dài bé nhất của cái thang để nó có thể tựa vào tường và mặt đất, ngang qua cột đỡ cao $4m$, song song và cách tường $0,5m$ kể từ góc của cột đỡ như hình vẽ.



Trả lời:.....

Lời giải

Đặt $HC = x > 0$. Suy ra $BC = x + 0,5$.

Áp dụng định lý Thales, ta có $\frac{HC}{BC} = \frac{MH}{AB} = \frac{x}{x + 0,5}$.

Vậy $AB = \frac{4(x + 0,5)}{x}$.

Do tam giác ABC vuông tại B nên suy ra $AC^2 = AB^2 + BC^2 = (x + 0,5)^2 + \frac{16(x + 0,5)^2}{x^2}$.

Ra rút ra $AC^2 = \frac{(x + 0,5)^2 (x^2 + 16)}{x^2}$.

Đặt $f(x) = \frac{x^4 + x^3 + \frac{65}{4}x^2 + 16x + 4}{x^2} (x > 0)$.

Bài toán trở thành tìm $\min f(x)$ với $x > 0$.

Ta có

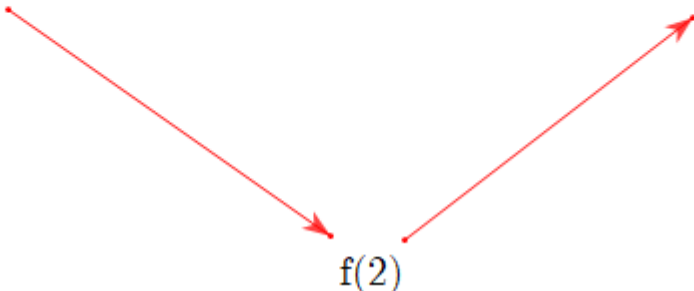
$$f'(x) = \frac{\left(4x^3 + 3x^2 + \frac{65}{2}x + 16\right)x^2 - 2x\left(x^4 + x^3 + \frac{65}{4}x^2 + 16x + 4\right)}{x^4}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{2x^4 + x^3 - 16x - 8}{x^3}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(2x+1)(x^2+2x+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 > 0 \\ x=-\frac{1}{2} < 0. \end{cases}$$

Vậy

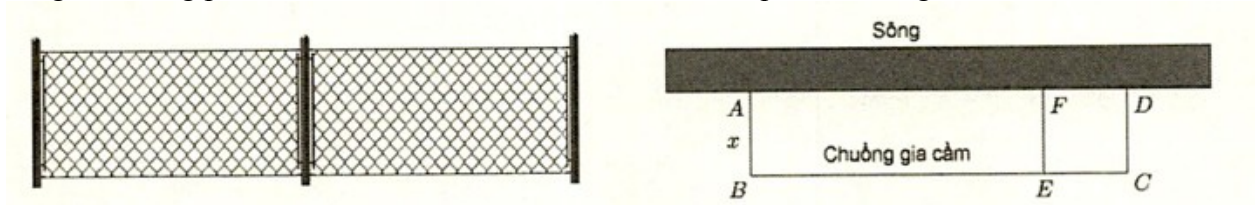
Lập bảng biến thiên, ta có

x	0	2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$				

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $\min_{x>0} f(x) = f(2) = \frac{125}{4}$.

Do đó, ta có $\min AC = \sqrt{\frac{125}{4}} = \frac{5\sqrt{5}}{2} \approx 5,5902$.

Câu 18. Một chủ trang trại nuôi gia cầm muốn rào thành 2 chuồng hình chữ nhật sát nhau và sát một con sông, một chuồng nuôi gà và một chuồng nuôi vịt. Biết rằng đã có sẵn $240m$ hàng rào và cạnh bờ sông thì không phải rào. Hỏi diện tích lớn nhất có thể bao quanh chuồng là bao nhiêu?



Trả lời:.....

Lời giải

Xét hình chữ nhật $ABCD$ có các cạnh phải rào AB, BC, CD, EF như hình vẽ. Đặt $AB = x (x > 0)$.

Khi đó ta có $BC = 240 - 3x > 0 \Rightarrow x < 80$.

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là $S = x(240 - 3x) = 240x - 3x^2$.

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ với $0 < x < 80$

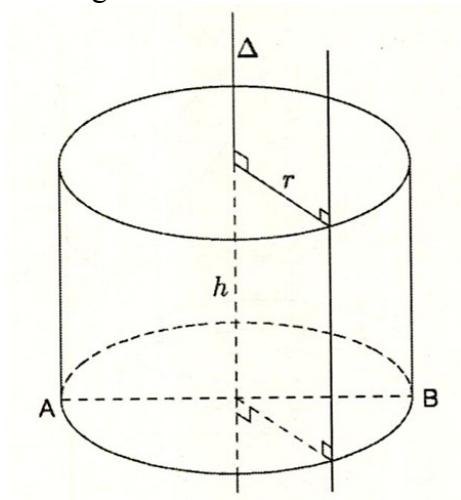
Xét $f(x) = 240x - 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 240 - 6x, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 40$.

Ta có $f''(x) = -6 < 0, \forall x \in (0; 80)$.

Do đó $\max S = \max_{x \in (0; 80)} f(x) = f(40) = 4800 \Leftrightarrow x = 40$.

Vậy diện tích lớn nhất có thể bao quanh là $4800 m^2$.

Câu 19. Giả sử bạn là chủ của một xưởng cơ khí vừa nhận được một đơn đặt hàng là thiết kế một bồn chứa nước hình trụ có nắp với dung tích 20 lít. Để tốn ít nguyên vật liệu nhất thì chiều cao bồn nước lúc đó bằng bao nhiêu?



Trả lời:.....

Lời giải

Gọi $r, h (r, h > 0)$ lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của khối trụ. Khi đó ta có

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi r^2}.$$

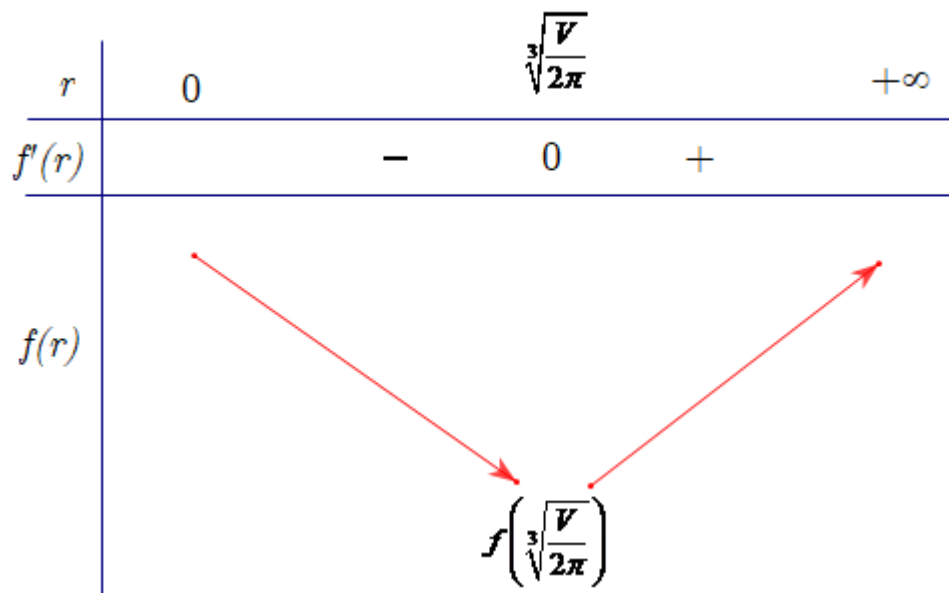
Để tốn ít nguyên vật liệu nhất, ta cần tìm r sao cho diện tích toàn phần của khối trụ nhỏ nhất.

Ta có
$$S_{\text{tp}} = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi \left(r^2 + \frac{V}{\pi r} \right)$$

Xét hàm số $f(r) = r^2 + \frac{V}{\pi r}$. Bài toán trở thành tìm $\min_{r > 0} f(r) = ?$

Ta có
$$f'(r) = 2r - \frac{V}{\pi r^2}, f'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \Rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}.$$

Lập bảng biến thiên, ta được

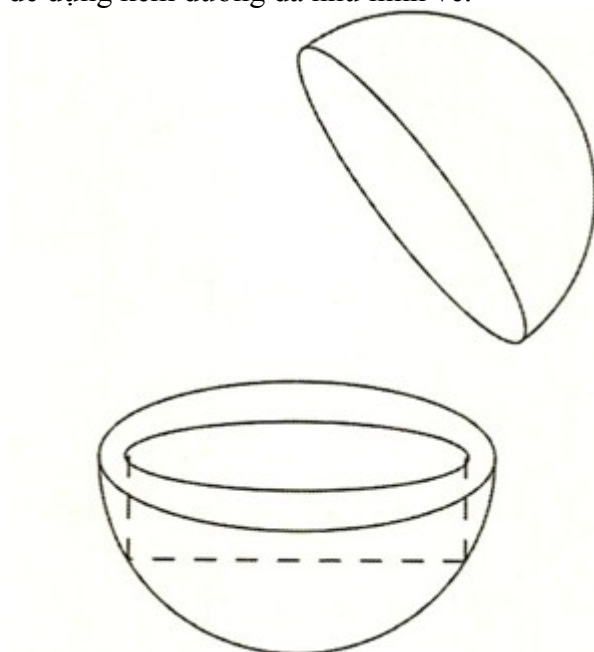


$$\min_{r>0} f(r) = f\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)$$

Từ bảng biến thiên, ta rút ra

Khi đó
$$h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 20}{\pi}} \approx 0,29m$$

Câu 20. Công ti mỹ phẩm chuẩn bị cho ra một mẫu sản phẩm dưỡng da mới mang tên Ngọc Trai với thiết kế là một khối cầu như viên ngọc trai khổng lồ, bên trong là một khối trụ nằm trong nửa khối cầu để đựng kem dưỡng da như hình vẽ.



Theo dữ kiện, nhà sản xuất dự định thiết kế khối cầu có bán kính là $R = 3\sqrt{3} \text{ cm}$. Tìm thể tích lớn nhất của khối trụ đựng kem sao cho thể tích thực ghi trên bìahộp là lớn nhất.

Trả lời:.....

Lời giải

Ta có $V_{\text{trụ}} = \pi r^2 h$. Theo giả thiết, ta có $r^2 = R^2 - h^2$.

Suy ra $V_{bru} = \pi r^2 h = \pi h (R^2 - h^2)$.

Xét hàm số $f(h) = h(R^2 - h^2), 0 < h < R$. Bài toán trở thành tìm $\max_{h \in (0, R)} f(h)$.

Đạo hàm $f'(h) = hR^2 - 3h^2, f'(h) = 0 \Leftrightarrow h = \frac{R}{\sqrt{3}} < R$

Lập bảng biến thiên, ta có

	R		
h	0	$\frac{R}{\sqrt{3}}$	R
$f'(h)$	$+$	0	$-$
$f(h)$	R $f\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right)$		

Từ bảng biến thiên, ta rút ra $\max_{h \in (0, R)} f(h) = f\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right)$. Khi đó

$$V_{bru} = \pi r^2 h = \pi h (R^2 - h^2) = \pi \frac{R}{\sqrt{3}} \left(R^2 - \frac{R^2}{3} \right) = \frac{2\pi R^3}{3\sqrt{3}} = 54\pi (cm^3) (R = 3\sqrt{3}).$$

Câu 21. Một con cá hồi bơi ngược dòng nước để vượt một khoảng cách là $300 km$. Vận tốc dòng nước là $6(km/h)$. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là $v(km/h)$ thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v) = cv^3 t$ (trong đó c là hằng số dương, E được tính bằng đơn vị Jun). Cá bơi ngược dòng quãng đường $300 km$ trên trong khoảng thời gian t với vận tốc bằng bao nhiêu để năng lượng tiêu hao là thấp nhất?

Trả lời:.....

Lời giải

Vận tốc khi cá bơi ngược dòng sẽ là $v - 6(km/h)$.

Thời gian để bơi quãng đường $300 km$ là $t = \frac{300}{v - 6}(h)$.

Năng lượng tiêu hao là $E(v) = 300c \frac{v^3}{v - 6}(J)$.

Do $c > 0 \Rightarrow E(v)_{\min} \Leftrightarrow \frac{v^3}{v-6} = (f(v))_{\min}$.

Với $v > 9$, ta có $f'(v) = \frac{3v^2(v-6) - v^3}{(v-6)^2} = \frac{2v^3 - 18v}{(v-6)^2}, f'(v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v=0 \\ v=9. \end{cases}$

Lập bảng biến thiên ta nhận $v=9$ (do $v > 6$).

Vậy để năng lượng tiêu hao là thấp nhất thì vận tốc là $9(km/h)$.

Câu 22. Thể tích V của $1kg$ nước ở nhiệt độ t (t nằm giữa $0^\circ C$ đến $30^\circ C$) được cho bởi công thức $V = 999,87 - 0,06426t + 0,0085043t^2 - 0,0000679t^3 (m^3)$.

Ở nhiệt độ bao nhiêu độ C thì nước có khối lượng riêng lớn nhất?

Trả lời:.....

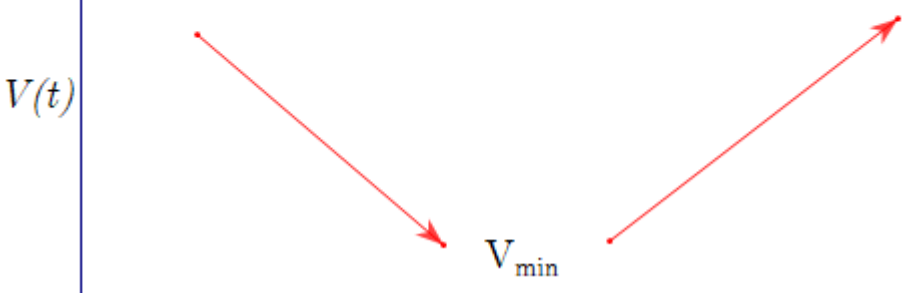
Lời giải

Ta có đạo hàm của thể tích

$$V'(t) = -0,06426 + 2 \cdot 0,0085043t - 3 \cdot 0,0000679t^2$$

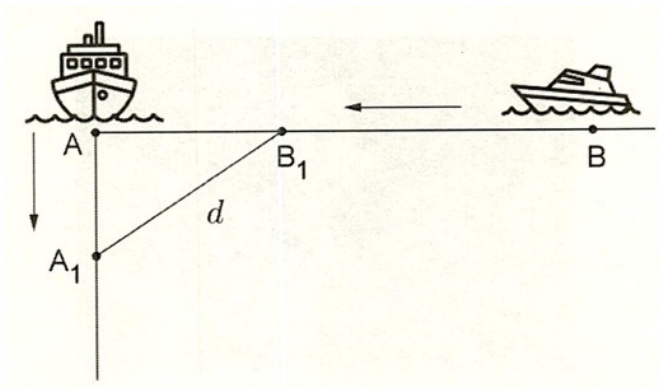
$$V'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \approx 79,53138 \notin (0; 30) \\ t \approx 3,9665. \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên

t	0	3,9665	30
$V'(t)$	-	0	+
$V(t)$			

Từ bảng biến thiên, khối lượng riêng lớn nhất của vật khi thể tích nhỏ nhất lúc vật có nhiệt độ xấp xỉ gần bằng $4^\circ C$.

Câu 23. Hai con tàu A và B đang ở cùng một vĩ tuyến và cách nhau 5 hải lí. Cả hai tàu đồng thời cùng khởi hành. Tàu A chạy về hướng Nam với 6 hải lí/giờ, còn tàu B chạy về vị trí hiện tại của tàu A với vận tốc 7 hải lí/giờ. Hỏi sau bao lâu thì khoảng cách giữa hai tàu là bé nhất?



Trả lời:.....

Lời giải

Tại thời điểm t , sau khi xuất phát, khoảng cách giữa hai tàu là d . Khi đó tàu A đang ở vị trí A_1 và tàu B đang ở vị trí B_1 như hình vẽ trên.

Ta có $d^2 = AB_1^2 = (5 - BB_1)^2 + AA_1^2 = (5 - 7t)^2 + (6t)^2$.

Quãng đường tàu B đi được là $BB_1 = v_B \cdot t = 7t$.

Quãng đường tàu A đi được là $AA_1 = v_A \cdot t = 6t$.

Vậy $d = \sqrt{85t^2 - 70t + 25}$.

Đặt $f(t) = \sqrt{85t^2 - 70t + 25}$ (với $t > 0$).

Bài toán trở thành tìm $\min_{t \in (0;5)} f(t)$.

Ta có $f'(t) = \frac{170t - 70}{2\sqrt{85t^2 - 70t + 25}}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{7}{17}$ (h).

Lập bảng biến thiên

		$\frac{7}{17}$	
t	0	$\frac{7}{17}$	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$		$\frac{6\sqrt{85}}{17}$	

Từ bảng biến thiên, ta có $\min_{x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)} f(t) = f\left(\frac{7}{17}\right) = \frac{6\sqrt{85}}{17} \approx 3,524$ (hải lí)

Câu 24. Một công ty đánh giá rằng sẽ bán được N lô hàng nếu chi hết số tiền là x (triệu đồng) vào việc quảng cáo. Biết rằng N và x liên hệ với nhau bằng biểu thức $N(x) = -x^2 + 30x + 6, 0 \leq x \leq 30$. Hãy tìm số lô hàng lớn nhất mà công ti có thể bán sau đợt quảng cáo?

Trả lời:.....

Lời giải

Ta có

$$N(x) = -x^2 + 30x + 6 \Rightarrow N'(x) = -2x + 30 \\ \Rightarrow N'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 15.$$

Đồng thời, ta cũng có

$$\begin{cases} N(0) = 6 \\ N(15) = 231 \Rightarrow \max_{x \in [0; 30]} N(x) = 231 \Leftrightarrow x = 15. \\ N(30) = 6 \end{cases}$$

Vậy nếu công ti dành 15 triệu cho việc quảng cáo thì công ti sẽ bán được nhiều nhất là 231 lô hàng.

Câu 25. Công ti truyền hình cáp Vista hiện có 100000 thuê bao. Mỗi thuê bao đang trả cước thuê bao 40\$/tháng. Một cuộc khảo sát cho thấy cứ mỗi lần giảm 0,25\$ cước thuê bao, công ti có thể có thêm 1000 thuê bao. Để doanh thu thu được là tối đa, công ti cần xác định mức cước thuê bao mỗi tháng là bao nhiêu?

Trả lời:.....

Lời giải

Gọi x là số lần giảm 0,25\$. Cước thuê bao hàng tháng lúc này là $40 - 0,25x$ với $0 \leq x \leq 160$ (do mức cước không thể âm), và số thuê bao mới là $1000x$. Do đó, tổng số thuê bao là $100000 + 1000x$. Hàm doanh thu được cho bởi

$R = (\text{số thuê bao}) \times (\text{cước mỗi thuê bao trả})$

hay

$$R = (100000 + 1000x)(40 - 0,25x) \\ = 1000(100 + x)(40 - 0,25x) \\ = 1000(4000 + 15x - 0,25x^2).$$

Đạo hàm $R' = 0$, ta được

$$R' = 1000(15 - 0,5x) = 0 \Leftrightarrow x = 30.$$

Vì tập xác định của R là khoảng đóng $[0; 160]$, nên R đạt cực đại tại $x = 30$ hoặc tại các điểm đầu mút của đoạn $[0; 160]$.

Ta có

$$R(0) = 1000(4000 + 15(0) - 0,25(0)^2) = 4000000$$

$$R(30) = 1000(4000 + 15(30) - 0,25(30)^2) = 4225000$$

$$R(160) = 1000(4000 + 15(160) - 0,25(160)^2) = 0$$

Vậy doanh thu tối đa khi $x = 30$. Điều này tương ứng với 30 lần giảm $0,25\$$, tức là cước thuê bao hàng tháng là $40\$ - 7,5\$ = 32,5\$$. Số thuê bao tại mức cước này là $100000 + 30.(1000) = 130000$.

Câu 26. Một bài báo trong tạp chí xã hội học phát biểu rằng nếu một chương trình chăm sóc sức khỏe đặc biệt cho người già được khởi xướng, thì t năm sau khi nó được khởi động, n ngàn người già có thể trực tiếp nhận được các phúc lợi, trong đó

$$n = \frac{t^3}{3} - 6t^2 + 32t \quad (0 \leq t \leq 12)$$

Với giá trị nào của t thì số người nhận phúc lợi tối đa là bao nhiêu?

Trả lời:.....

Lời giải

Đạo hàm $n'(t) = 0$, ta có
$$n'(t) = t^2 - 12t + 32 = 0 \Leftrightarrow (t - 4)(t - 8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = 8. \end{cases}$$

Vì tập xác định của n là một khoảng đóng $[0;12]$ nên n đạt cực đại tuyệt đối tại $t = 0, t = 4, t = 8$ hoặc $t = 12$:

$$n(0) = \frac{0^3}{3} - 6(0^2) + 32(0) = 0$$

$$n(4) = \frac{4^3}{3} - 6(4^2) + 32(4) = \frac{160}{3}$$

$$n(8) = \frac{8^3}{3} - 6(8^2) + 32(8) = \frac{128}{3}$$

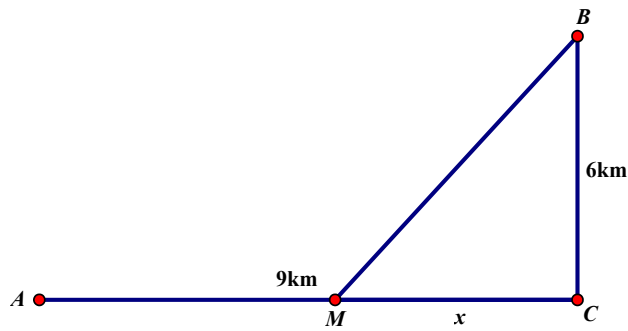
$$n(12) = \frac{12^3}{3} - 6(12^2) + 32(12) = \frac{288}{3} = 96$$

Do đó n đạt cực đại khi $t = 12$ (năm).

Câu 27. Một công ty muốn xây một đường ống dẫn từ một điểm A trên bờ biển đến một điểm B trên một hòn đảo. Giá để xây đường ống trên bờ là 50000 USD mỗi km và 130000 USD để xây mỗi km dưới nước. Gọi C là điểm trên bờ biển sao cho BC vuông góc với bờ biển, $BC = 6$ km, $AC = 9$ km. Gọi M là vị trí trên đoạn AC sao cho khi làm ống dẫn theo đường gấp khúc AMB thì chi phí ít nhất. Hỏi chi phí thấp nhất để hoàn thành việc xây dựng đường ống dẫn là bao nhiêu?

Trả lời:.....

Lời giải



- Đặt $CM = x$ (km), với $0 \leq x \leq 9$.

- Ta có: tổng chi phí để xây dựng đường ống dẫn theo đường gấp khúc AMB là:

$$T = 50000.(9 - x) + 130000.\sqrt{x^2 + 36} \text{ USD.}$$

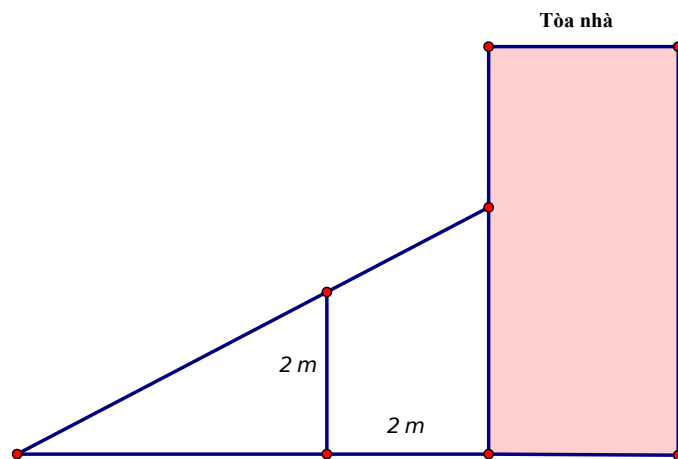
Xét hàm số $f(x) = 50000.(9 - x) + 130000.\sqrt{x^2 + 36}$ trên đoạn $[0; 9]$, ta có :

$$f'(x) = -5000 + \frac{13000x}{\sqrt{x^2 + 36}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}.$$

Lại có : $f(0) = 1230000$, $f\left(\frac{5}{2}\right) = 1170000$, $f(9) \approx 1406165$.

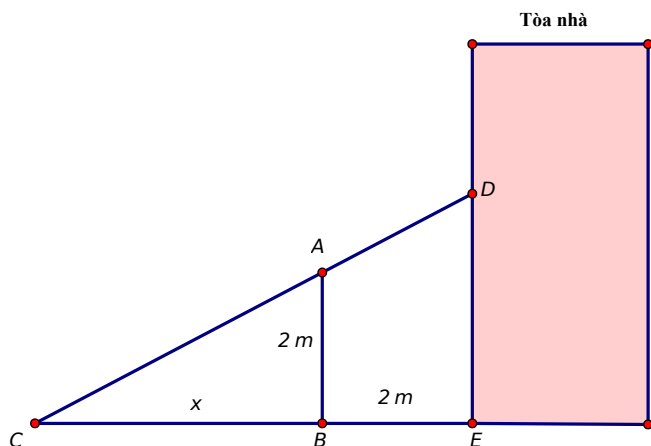
Vậy $T_{\min} = 1170000$ USD.

Câu 28. Một bức tường cao 2m nằm song song với tòa nhà và cách tòa nhà 2m. Người ta muốn chế tạo một chiếc thang bắc từ mặt đất bên ngoài bức tường, gác qua bức tường và chạm vào tòa nhà (xem hình vẽ). Hỏi chiều dài tối thiểu của thang bằng bao nhiêu mét ?



Trả lời:.....

Lời giải



Đặt $BC = x (x > 0)$. Ta cần tìm x để độ dài CD đạt GTNN.

Ta có $\frac{BC}{CE} = \frac{x}{x+2} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow CD = AC \frac{x+2}{x} = \sqrt{x^2+4} \cdot \frac{x+2}{x}$.

Đặt $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}(x+2)}{x}$.

Cách 1: Ta có $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{8}{x^2\sqrt{x^2+4}}$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.
BBT

x	0	2	3	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$4\sqrt{2}$	$+\infty$	

Câu 29. Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là $s = -t^3 + 6t^2 + 17t$, với $t(s)$ là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và $s(m)$ là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Trong khoảng thời gian 8 giây đầu tiên, vận tốc $v(m/s)$ của chất điểm đạt giá trị lớn nhất bằng?

Trả lời:.....

Lời giải

Có: $v = s' = -3t^2 + 12t + 17$

Ta đi tìm giá trị lớn nhất của $v = -3t^2 + 12t + 17$ trên Khoảng $(0; 8)$

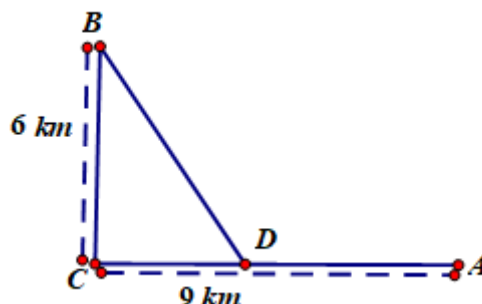
$v' = -6t + 12$, $v' = 0 \Rightarrow t = 2$

BBT:

t	0	2	8	
v'		+	0	-
V		$\nearrow 29$	$\searrow$	

Vậy vận tốc lớn nhất trong khoảng 8 giây đầu tiên là: $29m/s$.

- Câu 30.** Một công ty muốn làm một đường ống dẫn dầu từ một kho A ở trên bờ biển đến một vị trí B trên một hòn đảo. Hòn đảo cách bờ biển 6 km. Gọi C là điểm trên bờ sao cho BC vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến C là 9 km. Người ta cần xác định một vị trí D trên AC để lắp ống dẫn theo đường gấp khúc ADB . Tính khoảng cách AD để số tiền chi phí thấp nhất, biết rằng giá để lắp đặt mỗi km đường ống trên bờ là 100.000.000 đồng và dưới nước là 260.000.000 đồng.



Trả lời:.....

Lời giải

Đặt $AD = x$ km, $x > 0$. $CD = 9 - x$; $BD = \sqrt{36 + (9 - x)^2}$

Giá thành lắp đặt là: $100 \cdot 10^6 x + \sqrt{36 + (9 - x)^2} \cdot 260 \cdot 10^6 = 10^7 \left[10x + 26\sqrt{36 + (9 - x)^2} \right]$

Xét hàm số $f(x) = 10x + \sqrt{36 + (9 - x)^2} \cdot 26$ ($0 < x < 9$)

$$f'(x) = 10 - 26 \cdot \frac{9 - x}{\sqrt{36 + (9 - x)^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow 10\sqrt{36 + (9 - x)^2} - 26(9 - x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 9 \\ -576x^2 + 10368x - 43056 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{13}{2}$$

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $(0; 9)$ ta thấy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = \frac{13}{2}$.

Vậy $AD = 6.5$ km.

- Câu 31.** Người ta muốn xây một chiếc bể chứa nước có hình dạng là một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{500}{3} \text{ m}^3$. Biết đáy hồ là một hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng và giá thuê thợ xây là 100.000 đồng/m². Tìm kích thước của hồ để chi phí thuê nhân công ít nhất. Khi đó chi phí thuê nhân công là?

Trả lời:.....

Lời giải

Gọi x ($x > 0$) là chiều rộng của đáy suy ra thể tích bể nước bằng

$$V = 2x^2 h = \frac{500}{3} \Leftrightarrow h = \frac{250}{3x^2}$$

Diện tích xung quanh hồ và đáy bể là $S = 6x \cdot h + 2x^2 = \frac{500}{x} + 2x^2$ ($x > 0$)

Xét hàm số $f(x) = \frac{500}{x} + 2x^2$ với $x > 0$.

$$f'(x) = -\frac{500}{x^2} + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $(0; +\infty)$ ta thấy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = 5$

Vậy chi phí thuê nhân công là: $150 \cdot 100.000 = 15 \cdot 10^6$.

- Câu 32.** Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0,035x^2(15 - x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm (đơn vị miligam) cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất.

Trả lời:.....

Lời giải

Đk: $x \in [0; 15]$. (vì độ giảm huyết áp không thể là số âm)

$$G'(x) = 0,035[2x(15 - x) - x^2] = 0,105x(10 - x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 10 \end{cases}$$

Có

$$G(0) = 0; \quad G(10) = \frac{35}{2}; \quad G(15) = 0$$

Bảng biến thiên:

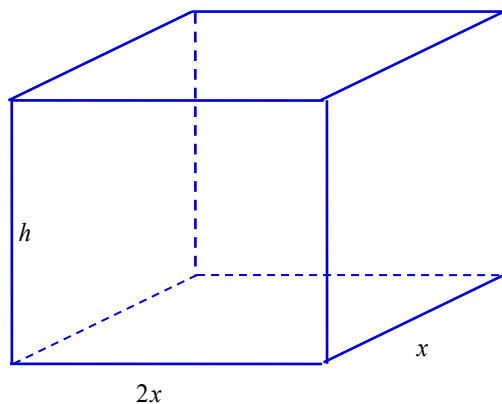
x	0	10	15	
$G'(x)$		+	0	-
$G(x)$	0	$\nearrow \frac{35}{2}$	$\searrow 0$	

Vậy huyết áp bệnh nhân giảm nhiều nhất khi tiêm cho bệnh nhân liều $x = 10$ miligam.

- Câu 33.** Người ta cần xây một bể chứa nước sản xuất dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng 200 m^3 . Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chi phí để xây bể là 300 nghìn đồng/ m^2 (chi phí được tính theo diện tích xây dựng, bao gồm diện tích đáy và diện tích xung quanh, không tính chiều dày của đáy và diện tích xung quanh, không tính chiều dày của đáy và thành bể). Hãy xác định chi phí thấp nhất để xây bể (làm tròn đến đơn vị triệu đồng).

Trả lời:.....

Lời giải



Gọi x là chiều rộng của đáy, h là chiều cao của đáy.

Thể tích của khối hộp chữ nhật không nắp bằng 200 m^3 nên ta có

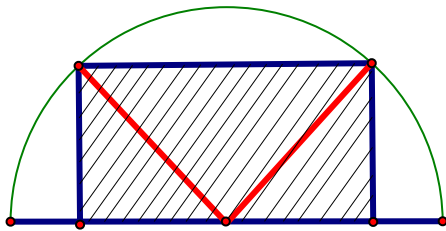
$$V = 2x \cdot x \cdot h = 200 \text{ cm}^3 \Rightarrow h = \frac{100}{x^2}$$

Diện tích bề nước là $S = 2x^2 + 6xh = 2x^2 + \frac{600}{x} = f(x)$

$$f'(x) = 4x - \frac{600}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{150} \quad \text{Suy ra} \quad \text{Min } f(x) = f(\sqrt[3]{150})$$

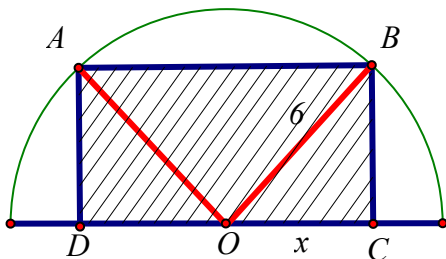
Chi phí thấp nhất để xây bể là $f(\sqrt[3]{150}) \cdot 300.000 \approx 51$ triệu đồng.

Câu 34. Tính diện tích lớn nhất $S_{\max}$ của một hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính $R = 6 \text{ cm}$ nếu một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của hình tròn mà hình chữ nhật đó nội tiếp.



Trả lời:.....

Lời giải



Gọi hình chữ nhật cần tính diện tích là $ABCD$ có $OC = x$ ($0 < x < 6$), $OB = 6$.

Khi đó diện tích của hình chữ nhật $ABCD$ là: $S = AB \cdot BC = 2x\sqrt{36 - x^2} = f(x)$

Diện tích lớn nhất của hình chữ nhật $ABCD$ là giá trị lớn nhất của $f(x) = 2x\sqrt{36 - x^2}$ trên $(0; 6)$

$$f'(x) = 2\sqrt{36 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{36 - x^2}} = \frac{-4x^2 + 72}{\sqrt{36 - x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3\sqrt{2} \in (0; 6) \\ x = -3\sqrt{2} \notin (0; 6) \end{cases}$$

BBT

x	0	$3\sqrt{2}$	6	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	0	36	0	

Ta có: $\max_{(0;6)} f(x) = 36$

Vậy $S_{\max} = 36 \text{ cm}^2$

Câu 35. Một sợi dây kim loại dài 60cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất uốn thành hình vuông cạnh a , đoạn dây thứ hai uốn thành đường tròn đường kính r . Để tổng diện tích của hình vuông

và hình tròn là nhỏ nhất thì tỉ số $\frac{a}{r}$ bằng?

Trả lời:.....

Lời giải

Độ dài đoạn dây bằng 60cm, cạnh hình vuông bằng a , bán kính đường tròn bằng r nên ta có:

$$4a + 2\pi r = 60 \Leftrightarrow r = \frac{30 - 2a}{\pi} \quad (1)$$

Gọi S là tổng diện tích của hình vuông và hình tròn, suy ra $S = a^2 + \pi r^2 \quad (2)$

Thay (1) vào (2) ta được $S = a^2 + \frac{(30 - 2a)^2}{\pi}$

$$\text{Khi đó } S' = 2a - \frac{4(30 - 2a)}{\pi} = \frac{(2\pi + 8)a - 120}{\pi}$$

$$\text{Cho } S' = 0 \Leftrightarrow a = \frac{60}{\pi + 4}$$

Bảng biến thiên.

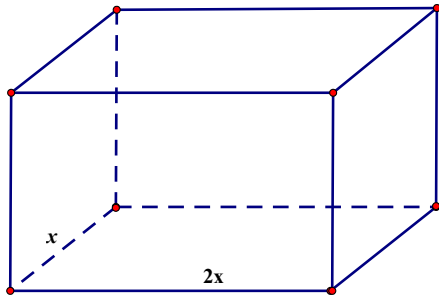
x	0	$\frac{60}{\pi + 4}$	60
S'	-	0	+
S			

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy S nhỏ nhất khi $a = \frac{60}{\pi + 4} \Rightarrow r = \frac{30}{\pi + 4}$. Vậy $\frac{a}{r} = 2$.

Câu 36. Ông A sử dụng hết 5 m^2 kính để làm bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

Trả lời:.....

Lời giải



Gọi độ dài các cạnh đáy của bể cá lần lượt là $x, 2x$, chiều cao của bể là h ($x, h > 0$).

Diện tích kính làm bể là

$$S = x.2x + 2xh + 2.2x.h = 2x.(x + 3h) = 5 \Rightarrow h = \frac{1}{3} \left(\frac{5}{2x} - x \right)$$

Dung tích của chiếc bể là

$$V = x.2x.h = \frac{2}{3}x^2 \left(\frac{5}{2x} - x \right) = \frac{5}{3}x - \frac{2}{3}x^3 = f(x)$$

$$f'(x) = \frac{5}{3} - 2x^2; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{5}{6}}$$

Lập bảng biến thiên của $f(x)$ ta tìm được $\max V = f\left(\sqrt{\frac{5}{6}}\right) \approx 1,01 \text{ (m}^3\text{)}$

Câu 37. Đợt nộp hồ sơ dự thi tốt nghiệp THPT quốc gia thường kéo dài 1 tháng (30 ngày). Nhà trường nhận thấy số lượng hồ sơ mà học sinh nộp tính theo ngày thứ t được cho công thức $S(t) = \frac{1}{50}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 36t - 270$ (hồ sơ) với $1 \leq t \leq 30$. Hỏi trong 30 ngày đó thì ngày thứ mấy có số lượng hồ sơ nộp nhiều nhất?

Trả lời:.....

Lời giải

$$S'(t) = \frac{3}{50}t^2 - 3t + 36; \quad S'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 20 \\ t = 30 \end{cases}$$

t	1	20	30	
$S'(t)$	+	0	-	0
$S(t)$	$\nearrow$ $S_{\max}$ $\searrow$			

Vậy ngày thứ 20 có số lượng hồ sơ nộp nhiều nhất.

Câu 38. Một viên đá được ném lên từ gốc tọa độ O trong mặt phẳng Oxy (Ox nằm ngang) chuyển động theo đường (quỹ đạo) có phương trình $y = -(1+m^2)x^2 + mx$. Tìm giá trị của tham số thực, dương m để viên đá rơi xuống tại điểm cách O xa nhất.

Trả lời:.....

Lời giải

$$-(1+m^2)x^2 + mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{m}{1+m^2} \end{cases}$$

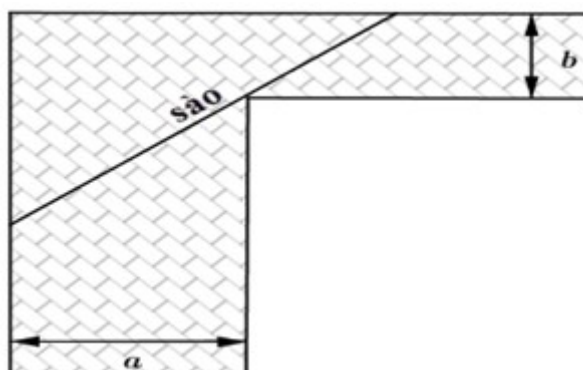
Viên đá rơi xuống tại điểm cách O xa nhất $\Leftrightarrow f(m) = \frac{m}{1+m^2}$ (với $m > 0$) lớn nhất.

Ta có $f'(m) = \frac{1 \cdot (1+m^2) - m \cdot 2m}{(1+m^2)^2} = \frac{-m^2+1}{(1+m^2)^2} \Rightarrow$ Ta có bảng biến thiên

m	0	1	$+\infty$
$f'(m)$	+	0	-
$f(m)$			

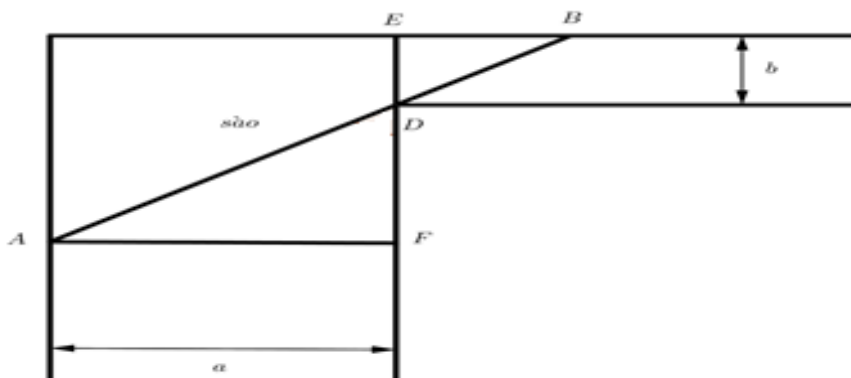
$\Rightarrow f(m)$ lớn nhất khi $m=1$.

Câu 39. Để chặn đường hành lang hình chữ L, người ta dùng một que sào thẳng dài đặt kín những điểm chạm với hành lang (như hình vẽ). Biết $a=24$ và $b=3$, hỏi cái sào thỏa mãn điều kiện trên có chiều dài tối thiểu là bao nhiêu?



Trả lời:.....

Lời giải



Đặt các điểm như hình vẽ.

Đặt $DF = x$, $x > 0$, ta có $\triangle ADF$ đồng dạng với $\triangle BED$ nên $\frac{EB}{ED} = \frac{AF}{DF} \Rightarrow EB = \frac{ab}{x}$.

Gọi l là chiều dài của que sào, ta có

$$l^2 = AB^2 = (x+b)^2 + \left(a + \frac{ab}{x}\right)^2 = f(x)$$

$$f'(x) = 2(x+b) - 2\frac{ab}{x^2} \left(a + \frac{ab}{x}\right) = 2(x+b) \left(1 - \frac{a^2b}{x^3}\right); f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{a^2b} = 12$$

Xét bảng sau:

x	0	12	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		1125	

Vậy giá trị nhỏ nhất của que sào là $l = \sqrt{1125} = 15\sqrt{5}$.

Câu 40. Một công ty sản xuất dụng cụ thể thao nhận được một đơn đặt hàng sản xuất 8000 quả bóng tennis. Công ty này sở hữu một số máy móc, mỗi máy có thể sản xuất 30 quả bóng trong một giờ. Chi phí thiết lập các máy này là 200 nghìn đồng cho mỗi máy. Khi được thiết lập, hoạt động sản xuất sẽ hoàn toàn diễn ra tự động dưới sự giám sát. Số tiền phải trả cho người giám sát là 192 nghìn đồng một giờ. Số máy móc công ty nên sử dụng là bao nhiêu để chi phí hoạt động là thấp nhất?

Trả lời:.....

Lời giải

♦ Gọi số máy móc công ty sử dụng để sản xuất là $x (x \in \mathbb{N}, x > 0)$.

Thời gian cần để sản xuất hết 8000 quả bóng là: $\frac{8000}{30x}$.

Tổng chi phí để sản xuất là: $P(x) = 200x + \frac{8000}{30x} \cdot 192 = 200x + \frac{51200}{x}$

Ta có: $P'(x) = 200 - \frac{51200}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 256 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ x = -16 (L) \end{cases}$

x	0	16	$+\infty$
$P'(x)$		-	+
$P(x)$		6400	

Vậy công ty nên sử dụng 16 máy để chi phí hoạt động là thấp nhất.